# Розділ 17

# Квазістатичні явища

## 17.1. Умови квазістатичності та рівняння квазістатичних явищ

Квазістаціонарне наближення відповідає тому, що густину струму зміщення $\partial\mathbf{D}/\partial t$ вважають нехтовно малою порівняно з густиною струму провідності $\mathbf{j}_0$. Рівняння Максвелла у цьому наближенні мають вигляд:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_0, \tag{17.1a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{17.1b}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{17.1c}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0. \tag{17.1d}$$

За умов високої провідності $\sigma$ густиною вільних зарядів у провіднику можна знехтувати, $\rho_0 \simeq 0$. Враховуючи зв'язки $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ та $\mathbf{j}_0 = \sigma\mathbf{E}$, отримаємо після нескладних перетворень:

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \tag{17.2}$$

## 17.2. Скін-ефект

Явище протікання змінного струму переважно в приповерхневому шарі провідника, яке називають скін-ефектом, експериментально відкрив у 1885–86 році Г'юґс[1], підтвердивши передбачення Лемба[2] (1883) і Гевісайда (1885).

Розглянемо поширення змінного струму в провіднику (рис. 17.1). Струм $I$ породжує змінне магнітне $\mathbf{B}$ поле всередині провідника, яке, своєю чергою, є джерелом електричного поля $\mathbf{E}$. Це електричне поле зорієнтоване так, що під його впливом заряди рухаються швидше біля поверхні провідника і навпаки — гальмуються ближче до його середини.

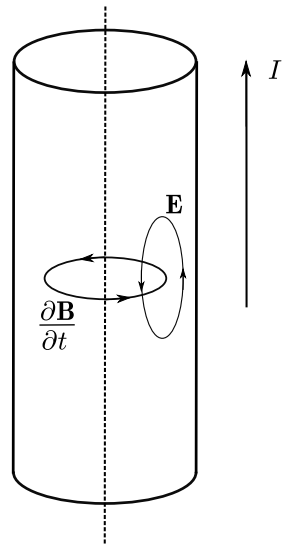


Рис. 17.1. Напрямки векторів для пояснення скін-ефекту.

Нехай часові залежності, що визначають змінне поле, мають вигляд $\mathbf{E} \sim e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H} \sim e^{-i\omega t}$. Для спрощення розглянемо модель, у якій провідник займає весь півпростір $z > 0$ (див. рис. 17.2).

[1] Девід Едвард Г'юґс (David Edward Hughes, 16.V.1831–22.I.1900), британсько-американський винахідник.

[2] Горацій Лемб (Sir Horace Lamb, 27.XI.1849–04.XII.1934), англійський математик і фізик.

Рис. 17.2. Скін-ефект у випадку безмежного провідника.

У рівнянні

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

тоді можна розглядати лише залежність від однієї просторової змінної:

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2} = -\frac{4\pi i\omega\mu\sigma}{c^2}\mathbf{E}, \tag{17.3}$$

де враховано часову залежність електричного поля, $\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega\mathbf{E}$.

Розв'язок рівняння має вигляд

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{pz}, \qquad \text{де} \quad p = \pm\frac{i}{c}\sqrt{i\,4\pi\mu\omega\sigma}. \tag{17.4}$$

Виберемо $\operatorname{Re} p < 0$, що відповідає зменшенню поля із заглибленням всередину провідника:

$$p = \frac{i-1}{\delta}, \qquad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}}. \tag{17.5}$$

Напруженість електричного поля, таким чином, буде

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t\right)}. \tag{17.6}$$

Як бачимо, $\delta \sim 1/\sqrt{\omega}$ відповідає відстані, на якій величина електричного поля зменшується в $e$ разів, тобто її можна проінтерпретувати як глибину проникнення поля — а, отже, й струму — в провідник.

Щоб оцінити порядок величин, розгляньмо мідний провідник, для якого за нормальних температур $\sigma_{\mathrm{Cu}} \simeq 5\cdot 10^{17}\,\mathrm{c}^{-1}$. Зважаючи

на те, що мідь — діамагнетик, з доброю точністю $\mu_{\mathrm{Cu}} \simeq 1$. Простий розрахунок за формулою (17.5) дає для частоти $\nu = 50$ Гц (пам'ятаймо, що $\omega = 2\pi\nu$) глибину $\delta \simeq 0.9$ см. Якщо частота зростає до 1 МГц, то глибина зменшується до $\delta \simeq 0.07$ мм, а для 10 МГц — до $\delta \simeq 0.02$ мм.

