Розділ 15

Статичні поля в середовищі

15.1. Енерґія поля в середовищі

Пригадаймо, як ми виводили закон збереження енерґії електромагнітного поля у вакуумі: добуток $(\mathbf{j}, \mathbf{E})$ мав зміст зміни з часом об'ємної густини енерґії взаємодії частинок з полем. Діючи аналогічно, запишемо рівняння Максвелла в середовищі, які містять ротори:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0.$$

Нехай для простоти вільних струмів немає ($\mathbf{j}_0 = 0$). Домноживши перше рівняння на $\mathbf{H}$, а друге на $\mathbf{E}$, і провівші викладки, подібні до тих, які ми робили з рівняннями у вакуумі, отримаємо:

$$-\operatorname{div}\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) + \left(\mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\right\}. \tag{15.1}$$

Отже, зміну з часом об'ємної густини енерґії w електромагнітного поля в середовищі можна записати як

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) + \left(\mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\right\}, \tag{15.2}$$

звідки, за умови простих лінійних зв'язків $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ та незалежності проникностей ε і μ від часу, можемо записати

$$w = \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D}) + (\mathbf{B}, \mathbf{H})}{8\pi} \tag{15.3}$$

або

$$w = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}. \tag{15.4}$$

Закон збереження енерґії матиме вигляд

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0, \tag{15.5}$$

де

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] \tag{15.6}$$

— об'ємна густина потоку енерґії електромагнітного поля в середовищі.

Отриманий вираз (15.3) для густини енерґії поля складається з двох доданків, w_{e} та w_{m}, які узагальнюють об'ємну густину енерґії електростатичного та магнітостатичного полів у вакуумі на випадок полів у середовищі:

$$w_{\mathrm{e}} = \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D})}{8\pi}, \qquad w_{\mathrm{m}} = \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{H})}{8\pi}, \tag{15.7}$$

а самі значення відповідних енерґій отримуємо інтеґруванням цих густин за об'ємом:

$$W_{\mathrm{e}} = \int\limits_V \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D})}{8\pi}\, dV, \qquad W_{\mathrm{m}} = \int\limits_V \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{H})}{8\pi}\, dV. \tag{15.8}$$

Далі розглянемо ці внески по черзі.

У статичному випадку $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, тому

$$W_{\mathrm{e}} = \int\limits_V \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D})}{8\pi}\, dV = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_V (\mathbf{D}, \operatorname{grad}\varphi)\, dV =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\oint\limits_S \varphi(\mathbf{D}, d\mathbf{S}) + \frac{1}{8\pi}\int\limits_V \varphi\ \mathrm{div}\,\mathbf{D}\ dV,$$

де останній крок зроблено через інтеґрування частинами після використання співвідношення

$$\mathrm{div}(\varphi\mathbf{D}) = \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{D} + (\mathbf{D}, \mathrm{grad}\,\varphi)$$

та застосування теореми Ґаусса. Поверхневий інтеґрал можна занулити, вибравши поверхню S достатньо далекою, а для вектора $\mathbf{D}$ використати рівняння $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho_0$, тоді

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho_0\varphi\,dV. \tag{15.9}$$

Зрозуміло, що інтеґрування відбувається за об'ємом V, по якому з густиною ρ_0 розподілені вільні заряди.

Оскільки рівняння для вектора $\mathbf{E}$ в середовищі має вигляд

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi(\rho_0 + \rho'),$$

де ρ' — густина зв'язаних зарядів, то можемо записати для скалярного потенціалу рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi(\rho_0 + \rho'), \tag{15.10}$$

розв'язок якого

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_{V'} \frac{\rho_0(\mathbf{r}') + \rho'(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dV', \tag{15.11}$$

де V' — область простору, в якій розподілені зв'язані і вільні заряди. Тому вираз для енерґії електростатичного поля набуде вигляду

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\int\limits_V\int\limits_{V'} \frac{\rho_0(\mathbf{r})[\rho_0(\mathbf{r}') + \rho'(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dV\,dV', \tag{15.12}$$

Подібним способом можна отримати вираз для енерґії магнітного поля у статичному випадку. Вектор $\mathbf{B}$ запишемо через векторний потенціал, $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, тоді

$$W_{\text{m}} = \int\limits_V \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{H})}{8\pi}\,dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V (\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{A})\,dV =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\limits_V (\mathbf{A}, \operatorname{rot}\mathbf{H})\,dV - \frac{1}{8\pi}\oint\limits_S ([\mathbf{H}, \mathbf{A}], d\mathbf{S}),$$

де знову ж використано інтеґрування частинами і теорему Ґаусса після застосування співвідношення

$$\operatorname{div}[\mathbf{H}, \mathbf{A}] = (\mathbf{A}, \operatorname{rot}\mathbf{H}) - (\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{A}).$$

Інтеґрал за віддаленою поверхнею S дорівнюватиме нулеві, а з рівнянь Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0$. Тому

$$W_{\text{m}} = \frac{1}{2c}\int\limits_V (\mathbf{j}_0, \mathbf{A})\,dV,$$

де вільні струми розподілені по об'єму V з густиною $\mathbf{j}_0$.

