Розділ 16

Змінне поле

16.1. Діелектрик у змінному полі

У випадку змінного зовнішнього поля дипольні моменти молекул залежать від часу. Для одної частинки з зарядом $(-e)$ маємо:

$$\mathbf{d}(t) = -e\mathbf{r}(t), \tag{16.1}$$

відповідно вектор поляризації дорівнює:

$$\mathbf{P}(t) = -Ne\mathbf{r}(t). \tag{16.2}$$

Запишемо рівняння руху частинки під дією зовнішнього поля $\mathbf{E}(t)$:

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) + 2m\gamma\dot{\mathbf{r}}(t) + m\omega_0^2\mathbf{r}(t) = -e\mathbf{E}(t),$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) + 2\gamma\dot{\mathbf{r}}(t) + \omega_0^2\mathbf{r}(t) = -\frac{e}{m}\mathbf{E}(t).$$

Домноживши останню рівність домножимо на $(-Ne)$, отримаємо:

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) + 2\gamma\dot{\mathbf{P}}(t) + \omega_0^2\mathbf{P}(t) = \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E}(t) = \frac{\Omega_{\mathrm{L}}^2}{4\pi}\mathbf{E}(t), \tag{16.3}$$

де

$$\Omega_{\mathrm{L}} = \sqrt{4\pi Ne^2/m} \tag{16.4}$$

— ***частота ленґмюрівських коливань***[1].

[1]Ірвінґ Ленґмюр (Irving Langmuir, 31.I.1881–16.VIII.1957), американський хімік і фізик, лауреат Нобелівської премії з хімії 1932 р.

Перейдемо далі до зображення Фур'є за часовою змінною:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\mathbf{P}_\omega e^{-i\omega t} \tag{16.5}$$

і підставимо цей вираз у (16.3):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\mathbf{P}_\omega e^{-i\omega t}\left(-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2\right) = \frac{\Omega_{\mathrm{L}}^2}{4\pi}\mathbf{E}(t).$$

Домножимо цю рівність на $e^{i\omega' t}$ і проінтеґруємо за змінною t:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\mathbf{P}_\omega\left(-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2\right)\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\,e^{i(\omega'-\omega)t}}_{=\delta(\omega'-\omega)} = \frac{\Omega_{\mathrm{L}}^2}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\,\mathbf{E}(t)e^{i\omega' t},$$

$$\mathbf{P}_{\omega'}\left(-\omega'^2 - 2i\gamma\omega' + \omega_0^2\right) = \frac{\Omega_{\mathrm{L}}^2}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\,\mathbf{E}(t)e^{i\omega' t}$$

Для зручності подальших викладок перепозначимо змінні: $\omega' \to \omega$, $t \to t'$. Отримаємо:

$$\mathbf{P}_\omega = \frac{1}{-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2}\frac{\Omega_{\mathrm{L}}^2}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt'\,\mathbf{E}(t')e^{i\omega t'} \tag{16.6}$$

Таким чином, для вектора поляризації матимемо:

$$4\pi\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,e^{-i\omega t}\frac{\Omega_{\mathrm{L}}^2}{-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt'\,\mathbf{E}(t')e^{i\omega t'} =$$

$$= \frac{\Omega_{\mathrm{L}}^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt'\,\mathbf{E}(t')\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2}}_{=f(t-t')}. \tag{16.7}$$

Тепер перейдемо до розрахунку функції $f(t-t')$. Вираз у знаменнику підінтеґральної функції розкладемо на множники:

$$-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2 = -(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2),$$

де

$$\omega_{1,2} = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \simeq \pm\omega_0 - i\gamma,$$

оскільки γ — мала величина.

Тому для функції $f(t-t')$ матимемо:

$$f(t-t') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega-\omega_1)(\omega_2-\omega)}. \tag{16.8}$$

Розрахуємо цей інтеґрал за допомогою теореми Коші[2] про лишки (див. рис. 16.1–16.2). Нехай змінна $\omega = \omega' + i\omega''$. Полюси підінтеґральної функції в точках ω_1, ω_2 лежать у нижній комплексній півплощині $\omega'' = \mathrm{Im}\,\omega = -\gamma < 0$. В показнику експоненти маємо: $-i\omega(t-t') + \omega''(t-t')$.

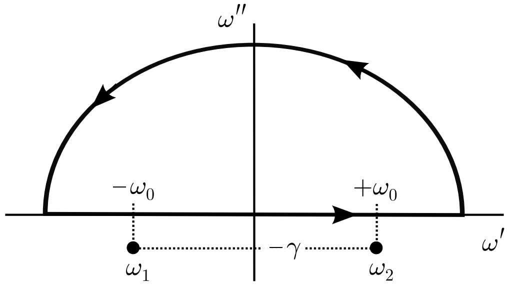

Рис. 16.1. Контур для розрахунку інтеґрала (16.8) при $t < t'$.

При $t - t' < 0$ контур потрібно замикати у верхній півплощині, де підінтеґральна функція аналітична, отже, $f(t-t') = 0$ при $t < t'$.

