

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Я. І. Шопа, В. М. Лесівців, Т. М. Демків

ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

ЗБІРНИК ЗАДАЧ ІЗ РОЗВ'ЯЗКАМИ

Навчальний посібник

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Львів
ЛНУ імені Івана Франка
2010

УДК 537(076.2)

ББК В33я73-4

Ш 30

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. *Р.Д. Венгреневич*
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича);

д-р фіз.-мат. наук, проф. *П.І. Голод*
(Національний університет “Києво-Могилянська академія”);

д-р фіз.-мат. наук, проф. *С.В. Мягкота*
(Львівський національний аграрний університет)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів*

Лист № 1/11-481 від 04.02.2010 р.

Шопа Я.І.

Ш 30 Електрика та магнетизм. Збірник задач із розв’язками : навч. посіб. : [для вищ. навч. закл.] / Я.І. Шопа, В.М. Лесівців, Т.М. Демків. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2010. – 288 с.

ISBN 978-966-613-710-7

Наведено понад 600 задач з курсу “Електрика та магнетизм”, які структуровано в 15 роділах. До всіх задач подано відповіді, а до значної частини — розв’язки.

Для студентів фізичних та інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також студентів нефізичних спеціальностей.

УДК 537(076.2)

ББК В33я73-4

© Шопа Я.І., Лесівців В.М., Демків Т.М., 2010

© Львівський національний університет

імені Івана Франка, 2010
ISBN 978-966-613-710-7

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
ЧАСТИНА I	
УМОВИ ЗАДАЧ	6
1. Електростатичне поле. Закон Кулона. Напруженість	6
2. Теорема Остроградського–Гаусса. Електричний потенціал. Енергія взаємодії електричних зарядів ..	13
3. Поле диполя. Провідники та діелектрики в електричному полі	20
4. Ємність. Конденсатори	30
5. Опір. Провідність. Резистори в колах постійного струму	39
6. Правила Кірхгофа	48
7. Потужність постійного електричного струму. Закон Джоуля–Ленца	57
8. Струм у різних середовищах	65
9. Постійне магнітне поле. Сила Ампера. Закон Біо–Савара–Лапласа	74
10. Магнітний момент. Магнітний потік. Магнетики ..	83
11. Рух заряджених частинок в електричному та магнітному полях	92
12. Електромагнітна індукція. Індуктивність	101
13. Енергія магнітного поля. Рівняння Максвелла ...	110
14. RC- та RL-кола. Змінний струм у RLC-колах	118
15. Електромагнітні коливання та хвилі. Випромінювання	126

ЧАСТИНА II

ВІДПОВІДІ ТА РОЗВ'ЯЗКИ	134
1. Електростатичне поле. Закон Кулона. Напруженість	134
2. Теорема Остроградського–Гаусса. Електричний потенціал. Енергія взаємодії електричних зарядів	141
3. Поле диполя. Провідники та діелектрики в електричному полі	150
4. Ємність. Конденсатори	165
5. Опір. Провідність. Резистори в колах постійного струму	176
6. Правила Кірхгофа	185
7. Потужність постійного електричного струму. Закон Джоуля–Ленца	192
8. Струм у різних середовищах	200
9. Постійне магнітне поле. Сила Ампера. Закон Біо–Савара–Лапласа	207
10. Магнітний момент. Магнітний потік. Магнетики ..	219
11. Рух заряджених частинок в електричному та магнітному полях	230
12. Електромагнітна індукція. Індуктивність	241
13. Енергія магнітного поля. Рівняння Максвелла ...	248
14. RC- та RL-кола. Змінний струм у RLC-колах ...	258
15. Електромагнітні коливання та хвилі. Випромінювання	272
ДОДАТКИ	282
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	286

ПЕРЕДМОВА

Збірник містить понад 600 задач із курсу “Електрика та магнетизм”, підібраних авторами згідно з програмою відповідної дисципліни для студентів університетів, розрахованої на один семестр. З огляду на це збірник має 15 розділів, до кожного з них подано короткий теоретичний вступ з переліком основних законів та формул, які потрібні для розв’язування задач. Посібник містить довідковий матеріал та перелік використаної літератури. Автори звернули увагу також на позначення фізичних величин.

