ISSN 1024-588X. Вісник Львівського університету. Серія фізична. 2016. Випуск 52. С. 17-27
Visnyk of the Lviv University. Series Physics. 2016. Issue 52. P. 17-27

УДК 538.941
PACS 31.15.xk, 67.25.-k, 67.30.hm

МЕТОД ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ У ПРОБЛЕМІ БОЗЕ-ПОЛЯРОНА

І. О. Вакарчук[1], Г. І. Паночко[2], В. С. Пастухов[1]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка,*
Кафедра теоретичної фізики
вул. Драгоманова, 12, 79005 Львів, Україна
e-mail: volodyapastukhov@gmail.com

[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка,*
Природничий коледж
вул. Тарнавського, 107, 79016 Львів, Україна
e-mail: gpanochko@gmail.com

В роботі за допомогою методу функціонального інтегрування запропонований непертурбативний спосіб розрахунку властивостей домішкових станів в бозе-системах. На прикладі домішки атома ^{3}He в рідкому гелії-4 показана добра узгодженість з експериментальними даними та результатами Монте Карло симуляцій.

Ключові слова: метод функціонального інтеграла, бозе-полярон, ефективна маса

1 Вступ

На сьогодні запропоновано чимало підходів, що дають змогу досліджувати домішкові стани у взаємодіючих бозе-системах. Серед найбільш відомих є ті, що грунтуються на Монте-Карло симуляціях [1–5], варіаційні [6–9] і ренормгрупові методи [11, 12] та розрахунки, де використовується діаграмна техніка [13–16].

Попри те, що динамічні властивості домішкових атомів в бозе-системах з'ясовані ще в роботі Ландау та Померанчука [17], проблема бозе-полярона є до тепер актуальною. Адже, задача про домішку в бозе-системах безпосередньо пов'язана з дослідженням ультрахолодних газів в пастках [19, 20] та експериментальною реалізацією самолокалізованих станів бозонів в бозе-конденсатах [18, 21, 22].

Здебільшого, теоретичні роботи, що стосуються бозе-поляронів, спрямовані на знаходження спектра домішкового атома: оцінку ефективної маси та загасання. При цьому вивчається поведінка домішок як в реальних сильноскорельованих бозе-системах, сумішах бозе-фермі газів, так і в дуже розріджених бозе-конденсатах.

© І. О. Вакарчук, Г. І. Паночко, В. С. Пастухов., 2016

Зокрема, в роботі [23] завдяки самоузгодженим розрахункам, обчислено ефективну масу домішкових атомів в рідкому гелії-4 у випадку різних концентрацій ^{3}He. Використовуючи різні представлення хвильової функції системи "домішка плюс бозе-середовище", в роботах [1, 2, 24, 25] отримано ефективну масу та енергію занурення атома ^{3}He у рідкому гелій-4, а в праці [3] оцінено ефективну масу іонів лужних та лужноземельних металів у бозе-рідині.

Поза тим, описуючи взаємодію між бозонами та домішковим атомом модельними потенціалами, досліджено характеристики домішок, що рухаються зі сталою швидкістю [26], доведено існування самолокалізованих домішкових станів [27], отримано власну енергію бозе-полярона в сильно розведених бозе-конденсатах, з використанням самоузгодженого T-матричного підходу [14], варіаційного методу [9], теорії збурень Брілюена -Вігнера [28].

Досліджуючи спектр домішки ми акцентуємо увагу на знаходженні власноенергетичної частини бозе-полярона, використовуючи формалізм мацубарівських функцій Гріна.

2 Модель і метод розрахунку

Щоб мати змогу скористатись стандартними методами теорії поля до вивчення домішкових станів в рідкому гелії-4 ми розглядаємо не одну частинку занурену в бозе-рідину, а сукупність спін-поляризованих невзаємодіючих ферміонів в границі зникаюче малої густини. Використовуючи метод функціонального інтеграла (інтеграла за траєкторіями) при скінченних температурах, запишемо евклідову дію системи

$$S = S_0 + S_B + S_{int}. \tag{1}$$

Перший доданок описує ферміонну підсистему

$$S_0 = \sum_P \{i\nu_p - \varepsilon_f(p) + \mu\}\psi_P^*\psi_P, \tag{2}$$

з одночастинковим спектром $\varepsilon_f(p) = \hbar^2\mathbf{p}^2/2m_f$ та хімічним потенціалом μ. Тут ψ_P^*, ψ_P комплекні твірні алгебри Грассмана, і уведено позначення для чотиривектора $P = (\nu_p, \mathbf{p})$ де ν_p — ферміонна мацубарівська частота.

