

Розділ 17

Квазістатичні явища

17.1. Умови квазістатичності та рівняння квазістатичних явищ

Квазістаціонарне наближення відповідає тому, що густину струму зміщення $\partial\mathbf{D}/\partial t$ (з точністю до сталого множника) вважають нехтовно малою порівняно з густиною струму провідності \mathbf{j}_0 . Рівняння Максвелла у цьому наближенні мають вигляд:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_0, \quad (17.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (17.1b)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (17.1c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0. \quad (17.1d)$$

Щоб оцінити застосовність такого наближення, можна розглянути гармонічну зміну полів у часі з частотою ω . Нехай електричне поле $\mathbf{E} \sim e^{-i\omega t}$, тоді струм зміщення буде

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} = -\frac{i\varepsilon\omega}{4\pi} \mathbf{E}.$$

Порівнюючи його величину з величиною струму провідності, який за законом Ома дорівнює $\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}$, де σ — провідність, матимемо

умову квазікласичного наближення:

$$\omega \ll 4\pi\sigma, \quad (17.2)$$

де враховано, що діелектрична проникність ε зазвичай є величиною порядку одиниці. Тут і далі вважаємо, що ε , σ , а також магнітна проникність μ не залежать від координат і часу.

За умов високої провідності σ густиною вільних зарядів у провіднику можна знехтувати, $\rho_0 \simeq 0$. Враховуючи зв'язки $\mathbf{V} = \mu\mathbf{H}$ та $\mathbf{j}_0 = \sigma\mathbf{E}$, зробимо нескладні перетворення:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{E}}_{\simeq 0} - \Delta \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{j}_0}{\partial t} = \frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial(\sigma\mathbf{E})}{\partial t} \end{aligned}$$

й аналогічно

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}_0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot}(\sigma\mathbf{E}), \\ \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{H}}_{\simeq 0} - \Delta \mathbf{H} &= -\frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Остаточно отримаємо пару ідентичних рівнянь для векторів \mathbf{E} й \mathbf{H} :

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (17.3)$$

Розглянутий підхід є спрощенням так званої *дарвінівської*¹ моделі квазістатички, в якій нехтують лише непотенціальною частиною струму зміщення.

17.2. Скін-ефект

Явище протікання змінного струму переважно в приповерхневому шарі провідника, яке називають скін-ефектом, експериментально

¹Чарлз Галтон ДАРВІН (Sir Charles Galton Darwin, 18.XII.1887–31.XII.1962), англійський фізик-теоретик і математик.

відкрив у 1885–86 році Г'юґс², підтвердивши передбачення Лемба³ (1883) і Гевісайда (1885).

Розглянемо поширення змінного струму в провіднику (рис. 17.1). Струм I породжує змінне магнітне \mathbf{B} поле всередині провідника, яке, своєю чергою, є джерелом електричного поля \mathbf{E} . Це електричне поле зорієнтоване так, що під його впливом заряди рухаються швидше біля поверхні провідника і навпаки — гальмуються ближче до його середини.

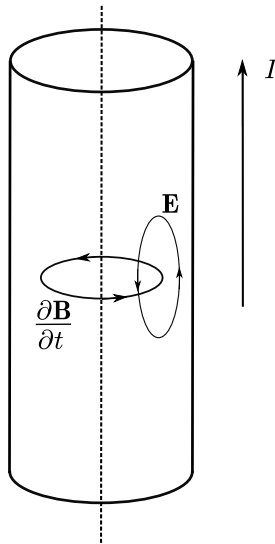


Рис. 17.1. Напрямки векторів для пояснення скін-ефекту.

Нехай часові залежності, що визначають змінне поле, мають вигляд $\mathbf{E} \sim e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H} \sim e^{-i\omega t}$. Для спрощення розглянемо модель, у якій провідник займає весь півпростір $z > 0$ (див. рис. 17.2).

У рівнянні

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

²Девід Едвард Г'юґс (David Edward HUGHES, 16.V.1831–22.I.1900), британсько-американський винахідник.