Задачі збірника мають різні рівні складності, що дає змогу змінювати темп та обсяг матеріалу під час практичних занять. Задачі розташовано у тематичній послідовності, тому часто для розв’язання наступної можна скористатись розв’язком попередньої.

До всіх задач збірника подано відповіді, а до значної частини — розв’язки з переважним дотриманням системи одиниць СІ. Оскільки відповіді та розв’язки займають більше половини обсягу збірника, то студенти можуть використовувати задачник і для самостійної роботи, підготовки до олімпіад та повторення матеріалу.

Збірник призначений для студентів фізичних та інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Може бути корисний для студентів різних спеціальностей природничих факультетів університетів.

ЧАСТИНА I

УМОВИ ЗАДАЧ

1. ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ. ЗАКОН КУЛОНА. НАПРУЖЕНІСТЬ

Закон Кулона — сила взаємодії двох точкових зарядів q_1 та q_2 , які розташовані на відстані r один від одного:

$$\vec{F} = \frac{k q_1 q_2}{\varepsilon r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

де $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8,99 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$; $\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ — універсальна діелектрична стала; ε — діелектрична проникність середовища, у якому розташовані заряди. Одиниця вимірювання електричного заряду (кількості електрики) — кулон (Кл).

Будь-який електричний заряд завжди кратний елементарному, що приблизно дорівнює $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Електрон має негативний (від'ємний), а протон позитивний (додатний) елементарний заряд.

Напруженість електричного поля, яке створює заряд q у точці, що розташована на відстані r від нього,

$$\vec{E} = \frac{k q}{\varepsilon r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Напруженість електричного поля, яке створюють декілька зарядів q_i , знаходять за правилом векторного додавання напруженостей, створених кожним із зарядів окремо (*принцип суперпозиції*):

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i .$$

Неперервно розподілені в просторі заряди створюють електричне поле

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{k dq}{\varepsilon r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} .$$



1.1. Визначте силу відштовхування двох однойменних однакових зарядів величиною 1 Кл, розташованих на відстані 1 км один від одного.

1.2. З якою силою електрон притягується до протона в атомі водню? Діаметр атома водню — $2 \cdot 10^{-8}$ см.

1.3. Чи буде стійкою рівновага точкового заряду, розташованого посередині між двома іншими однаковими точковими зарядами, знак заряду яких є протилежним до знака першого заряду?

1.4. Два точкові заряди, перебуваючи у вакуумі на відстані 20 см, взаємодіють з деякою силою. На якій відстані треба розмістити ці заряди в олії, щоб сила їхньої взаємодії не змінилася? Діелектрична проникність олії дорівнює 5.

1.5. У скільки разів сила гравітаційного притягання між двома протонами у повітрі менша від сили їхнього електростатичного відштовхування?

1.6. Якою мала б бути маса протона, щоб сила гравітаційного притягання двох протонів у вакуумі дорівнювала силі їхнього електростатичного відштовхування?

1.7. З якою силою взаємодіяли б у повітрі дві мідні кульки масою 1 г, розташовані на відстані 1 м одна від одної, якби заряд усіх електронів відрізнявся на 1 % від сумарного заряду всіх ядер?

1.8. У вершинах квадрата розташовані однакові заряди q . Який заряд треба помістити в центрі квадрата, щоб система перебувала в рівновазі? Якою буде така рівновага?

1.9. У вершинах рівностороннього трикутника розташовані однойменні заряди q . Який заряд треба помістити в центрі трикутника, щоб система перебувала у рівновазі?

1.10. Дві однакові кульки радіусом 1 см та масою 9,81 г підвісили в одній точці на нитках довжиною 19 см. Кулькам надали такого однакового заряду, що кут між нитками становить 90° . Який заряд кульок?