Другий доданок формули (1) описує систему взаємодіючих бозе-частинок — рідкий гелій-4. Вигляд S_B може варіюватись і залежить від конкретно поставленої задачі. В цій роботі ми обираємо підхід Попова [29], де функціональний інтеграл рахується за змінними густина-фаза. Більш того, щоб спростити подальший розгляд ми, як і в роботі [30], попередньо відінтегрували дію за фазовими полями. Відповідна дія тепер записується виключно через флуктуації густини ρ_K

$$\begin{aligned} S_B = &- \frac{1}{2}\sum_K D_0(K)\rho_K\rho_{-K} \\ &- \frac{1}{3!\sqrt{\beta V}}\sum_{K_1+K_2+K_3=0} D_0(K_1,K_2,K_3)\rho_{K_1}\rho_{K_2}\rho_{K_3} - \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

Рис. 1: Діаграма, що описує власно-енергетичну частину $\Sigma(P)$. Суцільною лінією позначено точну одночастинкову функції Гріна, штрихованою — точний корелятор $\langle\rho_K\rho_{-K}\rangle$. Світлий кружечок позначає нульове наближення $\nu(k)$, а темний — точну $\Gamma(P,P-K)$ вершинні функції.

де K позначає $(\omega_k,\mathbf{k})$ і ω_k є бозонною мацубарівською частотою. Зауважимо, що всюди в підсумовуваннях за хвильовим вектором доданок з $\mathbf{k}=0$ відсутній.

Гауссова частина дії S_B містить в собі наближення Боголюбова:

$$D_0(K)=\frac{m\omega_k^2}{\rho\hbar^2k^2}+\frac{\hbar^2k^2}{4m\rho}+\nu(k), \tag{4}$$

а величина

$$D_0(K_1,K_2,K_3)=\frac{\hbar^2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}{4m\rho^2}\left(1-\frac{\omega_{k_1}\omega_{k_2}}{\varepsilon_{k_1}\varepsilon_{k_2}}\right)+\text{perm.} \tag{5}$$

описує найпростіші процеси розсіяння боголюбівських збуджень. Для мікроскопічних параметрів, що описують бозе-частинки і їх взаємодію, позначення є стандартними: m і ρ — маса і густина частинок, а $\nu(k)$ — фур'є-образ потенціалу парної взаємодії між ними. Також, введено позначення для об'єму періодичності V, оберненої температури $\beta=1/T$ системи, і вільночастинкового спектру ідеального бозе-газу $\varepsilon_k=\hbar^2k^2/2m$.

Останній доданок дії (1) описує взаємодію бозе-системи з домішковими станами ідеального фермі-газу

$$S_{int}=-\rho\tilde{\nu}(0)\sum_P\psi_P^*\psi_P-\frac{1}{\sqrt{\beta V}}\sum_{K,P}\tilde{\nu}(k)\rho_K\psi_P^*\psi_{P-K}, \tag{6}$$

де $\tilde{\nu}(k)$ – фур'є-образ ферміон-бозонної взаємодії. Причому, перший доданок у (6) можна об'єднати з S_0 зсуваючи хімічний потенціал $\tilde{\mu}=\mu-\rho\tilde{\nu}(0)$ ферміонів. Надалі, щоб дослідити спектр домішки, скористаємось методами квантової статистичної фізики [31] і запишемо одночастинкову температурну функцію Гріна ферміонів

$$G(P)=\langle\psi_P^*\psi_P\rangle=\left\{i\nu_p-\varepsilon_f(p)+\tilde{\mu}-\Sigma(P)\right\}^{-1}, \tag{7}$$

тут ламані дужки $\langle\ldots\rangle$ позначають статистичне усереднення з дією (1), а вся інформація про взаємодію домішки з бозе-системою міститься у власноенергетичній частині $\Sigma(P)$, для якої *точне* діаграмне представлення зображено на Рис. 1. Формально, це точне співвідношення, яке визначає одночастинкову функцію Гріна домішки, а наближення будуються для вершинної функції $\Gamma(P,P-K)$, яка в свою чергу, залежить від $G(P)$ та корелятора "густина-густина"$\langle\rho_K\rho_{-K}\rangle$. Така процедура, зазвичай, призводить до складної системи нелінійних інтегральних рівнянь, яку потрібно розв'язувати самоузгоджено. Технічно це надзвичайно складна задача, і навіть

