17.4. Магнітна гідродинаміка

Предметом розгляду магнітної гідродинаміки є електромагнітні процеси в повільнорухомих провідниках (рідинах і газах), відповідні задачі виникають, наприклад, в астрофізиці чи фізиці плазми. Для таких процесів характерні високі значення провідності ($\sigma \sim 10^{17}\,\text{с}^{-1}$), а магнітна провідність близька до одиниці, $\mu \simeq 1$.

Запишемо рівняння Максвелла у квазістатичному наближенні (17.1):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{17.24a}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{17.24b}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{17.24c}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{17.24d}$$

Оскільки $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, а $\mu \simeq 1$, то $\mathbf{B} \simeq \mathbf{H}$. Густина струму визначається співвідношенням

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} + \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]\right), \tag{17.25}$$

яке розглядатимемо у власній системі відліку ($\mathbf{v} = 0$).

Візьмемо rot від рівняння (17.24d) і зробимо прості перетворення:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\mathbf{j},$$
$$\underbrace{\operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{H}}_{\simeq 0} - \Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\underbrace{\operatorname{rot}\mathbf{E}}_{\simeq -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}} + \frac{4\pi}{c}\sigma\frac{1}{c}\operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] \qquad \Big| \cdot \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

У результаті матимемо рівняння:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H} + \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \tag{17.26}$$

яке визначає напруженість магнітного поля **H** в рідкому провіднику. Тут **v** — швидкість, з якою рухається вибрана ділянка провідника. Її можна знайти з рівнянь звичайної гідродинаміки.

Розглянемо рівняння Ейлера[5]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\tau}\boldsymbol{\nabla} p + \frac{1}{\tau}\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{H}]\right), \tag{17.27}$$

де τ — густина речовини, а p — тиск. Зазначимо, що це рівняння відповідає найпростішому наближенню нестисливої нев'язкої рідини.

Виконаємо деякі перетворення в рівнянні (17.26):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] &= \big[\boldsymbol{\nabla}, [\mathbf{v}, \mathbf{H}]\big] = (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{H})\mathbf{v} - (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{v})\mathbf{H} = \\ &= \mathbf{v}\underbrace{(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{H})}_{=0} + (\mathbf{H}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} - \mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{v} - (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{H},\end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{H}}_{=d\mathbf{H}(\mathbf{r},t)/dt} = (\mathbf{H}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} - \mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Запишемо також ***закон збереження маси*** (рівняння неперервності):

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \operatorname{div}(\tau\mathbf{v}) = 0 \tag{17.28}$$

або

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + (\mathbf{v}.\boldsymbol{\nabla})\tau + \tau\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{d\tau}{t} + \tau\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{17.29}$$

Таким чином, отримаємо рівність

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = (\mathbf{H}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} + \frac{\mathbf{H}}{\tau}\frac{\tau}{t}. \tag{17.30}$$

[5]Леонард Ейлер або Ойлер (Leonhard Euler, 15.IV.1707–7(18).IX.1783), швейцарський учений.

Врахувавши, що

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{H}}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau}\frac{d\mathbf{H}}{dt} - \mathbf{H}\frac{1}{\tau}\frac{\tau}{t},$$

після домноження (17.30) на $1/\tau$ будемо мати

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{H}}{\tau}\right) = \left(\frac{\mathbf{H}}{\tau}, \boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v}. \tag{17.31}$$

17.5. Магнітодинамічні хвилі

Розглянемо хвильові розв'язки рівнянь магнітної гідродинаміки. Записавши густину струму у вигляді $\mathbf{j} = \dfrac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}$ і враховуючи, що в хвильовій області густина заряду $\rho = 0$, матимемо систему рівнянь:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \qquad \frac{\partial\tau}{\partial t} + \operatorname{div}(\tau\mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\tau}\boldsymbol{\nabla}p - \frac{1}{4\pi\tau}[\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{H}].\end{gathered} \tag{17.32}$$

Малі зміни поля величиною $\mathbf{h}$ виникають на фоні зовнішнього сталого значення напруженості $\mathbf{H}_0$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}. \tag{17.33}$$

Зовнішнє поле незначно змінює густини й тиски:

$$\tau = \tau_0 + \tau', \qquad p = p_0 + p', \tag{17.34}$$

де τ', p' — малі поправки, а швидкість повністю визначається поправкою

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}', \tag{17.35}$$

оскільки без зовнішнього поля $\mathbf{v} = 0$.