1.11. Три однакові маленькі кульки масою $m = 0,12$ г підвішені до однієї точки на нитках довжиною $l = 20$ см. Які заряди треба надати кулькам, щоб кожна нитка утворювала з вертикаллю кут $\alpha = 30^\circ$? Масою ниток знехтуйте.

1.12. Дві кульки з однаковими масами й радіусами підвішені у повітрі на нитках однакової довжини так, що їхні поверхні дотикаються. Після надання кулькам заряду вони відхилились одна від одної й розійшлися на кут $2\alpha_n$. Знайдіть густину матеріалу кульок, якщо відомо, що після занурення кульок у нафту кут розходження ниток дорівнює $2\alpha_n$. Густина нафти — ρ_n , діелектрична проникність — ϵ_n .

1.13. Дві кульки з однаковими масами й радіусами підвішено у повітрі на нитках однакової довжини та опущено в рідкий діелектрик, густина якого — ρ , діелектрична проникність — ϵ . Якою має бути густина ρ_0 матеріалу кульок, щоб після надання їм заряду кути розходження ниток у повітрі й діелектрику були однаковими?

1.14. Три однакові кульки, маса і заряд кожної з яких, відповідно, дорівнюють $m = 10$ г, $|q| = 10^{-7}$ Кл, з'єднані нитками, що утворюють рівносторонній трикутник зі стороною $l = 10$ см. Знаки зарядів показані на рис. 1. До негативно зарядженої кульки приклали силу, під дією якої система почала переміщатися з прискоренням \vec{a} . У цьому разі натяг усіх ниток однаковий. Знайдіть це прискорення. Сили тяжіння нема.

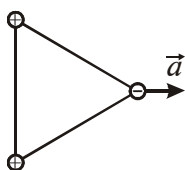


Рис. 1

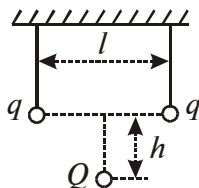


Рис. 2

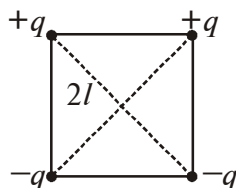


Рис. 3

1.15. Мідну кульку радіусом $R = 0,5$ см поміщено в олію. Густина олії $\rho_o = 800$ кг/м³. Знайдіть заряд кульки, якщо у вертикально напрямленому однорідному електричному полі $E = 3,6$ МВ/м кулька перебуває в рівновазі.

1.16. По тонкій нитці довжиною $l = 4\pi$ см, яка має форму дуги кола радіусом $R = 12$ см, рівномірно розподілений заряд $q_1 = 19$ нКл. У центрі кривини дуги розташовано заряд q_2 , на який нитка діє з силою $F = 40$ мкКл. Знайдіть заряд q_2 .

1.17. Два довгі, тонкі, рівномірно заряджені стрижні розташовані перпендикулярно один до одного так, що точка перетину їхніх осей є на відстані $a = 6$ см та $b = 8$ см від ближчих кінців стрижнів. Лінійна густина заряду стрижнів $\lambda = 1$ нКл/см. Знайдіть силу, яка діє на заряд $q = 10$ нКл, розташований у цій точці.

1.18. Дві кульки, заряди яких $q = 3,3 \cdot 10^{-6}$ Кл, підвішені на нитках однакової довжини (рис. 2). На відстані $h = 20$ см під кульками симетрично щодо них розташований точковий заряд Q . Знайдіть величину цього заряду, якщо нитки вертикальні, а відстань між ними $l = 30$ см.

1.19. Два додатні заряди q_1 та q_2 розташовані в точках з радіусами-векторами \vec{r}_1 та \vec{r}_2 . Знайдіть негативний заряд q_3 та радіус-вектор точки \vec{r}_3 , у яку його треба помістити, щоб сила, яка діятиме на кожен із трьох зарядів, дорівнювала нулю.

1.20. Тонке провідне кільце радіусом $R = 100$ мм має електричний заряд $q = 50$ мкКл. Який буде приріст сили, що розтягує провід, якщо у центр кільця помістити точковий заряд $q_0 = 7$ мкКл?