розв'язуючи її чисельно для найпростіших систем, доводиться нехтувати поправками на вершинну функцію. В свою чергу, це призводить до невиконання співвідношень Уворда, і як наслідок, порушення законів збереження. Після аналітичного продовження у верхню комплексну півплощину $\Sigma(P)_{i\nu_p\to\nu+i0} = \Sigma_R(\nu,p) + i\Sigma_I(\nu,p)$, можна отримати енергію домішкового атома $\varepsilon_f^*(p) = \varepsilon_f(p) + \Sigma_R(\varepsilon_f^*(p),p) - \Sigma_R(0,0)$ з імпульсом $\mathbf{p}$. Тут вже враховано, що у випадку однієї домішки радіус фермі-сфери прямує до нуля, а отже різниця $\tilde{\mu} - \Sigma_R(0,0) \propto 1/V^{2/3}$ зникає в термодинамічній границі. Через розсіяння енергії домішки на бозе-частинках виникає уявна частина власної енергії, що визначає загасання спектра. В принципі, використовуючи умову унітарності [32], неважко отримати точне діаграмне співвідношення і для $\Sigma_I(\nu,p)$, в яке будуть входити спектральні густини домішки і елементарних збуджень бозе-системи, а також точна вершина. Повністю аналогічно до роботи [33], для $\Gamma(P,P-K)$ можна отримати точне співвідношення в границі розсіяння домішки на довгохвильових фононах $\Gamma(P,P) = \tilde{\nu}(0) + \partial\Sigma(P)/\partial\rho$. Із загальних фізичних міркувань зрозуміло, що домішковий атом буде розсіювати свою енергію на бозе-частинках лише тоді, коли буде рухатись зі швидкостями $\hbar p/m_f$ більшими за швидкість поширення звуку в системі c. Проте, така ситуація реалізується тільки в слабонеідеальному бозе-газі, де спектр добре описується формулою Боголюбова і є монотонно зростаючою функцією. В реальному гелії-4 ця гранична швидкіть при якій домішка ще не втрачає енергію є значно меншою [34], і пов'язана з можливістю народження збудження в ротонній ділянці спектра.

3 Власноенергетична частина

Уникаючи трудностей з повним чисельним розв'язком задачі про знаходження енергії домішки в бозе-рідині, ми повинні вдатись до певних спрощень. По-перше, припускаємо, що вся інформація про поведінку парного корелятора "густина-густина" нам відома. Зокрема, це функція, яка безпосередньо пов'язана з динамічним структурним фактором бозе-системи, який у випадку рідкого гелію-4 є добре виміряним [35]. По-друге, для одночастинкової функції Гріна оберемо простий анзац

$$G(P) = [i\nu_p - \varepsilon_f^*(p)]^{-1}, \tag{8}$$

перевагами якого є простота подальших розрахунків і можливість уникнути нефізичної ситуації, коли загасання нерухомої домішки не рівне нулеві [9, 14, 28]. Серед недоліків — не цілком коректне відтворення структури спектральної густини одночастинкових станів в околі максимума для чого необхідно було б враховувати переномування "хвильової функції" домішки $Z^{-1}(p) = 1 - \partial\Sigma_R(\varepsilon_f^*(p),p)/\partial\varepsilon_f^*(p)$, що в нашому випадку (коли нехтується уявною частиною в анзаці) призводить до порушення закону збереження числа частинок. По-третє, будемо розрахувати вершинну функцію, яка характеризує перенормовану бозон-домішкову взаємодію, за допомогою теорії збурень.

Після таких міркувань далі обговоримо послідовність обчислення власноенергетичної частини домішки, з точністю до другого порядку теорії збурень: $\Sigma(P) = \Sigma^{(1)}(P) + \Sigma^{(2)}(P)$.

3.1 Найпростіше наближення

В першому порядку теорії збурень для точної вершини у формулі на Рис. 1, нехтуємо всіма поправками, тобто, $\Gamma(P, P-K) = \tilde{\nu}(k)$. Далі, підставляючи (8), та використавши для бозонного корелятора фейнманівське наближення

$$\langle \rho_K \rho_{-K} \rangle = 2\rho\varepsilon_k/(\omega_k^2 + E_k^2) \tag{9}$$

, отримуємо при низьких температурах вираз:

$$\Sigma^{(1)}(P) = -\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \rho \frac{\tilde{\nu}^2(k)}{\alpha_k} \frac{1}{E_k + \varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{p}) - i\nu_p}, \tag{10}$$

, тут $E_k = \varepsilon_k \alpha_k$, де $1/\alpha_k = S_k$ — статичний структурний фактор бозе-системи. Зауважимо, що в границі звичайної теорії збурень $\varepsilon_f^*(p) \to \varepsilon_f(p)$ неодноразово відтворювався різними методами [24].