Оскільки рівняння для магнітного поля можна подати через вільні й індуковані струми (які у статичному випадку зводяться до струмів намагнічення густиною $\mathbf{j}'$),

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'),$$

а

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A},$$

причому в калібруванні Кулона $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, то матимемо для векторного потенціалу рівняння Пуассона

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'). \tag{15.13}$$

Його розв'язок

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') + \mathbf{j}'(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV', \tag{15.14}$$

де V' — область простору, в якій розподілені зв'язані і вільні струми. Вираз для енерґії магнітостатичного поля буде

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2c^2} \int\limits_{V} \int\limits_{V'} \frac{(\mathbf{j}_0(\mathbf{r}), \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') + \mathbf{j}'(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV \, dV', \tag{15.15}$$

Для однорідного магнетика ($\mu = \mathrm{const}$) вираз для векторного потенціалу можна отримати трохи іншим способом. Оскільки $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, то з рівняння

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0$$

маємо

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\right) = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0$$

або (за калібрування $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, як вище)

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}_0.$$

Тому векторний потенціал буде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c} \int\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV', \tag{15.16}$$

а енерґія магнітостатичного поля

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{\mu}{2c^2} \int\limits_{V} \int\limits_{V'} \frac{(\mathbf{j}_0(\mathbf{r}), \mathbf{j}_0(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV \, dV'. \tag{15.17}$$

15.2. Ємність. Індуктивність

Розглянемо систему заряджених провідників. Статичні електричні заряди будуть розподілені по поверхнях, а потенціали на таких поверхнях залишаються сталими. Тому енерґію електростатичного поля (15.9) можна переписати як суму за всіма провідниками

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\sum_i \oint\limits_{S_i} \varphi\sigma\, dS = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \oint\limits_{S_i} \sigma\, dS = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i, \tag{15.18}$$

де q_i — заряд i-го провідника.

Можна показати, що заряди і потенціали пов'язані між собою такими лінійними співвідношеннями:

$$q_i = \sum_k C_{ik}\varphi_k \tag{15.19}$$

та

$$\varphi_i = \sum_k S_{ik} q_k, \tag{15.20}$$

де C_{ik} — ***ємнісні коефіцієнти***, а S_{ik} — ***потенціальні коефіцієнти***. Величини C_{ii} називають ***власними ємностями***, а C_{ik} для $i \neq k$ — ***коефіцієнтами взаємної ємності***.

Подібним способом також можна показати, що енерґія магнітостатичного поля буде

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k, \tag{15.21}$$

де ***коефіцієнт взаємної індукції***

$$L_{ik} = \mu \int\limits_{V_i}\int\limits_{V_k} \frac{(\mathbf{f}(\mathbf{r}'), \mathbf{f}(\mathbf{r}''))}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} dV'\, dV'', \tag{15.22}$$

а у випадку замкнених лінійних контурів

$$L_{ik} = \mu \oint\limits_{C_i}\oint\limits_{C_k} \frac{(d\boldsymbol{\ell}_i, d\boldsymbol{\ell}_k)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}. \tag{15.23}$$

15.3. Сили в статичних полях

Розглядатимемо діелектрик як ізотропне середовище з проникністю ε. Енергію електростатичного поля в такому разі можна подати як

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V (\mathbf{E},\mathbf{D})\,dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V \varepsilon E^2\,dV. \tag{15.24}$$

Зміна енерґії під впливом деформації середовища дорівнює

$$\delta W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2\delta\varepsilon\,dV + \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \varepsilon(\mathbf{E},\delta\mathbf{E})\,dV. \tag{15.25}$$

З урахуванням $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ та $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ матимемо після застосування теореми Ґаусса

$$\int\limits_V \varepsilon(\mathbf{E},\delta\mathbf{E})\,dV = -\int\limits_V (\mathbf{D},\delta\operatorname{grad}\varphi)\,dV = -\int\limits_V (\mathbf{D},\operatorname{grad}\delta\varphi)\,dV =$$

$$= -\int\limits_V \operatorname{div}(\mathbf{D}\delta\varphi)\,dV + \int\limits_V (\operatorname{div}\mathbf{D})\,\delta\varphi\,dV =$$

$$= -\oint\limits_S (\mathbf{D}\delta\varphi, d\mathbf{S}) + \int\limits_V 4\pi\rho_0\,\delta\varphi\,dV.$$

Поверхневий інтеґрал можна занулити правильним вибором поверхні. Отже,

$$\delta W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2\delta\varepsilon\,dV + \int\limits_V \rho_0\,\delta\varphi\,dV. \tag{15.26}$$

Записуючи ту саму енерґію через скалярний потенціал (15.9), отримаємо

$$\delta W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho_0\delta\varphi\,dV + \frac{1}{2}\int\limits_V \varphi\delta\rho_0\,dV. \tag{15.27}$$