1.21. Знайдіть напруженість E електричного поля на відстані $0,2 \text{ нм}$ від одновалентного іона. Заряд іона вважайте точковим.

1.22. Знайдіть напруженість E електростатичного поля в точці, яка лежить посередині між двома зарядами $q_1 = 8 \text{ нКл}$ та $q_2 = -6 \text{ нКл}$. Відстань між зарядами $r = 10 \text{ см}$.

1.23. У вершинах правильного шестикутника розташовані три позитивні та три негативні заряди. Знайдіть напруженість E електричного поля в центрі шестикутника за різних комбінацій у розташуванні цих зарядів. Кожен заряд $q = 1,5 \text{ нКл}$, сторона шестикутника $a = 3 \text{ см}$.

1.24. Два точкові заряди $7,5 \text{ нКл}$ та $-14,7 \text{ нКл}$ розташовані на відстані 5 см . Знайдіть напруженість електричного поля в точці, яка розташована на відстані 3 см від позитивного заряду та 4 см від негативного.

1.25. У вершинах квадрата з діагоналлю $2l$ розташовані точкові заряди $+q$ та $-q$, як показано на рис. 3. Знайдіть модуль напруженості електричного поля в точці, яка розташована на відстані x від центра квадрата і симетрично щодо вершин квадрата.

1.26. Позитивний точковий заряд 50 мкКл розташований на площині xy у точці з радіусом-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, де \vec{i} і \vec{j} — орти осей x та y . Знайдіть напруженість електричного поля та її модуль у точці з радіусом-вектором $\vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$. Тут r_0 і r — у метрах.

1.27. Лінійна густина заряду (величина заряду, яка припадає на одиницю довжини) нескінченно довгої тонкої нитки — λ . Знайдіть напруженість поля, створеного цією ниткою на відстані a від неї.

1.28. Тонке напівкільце радіусом $R = 20 \text{ см}$ заряджене рівномірно зарядом $q = 0,7 \text{ нКл}$. Знайдіть модуль напруженості електричного поля в центрі кривини цього кільця.

1.29. Кільце радіусом R з тонкого дроту має заряд q . Знайдіть модуль напруженості електричного поля на осі кільця

як функцію від відстані l до його центра. Дослідіть отриману залежність за умови $l \gg R$. Визначте максимальне значення напруженості й відповідну відстань l до точки з цією напруженістю.

1.30. Точковий заряд q розташований у центрі тонкого кільця радіусом R , по якому рівномірно розподілений заряд $-q$. Знайдіть модуль напруженості електричного поля на осі кільця в точці, яка віддалена від центра кільця на відстань x , якщо $x \gg R$.

1.31. Система складається з тонкого зарядженого кільця радіусом R і дуже довгої зарядженої нитки, розташованої так, що один з її кінців збігається з центром кільця. Кільце має заряд q , лінійна густина заряду — λ . Знайдіть силу взаємодії між кільцем і ниткою.

1.32. Тонке непровідне кільце радіусом R заряджене з лінійною густиною заряду $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$, де λ_0 — стала; φ — азимутальний кут. Знайдіть модуль напруженості електричного поля: а) у центрі кільця; б) на осі кільця залежно від відстані x до його центра. Дослідіть отриманий вираз при $x \gg R$.

1.33. Тонкий прямий стрижень завдовжки $2a$, що перебуває у вакуумі, заряджений рівномірно зарядом q . Знайдіть модуль напруженості електричного поля як функцію відстані r від центра стрижня до точки прямої: а) перпендикулярної до стрижня й такої, що проходить через його центр; б) що збігається з віссю стрижня, якщо $r > a$. Дослідіть отримані вирази при $r \gg a$.

1.34. Дуже довга пряма рівномірно заряджена нитка має лінійну густина заряду λ . Знайдіть модуль і напрям напруженості електричного поля в точці, яка віддалена від нитки на відстань y і розташована на перпендикулярі до нитки, що проходить через один з її кінців.