3.2 Другий порядок теорії збурень

Для розрахунку наступного наближення до власноенергетичної частини домішкової функції Гріна необхідно врахувати перші поправки до вершинної функції $\Gamma(P, P-K)$ (див. Рис. 2). Нагадуємо, що в цій теоретико-польовій скелетній техніці

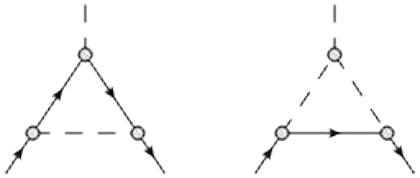

Рис. 2: Діаграми, що визначають першу поправку до вершини $\Gamma(P, P-K)$. Тут світлим кружечком, з якого відходять три штриховані лінії, позначено $D_0(K_1, K_2, K_3)$.

не потрібно враховувати діаграм, типу власноенергетичних вставок. Зрозуміло, що для реалізації описаної вище програми розрахунків необхідно замінити затравочну бозонну вершину $D_0(K_1, K_2, K_3)$ на точну $D(K_1, K_2, K_3)$. Але ця величина погано міряється (якщо взагалі міряється) і для неї можна порахувати лише довгохвильову асимптотику $D(0,0,0) = \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{mc^2}{\rho}$, та поведінку на великих значеннях чотиривекторів (де вона збігається з (5)), чого не є достатньо для коректного визначення $\Sigma^{(2)}(P)$. Тому заміна $D(K_1, K_2, K_3) \to D_0(K_1, K_2, K_3)$ – це чергове спрощення, очінити точність якого важко. Не зупиняючись на деталях розрахунків, після підстановки діаграм на

Рис.2 у діаграму на Рис.1, для другої поправки до $\Sigma(P)$ ми отримали при $T=0$:

$$\Sigma^{(2)}(P)=\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{s}}\rho\frac{\tilde{\nu}(k)\tilde{\nu}(s)\tilde{\nu}(|\mathbf{k}+\mathbf{s}|)}{\alpha_k\alpha_s\alpha_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}}\frac{1}{E_s+\varepsilon_f^*(\mathbf{s}-\mathbf{p})-i\nu_p}\frac{1}{E_k+\varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{p})-i\nu_p}$$
$$-\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{s}}\rho^2\frac{\tilde{\nu}^2(k)\tilde{\nu}^2(s)}{\alpha_k\alpha_s}\frac{1}{E_k+\varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{p})-i\nu_p}\frac{1}{E_s+\varepsilon_f^*(\mathbf{s}+\mathbf{p})-i\nu_p}$$
$$\times\frac{1}{E_k+E_s+\varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{s}+\mathbf{p})-i\nu_p}$$
$$-\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{s}}\rho\frac{\tilde{\nu}(k)\tilde{\nu}(s)\tilde{\nu}(|\mathbf{k}+\mathbf{s}|)}{\alpha_k\alpha_s\alpha_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}}\frac{D_+(\mathbf{k},\mathbf{s})}{E_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}+\varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{s}+\mathbf{p})-i\nu_p}\frac{1}{E_k+\varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{p})-i\nu_p}$$
$$\times\frac{1}{E_k+E_s+\varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{s}+\mathbf{p})-i\nu_p}$$
$$+\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{s}}\rho\frac{\tilde{\nu}(k)\tilde{\nu}(s)\tilde{\nu}(|\mathbf{k}+\mathbf{s}|)}{\alpha_k\alpha_s\alpha_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}}\frac{D_-(\mathbf{k},\mathbf{s})}{E_k+E_s+E_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}}\frac{1}{E_k+\varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{p})-i\nu_p}$$
$$\times\frac{1}{E_k+E_s+\varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{s}+\mathbf{p})-i\nu_p},\quad(11)$$

де симетричні функції своїх аргументів $D_\pm(\mathbf{k},\mathbf{s})$:

$$D_\pm(\mathbf{k},\mathbf{s})=\frac{\hbar^2}{2m}\left[\mathbf{k}(\mathbf{k}+\mathbf{s})(\alpha_k-1)(\alpha_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}\pm1)+\mathbf{s}(\mathbf{s}+\mathbf{k})(\alpha_s-1)(\alpha_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}\pm1)\right.$$
$$\left.\pm\mathbf{ks}(\alpha_k-1)(\alpha_s-1)\right].$$

