15.2. Ємність. Індуктивність

Розглянемо систему заряджених провідників. Статичні електричні заряди будуть розподілені по поверхнях, а потенціали на таких поверхнях залишаються сталими. Тому енерґію електростатичного поля (15.9) можна переписати як суму за всіма провідниками

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\sum_i \oint\limits_{S_i} \varphi\sigma\, dS = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \oint\limits_{S_i} \sigma\, dS = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i, \tag{15.18}$$

де q_i — заряд i-го провідника.

Можна показати, що заряди і потенціали пов'язані між собою такими лінійними співвідношеннями:

$$q_i = \sum_k C_{ik}\varphi_k \tag{15.19}$$

та

$$\varphi_i = \sum_k S_{ik} q_k, \tag{15.20}$$

де C_{ik} — ***ємнісні коефіцієнти***, а S_{ik} — ***потенціальні коефіцієнти***. Величини C_{ii} називають ***власними ємностями***, а C_{ik} для $i \neq k$ — ***коефіцієнтами взаємної ємності***.

Подібним способом також можна показати, що енерґія магнітостатичного поля буде

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k, \tag{15.21}$$

де ***коефіцієнт взаємної індукції***

$$L_{ik} = \mu \int\limits_{V_i}\int\limits_{V_k} \frac{(\mathbf{f}(\mathbf{r}'), \mathbf{f}(\mathbf{r}''))}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} dV'\, dV'', \tag{15.22}$$

а у випадку замкнених лінійних контурів

$$L_{ik} = \mu \oint\limits_{C_i}\oint\limits_{C_k} \frac{(d\boldsymbol{\ell}_i, d\boldsymbol{\ell}_k)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}. \tag{15.23}$$

15.3. Сили в статичних полях

Розглядатимемо діелектрик як ізотропне середовище з проникністю ε. Енергію електростатичного поля в такому разі можна подати як

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V (\mathbf{E},\mathbf{D})\,dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V \varepsilon E^2\,dV. \tag{15.24}$$

Зміна енерґії під впливом деформації середовища дорівнює

$$\delta W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2\delta\varepsilon\,dV + \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \varepsilon(\mathbf{E},\delta\mathbf{E})\,dV. \tag{15.25}$$

З урахуванням $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ та $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ матимемо після застосування теореми Ґаусса

$$\int\limits_V \varepsilon(\mathbf{E},\delta\mathbf{E})\,dV = -\int\limits_V (\mathbf{D},\delta\operatorname{grad}\varphi)\,dV = -\int\limits_V (\mathbf{D},\operatorname{grad}\delta\varphi)\,dV =$$

$$= -\int\limits_V \operatorname{div}(\mathbf{D}\delta\varphi)\,dV + \int\limits_V (\operatorname{div}\mathbf{D})\,\delta\varphi\,dV =$$

$$= -\oint\limits_S (\mathbf{D}\delta\varphi, d\mathbf{S}) + \int\limits_V 4\pi\rho_0\,\delta\varphi\,dV.$$

Поверхневий інтеґрал можна занулити правильним вибором поверхні. Отже,

$$\delta W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2\delta\varepsilon\,dV + \int\limits_V \rho_0\,\delta\varphi\,dV. \tag{15.26}$$

Записуючи ту саму енерґію через скалярний потенціал (15.9), отримаємо

$$\delta W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho_0\delta\varphi\,dV + \frac{1}{2}\int\limits_V \varphi\delta\rho_0\,dV. \tag{15.27}$$

Помічаючи в двох останніх виразах для зміни енерґії інтеґрали від $\rho_0\delta\varphi$, відразу з $\delta W_{\text{e}} = 2\delta W_{\text{e}} - \delta W_{\text{e}}$ матимемо

$$\delta W_{\text{e}} = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2\delta\varepsilon\, dV + \int\limits_V \varphi\delta\rho_0\, dV. \tag{15.28}$$

Зафіксувавши розподіл вільних зарядів ($\delta\rho_0$), отримаємо просто

$$\delta W_{\text{e}} = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2\delta\varepsilon\, dV. \tag{15.29}$$