1.35. Дві довгі паралельні однойменно заряджені нитки розташовані на відстані $r = 10$ см одна від одної. Лінійна густина заряду на обох нитках однакова: $\lambda = 10$ мкКл/м. Знайдіть

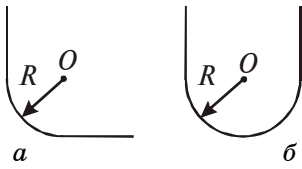


Рис. 4, а, б

модуль та напрям напруженості \vec{E} сумарного електричного поля у точці, яка віддалена на $a = 10$ см від кожної нитки.

1.36. З якою силою $F_{\text{од}}$ на одиницю довжини притягаються дві різноманентно заряджені нескінченно дов-

гі нитки з однаковою лінійною густиною заряду $\lambda = 5$ мкКл/м, які перебувають на відстані $r_1 = 3$ см одна від одної? Яку роботу $A_{\text{од}}$ на одиницю довжини потрібно виконати для того, щоб зсунути ці нитки до відстані $r_2 = 1$ см?

1.37. Рівномірно заряджена нитка з лінійною густиною заряду λ має конфігурації, показані на рис. 4, а, б. Радіус заокруглення R значно менший від довжини нитки. Скориставшись розв'язком задачі 1.34, знайдіть модуль напруженості електричного поля в точці O для конфігурацій а та б.

1.38. Знайдіть напруженість електричного поля в центрі півсфери, яка рівномірно заряджена з поверхневою густиною σ .

1.39. Сфера радіусом r заряджена з поверхневою густиною $\sigma = (\vec{a} \vec{r})$, де \vec{a} — сталий вектор, \vec{r} — радіус-вектор точки сфери відносно її центра. Знайдіть напруженість електричного поля в центрі сфери.

1.40. Знайдіть напруженість електричного поля в центрі кулі радіусом R , об'ємна густина заряду якої $\rho = (\vec{a} \vec{r})$, де \vec{a} — сталий вектор, \vec{r} — радіус-вектор, проведений з центра кулі.

2. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСЬКОГО–ГАУССА. ЕЛЕКТРИЧНИЙ ПОТЕНЦІАЛ. ЕНЕРГІЯ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ ЗАРЯДІВ

Теорема Остроградського–Гаусса: потік Φ вектора напруженості електричного поля \vec{E} крізь довільну замкнену поверхню дорівнює алгебричній сумі зарядів, які охоплює ця поверхня:

$$\Phi = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \sum q.$$

Потенціал поля точкового заряду

$$\varphi = \frac{kq}{r},$$

де r — відстань від заряду.

Зв'язок між напруженістю та потенціалом:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Потенціал електричного поля, яке створюють кілька зарядів q_i , знаходять за правилом скалярного додавання потенціалів, створених окремими зарядами (*принцип суперпозиції*):

$$\varphi = \sum_i \varphi_i.$$

Якщо електричне поле створюють заряди, розподілені у просторі неперервно, то

$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{k}{\epsilon} \frac{dq}{r}.$$

Енергія взаємодії двох зарядів q_1 та q_2 , які розташовані на відстані r один від одного,

$$W = \frac{k}{\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Для постійного електричного поля \vec{E} робота електричних сил з перенесення заряду замкненою траєкторією (циркуляція вектора \vec{E} по замкненому контуру) дорівнює нулю:

$$\oint_r (\vec{E} d\vec{r}) = 0.$$



2.1. Знайдіть потік напруженості електричного поля 100 В/м крізь квадратну пластину зі стороною 1 м , нормаль якої розташована під кутом 30° до ліній напруженості поля.

2.2. Визначте силу F , яка діє на заряд $q = 2 \text{ нКл}$, якщо заряд розміщено: а) на відстані $r = 2 \text{ см}$ від зарядженої нитки з лінійною густиною заряду $\lambda = 0,2 \text{ мкКл/м}$; б) у полі зарядженої площини з поверхневою густиною заряду $\sigma = 20 \text{ мкКл/м}^2$; в) на відстані $r = 2 \text{ см}$ від поверхні зарядженої сфери радіусом $R = 2 \text{ см}$ та поверхневою густиною заряду $\sigma = 20 \text{ мкКл/м}^2$. Діелектрична проникність середовища $\epsilon = 6$.