Помічаючи в двох останніх виразах для зміни енерґії інтеґрали від $\rho_0\delta\varphi$, відразу з $\delta W_{\text{e}} = 2\delta W_{\text{e}} - \delta W_{\text{e}}$ матимемо

$$\delta W_{\text{e}} = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2\delta\varepsilon\, dV + \int\limits_V \varphi\delta\rho_0\, dV. \tag{15.28}$$

Зафіксувавши розподіл вільних зарядів ($\delta\rho_0$), отримаємо просто

$$\delta W_{\text{e}} = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2\delta\varepsilon\, dV. \tag{15.29}$$

Якщо врахувати деформацію середовища, яке описує вектор деформації $\mathbf{u}$, так що

$$\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon, \tag{15.30}$$

а також зміну (масової) густини τ середовища

$$d\tau = -\tau\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \tag{15.31}$$

то зміна діелектричної проникності буде

$$\delta\varepsilon = -(\mathbf{u}, \mathrm{grad}\,\varepsilon(-\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}. \tag{15.32}$$

Зміна ж енерґії поля під впливом сили густиною $\mathbf{f}$, яка діє на середовище, дорівнюватиме

$$\delta W_{\text{e}} = -\int\limits_V (\mathbf{f}, \mathbf{u})\, dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2\left[(\mathbf{u}, \mathrm{grad}\,\varepsilon) + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right] dV. \tag{15.33}$$

У другому доданку під інтеґралом нескладно виокремити вектор $\mathbf{u}$:

$$E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathrm{div}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\mathbf{u}\right) - \mathbf{u}\,\mathrm{grad}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right).$$

Після застосування теореми Ґаусса інтеґрал від доданка з диверґенцією перетворюється в поверхневий, і його можна занулити. Тому остаточно для густини сили

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{8\pi}\left[E^2\,\mathrm{grad}\,\varepsilon - \mathrm{grad}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\right] - \mathrm{grad}\,p_0, \tag{15.34}$$

де p_0 — гідростатичний тиск, що має неелектромагнітну природу.

Вираз для сили можна подати через тензор напружень $\hat{\sigma}$:

$$\mathbf{f} = \operatorname{Div}\sigma = (\boldsymbol{\nabla}, \hat{\sigma}). \tag{15.35}$$

Щоб записати силу в такому вигляді, потрібно в доданку з $E^2 \operatorname{grad}\varepsilon$ перенести наблу ліворуч. Запишемо відповідні перетворення:

$$E^2\boldsymbol{\nabla}\varepsilon = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - \varepsilon\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{E}, \mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2\varepsilon(\mathbf{E}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} - 2[\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}],$$

де ми скористалися тотожністю (11.31) на стор. 178. За сталого магнітного поля $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, тому далі:

$$E^2\boldsymbol{\nabla}\varepsilon = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2\varepsilon(\mathbf{E}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2(\mathbf{D}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} =$$
$$= \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{D})\mathbf{E} + 2\mathbf{E}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{D}).$$

Якщо тепер припустити, що в об'ємі немає вільних зарядів, то останній доданок $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, тому остаточно

$$E^2\boldsymbol{\nabla}\varepsilon = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2\varepsilon(\mathbf{E}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2(\mathbf{D}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} =$$
$$= \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{D})\mathbf{E} + 2\mathbf{E}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{D}).$$

$$E^2\boldsymbol{\nabla}\varepsilon = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - 2(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{D})\mathbf{E},$$

і сила буде

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{\nabla}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right) + \frac{1}{8\pi}\boldsymbol{\nabla}(\varepsilon E^2) - \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}, \varepsilon\mathbf{E})\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla}p_0. \tag{15.36}$$

Звідси відразу бачимо, що тензор напружень можна записати як

$$\sigma_{jk} = -\frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\delta_{jk} + \frac{1}{4\pi}\varepsilon E_j E_k - p_0\delta_{jk}. \tag{15.37}$$

Внесок у зміну енергії середовища під впливом магнітного поля можна розрахувати цілком аналогічно. Щоб отримати відповідний результат, достатньо у виразах для електричного поля замінити вектор **E** на **B**, а замість діелектричної проникності ε взяти μ^{-1}. Отже, матимемо для об'ємної густини сили:

$$\mathbf{f}^{(\mathrm{m})} = -\frac{1}{8\pi}\left[B^2 \operatorname{grad}\mu^{-1} - \operatorname{grad}\left(B^2\tau\frac{\partial\mu^{-1}}{\partial\tau}\right)\right] - \operatorname{grad}p_0, \quad (15.38)$$

а для тензора напружень:

$$\sigma_{jk}^{(\mathrm{m})} = -\frac{B^2}{8\pi}\left(\mu^{-1} - \tau\frac{\partial\mu^{-1}}{\partial\tau}\right)\delta_{jk} + \frac{1}{4\pi}\mu^{-1}B_jB_k - p_0\delta_{jk}. \quad (15.39)$$