

17.3. Магнітна гідродинаміка

Предметом розгляду магнітної гідродинаміки є електромагнітні процеси в повільнорухомих провідниках (рідинах і газах), відповідні задачі виникають, наприклад, в астрофізиці чи фізиці плазми. Для таких процесів характерні високі значення провідності ($\sigma \sim 10^{17} \text{ с}^{-1}$), а магнітна провідність близька до одиниці, $\mu \simeq 1$.

Запишемо рівняння Максвелла у квазістатичному наближенні (17.1):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (17.28a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (17.28b)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (17.28c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (17.28d)$$

Оскільки $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, а $\mu \simeq 1$, то $\mathbf{B} \simeq \mathbf{H}$. Густина струму визначається співвідношенням

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} + \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right), \quad (17.29)$$

яке розглядатимемо у власній системі відліку ($\mathbf{v} = 0$).

Візьмемо rot від рівняння (17.28d) і зробимо прості перетворення:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}, \\ \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{H}}_{\simeq 0} - \Delta \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \underbrace{\operatorname{rot} \mathbf{E}}_{\simeq -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}} + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{1}{c} \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] \quad \left| \cdot \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right. \end{aligned}$$

У результаті матимемо рівняння:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H} + \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad (17.30)$$

яке визначає напруженість магнітного поля \mathbf{H} в рідкому провіднику. Тут \mathbf{v} — швидкість, з якою рухається вибрана ділянка провідника. Її можна знайти з рівнянь звичайної гідродинаміки.

Розглянемо рівняння Ейлера⁶:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\tau} \nabla p + \frac{1}{\tau} \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] \right), \quad (17.31)$$

де τ — густина речовини, а p — тиск. Зазначимо, що це рівняння відповідає найпростішому наближенню нестисливої нев'язкої рідини.

Виконаємо деякі перетворення в рівнянні (17.30):

$$\begin{aligned} \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] &= [\nabla, [\mathbf{v}, \mathbf{H}]] = (\nabla, \mathbf{H}) \mathbf{v} - (\nabla, \mathbf{v}) \mathbf{H} = \\ &= \mathbf{v} \underbrace{(\nabla, \mathbf{H})}_{=0} + (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H} \text{div} \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{H}, \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{H}}_{=d\mathbf{H}(\mathbf{r},t)/dt} = (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H} \text{div} \mathbf{v}.$$

Запишемо також **закон збереження маси** (рівняння неперервності):

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \text{div}(\tau \mathbf{v}) = 0 \quad (17.32)$$

або

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \tau + \tau \text{div} \mathbf{v} = \frac{d\tau}{t} + \tau \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (17.33)$$

Таким чином, отримаємо рівність

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{v} + \frac{\mathbf{H}}{\tau} \frac{\tau}{t}. \quad (17.34)$$

⁶Леонард ЕЙЛЕР або ОЙЛЕР (Leonhard EULER, 15.IV.1707–7(18).IX.1783), швейцарський учений.

Враховавши, що

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{H}}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau} \frac{d\mathbf{H}}{dt} - \mathbf{H} \frac{1}{\tau} \frac{\tau}{t},$$

після домноження (17.34) на $1/\tau$ будемо мати

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{H}}{\tau} \right) = \left(\frac{\mathbf{H}}{\tau}, \nabla \right) \mathbf{v}. \quad (17.35)$$

17.4. Магнітодинамічні хвилі

Розглянемо хвильові розв'язки рівнянь магнітної гідродинаміки. Записавши густину струму у вигляді $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}$ і враховуючи, що в хвильовій області густина заряду $\rho = 0$, матимемо систему рівнянь:

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} + \text{div}(\tau \mathbf{v}) = 0, \quad (17.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\tau} \nabla p - \frac{1}{4\pi\tau} [\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{H}].$$

Малі зміни поля величиною \mathbf{h} виникають на фоні зовнішнього сталого значення напруженості \mathbf{H}_0 :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}. \quad (17.37)$$

Зовнішнє поле незначно змінює густини й тиски:

$$\tau = \tau_0 + \tau', \quad p = p_0 + p', \quad (17.38)$$

де τ' , p' — малі поправки, а швидкість повністю визначається поправкою

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}', \quad (17.39)$$

оскільки без зовнішнього поля $\mathbf{v} = 0$.