2.3. На рис. 5 зображено нескінченну заряджену площину AA та однойменно з нею заряджену кульку масою $m = 0,4 \text{ мг}$ і зарядом $q = 667 \text{ пКл}$. Сила натягу нитки, на якій висить кулька, $T = 0,49 \text{ мН}$. Знайдіть поверхневу густину заряду σ на площині AA .

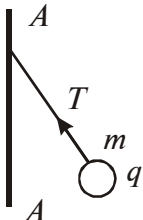


Рис. 5

2.4. З якою силою $F_{\text{о.д}}$ електричне поле рівномірно зарядженої нескінченної площини діє на одиницю довжини рівномірно зарядженої нескінченно довгої нитки, поміщеної в це поле? Лінійна густина заряду на нитці $\lambda = 3 \text{ мкКл/м}$, а поверхнева густина заряду на площині $\sigma = 20 \text{ мкКл/м}^2$.

2.5. З якою силою $F_{\text{о.д}}$ на одиницю довжини відштовхуються дві однойменно заряджені нескінченно довгі нитки з однаковою лінійною густиною заряду $\lambda = 3 \text{ мкКл/м}$, які розташовані на відстані $r_1 = 2 \text{ см}$ одна від одної. Яку роботу

$A_{o,d}$ на одиницю довжини треба виконати, щоб зменшити відстань між нитками до $r_2 = 1$ см?

2.6. З якою силою $F_{o,p}$ на одиницю площі відштовхуються дві нескінченні однойменно заряджені площини? Поверхнева густина зарядів на кожній з них $\sigma = 0,3$ мКл/м².

2.7. Дві довгі паралельні нитки рівномірно заряджені з лінійною густиною $\lambda = 0,5$ мКл/м кожна. Відстань між нитками $l = 45$ см. Знайдіть максимальне значення напруженості електричного поля в площині симетрії цього поля.

2.8. Поверхнева густина заряду на сфері радіусом R залежить від полярного кута θ як $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, де σ_0 — додатна константа. Доведіть, що такий розподіл заряду можна зобразити як результат малого зсуву одна щодо одної двох рівномірно заряджених куль радіусом R , заряди яких однакові за модулем і протилежні за знаком. Скориставшись цим твердженням, знайдіть напруженість електричного поля всередині такої сфери.

2.9. Нескінченно довга циліндрична поверхня з коловим перерізом рівномірно заряджена по довжині з поверхневою густиною зарядів $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$, де φ — полярний кут циліндричної системи координат, вісь якої збігається з віссю цієї поверхні. Знайдіть модуль та напрям напруженості електричного поля на осі z .

2.10. Напруженість електричного поля залежить лише від координат x та y за законом $\vec{E} = a \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}$, де a — константа,

\vec{i} та \vec{j} — орти осей x та y . Знайдіть потік Φ вектора \vec{E} через сферу радіусом R і з центром у початку координат.

2.11. Куля радіусом R має позитивний заряд, об'ємна густина якого залежить лише від відстані r до його центра як

$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$, де ρ_0 — стала величина. Вважаючи, що всюди ді-

електрична проникність $\epsilon = 1$, знайдіть: а) модуль напруженості електричного поля всередині та за межами кулі як функцію

від r ; б) максимальне значення модуля напруженості E_{\max} і відповідне йому значення r_{\max} .

2.12. Система складається з кулі радіусом R , зарядженої сферично-симетрично, та навколишнього середовища, заповненого зарядом з об'ємною густиною $\rho = \alpha/r$, де α — стала величина, r — відстань до центра кулі. Знайдіть заряд кулі, за якого модуль напруженості електричного поля за межами кулі не залежить від r . Чому дорівнює ця напруженість? Діелектрична проникність $\epsilon = 1$ всюди.

2.13. Середовище заповнене зарядом, об'ємна густина якого $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, де ρ_0 та α — додатні сталі величини, r — відстань до центра системи. Знайдіть модуль напруженості електричного поля як функцію від r . Дослідіть отриманий вираз за малих і великих r , тобто при $\alpha r^3 \ll 1$ та $\alpha r^3 \gg 1$.