Навіть після стількох спрощень, розрахунок $\Sigma(P)$ не є простою чисельною задачею, тому вважаючи, що фур'є-образ потенціалу взаємодії домішки з бозе-частинками є швидкоспадною функцією хвильового вектора, виконаємо таку підстановку: $\varepsilon_f^*(p)=\hbar^2p^2/2m_f^*$. Де ефективна маса домішкового атома m_f^* з врахуванням (8) рахується самозгодженно.

4 Чисельні рахунки

Найбільш природнім для практичної реалізації прикладом нашої системи, є домішка ^{3}He (чи навіть ^{6}He) в надплинному ^{4}He, хоча й отримані формули можна застосовувати для опису сучасних експериментів з холодними газами. Для цього достатньо замінити у формулах (10), (11) E_k на боголюбівський спектр. Проте, зважаючи на слабкість міжчастинкової взаємодії в таких система, для їх задовільного опису достатньо і звичайної теорії збурень. Тому природньо протестувати наш самоузгоджений розрахунок на дослідженні домішкових станів у сильноскорельованій бозе-рідині. Зрозуміло, що отримані результати залежатимуть лише від форми бозон-домішкового потенціалу $\tilde{\nu}(k)$. В адіабатичному наближенні енергію взаємодії між атомами ^{4}He та ^{3}He можна вважати рівною потенціальній енергії двох атомів ^{4}He. Більш того, зважаючи на структуру зовнішньої електронної оболонки, наші

розрахунки можна поширити вибираючи в якості домішки атоми рідкоземельних елементів.

Найпростіший спосіб вибору $\tilde{\nu}(k)$ полягає в порівняння боголюбівського та фейнманівського спектрів (тут $\rho = 0.02185\,A^{-3}$ — рівноважна густина рідкого ^{4}He):

$$\tilde{\nu}(k) = \varepsilon_k(1/S_k^2 - 1)/2\rho. \tag{12}$$

Така процедура дозволяє непогано описати термодинамічні та структурні функції рідкого гелію-4 у всій області температур [36], включно з околом критичної точки. Послідовність чисельного розрахунку така: спочатку розкладаючи в ряд різницю $\Sigma_R(\varepsilon_f^*(p), p) - \Sigma_R(0,0)$ при малих хвильових векторах ми знаходимо ефективну масу домішки, а далі отриманий результат підставляється у формулу $\mu = \rho\tilde{\nu}(0) + \Sigma_R(0,0)$ для розрахунку енергії занурення. Результати представленні на Рис. 3. Для порівняння, ми також навели криві побудовані в першому та другому порядках теорії збурень.

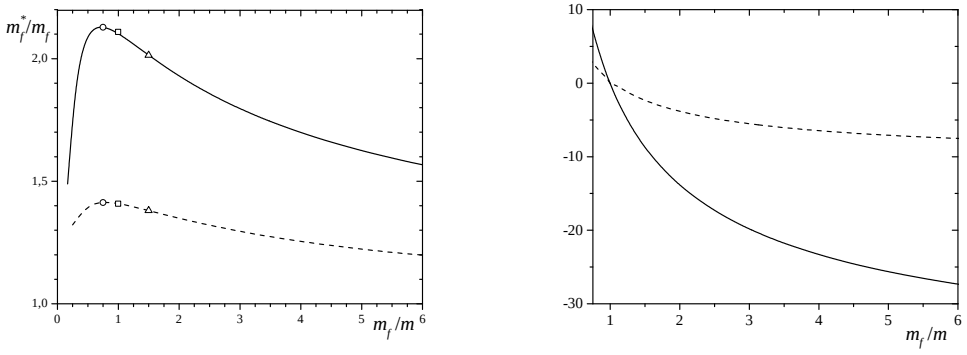

Рис. 3: Ліворуч: Ефективна маса домішки m_f^* в рідкому гелії-4, як функція відношення m_f/m. Праворуч: Енергія занурення $\mu(m_f/m) - \mu(1)$ (в кельвінах) домішкового атома. Штрихована лінія — перший, а суцільна — другий порядки теорії збурень.

