

Аналогічно з рівняння $\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}') + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ матимемо:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathbf{j}' dt' \right)$$

або

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}.$$

У результаті система рівнянь Максвелла набуде вигляду:

$$\text{div } \mathcal{D} = 4\pi\rho_0, \quad (13.25a)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (13.25b)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13.25c)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0. \quad (13.25d)$$

При восьми рівняннях маємо дев'ять невідомих (вектори \mathbf{E} , \mathcal{D} , \mathbf{B}).

13.3. Фізичний зміст вектора поляризації

Для з'ясування фізичного змісту вектора \mathbf{P} скористаємося таким математичним прийомом: рівняння $\text{div } \mathbf{P} = -\rho'$, яке пов'язує вектор поляризації з густиною зв'язаних зарядів, домножимо зліва і справа на скалярний добуток (\mathbf{a}, \mathbf{r}) , де \mathbf{a} — довільний сталий вектор, і проінтегруємо по об'єму V :

$$\int_V (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \text{div } \mathbf{P} dV = - \int_V (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \rho' dV. \quad (13.26)$$

Далі зробимо очевидне перетворення:

$$(\mathbf{P}, \nabla)(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = (\nabla, \mathbf{P})(\mathbf{a}, \mathbf{r}) - (\mathbf{a}, \mathbf{r})(\nabla, \mathbf{P})$$

Тому

$$\int_V (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \rho' dV = \int_V (\mathbf{P}, \nabla)(\mathbf{a}, \mathbf{r}) dV - \underbrace{\int_V (\nabla, \mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{r})) dV}_{= \oint_S (\mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), d\mathbf{S}) = 0}.$$

Останній інтеграл можна за теоремою Гаусса переписати через поверхневий, який дорівнює нулю, якщо поверхня S охоплює тіло ззовні, де немає зв'язаних зарядів, а отже $\mathbf{P} = 0$.

За допомогою тотожності $(\mathbf{a}, \mathbf{P}) = (\mathbf{P}, \nabla)(\mathbf{a}, \mathbf{r})$, у справедливості якої легко переконатися безпосередніми розрахунками, отримаємо:

$$\int_V (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \rho' dV = \int_V (\mathbf{P}, \nabla)(\mathbf{a}, \mathbf{r}) dV = \int_V (\mathbf{a}, \mathbf{P}) dV,$$

звідки, зважаючи на довільність вектора \mathbf{a} , маємо

$$\int_V \mathbf{r} \rho' dV = \int_V \mathbf{P} dV, \quad (13.27)$$

тобто вектор поляризації \mathbf{P} має зміст дипольного моменту одиниці об'єму середовища (йдеться про момент зв'язаних зарядів).

13.4. Фізичний зміст вектора намагніченості

Для початку розглянемо стаціонарний випадок. тоді співвідношення між зв'язаними струмами \mathbf{j}' і вектором намагніченості \mathbf{M} має вигляд:

$$\mathbf{j}' = c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (13.28)$$

Домножимо цю рівність зліва векторно на радіус-вектор \mathbf{r} , потім скалярно на довільний сталий вектор \mathbf{a} і проінтегруємо по об'єму середовища V :

$$\frac{1}{c} \int_V (\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \mathbf{j}']) dV = \int_V (\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \operatorname{rot} \mathbf{M}]) dV.$$

Із підінтегральним виразом праворуч виконаємо перетворення з мішаними добутками:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \text{rot } \mathbf{M}]) &= ([\mathbf{a}, \mathbf{r}], \text{rot } \mathbf{M}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{r}], [\nabla, \mathbf{M}]) = \\ &= -(\nabla, [[\mathbf{a}, \mathbf{r}], \mathbf{M}]) = (\nabla, [\mathbf{M}, [\mathbf{a}, \mathbf{r}]]) - (\nabla, [\mathbf{M}, [\mathbf{a}, \mathbf{r}]]) = \\ &= (\nabla, [\mathbf{M}, [\mathbf{a}, \mathbf{r}]]) + (\mathbf{M}, [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{r}]]) = \\ &= \text{div}[\mathbf{M}, [\mathbf{a}, \mathbf{r}]] + 2(\mathbf{a}, \mathbf{M}). \end{aligned}$$

При інтегруванні за об'ємом першого доданка можемо перейти за теоремою Гаусса до поверхневого інтеграла, який дорівнює нулеві, якщо поверхня повністю охоплює середовище. Тому маємо:

$$\frac{1}{c} \int_V (\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \mathbf{j}']) dV = 2 \int_V (\mathbf{a}, \mathbf{M}) dV,$$

або, зважаючи на довільність вектора \mathbf{a} ,

$$\frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}, \mathbf{j}'] dV = \int_V \mathbf{M} dV, \quad (13.29)$$

тобто вектор намагніченості \mathbf{M} має зміст магнітного дипольного моменту одиниці об'єму середовища.