2.14. У середині кулі, зарядженої рівномірно з об'ємною густиною ρ , є сферична порожнина. Центр порожнини зміщено щодо центра кулі на відстань, яку характеризує вектор \vec{a} . Знайдіть напруженість \vec{E} поля всередині порожнини.

2.15. Знайдіть напруженість \vec{E} електричного поля в ділянці перетину двох куль, рівномірно заповнених різнойменними зарядами з об'ємною густиною ρ та $-\rho$, якщо відстань між центрами куль характеризує вектор \vec{a} .

2.16. По сферичній поверхні рівномірно розподілені заряди з густиною σ . Знайдіть напруженість поля E та потенціал φ зарядів залежно від відстані d від центра сфери. Радіус сфери R . Побудуйте схематичні графіки цих залежностей.

2.17. Кулька масою $m = 40$ мг, яка має позитивний заряд $q = 1$ нКл, рухається зі швидкістю $v = 10$ см/с. На яку відстань r наблизиться ця кулька до позитивно зарядженого точкового заряду $q_0 = 1,33$ нКл?

2.18. До якої відстані можуть зблизитись два електрони, які рухаються назустріч один одному з відносною швидкістю $v = 10^6$ м/с?

2.19. Під час бомбардування нерухомого ядра натрію α -частинкою сила відштовхування між ними досягла значення $F = 140$ Н. На яку найменшу відстань r наблизилась α -частинка до ядра атома натрію? Яку швидкість v мала α -частинка? Впливом електронної оболонки атома знехтуйте.

2.20. Дві кульки із зарядами $q_1 = 6,67$ нКл та $q_2 = 13,33$ нКл розташовані на відстані $r_1 = 40$ см. Яку роботу A треба виконати, щоб зблизити їх до відстані $r_2 = 25$ см?

2.21. Дві металеві однаково заряджені кульки масою $m = 0,2$ кг кожна розташовані на деякій відстані одна від одної. Знайдіть заряд кульок q , якщо відомо, що на цій відстані енергія W_e їхньої електростатичної взаємодії у $n = 10^6$ разів більша від енергії $W_{гp}$ гравітаційної взаємодії.

2.22. Знайдіть потенціал ϕ точки поля, яка розташована на відстані $r = 10$ см від центра зарядженої сфери радіусом $R = 1$ см. Задачу розв'яжіть для випадків: а) задано поверхневу густину зарядів на сфері $\sigma = 0,1$ мкКл/м²; б) потенціал сфери $\phi_0 = 300$ В.

2.23. Яку роботу виконують під час перенесення точкового заряду $q = 20$ нКл з нескінченності у точку, що розташована на відстані $r = 1$ см від поверхні кулі радіусом $R = 1$ см з поверхневою густиною зарядів $\sigma = 10$ мкКл/м²?

2.24. Кулька масою $m = 1$ г і з зарядом $q = 10$ нКл переміщається з точки 1, потенціал якої $\phi_1 = 600$ В, до точки 2, потенціал якої $\phi_2 = 0$ В. Знайдіть швидкість кульки v_1 у точці 1, якщо відомо, що в точці 2 швидкість $v_2 = 20$ см/с.

2.25. Під час радіоактивного розпаду з ядра атома полонію вилітає α -частинка зі швидкістю $v = 1,6 \cdot 10^7$ м/с. Знайдіть кінетичну енергію W α -частинки та різницю потенціалів поля, в якому можна розігнати α -частинку до тієї ж швидкості зі стану спокою.

2.26. Електричне поле утворене рівномірно позитивно зарядженою нескінченною ниткою. Рухаючись під дією цього поля від точки, яка розташована на відстані $r_1 = 1$ см від нитки, до точки $r_2 = 4$ см, α -частинка змінила швидкість від

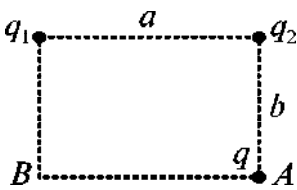


Рис. 6

$v_1 = 2 \cdot 10^5$ м/с до $v_2 = 3 \cdot 10^6$ м/с. Знайдіть лінійну густину λ зарядів на нитці.