³Горацій ЛЕМБ (Sir Horace LAMB, 27.XI.1849–04.XII.1934), англійський математик і фізик.

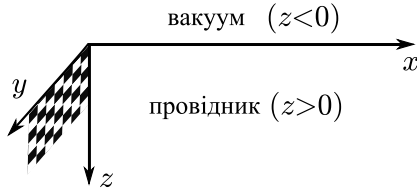


Рис. 17.2. Скін-ефект у випадку безмежного провідника.

тоді можна розглядати лише залежність від однієї просторової змінної:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = -\frac{4\pi i \omega \mu \sigma}{c^2} \mathbf{E}, \quad (17.4)$$

де враховано часову залежність електричного поля, $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E}$.

Розв'язок рівняння має вигляд

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{pz}, \quad \text{де } p = \pm \frac{i}{c} \sqrt{i 4\pi \mu \omega \sigma}. \quad (17.5)$$

Виберемо $\text{Re } p < 0$, що відповідає зменшенню поля із заглибленням всередину провідника:

$$p = \frac{i - 1}{\delta}, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi \mu \omega \sigma}}. \quad (17.6)$$

Напруженість електричного поля, таким чином, буде

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}. \quad (17.7)$$

Як бачимо, $\delta \sim 1/\sqrt{\omega}$ відповідає відстані, на якій величина електричного поля зменшується в e разів, тобто її можна проінтерпретувати як глибину проникнення поля — а, отже, й струму — в провідник.

Щоб оцінити порядок величин, розгляньмо мідний провідник, для якого за нормальних температур $\sigma_{\text{Cu}} \simeq 5 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$. Зважаючи на те, що мідь — діамagnetик, з доброю точністю $\mu_{\text{Cu}} \simeq 1$. Простий розрахунок за формулою (17.6) дає для частоти $\nu = 50 \text{ Гц}$ (пам'ятаймо, що $\omega = 2\pi\nu$) глибину $\delta \simeq 0.9 \text{ см}$. Якщо частота зростає до

1 МГц, то глибина зменшується до $\delta \simeq 0.07$ мм, а для 10 МГц — до $\delta \simeq 0.02$ мм.

Напруженість магнітного поля знайдемо за допомогою співвідношення

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{c} i\omega \mathbf{H}, \quad (17.8)$$

тобто

$$\mathbf{H} = -i \frac{c}{\mu\omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (17.9)$$

Вважаючи електричне поле паралельним до поверхні провідника вздовж осі Ox , $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$, отримаємо магнітне поле $\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$ або для амплітуд:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{c}{\mu\omega\delta} (1 + i) [\mathbf{k}, \mathbf{E}_0], \quad (17.10)$$

де \mathbf{k} — орт осі Oz декартової системи координат. Зв'язок між величинами електричного і магнітного полів на поверхні провідника ($z = 0$) матиме вигляд:

$$E_0 = (1 - i) \frac{\omega\delta}{2c} B_0 = \zeta B_0, \quad (17.11)$$

де коефіцієнт пропорційності

$$\zeta = (1 - i) \frac{\omega\delta}{2c} = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \quad (17.12)$$

називають *поверхневим імпедансом* металу⁴.

Далі розрахуємо опір провідника радіусом a (див. рис. 17.3). Зробимо заміну $z = a - r$ у виразі для напруженості електричного поля (17.7):

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{(a-r)}{\delta}} e^{i\left(\frac{a-r}{\delta} - \omega t\right)} = \mathbf{E}_0 e^{(i-1)\frac{a-r}{\delta}} e^{-i\omega t}. \quad (17.13)$$

⁴Для цієї величини, що має розмірність опору, також використовують означення $Z = \frac{E_x(0)}{\int_0^\infty j_x(z) dz}$, де $j_x(z)$ — x -компонента густини струму, що зменшується

із зануренням вглиб провідника ($z \rightarrow \infty$). Як нескладно побачити, Z і ζ відрізняються лише сталим множником $4\pi/c$.