Отриману у першому порядку теорії збурень ефективну масу ^{4}He $m_f^*(1)/m_f = 1.41$ можна порівняти з результатом 1.58 роботи [37], де також використана самоузгоджена процедура обчислень у схожому наближенні. Цікаво, що пораховане нами у другому порядку теорії збурень значення ефективної маси для ^{3}He $m_f^*(3/4)/m_f = 2.13$ добре узгоджується з екпериментальними даними 2.18, 2.15 [38,39], результатами інших теоретичних досліджень 2.09 [23], дифузійного 2.20(5) [2] та варіаційного 2.06–2.07 [1] методу Монте Карло.

Висновки

В цій роботі досліджено властивості бозе-полярона на прикладі домішки ^{3}He в надплинному гелії-4, з використанням методу функціонального інтегрування. Використовуючи самоузгодженну процедуру розрахунку з точністю до другого порядку

теорії збурень для власноенергеточної частини одночастинкової функції Гріна домішки, знайдено ефективну масу і енергію занурення. Показано, що отримані результати для власноенергетичної частини можна застосувати до домішкових атомів рідкоземельних елементів. А запропонований підхід може бути використаний для аналізу низькорозмірних систем.

Подяки

Автори висловлюють подяку доктору фіз.-мат. наук, А. А. Ровенчакові та канд.фіз.-мат. наук, О. І. Григорчакові за обговорення результатів. Ця робота виконана в межах теми ФФ-30Ф (No. 0116U001539) Міністерства освіти і науки України.

Список використаної літератури

1. *Galli D. E.* Variational calculation of excited-state properties of a ^{3}He impurity in superfluid ^{4}He/ D. E. Galli, G. L. Masserini, and L. Reatto// Phys. Rev. B – 1999 – Vol. 60, № 5. – P. 3476–3484.
2. *Boronat J.* Quantum Monte Carlo study of static properties of one ^{3}He atom in superfluid ^{4}He/ J. Boronat and J. Casulleras// Phys. Rev. B – 1999 – Vol. 59, № 13. – P. 8844–8851.
3. *Rossi M.* Alkali and alkali-earth ions in ^{4}He systems/ M. Rossi, M. Verona, D. E. Galli, and L. Reatto// Phys. Rev. B – 2004 – Vol. 69, № 21. – P. 212510 (4 p).
4. *Vlietinck J.* Diagrammatic Monte Carlo study of the acoustic and the Bose–Einstein condensate polaron/ J. Vlietinck, W. Casteels, K. V. Houcke, J. Tempere, J. Ryckebusch and J. T. Devreese// New J. Phys. – 2015 – Vol. 17, № 3. – P. 033023.
5. *Pena L. A.* Bose polaron problem: Effect of mass imbalance on binding energy/ L. A. Pena, S. Giorgini// Phys. Rev. A – 2016 – Vol. 94, №. 6, – P. 063640 (4 p).
6. *Campbel C. E.* Many-boson dynamic correlations/ C. E. Campbell and E. Krotscheck// Int. J. Mod. Phys. B – 2008 – Vol. 17, № 25 - 26. – P. 4296–4302.
7. *Tempere J.* Feynman path-integral treatment of the BEC-impurity polaron/ J. Tempere, W. Casteels, M. K. Oberthaler, S. Knoop, E. Timmermans, and J. T. Devreese// Phys. Rev. B – 2009 – Vol. 80, – P. 184504; Phys. Rev. B – 2013 – Vol. 87, №. 9, – P. 099903(E) .
8. *Novikov A.* Variational approach to the ground state of an impurity in a Bose-Einstein condensate/ A. Novikov and M. Ovchinnikov// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2010 – Vol. 43, № 10. – P. 105301.
9. *Li W.* Variational study of polarons in Bose-Einstein condensates/ W. Li and S. Das Sarma// Phys. Rev. A – 2014 – Vol. 90, № 1. – P. 013618 (5 p).
10. *Kain B.* Generalized Hartree-Fock-Bogoliubov description of the Fröhlich polaron/B. Kain and H. Y. Ling//Phys. Rev. A – 2016 Vol. 94, № 1. – P. 013621 (12 p).
11. *Grusdt F.* Renormalization group approach to the Fröhlich polaron model: application to impurity-BEC problem/ F. Grusdt, Y. E. Shchadilova, A. N. Rubtsov and E. Demler// Sci. Rep. – 2015 – Vol. 5, – P. 12124

