Розділ 15

Статичні поля в середовищі

15.1. Енерґія поля в середовищі

Пригадаймо, як ми виводили закон збереження енерґії електромагнітного поля у вакуумі: добуток $(\mathbf{j}, \mathbf{E})$ мав зміст зміни з часом об'ємної густини енерґії взаємодії частинок з полем. Діючи аналогічно, запишемо рівняння Максвелла в середовищі, які містять ротори:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0.$$

Нехай для простоти вільних струмів немає ($\mathbf{j}_0 = 0$). Домноживши перше рівняння на $\mathbf{H}$, а друге на $\mathbf{E}$, і провівші викладки, подібні до тих, які ми робили з рівняннями у вакуумі, отримаємо:

$$-\operatorname{div}\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) + \left(\mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\right\}. \tag{15.1}$$

Отже, зміну з часом об'ємної густини енерґії w електромагнітного поля в середовищі можна записати як

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) + \left(\mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\right\}, \tag{15.2}$$

звідки, за умови простих лінійних зв'язків $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ та незалежності проникностей ε і μ від часу, можемо записати

$$w = \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D}) + (\mathbf{B}, \mathbf{H})}{8\pi} \tag{15.3}$$

або

$$w = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}. \tag{15.4}$$

Закон збереження енерґії матиме вигляд

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0, \tag{15.5}$$

де

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] \tag{15.6}$$

— об'ємна густина потоку енерґії електромагнітного поля в середовищі.

Отриманий вираз (15.3) для густини енерґії поля складається з двох доданків, w_e та w_m, які узагальнюють об'ємну густину енерґії електростатичного та магнітостатичного полів у вакуумі на випадок полів у середовищі:

$$w_\mathrm{e} = \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D})}{8\pi}, \qquad w_\mathrm{m} = \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{H})}{8\pi}, \tag{15.7}$$

а самі значення відповідних енерґій отримуємо інтеґруванням цих густин за об'ємом:

$$W_\mathrm{e} = \int\limits_V \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D})}{8\pi}\, dV, \qquad W_\mathrm{m} = \int\limits_V \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{H})}{8\pi}\, dV. \tag{15.8}$$

Далі розглянемо ці внески по черзі.

У статичному випадку $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, тому

$$W_\mathrm{e} = \int\limits_V \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D})}{8\pi}\, dV = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_V (\mathbf{D}, \operatorname{grad}\varphi)\, dV =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\oint\limits_S \varphi(\mathbf{D}, d\mathbf{S}) + \frac{1}{8\pi}\int\limits_V \varphi \operatorname{div}\mathbf{D}\, dV,$$

де останній крок зроблено через інтеґрування частинами після використання співвідношення

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{D}) = \varphi \operatorname{div}\mathbf{D} + (\mathbf{D}, \operatorname{grad}\varphi)$$

та застосування теореми Ґаусса. Поверхневий інтеґрал можна занулити, вибравши поверхню S достатньо далекою, а для вектора $\mathbf{D}$ використати рівняння $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_0$, тоді

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho_0\varphi\, dV. \tag{15.9}$$

Зрозуміло, що інтеґрування відбувається за об'ємом V, по якому з густиною ρ_0 розподілені вільні заряди.

Оскільки рівняння для вектора $\mathbf{E}$ в середовищі має вигляд

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho_0 + \rho'),$$

де ρ' — густина зв'язаних зарядів, то можемо записати для скалярного потенціалу рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi(\rho_0 + \rho'), \tag{15.10}$$

розв'язок якого

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_{V'} \frac{\rho_0(\mathbf{r}') + \rho'(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV', \tag{15.11}$$

де V' — область простору, в якій розподілені зв'язані і вільні заряди. Тому вираз для енерґії електростатичного поля набуде вигляду

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\int\limits_V\int\limits_{V'} \frac{\rho_0(\mathbf{r})[\rho_0(\mathbf{r}') + \rho'(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV\, dV', \tag{15.12}$$

Подібним способом можна отримати вираз для енерґії магнітного поля у статичному випадку. Вектор $\mathbf{B}$ запишемо через векторний потенціал, $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, тоді

$$W_{\text{m}} = \int\limits_V \frac{(\mathbf{B},\mathbf{H})}{8\pi}\,dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V (\mathbf{H},\operatorname{rot}\mathbf{A})\,dV =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\limits_V (\mathbf{A},\operatorname{rot}\mathbf{H})\,dV - \frac{1}{8\pi}\oint\limits_S ([\mathbf{H},\mathbf{A}], d\mathbf{S}),$$

де знову ж використано інтеґрування частинами і теорему Ґаусса після застосування співвідношення

$$\operatorname{div}[\mathbf{H},\mathbf{A}] = (\mathbf{A},\operatorname{rot}\mathbf{H}) - (\mathbf{H},\operatorname{rot}\mathbf{A}).$$

Інтеґрал за віддаленою поверхнею S дорівнюватиме нулеві, а з рівнянь Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0$. Тому

$$W_{\text{m}} = \frac{1}{2c}\int\limits_V (\mathbf{j}_0,\mathbf{A})\,dV,$$

де вільні струми розподілені по об'єму V з густиною $\mathbf{j}_0$.

Оскільки рівняння для магнітного поля можна подати через вільні й індуковані струми (які у статичному випадку зводяться до струмів намагнічення густиною $\mathbf{j}'$),

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'),$$

а

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A},$$

причому в калібруванні Кулона $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, то матимемо для векторного потенціалу рівняння Пуассона

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'). \tag{15.13}$$

Його розв'язок

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') + \mathbf{j}'(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV', \tag{15.14}$$

де V' — область простору, в якій розподілені зв'язані і вільні струми. Вираз для енергії магнітостатичного поля буде

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2c^2}\int\limits_{V}\int\limits_{V'} \frac{(\mathbf{j}_0(\mathbf{r}), \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') + \mathbf{j}'(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV\,dV', \tag{15.15}$$

Для однорідного магнетика ($\mu = \mathrm{const}$) вираз для векторного потенціалу можна отримати трохи іншим способом. Оскільки $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, то з рівняння

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0$$

маємо

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\right) = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0$$

або (за калібрування $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, як вище)

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}_0.$$

Тому векторний потенціал буде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c}\int\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV', \tag{15.16}$$

а енергія магнітостатичного поля

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{\mu}{2c^2}\int\limits_{V}\int\limits_{V'} \frac{(\mathbf{j}_0(\mathbf{r}), \mathbf{j}_0(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV\,dV'. \tag{15.17}$$