Враховуючи, що $\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}$, знайдемо струм, що тече через переріз провідника:

$$I = \int (\sigma \mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 2\pi\sigma \int_0^a Er dr = 2\pi\sigma e^{-i\omega t} E_0 \int_0^a e^{(1-i)\frac{r-a}{\delta}} r dr. \quad (17.14)$$

Цей інтеграл можна розрахувати, використовуючи диференціювання за параметром $\gamma = (1-i)/\delta$:

$$\int_0^a e^{\gamma r} r dr = \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_0^a e^{\gamma r} dr = \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{e^{\gamma a} - 1}{\gamma} = e^{\gamma a} \left(\frac{a}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \right) + \frac{1}{\gamma^2}.$$

Знехтувавши внесками, пропорційними до малої величини $(\delta/a)^2$ (тобто відкинувши доданки, що містять $1/\gamma^2$), отримаємо:

$$I \simeq (1+i)\pi\sigma\delta a E_0 e^{-i\omega t}. \quad (17.15)$$

Щоб розрахувати середнє значення $\langle I^2 \rangle$, потрібно, як і в розділі 16.3, розглянути лише дійсну частину $\text{Re } I$. У результаті матимемо просто:

$$\langle I^2 \rangle = (\pi\sigma\delta a E_0)^2. \quad (17.16)$$

Кількість теплоти, що виділяється у провіднику зі струмом одиничної довжини, за законом Джоуля–Ленца⁵ дорівнює

$$\frac{dQ}{dt} = RI^2 = RI \cdot I = U \cdot I = \int (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) \cdot \int (\sigma \mathbf{E}, d\mathbf{S}). \quad (17.17)$$

Розглядаючи провідник одиничної довжини, для середнього значення запишемо:

$$\left\langle \frac{dQ}{dt} \right\rangle = R \langle I^2 \rangle = \int \sigma \langle E^2 \rangle dS. \quad (17.18)$$

⁵ Джеймс Прескотт Джоуль (James Prescott Joule, 24.XII.1818–11.X.1889), англійський фізик і пивовар; Еміль Ленц (Эмилий Ленц, Heinrich Friedrich Emil Lenz, 12.II.1804–10.II.1865), російський фізик.

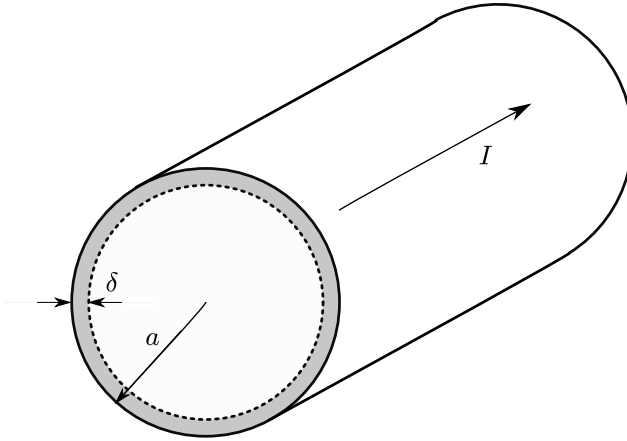


Рис. 17.3. Скін-ефект у циліндричному провіднику. Поле проникає всередину на малу глибину $\delta \ll a$.

Інтегрування за кутом і радіальною координатою проведемо так само, як вище для розрахунку струму, що дасть

$$2\pi\sigma E_0 \int_0^a e^{2(1-i)\frac{r-a}{\delta}} r dr \simeq \frac{1+i}{2} \pi\sigma\delta a E_0^2. \quad (17.19)$$

Зберігаючи лише дійсну частину, після усереднення за часом матимемо:

$$R\langle I^2 \rangle = R(\pi\sigma\delta a E_0)^2 = \int \sigma \langle E^2 \rangle dS = \frac{1}{2} \pi\sigma\delta a E_0^2. \quad (17.20)$$

Таким чином, опір

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma\delta a} \sim \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\sigma}}, \quad (17.21)$$

причому легко зауважити, що його можна подати у вигляді

$$R = \frac{1}{\sigma S_{\text{skin}}}, \quad (17.22)$$

де $S_{\text{skin}} = 2\pi a \cdot \delta$ — площа кільця, по якому тече струм (див. рис. 17.3). **Скінова провідність** буде

$$\Sigma = \frac{1}{R} \sim \sqrt{\sigma} \quad (17.23)$$

Ця залежність відповідає так званому **нормальному скін-ефектові**.

