

Розділ 13

Рівняння для електромагнітного поля в середовищі

13.1. Усереднення мікроскопічних рівнянь Максвелла–Лоренца

Розглядаючи систему рівнянь Максвелла в середовищі, розділимо заряди і струми на два типи: заряди ρ_m і струми \mathbf{j}_m середовища, що відповідають мікроскопічним частинкам (наприклад, електронам), і заряди ρ_0 і струми \mathbf{j}_0 , внесені в середовище ззовні. Зрозуміло, що густини ρ_m і \mathbf{j}_m характеризуються значною мікроскопічною неоднорідністю, тоді як ρ_0 і \mathbf{j}_0 можна вважати заданими й розподіленими на мікроскопічному рівні досить однорідно.

Система рівнянь Максвелла набуде вигляду:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) = 4\pi(\rho_0(\mathbf{r}, t) + \rho_m(\mathbf{r}, t)), \quad (13.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (13.1b)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (13.1c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t)). \quad (13.1d)$$

Тут індекс m відповідає мікроскопічно розподіленим величинам. Густини заряду і струму визначаються виразами:

$$\rho_m(\mathbf{r}, t) = \sum_i e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad (13.2)$$

$$\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) = \sum_i e_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad (13.3)$$

де відбувається за всіма зарядами середовища, а їх координати \mathbf{r}_i і швидкості \mathbf{v}_i визначаються внаслідок розв'язування рівнянь руху

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = e_i \left(\mathbf{E}_m(\mathbf{r}_i, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i, \mathbf{B}_m(\mathbf{r}_i, t)] \right) + \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i, t). \quad (13.4)$$

Тут до сили Лоренца, яка діє на частинку з боку електромагнітного поля, додано для загальності ще деяку зовнішню силу \mathbf{F}_{ext} , що може мати неелектромагнітну природу.

Кількість зарядів у будь-якому макроскопічному об'ємі величезна: навіть у газі в 1 см^3 міститься порядку 10^{19} молекул (в ідеальному газі цю кількість визначає так зване *число Лошмідта*¹ $n_0 \simeq 2.7 \cdot 10^{19}$, пов'язане з *числом (сталю) Авоґадро*² $N_A \simeq 6.0 \cdot 10^{23}$ через молярний об'єм $V_{\text{mol}} \simeq 22.4 \text{ л}$ як $n_0 = N_A / V_{\text{mol}}$). У рідинах чи твердих тілах кількість буде суттєво більшою.

Очевидно, що знайти рівняння руху кожного заряду середовища й відповідно задати густини ρ_m і \mathbf{j}_m нереально — на це забрали б будь-яких доступних обчислювальних потужностей. Однак деталі руху кожного окремого заряду середовища навряд чи становлять значний інтерес. Ми проведемо усереднення системи рівнянь Максвелла (13.1) за координатами й часом, використовуючи таке означення середнього деякої величини F :

$$\langle F(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} dV' \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} dt F(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + t'), \quad (13.5)$$

¹Йозеф Лошмідт (Johann Josef LOSCHMIDT (15.III.1821–08.VII.1895), австрійський фізик і хімік.

²Амедео АВОґАДРО (Lorenzo Romano Amedeo Carlo AVOGADRO di Quaregna e Cerreto, 09.VIII.1776–09.VII.1856), італійський фізик і хімік.

де ΔV — якийсь макроскопічний об'єм, а ΔT — проміжок часу, що перевищує характерні атомні періоди. Це дозволить оперувати з величинами, у яких буде згладжено мікроскопічні неоднорідності, як просторові, так і часові, що зазвичай несуттєві в задачах про електродинамічні властивості середовища як макроскопічного об'єкта, див. рис. 13.1.

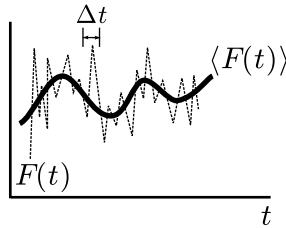


Рис. 13.1. Мікроскопічно неоднорідна функція $F(t)$ (пунктирна лінія) і згладжена функція $\langle F(t) \rangle$ (суцільна товста лінія). Зображення схематичне.

Відповідно макроскопічно усереднені густини позначимо так:

$$\langle \rho_m(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho'(\mathbf{r}, t), \quad (13.6)$$

$$\langle \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{j}'(\mathbf{r}, t). \quad (13.7)$$

Усереднення похідних за часом і координатами проведемо так:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\rangle &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} dV' \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} dt \frac{\partial}{\partial(t+t')} F(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t+t') = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} dV' \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} dt F(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t+t') = \frac{\partial}{\partial t} \langle F(\mathbf{r}, t) \rangle. \end{aligned}$$

Аналогічно можна зробити перетворення для похідних за координатами, тому

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \rangle = \operatorname{div} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (13.8)$$

$$\langle \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \rangle = \operatorname{rot} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (13.9)$$

Для усереднених полів використовуватимемо позначення:

$$\langle \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \langle \mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (13.10)$$