З точністю до першого порядку за поправками систему (17.36) запишемо так:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}_0], \quad \tau_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{\partial \tau}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau_0} \nabla p' - \frac{1}{4\pi\tau_0} [\mathbf{H}_0, \operatorname{rot} \mathbf{h}]. \end{aligned} \quad (17.40)$$

В останньому рівнянні врахуємо зв'язок швидкості поширення звуку u_0 зі зміною густини й тиску:

$$u_0^2 = \frac{p - p_0}{\tau - \tau_0} = \frac{p'}{\tau'} \quad \Rightarrow \quad p' = u_0^2 \tau' \quad (17.41)$$

і перепишемо його у вигляді

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = -\frac{u_0^2}{\tau_0} \nabla \tau' - \frac{1}{4\pi\tau_0} [\mathbf{H}_0, \operatorname{rot} \mathbf{h}]. \quad (17.42)$$

Можна перекоонатися, що лінійні диференціальні рівняння (17.40), (17.42) мають хвильові розв'язки $\mathbf{h}, \mathbf{v}, \tau' \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$. Підставляючи їх у відповідні рівняння, отримаємо після нескладних перетворень таке:

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}, \mathbf{h}) = 0, \quad \omega \mathbf{h} = -[\mathbf{k}, [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0]], \quad \omega \tau' = \tau_0 (\mathbf{k}, \mathbf{v}), \\ \omega \mathbf{v} = \frac{u_0^2}{\tau_0} \mathbf{k} \tau' + \frac{1}{4\pi\tau_0} [\mathbf{H}_0, [\mathbf{k}, \mathbf{h}]] \end{aligned} \quad (17.43)$$

Ми отримали вісім рівнянь (два скалярне і два векторних) для семи невідомих $\mathbf{h}, \mathbf{v}, \tau'$.

Для знаходження розв'язків конкретизуємо геометрію задачі. З першого рівняння (17.43) випливає, що $\mathbf{h} \perp \mathbf{k}$. Вважатимемо, що вектор $\mathbf{k} \parallel Ox$, а \mathbf{H}_0 лежить у площині xOy , див рис. 17.5. Із третього рівняння (17.43)

$$\tau' = \frac{\tau_0}{\omega} k v_x. \quad (17.44)$$

Запишемо решту рівнянь (17.43) покомпонентно:

$$-\omega h_z = v_z k H_{0x}, \quad \omega v_z = -\frac{H_{0x} k}{4\pi\tau_0} h_z, \quad (17.45)$$

$$\begin{aligned}
 -\omega h_y &= v_y k H_{0x} - v_x k H_{0y}, & \omega v_y &= -\frac{H_{0x} k}{4\pi\tau_0} h_y, \\
 \omega v_x &= \frac{u_0^2}{\tau_0} k\tau' + \frac{H_{0y}}{4\pi\tau_0} h_y.
 \end{aligned}
 \tag{17.46}$$

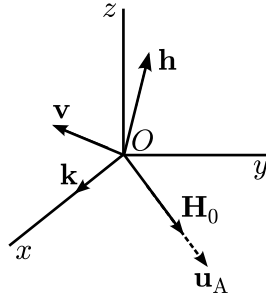


Рис. 17.5. Орієнтація векторів у задачі про поширення магнітогідродинамічних хвиль.

Дві незалежні групи рівнянь (17.45) і (17.46), у першій з яких фігурують лише змінні h_z і v_z , а в другій — лише h_y , v_x і v_y , дають підстави стверджувати, що існують два типи хвиль, що характеризуються різними ω .

Дисперсійне співвідношення, яке пов'язує ω і \mathbf{k} , знаходимо з рівнянь (17.45) у вигляді

$$\frac{\omega}{k} = \frac{H_{0x}}{\sqrt{4\pi\tau_0}},
 \tag{17.47}$$

де для спрощення вважатимемо $H_{0x} > 0$. Отже, у векторній формі

$$\omega = \frac{(\mathbf{H}_0, \mathbf{k})}{\sqrt{4\pi\tau_0}}.
 \tag{17.48}$$

Групова швидкість, яка визначає фізичну швидкість поширення хвилі, дорівнює

$$\mathbf{u}_A = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{H}_0}{\sqrt{4\pi\tau_0}}.
 \tag{17.49}$$

Ці хвилі, які поширюються вздовж напрямку поля \mathbf{H}_0 , називають *альфвенівськими*⁷, відповідно швидкість u_A — *альфвенівська швидкість*, а $\omega = (\mathbf{H}_0, \mathbf{k})/\sqrt{4\pi\tau_0}$ — *альфвенівська частота*.

Із рівнянь (17.46) швидкість $u = \omega/k$ визначимо, прирівнявши визначник системи до нуля. Внаслідок цього отримаємо два розв'язки:

$$u_{f,s} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{H_0^2}{4\pi\tau_0} + u_0^2 \pm \left[\left(\frac{H_0^2}{4\pi\tau_0} + u_0^2 \right)^2 - \frac{h_0^2}{\pi\tau_0} u_0^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (17.50)$$

Отримані два типи хвиль називають відповідно до знаків “+” і “-” *швидкою* (англ. fast) і *повільною* (англ. slow) *магнітогідродинамічними хвилями*. Напрямок їх поширення перпендикулярний до \mathbf{H}_0 .

⁷Ганнес Альфвен (Hannes Olof Gösta ALFVEN, 30.V.1908–02.04.1995), шведський інженер і фізик, лауреат Нобелівської премії з фізики 1970 р.