Напруженість магнітного поля знайдемо за допомогою співвідношення

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{c} i\omega \mathbf{H}, \tag{17.7}$$

тобто

$$\mathbf{H} = -i\frac{c}{\mu\omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}, \tag{17.8}$$

Вважаючи електричне поле паралельним до поверхні провідника вздовж осі $Ox$, $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$, отримаємо магнітне поле $\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$ або для амплітуд:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{c}{\mu\omega\delta}(1+i)[\mathbf{k}, \mathbf{E}_0], \tag{17.9}$$

де $\mathbf{k}$ — орт осі $Oz$ декартової системи координат. Зв'язок між величинами електричного і магнітного полів на поверхні провідника $(z = 0)$ матиме вигляд:

$$E_0 = (1-i)\frac{\omega\delta}{2c} B_0 = \zeta B_0, \tag{17.10}$$

де коефіцієнт пропорційності

$$\zeta = (1-i)\frac{\omega\delta}{2c} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \tag{17.11}$$

називають ***поверхневим імпедансом*** металу[3].

[3] Для цієї величини, що має розмірність опору, також використовують означення $Z = \dfrac{E_x(0)}{\int\limits_0^\infty j_x(z)\,dz}$, де $j_x(z)$ — $x$-компонента густини струму, що зменшується із зануренням вглиб провідника $(z \to \infty)$. Як нескладно побачити, $Z$ і $\zeta$ відрізняються лише сталим множником $4\pi/c$.

Далі розрахуємо опір провідника радіусом $a$ (див. рис. 17.3). Зробимо заміну $z = a - r$ у виразі для напруженості електричного поля (17.6):

$$\mathbf{E}(r,t) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{(a-r)}{\delta}} e^{i\left(\frac{a-r}{\delta} - \omega t\right)} = \mathbf{E}_0 e^{(i-1)\frac{a-r}{\delta}} e^{-i\omega t}. \tag{17.12}$$

Враховуючи, що $\mathbf{j}_0 = \sigma\mathbf{E}$, знайдемо струм, що тече через переріз провідника:

$$I = \int (\sigma\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 2\pi\sigma \int\limits_0^a Er\,dr = 2\pi\sigma e^{-i\omega t} E_0 \int\limits_0^a e^{(1-i)\frac{r-a}{\delta}} r\,dr. \tag{17.13}$$

Цей інтеґрал можна розрахувати, використовуючи диференціювання за параметром $\gamma = (1-i)/\delta$:

$$\int\limits_0^a e^{\gamma r} r\,dr = \frac{\partial}{\partial\gamma} \int\limits_0^a e^{\gamma r}\,dr = \frac{\partial}{\partial\gamma} \frac{e^{\gamma a} - 1}{\gamma} = e^{\gamma a}\left(\frac{a}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}\right) + \frac{1}{\gamma^2}.$$

Знехтувавши внесками, пропорційними до малої величини $(\delta/a)^2$ (тобто відкинувши доданки, що містять $1/\gamma^2$), отримаємо:

$$I \simeq (1+i)\pi\sigma\delta a E_0 e^{-i\omega t}. \tag{17.14}$$

Щоб розрахувати середнє значення $\langle I^2 \rangle$, потрібно, як і в розділі 16.3, розглянути лише дійсну частину $\operatorname{Re} I$. У результаті матимемо просто:

$$\langle I^2 \rangle = (\pi\sigma\delta a E_0)^2. \tag{17.15}$$

Кількість теплоти, що виділяється у провіднику зі струмом одиничної довжини, за законом Джоуля–Ленца[4] дорівнює

$$\frac{dQ}{dt} = RI^2 = RI \cdot I = U \cdot I = \int (\mathbf{E}, d\boldsymbol{\ell}) \cdot \int (\sigma\mathbf{E}, d\mathbf{S}). \tag{17.16}$$

[4] Джеймс Прескотт Джоуль (James Prescott Joule, 24.XII.1818–11.X.1889), англійський фізик і пивовар; Еміль Ленц (Эмилий Ленц, Heinrich Friedrich Emil Lenz, 12.II.1804–10.II.1865), російський фізик.