У нестационарному випадку, коли

$$\mathbf{j}' = \text{rot } \mathbf{M} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

така проста інтерпретація вектора намагніченості вже неможлива.

13.5. Умови на межі двох середовищ

Розглянемо межу розділу двох середовищ, (1) і (2). Нехай \mathbf{n} — одиничний вектор нормалі до поверхні розділу, який для визначеності спрямуємо з середовища (1) у (2). Виділимо достатньо малий об'єм циліндричної форми, нижня основа якого S_1 знаходиться в середовищі (1), а верхня S_2 — відповідно в середовищі (2). Поверхню

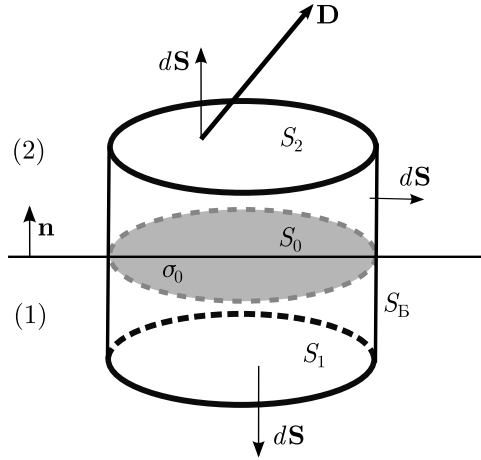


Рис. 13.2. Малий об'єм на межі розділу двох середовищ для розрахунку граничних умов на вектор \mathbf{D} .

розділу цей об'єм перетинатиме на ділянці S_0 , яку при достатньо малій величині об'єму можна вважати плоскою. Описану конфігурацію проілюстровано на рис. 13.2

Рівняння

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_0 \quad (13.30)$$

тут потрібно розглядати в інтегральній формі, оскільки при переході через границю розділу фізичні величини можуть змінюватися стрибкоподібно, що спричинятиме труднощі опису за допомогою диференціальних рівнянь. Тому запишемо

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi \int_V \rho_0 dV = 4\pi q_0, \quad (13.31)$$

де S і V — відповідно поверхня й об'єм циліндра, а q_0 — заряд всередині цього об'єму.

Інтеграл по поверхні S розіб'ємо на три частини, розглянувши окремо верхню S_2 й нижню S_1 основи й бічну поверхню S_B :

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \int_{S_2} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) + \int_{S_1} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) + \int_{S_B} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi q_0. \quad (13.32)$$

На поверхні S_2 вектори $d\mathbf{S}$ і \mathbf{n} співнапрямлені, а на поверхні S_1 — напрямлені протилежно. Оскільки розміри циліндра малі, то можна вважати, що значення вектора \mathbf{D} сталі на основах циліндра. Скалярний добуток $(\mathbf{D}, d\mathbf{S})$ при цьому буде визначати нормальна складова вектора \mathbf{D} з відповідним знаком:

$$\int_{S_2} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = D_{2n} S_2, \quad \int_{S_1} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = -D_{1n} S_1.$$

Далі спрямуємо основи циліндра до границі розділу

$$S_1 \rightarrow S_0, \quad S_2 \rightarrow S_0,$$

водночас бічна поверхня прямуватиме до нуля, а разом із нею й відповідний інтеграл. Тому отримаємо:

$$(D_{2n} - D_{1n})S_0 = 4\pi q_0 = 4\pi\sigma_0 S_0,$$

де σ_0 — поверхнева густина вільних зарядів на границі розділу. Остаточно отримаємо умову:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma_0. \quad (13.33)$$

Легко бачити, що з рівняння

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

яке в інтегральній формі має вигляд

$$\oint_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0,$$

впливає внаслідок такого самого розгляду умова на нормальні складові вектора \mathbf{B} :

$$B_{2n} - B_{1n} = 0. \quad (13.34)$$

Відразу зазначимо ще одну умову, яку можна отримати з означення вектора поляризації через індуковані заряди

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho'.$$

Вона матиме вигляд:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad (13.35)$$

де σ' — поверхнева густина індукованих зарядів.