З точністю до першого порядку за поправками систему (17.32) запишемо так:

$$\operatorname{div}\mathbf{h} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}_0], \qquad \tau_0 \operatorname{div}\mathbf{v} = -\frac{\partial \tau}{\partial t},$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau_0}\boldsymbol{\nabla} p' - \frac{1}{4\pi\tau_0}[\mathbf{H}_0, \operatorname{rot}\mathbf{h}]. \tag{17.36}$$

В останньому рівнянні врахуємо зв'язок швидкості поширення звуку u_0 зі зміною густини й тиску:

$$u_0^2 = \frac{p - p_0}{\tau - \tau_0} = \frac{p'}{\tau'} \quad \Rightarrow \quad p' = u_0^2\tau' \tag{17.37}$$

і перепишемо його у вигляді

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = -\frac{u_0^2}{\tau_0}\boldsymbol{\nabla}\tau' - \frac{1}{4\pi\tau_0}[\mathbf{H}_0, \operatorname{rot}\mathbf{h}]. \tag{17.38}$$

Можна переконатися, що лінійні диференціальні рівняння (17.36), (17.38) мають хвильові розв'язки $\mathbf{h}, \mathbf{v}, \tau' \sim e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$. Підставляючи їх у відповідні рівняння, отримаємо після нескладних перетворень таке:

$$(\mathbf{k}, \mathbf{h}) = 0, \qquad \omega\mathbf{h} = -[\mathbf{k}, [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0]], \qquad \omega\tau' = \tau_0(\mathbf{k}, \mathbf{v}),$$
$$\omega\mathbf{v} = \frac{u_0^2}{\tau_0}\,\mathbf{k}\tau' + \frac{1}{4\pi\tau_0}[\mathbf{H}_0, [\mathbf{k}, \mathbf{h}]] \tag{17.39}$$

Ми отримали вісім рівнянь (два скалярне і два векторних) для семи невідомих $\mathbf{h}, \mathbf{v}, \tau'$.

Для знаходження розв'язків конкретизуємо геометрію задачі. З першого рівняння (17.39) випливає, що $\mathbf{h} \perp \mathbf{k}$. Вважатимемо, що вектор $\mathbf{k} \parallel Ox$, а $\mathbf{H}_0$ лежить у площині xOy, див рис. 17.5. Із третього рівняння (17.39)

$$\tau' = \frac{\tau_0}{\omega}kv_x. \tag{17.40}$$

Запишемо решту рівнянь (17.39) покомпонентно:

$$-\omega h_z = v_z k H_{0x}, \qquad \omega v_z = -\frac{H_{0x}k}{4\pi\tau_0}h_z, \tag{17.41}$$

$$
-\,\omega h_y = v_y k H_{0x} - v_x k H_{0y}, \quad \omega v_y = -\frac{H_{0x}k}{4\pi\tau_0}h_y,
$$
$$
\omega v_x = \frac{u_0^2}{\tau_0}\,k\tau' + \frac{H_{0y}}{4\pi\tau_0}h_y. \tag{17.42}
$$

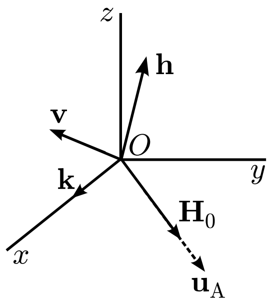

Рис. 17.5. Орієнтація векторів у задачі про поширення магнітогідродинамічних хвиль.

Дві незалежні групи рівнянь (17.41) і (17.42), у першій з яких фіґурують лише змінні h_z і v_z, а в другій — лише h_y, v_x і v_y, дають підстави стверджувати, що існують два типи хвиль, що характеризуються різними ω.

Дисперсійне співвідношення, яке пов'язує ω і $\mathbf{k}$, знаходимо з рівнянь (17.41) у вигляді

$$
\frac{\omega}{k} = \frac{H_{0x}}{\sqrt{4\pi\tau_0}}, \tag{17.43}
$$

де для спрощення вважатимемо $H_{0x} > 0$. Отже, у векторній формі

$$
\omega = \frac{(\mathbf{H}_0, \mathbf{k})}{\sqrt{4\pi\tau_0}}. \tag{17.44}
$$

Групова швидкість, яка визначає фізичну швидкість поширення хвилі, дорівнює

$$
\mathbf{u}_\mathrm{A} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{H}_0}{\sqrt{4\pi\tau_0}}. \tag{17.45}
$$

Ці хвилі, які поширюються вздовж напрямку поля $\mathbf{H}_0$, називають ***альфвенівськими***[6], відповідно швидкість $\mathbf{u}_{\mathrm{A}}$ — ***альфвенівська швидкість***, а $\omega = (\mathbf{H}_0, \mathbf{k})/\sqrt{4\pi\tau_0}$ — ***альфвенівська частота***.

Із рівнянь (17.42) швидкість $u = \omega/k$ визначимо, прирівнявши визначник системи до нуля. Внаслідок цього отримаємо два розв'язки:

$$u_{\mathrm{f,s}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{H_0^2}{4\pi\tau_0} + u_0^2 \pm \left[\left(\frac{H_0^2}{4\pi\tau_0} + u_0^2\right)^2 - \frac{h_0^2}{\pi\tau_0}u_0^2\right]^{1/2}\right\}. \qquad (17.46)$$

Отримані два типи хвиль називають відповідно до знаків "+" і "−" ***швидкою*** (*англ.* fast) і ***повільною*** (*англ.* slow) ***магнітогідродинамічними хвилями***. Напрям їх поширення перпендикулярний до $\mathbf{H}_0$.

[6]Ганнес Альфвен (Hannes Olof Gösta Alfvén, 30.V.1908–02.04.1995), шведський інженер і фізик, лауреат Нобелівської премії з фізики 1970 р.