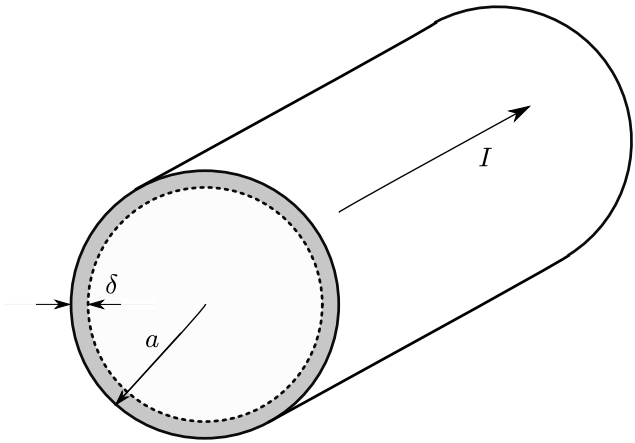


Рис. 17.3. Скін-ефект у циліндричному провіднику. Поле проникає всередину на малу глибину $\delta \ll a$.

Розглядаючи провідник одиничної довжини, для середнього значення запишемо:

$$\left\langle \frac{dQ}{dt} \right\rangle = R\langle I^2 \rangle = \int \sigma \langle E^2 \rangle \, dS. \tag{17.17}$$

Інтеґрування за кутом і радіальною координатою проведемо так само, як вище для розрахунку струму, що дасть

$$2\pi\sigma E_0 \int\limits_0^a e^{2(1-i)\frac{r-a}{\delta}} r \, dr \simeq \frac{1+i}{2} \pi\sigma\delta a E_0^2. \tag{17.18}$$

Зберігаючи лише дійсну частину, після усереднення за часто матимемо:

$$R\langle I^2 \rangle = R\left(\pi\sigma\delta a E_0\right)^2 = \int \sigma \langle E^2 \rangle \, dS = \frac{1}{2}\pi\sigma\delta a E_0^2. \tag{17.19}$$

Таким чином, опір

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma\delta a} \sim \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\sigma}}, \tag{17.20}$$

причому легко зауважити, що його можна подати у вигляді

$$R = \frac{1}{\sigma S_{\text{skin}}}, \tag{17.21}$$

де $S_{\text{skin}} = 2\pi a \cdot \delta$ — площа кільця, по якому тече струм (див. рис. 17.3). ***Скінова провідність*** буде

$$\Sigma = \frac{1}{R} \sim \sqrt{\sigma} \tag{17.22}$$

Ця залежність відповідає так званому ***нормальному скін-ефекті***.

Із (17.5) бачимо, що глибина $\delta$ проникнення поля в провідник за великих частот $\omega$ може стати дуже малою, навіть сумірною з довжиною вільного пробігу $l$ носіїв заряду — електронів. Щоб оцінити реалістичність такого співвідношення між $\omega$ та $l$, знову ж розглянемо мідний провідник. За температури $T = 300$ K довжина вільного пробігу електронів у ньому $l_{\text{Cu};\,300\,\text{K}} \simeq 40$ нм. Таких значень товщина скінового шару досягає на частотах $\nu \simeq 3 \cdot 10^{12}$ Гц, тобто в терагерцовому діапазоні. Проте зі зниженням температури провідність і довжина вільного пробігу зростають, наприклад, для $T = 10$ K матимемо $\sigma_{\text{Cu}} \simeq 3.5 \cdot 10^{22}$ с$^{-1}$ та $l_{\text{Cu};\,10\,\text{K}} \sim 10^{-4}$ см. Таку товщину скінового шару отримаємо вже для $\nu \simeq 60$ кГц.

У цій ситуації просторові неоднорідності поля стають суттєвими, тому зв'язок між струмом і напруженістю вже не можна записувати як простий закон Ома $\mathbf{j}_0 = \sigma\mathbf{E}$. Натомість правильною буде така нелокальна форма:

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) = \int\limits_V \mathscr{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}', t)\, dV', \tag{17.23}$$

де ядро $\mathscr{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в загальному випадку має досить складний вигляд, для його знаходження потрібно розв'язувати кінетичне рівняння для функції розподілу електронів у провіднику.

Виявляється, що можна ввести деяку характерну глибину проникнення $\delta_{\text{a}} \sim \omega^{-1/3}$. Ця залежність від частоти слабша, ніж за нормального скін-ефекту (17.5), а відповідне явище називають ***аномальним скін-ефектом***. Для ілюстрації на рис. 17.4 показано залежність скінової провідності $\Sigma$ від провідності $\sigma$ для нормального й аномального скін-ефектів.

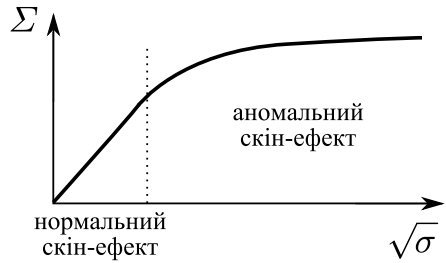


Рис. 17.4. Скінова провідність.