Ще одну трійку граничних умов отримаємо за допомогою рівняння

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (13.36)$$

і подібних до нього.

Замкнений контур L виберемо у вигляді малого прямокутника, нижня сторона якого L_1 перебуває у середовищі (1), а верхня L_2 — у середовищі (2). Бічні сторони позначимо L'_B і L''_B . Тангенціальний (дотичний до поверхні розділу) одиничний вектор у площині S контура позначимо $\boldsymbol{\tau}$, а перпендикулярний до площини — $\boldsymbol{\nu}$. У результаті вектори \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ будуть трійкою взаємоперпендикулярних ортів, див. рис. 13.3.

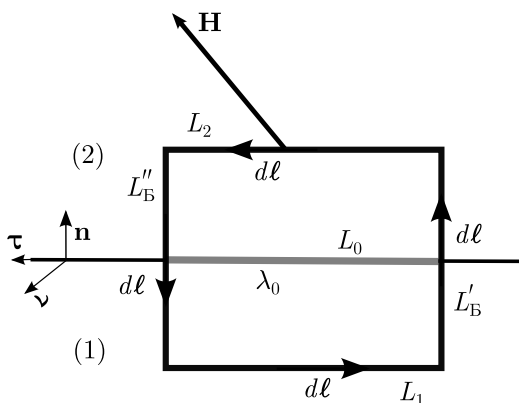


Рис. 13.3. Контур на межі розділу двох середовищ для розрахунку граничних умов на вектор \mathbf{H} .

Як і раніше, рівняння (13.36) потрібно записати в інтегральній формі:

$$\oint_L (\mathbf{H}, d\boldsymbol{\ell}) = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j}_0, d\mathbf{S}) + \frac{1}{c} \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right). \quad (13.37)$$

Контурний інтеграл розіб'ємо на частини:

$$\oint_L (\mathbf{H}, d\ell) = \int_{L_1} (\mathbf{H}, d\ell) + \int_{L_2} (\mathbf{H}, d\ell) + \int_{L'_B} (\mathbf{H}, d\ell) + \int_{L''_B} (\mathbf{H}, d\ell).$$

Далі стискатимемо прямокутник до границі розділу (позначимо цю лінію L_0), так що бічні сторони прямуватимуть до нуля, а разом із ними й відповідні інтеграли, оскільки поле \mathbf{H} скінченне. Також при такому переході прямуватиме до нуля й інтеграл $\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, d\mathbf{S}\right)$.

Ще один поверхневий інтеграл $\int_S (\mathbf{j}_0, d\mathbf{S})$ перепишемо через лінійну густину вільних поверхневих струмів λ_0 :

$$\int_S (\mathbf{j}_0, d\mathbf{S}) = \lambda_{0\nu} L_0,$$

де $\lambda_{0\nu}$ означає проєкцію струму на напрямок ν .

Значення інтегралів на контурах L_1 і L_2 виражаються через тангенціальні складові вектора \mathbf{H} (пригадаймо, що розміри контурів малі), при цьому потрібно враховувати взаємну орієнтацію контура й вектора $\boldsymbol{\tau}$.

Після всіх цих операцій отримаємо:

$$H_{2\tau} L_2 - H_{1\tau} L_1 \rightarrow (H_{2\tau} - H_{1\tau}) L_0 = \frac{4\pi}{c} \lambda_{0\nu} L_0.$$

Звідси отримуємо граничну умову:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} \lambda_{0\nu}. \quad (13.38)$$

З рівняння

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13.39)$$

яке в інтегральній формі має вигляд

$$\oint_L (\mathbf{E}, d\ell) = \frac{1}{c} \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right),$$

повторюючи такі самі міркування, можна отримати граничну умову:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \quad (13.40)$$

Нарешті, з означення вектора намагніченості

$$\text{rot } \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{j}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

матимемо ще одну умову:

$$M_{2\tau} - M_{1\tau} = \frac{1}{c} \lambda'_{\nu}, \quad (13.41)$$

де λ'_{ν} — проєкція лінійної густини індукованих поверхневих струмів на напрямок ν .

Підсумуємо отримані шість граничних умов:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma_0, \quad (13.42a)$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (13.42b)$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad (13.42c)$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} \lambda_{0\nu}, \quad (13.42d)$$

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0, \quad (13.42e)$$

$$M_{2\tau} - M_{1\tau} = \frac{1}{c} \lambda'_{\nu}. \quad (13.42f)$$