12. *Grusdt F.* All-coupling theory for the Fröhlich polaron/ F. Grusdt// Phys. Rev. B – 2016 – Vol. 93, – P. 144302 (8 p).
13. *Novikov A.* A diagrammatic calculation of the energy spectrum of quantum impurity in degenerate Bose–Einstein condensate/A. Novikov and M. Ovchinnikov//J. Phys. A: Math. Theor. – 2009 – Vol. 42, – P. 135301 (16 p).
14. *Rath S. P.* Field-theoretical study of the Bose polaron/S. P. Rath and R. Schmidt//Phys. Rev. A – 2013 – Vol. 88, – P. 053632 (16 p).
15. *Christensen R. S.* Quasiparticle Properties of a Mobile Impurity in a Bose-Einstein Condensate/ R. S. Christensen, J. Levinsen, and G. M. Bruun// Phys. Rev. Lett. – 2015 – Vol. 115, № 16, – P. 160401 (5 p).
16. *Tkach M. V.* Renormalized energy of ground and first excited state of Fröhlich polaron in the range of weak coupling/M. V. Tkach , Ju. O. Seti, O. M. Voitsekhivska, O. Yu. Pytiuk //Condens. Matter Phys. – 2015 – Vol. 18, №. 3, – P. 33707 (12 p).
17. *Landau L. D.* Motion of Extraneous Particles in Helium II/ L. D. Landau and I. Ya. Pomeranchuk// DAN SSSR – 1948 – Vol. 59, – P. 669.
18. *Anderson M. H.* Observation of Bose-Einstain condensation in a dilute atomic vapor/ M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews et al.// Science. – 1995 – Vol. 269, №. 5221, – P. 198-201.
19. *Schmid S.* Dynamics of a Cold Trapped Ion in a Bose-Einstein Condensate/S. Schmid, A. Härter, and J. H. Denschlag//Phys. Rev. Lett. – 2010 – Vol. 105, №. 13, – P. 133202 (4 p).
20. *Spethmann N.* Dynamics of Single Neutral Impurity Atoms Immersed in an Ultracold Gas/ N. Spethmann, F. Kindermann, S. John, C. Weber, D. Meschede, and A. Widera// Phys. Rev. Lett. – 2012 – Vol. 109, №. 23, – P. 235301 (5 p).
21. *Hu M. G.* Bose Polarons in the Strongly Interacting Regime/ M. G. Hu, J. Van de Graaff, D. Kedar, J. Michael and Kedar, Dhruv and Corson, P, John and Cornell, A. Eric and Jin, S. Deborah // Phys. Rev. Lett. – 2016 – Vol. 117, №. 5, – P. 055301 (6 p).
22. *Jorgenzen N. B.* Observation of Attractive and Repulsive Polarons in a Bose-Einstein Condensate/ N. B. Jorgenzen, L. Wacker, K. T. Skalmstang et al.// Phys. Rev. Lett. – 2016 – Vol. 117, №. 5 – P. 055302 (6 p).
23. *Krotscheck E.* Concentration Dependence of the Effective Mass of ^{3}He Atoms in ^{3}He–^{4}He Mixtures/ E. Krotscheck, M. Saarela, K. Schörkhuber, and R. Zillich// Phys. Rev. Lett. – 1998 – Vol. 80, №. 21, – P. 4709–4712.
24. *Polls A.* A microscopic look at liquid helium: the ^{3}He impurity case/ A. Polls, A. Fabrocini// J. Mod. Phys. B – 2001 –Vol. 15, №. 10-11, P. 1575–1590.
25. *Вакарчук І. О.* Домішкові стани в багатобозонній системі/ І. О. Вакарчук, Г. І. Паночко// Журн. Фіз. Досл. – 2012 – Vol. 16, №. 4, – P. 4601 (8 с).
26. *Astrakharchik G. E.* Motion of a heavy impurity through a Bose-Einstein condensate/ G. E. Astrakharchik and L. P. Pitaevskii// Phys. Rev. A – 2004 – Vol. 70, №. 1, – P. 013608 (5 p).
27. *Cucchietti F. M.* Strong-Coupling Polarons in Dilute Gas Bose-Einstein Condensates/ F. M. Cucchietti, E. Timmermans// Phys. Rev. Lett. – 2006 – Vol. 96, №. 21, – P. 210401 (4 p).
28. *Panochko G.* Behavior of the impurity athom in a weakly-interacting Bose gas /G. Panochko, V. Pastukhov, I. Vakarchuk// Condens. Matter Phys. , in press.