---

[2]Оґюстен-Луї Коші (Augustin-Louis Cauchy, 21.VIII.1789–23.V.1857), французький математик, інженер і фізик.

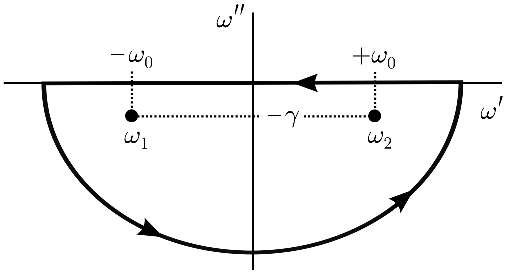

Рис. 16.2. Контур для розрахунку інтеґрала (16.8) при $t > t'$.

У результаті матимемо:

$$4\pi\mathbf{P}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt'\,\mathbf{E}(t')F(t-t'), \tag{16.9}$$

де

$$F(t-t') = \frac{\Omega_{\mathrm{L}}^2}{2\pi} f(t-t') \quad \text{при} \quad t' < t, \tag{16.10}$$

а функція

$$f(t-t') = 2\pi i \sum_{k=1,2} \operatorname*{res}_{\omega=\omega_k} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega-\omega_1)(\omega_2-\omega)}. \tag{16.11}$$

Вектор **D** для діелектрика у змінному полі має вигляд:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + 4\pi\mathbf{P}(t). \tag{16.12}$$

16.2. Комплексна діелектрична проникність

Нагадаємо з попередньої лекції вираз для $\mathbf{D}(t)$ у змінному полі:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} F(t-t')\mathbf{E}(t')\,dt',$$

або, після заміни змінної $\tau = t - t'$, $dt' = -d\tau$, матимемо:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int\limits_0^\infty F(\tau)\mathbf{E}(t-\tau)\,d\tau, \tag{16.13}$$

Використовуючи зображення Фур'є

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}_\omega e^{-i\omega t}\,d\omega, \qquad \mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}\,d\omega, \tag{16.14}$$

із формули (16.13) отримаємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\,(\mathbf{D}_\omega - \mathbf{E}_\omega)e^{-i\omega t} = \int\limits_0^\infty d\tau\ F(\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega(t-\tau)}$$

Або остаточно для самих фур'є-компонент:

$$\mathbf{D}_\omega = \left\{1 + \int\limits_0^\infty d\tau\ F(\tau)e^{i\omega\tau}\right\}\mathbf{E}_\omega,$$

тобто

$$\mathbf{D}_\omega = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}_\omega, \tag{16.15}$$

де величина

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int\limits_0^\infty d\tau\ F(\tau)e^{i\omega\tau} \tag{16.16}$$

— це ***комплексна діелектрична проникність***.

Розіб'ємо її на суму дійсної й уявної частин:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega), \tag{16.17}$$

де, враховуючи, що величина $F(\tau)$ — дійсна,

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \int\limits_0^\infty d\tau\ F(\tau)\cos\omega\tau, \qquad \varepsilon''(\omega) = \int\limits_0^\infty d\tau\ F(\tau)\sin\omega\tau, \tag{16.18}$$

звідки очевидними є такі симетрійні властивості:

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega), \qquad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega). \tag{16.19}$$

Зважаючи на те, що інтеґрали від швидкоосцилюючих функцій у (16.18) при $\omega \to \infty$ прямують до нуля, очевидно, що

$$\varepsilon(\omega) \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{16.20}$$

Розгляньмо далі такий інтеґрал (тут ω_0 — точка на дійсній осі):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0}. \tag{16.21}$$

Його легко розрахувати за допомогою теореми Коші про лишки, замикаючи контур у верхній півплощині комплексної площини (ω', ω''), де $\omega = \omega' + i\omega''$ (див. рис. 16.3).

$$\oint\limits_{\underline{\cap}} d\omega\, \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} + \underbrace{\int\limits_{\cap} d\omega\, \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0}}_{\to 0} = \pi i \operatorname*{res}_{\omega=\omega_0} \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0},$$

де враховано, що полюс підінтеґральної функції потрапляє на контур інтеґрування (тому πi замість $2\pi i$).

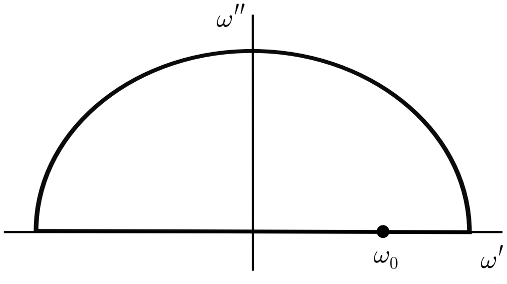

Рис. 16.3. Контур для розрахунку інтеґрала (16.21).

Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} = \pi i \left[\varepsilon(\omega_0) - 1\right]. \tag{16.22}$$

Розбиваючи праву і ліву сторони на дійсну й уявну частини, отримаємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{\varepsilon'(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{\varepsilon''(\omega)}{\omega - \omega_0} = -\pi\varepsilon''(\omega_0) + i\pi \left[\varepsilon'(\omega_0) - 1\right].$$

Звідси матимемо так звані ***дисперсійні співвідношення*** (відомі також як ***формули Крамерса–Кроніґа***[3]):

$$\varepsilon'(\omega_0) - 1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{\varepsilon''(\omega)}{\omega - \omega_0}, \tag{16.23}$$

$$\varepsilon''(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{\varepsilon'(\omega) - 1}{\omega_0 - \omega} \tag{16.24}$$

(ці вирази визначають ***інтеґральне перетворення Гільберта***[4]; строго кажучи, всі інтеґрали беруться в сенсі головного значення).

За їх допомогою, знаючи, наприклад, лише уявну частину $\varepsilon''(\omega)$ для всіх частот, можна розрахувати комплексну діелектричну проникність $\varepsilon(\omega)$. На практиці ця задача є досить складною, оскільки, по-перше, неможливо зробити вимірювання для *всіх* частот, а по-друге інтеґрали у формулах (16.23)–(16.24) слабо збігаються.

[3]Ганс Крамерс (Hendrik Anthony "Hans" Kramers (02.II.1894–24.IV.1952), голландський фізик; Ральф Кроніґ (Ralph Kronig, 10.III.1904–16.XI.1995), німецько-американський фізик.

[4]Давид Гільберт (David Hilbert, 23.I.1862–14.II.1943), німецький математик.

16.3. Поглинання енерґії в середовищі

У попередньому розділі ми отримали вираз (15.2) для зміни з часом об'ємної густини енерґії електромагнітного поля в середовищі:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) + \left(\mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\right\}.$$

Для початку проілюструємо відповідні розрахунки, розглянувши монохроматичне поле $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$. За допомогою формул (16.14), (16.15) легко показати, що в цьому випадку

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(t). \tag{16.25}$$

Розпишемо вектори $\mathbf{E}$ і $\mathbf{D}$ на суму дійсної й уявної частин:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + i\mathbf{E}'',\ \mathbf{E}^* = \mathbf{E}' - i\mathbf{E}''; \quad \operatorname{Re}\mathbf{E} = \mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E} + \mathbf{E}^*}{2} \tag{16.26}$$

і т. д.

Враховуючи, що при усередненні за період $\overline{e^{-2i\omega t}} = 0$, помічаємо, що після такої процедури у виразі $\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$ залишаться лише доданки з перехресними добутками типу $\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t}\right)$ і подібне. Тому після усереднення

$$\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = \frac{1}{16\pi}\left\{\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t}\right) + \left(\mathbf{E}^*, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\right\}, \tag{16.27}$$

де поява додаткового множника 4 біля π пов'язана з множником ½ у виразах для дійсної й уявної частин векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{D}$.

Враховуючи, що в нашому випадку (16.25)

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(t), \qquad \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} = i\omega\varepsilon^*(\omega)\mathbf{E}^*(t), \tag{16.28}$$

матимемо:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = -\frac{i\omega}{16\pi}\underbrace{\Big[\varepsilon(\omega) - \varepsilon^*(\omega)\Big]}_{=2i\varepsilon''(\omega)}\mathbf{E}^2 = \frac{1}{8\pi}\omega\varepsilon''(\omega)E^2. \tag{16.29}$$

Аналогічно для монохроматичного поля

$$\mathbf{B}(t) = \mu(\omega)\mathbf{H}(t), \tag{16.30}$$

де $\mu(\omega)$ — введена за аналогією ***комплексна магнітна проникність***. Тому

$$-\operatorname{div}\mathbf{S} = \frac{1}{8\pi}\Big[\omega\varepsilon''(\omega)E^2 + \omega\mu''(\omega)H^2\Big]. \tag{16.31}$$

Цей вираз задає кількість енерґії, яку поглинають атоми середовища за одиницю часу в одиниці об'єиу.

Розглянемо далі, як розрахувати цю кількість енерґії

$$Q = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, \operatorname{div}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, \left\{\left(\mathbf{E}, \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right) + \left(\mathbf{H}, \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\right\} \tag{16.32}$$

в загальному випадку. Запишемо напруженості електричного й магнітного полів через фур'є-компоненти:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}, \qquad \mathbf{H}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}, \tag{16.33}$$

Можна показати, що тоді енерґія, яку поглинають атоми середовища, набуває вигляду

$$Q = \int\limits_{0}^{\infty} \rho(\omega)\, d\omega, \tag{16.34}$$

де величина

$$\rho(\omega) = \frac{\omega}{4\pi^2}\Big\{\varepsilon''(\omega)|\mathbf{E}_\omega|^2 + \mu''(\omega)|\mathbf{H}_\omega|^2\Big\} \tag{16.35}$$

називається ***спектральною густиною поглинання***. Частоти, для яких $\varepsilon''(\omega) = \mu''(\omega) = 0$, утворюють ***область прозорості*** середовища (оскільки відповідні електромагнітні хвилі середовище не поглинає).

Завдання