Із (17.6) бачимо, що глибина δ проникнення поля в провідник за великих частот ω може стати дуже малою, навіть сумірною з довжиною вільного пробігу l носіїв заряду — електронів. Щоб оцінити реалістичність такого співвідношення між ω та l , знову ж розглянемо мідний провідник. За температури $T = 300$ К довжина вільного пробігу електронів у ньому $l_{\text{Cu}; 300\text{К}} \simeq 40$ нм. Таких значень товщина скінового шару досягає на частотах $\nu \simeq 3 \cdot 10^{12}$ Гц, тобто в терагерцовому діапазоні. Проте зі зниженням температури провідність і довжина вільного пробігу зростають, наприклад, для $T = 10$ К матимемо $\sigma_{\text{Cu}} \simeq 3.5 \cdot 10^{22} \text{ с}^{-1}$ та $l_{\text{Cu}; 10\text{К}} \sim 10^{-4}$ см. Таку товщину скінового шару отримаємо вже для $\nu \simeq 60$ кГц.

У цій ситуації просторові неоднорідності поля стають суттєвими, тому зв'язок між струмом і напруженістю вже не можна записувати як простий закон Ома $\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}$. Натомість правильною буде така нелокальна форма:

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) = \int_V \mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) dV', \quad (17.24)$$

де ядро $\mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в загальному випадку має досить складний вигляд, для його знаходження потрібно розв'язувати кінетичне рівняння для функції розподілу електронів у провіднику.

За таких умов ми вже не можемо використати рівняння (17.3), замість яких для електричного поля, наприклад, будемо мати просто

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}_0}{\partial t}. \quad (17.25)$$

Розглядаючи, як раніше, проникнення поля $\mathbf{E} \sim e^{-i\omega t}$ в безмежний

провідник у напрямку z , можемо відразу написати:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(z, t)}{\partial z^2} = -\frac{4\pi i \mu \omega}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(z, z') \mathbf{E}(z', t) dz', \quad (17.26)$$

оскільки в напрямках x та y задача однорідна.

Для певних досить загальних ситуацій, коли ядро має вигляд $\mathcal{K}(|z - z'|)$, рівняння (17.26) у правій частині містить згортку, тому його вдається розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Координатна залежність електричного поля матиме таку структуру:

$$\mathbf{E}(z) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz} dk}{k^2 - \frac{4\pi i \mu \omega}{c^2} \mathcal{K}_k}, \quad (17.27)$$

де \mathcal{K}_k — фур'є-образ ядра $\mathcal{K}(|z - z'|)$. Таке поле вже не спадає експоненціально із заглибленням у провідник. Виявляється, однак, що можна ввести деяку характерну глибину проникнення $\delta_a \sim \omega^{-1/3}$. Ця залежність від частоти слабша, ніж за нормального скін-ефекту (17.6), а відповідне явище називають **аномальним скін-ефектом**. Для ілюстрації на рис. 17.4 показано залежність скінової провідності Σ від провідності σ для нормального й аномального скін-ефектів.

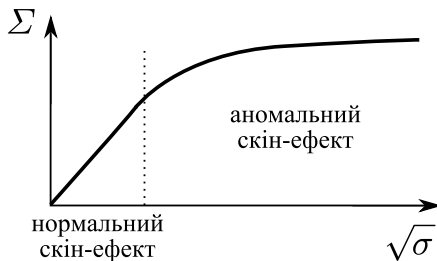


Рис. 17.4. Скінова провідність.