29. *Popov V. N.* Functional Integrals and Collective Excitations/ V. N. Popov// Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
30. *Pastukhov V.* Damping of Bogoliubov excitations at finite temperatures/ V. Pastukhov// J. Phys. A: Math. Theor. – 2015 – Vol. 48, №. 40, – P. 405002.
31. *Абрикосов А. А.* Методы квантовой теории поля в статистической физике/ А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский// М., Физматгиз, 1962.
32. *Ginzburg S. L.* Unitarity conditions for a many-body system at zero temperature/ S. L. Ginzburg, S. V. Maleev // Theoret. and Math. Phys. – 1970 – Vol. 3, №. 3, – P. 616–625.
33. *Pastukhov V.* Infrared behavior of dipolar bose systems at low temperatures/ V. Pastukhov// arXiv: 1606.03047v2[cond-matt.quant-gas], 18 Oct 2016; J. Low Temp. Phys. in press
34. *Saarela M.* Fermi Liquid Properties of 3He-4He Mixtures/ M. Saarela, E. Krotscheck, J. Paaso, K. Schorkhuber, and R. Zillich// J. Low Temp. Phys. – 1998 – Vol. 113, №. 5, – P. 993-998.
35. *Blagoveshchenskii N. M.* Structure of the excitation spectrum of liquid ^{4} He/ N. M. Blagoveshchenskii, I. V. Bogoyavlenskii, L. V. Karnatsevich, Zh. A. Kozlov, V. G. Kolobrodov, V. B. Priezzhev, A. V. Puchkov, A. N. Skomorokhov, and V. S. Yarunin// Phys. Rev. B – 1994 – Vol. 50, №. 22, – P. 16550–16565.
36. *Вакарчук І. О.* Ефективна маса атома 4He в надплинній і нормальній фазах/ І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак, В. С. Пастухов, Р. О. Притула// Укр. фіз. журн. – 2016 – Vol. 61, №. 1, – P. 31–39.
37. *Rovenchak A. A.* Effective mass of atom and the excitation spectrum in liquid helium-4 at T = 0 K/ A. A. Rovenchak// Low Temp. Phys. – 2003 – Vol. 29, №. 2, – P. 105. [Fiz. Nizk. Temp. – 2003 – Vol. 29, P. 145].
38. *Yorozu S.* Isochoric pressure and ^{3}He quasiparticle effective mass in a $^3-^4$He mixture under pressure /S. Yorozu, H. Fukuyama, and H. Ishimoto// Phys. Rev. B – 1993 – Vol. 48, №.13, – P. 9660–9663.
39. *Simons R.* Specific heat of 3He/4He mixtures at low temperatures and high 3He concentrations/ R. Simons, R. M. Mueller// Czech. J. Phys. – 1996 – Vol. 46, №. 1, – P. 201–202.

Стаття надійшла до редакції 02.02.2017
прийнята до друку 27.06.2017

PATH-INTEGRALS METHOD IN THE BOSE-POLARON PROBLEM

I. O. Vakarchuk[1], G. I. Panochko[2], V. S. Pastukhov[1]

[1] *Ivan Franko National University of Lviv*
Drahomanov St., 12, 79005 Lviv, Ukraine
e-mail: volodyapastukhov@gmail.com

[2] *College of Natural Sciences Ivan Franko Lviv National University*
Tarnavskyj St., 107, 79016 Lviv, Ukraine
e-mail: gpanochko@gmail.com

In this paper we proposed the path-integral based non-pertubative method for the calculation of the impurity states in Bose systems. On the example of a ^{3} He impurity atom immersed in the liquid helium-4 a good consistency with experimental data and results of Monte Carlo simulations is shown.

Key words: path-integrals method, Bose polaron, effective mass

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ПРОБЛЕМЕ БОЗЕ-ПОЛЯРОНА

И. О. Вакарчук[1], Г. И. Паночко[2], В. С. Пастухов[1]

[1] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
Кафедра теоретической физики
ул. Драгоманова 12, 79005 Львов, Украина
e-mail: volodyapastukhov@gmail.com

[2] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
Колледж естественных наук
ул. Тарнавского 107, 79008 Львов, Украина
e-mail: gpanochko@gmail.com

В работе с помощью метода функционального интегрирования предложенный непертурбативний способ расчета свойств примесных состояний в бозе-системах. На примере примеси атома ^{3}He в жидком гелии-4 показана хорошая согласованность с экспериментальными данными и результатами Монте-Карло симуляций.

Ключевые слова: метод функционального интегрирования, бозе-полярон, эффективная масса