Зважаючи на те, що розподіли ρ_0 і \mathbf{j}_0 не є мікроскопічно неоднорідними, відповідні середні збігаються з самими величинами:

$$\langle \rho_0(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0(\mathbf{r}, t), \quad \langle \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t). \quad (13.11)$$

Усереднення системи рівнянь Максвелла–Лоренца дасть нову систему:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi(\rho_0(\mathbf{r}, t) + \rho'(\mathbf{r}, t)), \quad (13.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (13.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (13.14)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}'(\mathbf{r}, t)). \quad (13.15)$$

Виявляється, що розподіли ρ' і \mathbf{j}' , які визначаються особливостями середовища, можна пов'язати з певними вимірюваними величинами.

Введемо *вектор поляризації* $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho' \quad (13.16)$$

і *вектор намагніченості* $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$:

$$c \operatorname{rot} \mathbf{M} = \mathbf{j}' + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (13.17)$$

Рівняння Максвелла перепишемо так:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho_0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{1}{c} \frac{\partial(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0.$$

Нові вектори $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ і $\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ позначимо як

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \quad (13.18)$$

Величину \mathbf{D} називають вектором *електричного зміщення*, а \mathbf{H} — вектором *напруженості магнітного поля*.

У результаті система рівнянь Максвелла в середовищі матиме вигляд:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_0, \quad (13.19a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (13.19b)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13.19c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0. \quad (13.19d)$$

Порівняно з рівняннями у вакуумі, два зберігають свою форму, а у двох зроблено заміну векторів \mathbf{E} на \mathbf{D} і \mathbf{B} на \mathbf{H} . Потрібно, однак, пам'ятати, що вектори \mathbf{E} і \mathbf{B} тут мають дещо інший зміст — макроскопічно усереднені напруженості полів.

Як і раніше, ця система містить 8 рівнянь (два скалярних і два векторних), однак кількість невідомих тепер становить 12 — чотири вектори: $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$. Тут на допомогу приходить те, що в багатьох задачах існує досить простий зв'язок між векторами, які описують електричне й магнітне поля. Відповідні рівняння називають *матеріальними*, вони будуть предметом розгляду в наступних розділах.

13.2. Узагальнена індукція

Розділення індукованого струму \mathbf{j}' на струм поляризації і струм намагнічення не завжди виявляється можливим. Так, у швидкозмінних полях такий поділ не вдається зробити однозначно. Тому

для таких задач зручніше ввести лише один новий вектор

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathbf{j}'(\mathbf{r}, t') dt', \quad (13.20)$$

який називають **вектором узагальненої індукції**. Вважають, що в момент часу $t = -\infty$ електромагнітне було відсутнє, а отже й індукований струм дорівнює нулеві.

Із закону збереження заряду (який справджується окремо для індукованих і окремо для вільних зарядів)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}' = 0 \quad (13.21)$$

випливає, що

$$\rho'(\mathbf{r}, t) = - \int_{-\infty}^t \operatorname{div} \mathbf{j}'(\mathbf{r}, t') dt'. \quad (13.22)$$

Тому з рівняння $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho_0 + \rho')$ отримаємо:

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{E} + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathbf{j}' dt' \right) = 4\pi \rho_0$$

або

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = 4\pi \rho_0.$$

Величину

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = - \int_{-\infty}^t \mathbf{j}'(\mathbf{r}, t') dt' \quad (13.23)$$

називають **узагальненою поляризацією**. Отже, подібно до зв'язку між векторами \mathbf{D} і \mathbf{P} , у цьому випадку:

$$\mathcal{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathcal{P}. \quad (13.24)$$

Аналогічно з рівняння $\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}') + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ матимемо:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathbf{j}' dt' \right)$$

або

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}.$$

У результаті система рівнянь Максвелла набуде вигляду:

$$\text{div } \mathcal{D} = 4\pi\rho_0, \quad (13.25a)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (13.25b)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13.25c)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0. \quad (13.25d)$$

При восьми рівняннях маємо дев'ять невідомих (вектори \mathbf{E} , \mathcal{D} , \mathbf{B}).

13.3. Фізичний зміст вектора поляризації

Для з'ясування фізичного змісту вектора \mathbf{P} скористаємося таким математичним прийомом: рівняння $\text{div } \mathbf{P} = -\rho'$, яке пов'язує вектор поляризації з густиною зв'язаних зарядів, домножимо зліва і справа на скалярний добуток (\mathbf{a}, \mathbf{r}) , де \mathbf{a} — довільний сталий вектор, і проінтегруємо по об'єму V :

$$\int_V (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \text{div } \mathbf{P} dV = - \int_V (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \rho' dV. \quad (13.26)$$

Далі зробимо очевидне перетворення:

$$(\mathbf{P}, \nabla)(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = (\nabla, \mathbf{P})(\mathbf{a}, \mathbf{r}) - (\mathbf{a}, \mathbf{r})(\nabla, \mathbf{P})$$