Якщо врахувати деформацію середовища, яке описує вектор деформації $\mathbf{u}$, так що

$$\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon, \tag{15.30}$$

а також зміну (масової) густини τ середовища

$$d\tau = -\tau\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \tag{15.31}$$

то зміна діелектричної проникності буде

$$\delta\varepsilon = -(\mathbf{u}, \mathrm{grad}\,\varepsilon(-\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}. \tag{15.32}$$

Зміна ж енерґії поля під впливом сили густиною $\mathbf{f}$, яка діє на середовище, дорівнюватиме

$$\delta W_{\text{e}} = -\int\limits_V(\mathbf{f},\mathbf{u})\, dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2\left[(\mathbf{u}, \mathrm{grad}\,\varepsilon) + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right] dV. \tag{15.33}$$

У другому доданку під інтеґралом нескладно виокремити вектор $\mathbf{u}$:

$$E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathrm{div}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\mathbf{u}\right) - \mathbf{u}\,\mathrm{grad}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right).$$

Після застосування теореми Ґаусса інтеґрал від доданка з диверґенцією перетворюється в поверхневий, і його можна занулити. Тому остаточно для густини сили

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{8\pi}\left[E^2\,\mathrm{grad}\,\varepsilon - \mathrm{grad}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\right] - \mathrm{grad}\,p_0, \tag{15.34}$$

де p_0 — гідростатичний тиск, що має неелектромагнітну природу.

Вираз для сили можна подати через тензор напружень $\hat{\sigma}$:

$$\mathbf{f} = \operatorname{Div}\sigma = (\boldsymbol{\nabla}, \hat{\sigma}). \tag{15.35}$$

Щоб записати силу в такому вигляді, потрібно в доданку з $E^2 \operatorname{grad}\varepsilon$ перенести наблу ліворуч. Запишемо відповідні перетворення:

$$E^2\boldsymbol{\nabla}\varepsilon = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - \varepsilon\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{E}, \mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2\varepsilon(\mathbf{E}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} - 2[\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}],$$

де ми скористалися тотожністю (11.31) на стор. 178. За сталого магнітного поля $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, тому далі:

$$E^2\boldsymbol{\nabla}\varepsilon = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2\varepsilon(\mathbf{E}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2(\mathbf{D}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} =$$
$$= \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{D})\mathbf{E} + 2\mathbf{E}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{D}).$$

Якщо тепер припустити, що в об'ємі немає вільних зарядів, то останній доданок $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, тому остаточно

$$E^2\boldsymbol{\nabla}\varepsilon = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2\varepsilon(\mathbf{E}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2(\mathbf{D}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} =$$
$$= \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{D})\mathbf{E} + 2\mathbf{E}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{D}).$$

$$E^2\boldsymbol{\nabla}\varepsilon = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{D})\mathbf{E},$$

і сила буде

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{\nabla}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right) + \frac{1}{8\pi}\boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}, \varepsilon\mathbf{E})\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla}p_0. \tag{15.36}$$

Звідси відразу бачимо, що тензор напружень можна записати як

$$\sigma_{jk} = -\frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\delta_{jk} + \frac{1}{4\pi}\varepsilon E_j E_k - p_0\delta_{jk}. \tag{15.37}$$

Внесок у зміну енерґії середовища під впливом магнітного поля можна розрахувати цілком аналогічно. Щоб отримати відповідний результат, достатньо у виразах для електричного поля замінити вектор $\mathbf{E}$ на $\mathbf{B}$, а замість діелектричної проникності ε взяти μ^{-1}. Отже, матимемо для об'ємної густини сили:

$$\mathbf{f}^{(\mathrm{m})} = -\frac{1}{8\pi}\left[B^2 \operatorname{grad}\mu^{-1} - \operatorname{grad}\left(B^2\tau\frac{\partial\mu^{-1}}{\partial\tau}\right)\right] - \operatorname{grad} p_0, \quad (15.38)$$

а для тензора напружень:

$$\sigma_{jk}^{(\mathrm{m})} = -\frac{B^2}{8\pi}\left(\mu^{-1} - \tau\frac{\partial\mu^{-1}}{\partial\tau}\right)\delta_{jk} + \frac{1}{4\pi}\mu^{-1}B_jB_k - p_0\delta_{jk}. \quad (15.39)$$