2.27. Поблизу зарядженої нескінченної площини розташований точковий заряд $q = 0,66$ нКл. Заряд переміщують по лінії напруженості поля на відстань $\Delta r = 2$ см. У цьому разі виконують роботу $A = 5$ мкДж. Знайдіть поверхневу густину σ зарядів на площині.

2.28. Вісім заряджених водяних крапель радіусом $R = 1$ см із зарядом $q = 0,1$ нКл кожна зливаються в одну велику краплю. Знайдіть потенціал великої краплі.

2.29. Горизонтальний металевий диск обертається з кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі. Знайдіть залежність напруженості електричного поля від відстані до осі, а також різницю потенціалів між центром диска та його крайніми точками. Радіус диска R .

2.30. У двох вершинах прямокутника зі сторонами a та b розташовані точкові заряди q_1 та q_2 . Яку роботу треба виконати, щоб перенести заряд q з точки A в точку B (рис. 6)?

2.31. Два тонкі провідні кільця, кожне радіусом R , розташовані так, що їхні осі збігаються. Заряди кілець дорівнюють q та $-q$. Знайдіть різницю потенціалів між центрами кілець, які віддалені одне від одного на відстань l , якщо $R = 30$ см, $l = 52$ см та $q = 0,40$ мкКл.

2.32. Нескінченно довга пряма нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною $\lambda = 0,4$ мкКл/м. Знайдіть різницю потенціалів точок 1 та 2, якщо точка 2 перебуває далі від нитки, ніж точка 1, у $n = 2$ рази.

2.33. Тонке кільце радіусом $R = 25$ см має заряд $q = 5$ мкКл, нерівномірно розподілений по кільцю. Знайдіть роботу електричних сил під час переміщення точкового заряду $q' = 10$ мкКл із центра кільця довільною траєкторією у точку, яка розташована на осі кільця на відстані $l = 50$ см від його центра.

2.34. Знайдіть потенціал електричного поля в центрі півсфери радіусом R , зарядженої рівномірно з поверхневою густиною σ .

2.35. Кругла тонка пластинка радіусом R , що перебуває у вакуумі, рівномірно заряджена з поверхневою густиною σ . Знайдіть потенціал і модуль напруженості електричного поля на осі пластинки як функцію відстані L від її центра. Дослідіть отриманий вираз при $L \rightarrow 0$ і $L \gg R$.

2.36. Знайдіть потенціал на краю тонкого диска радіусом $R = 20$ см, по якому рівномірно розподілений заряд з поверхневою густиною $\sigma = 0,25$ мкКл/м².

2.37. Заряд q розподілений рівномірно по об'єму кулі радіусом R . Уважаючи, що діелектрична проникність усюди дорівнює одиниці, знайдіть потенціал: а) у центрі кулі; б) всередині кулі як функцію відстані r від її центра.

2.38. Знайдіть напруженість електричного поля, потенціал якого $\varphi = (\vec{a} \vec{r})$, де \vec{a} — сталий вектор, \vec{r} — радіус-вектор точки поля.

2.39. Визначте напруженість електричного поля, потенціал якого залежить від координат x, y за законом: а) $\varphi = a(x^2 - y^2)$; б) $\varphi = axy$, де a — стала. Зобразіть схематично вигляд цих полів за допомогою ліній вектора \vec{E} (у площині xy).

2.40. Потенціал електричного поля має вигляд $\varphi = \alpha(xy - z^2)$, де α — стала. Знайдіть проекцію напруженості електричного поля в точці $M \{2, 1, -3\}$ на напрям вектора $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$.

2.41. Знайдіть потенціал таких електростатичних полів:

а) $\vec{E} = a(y\vec{i} + x\vec{j})$; б) $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 - y^2)\vec{j}$;

в) $\vec{E} = ay\vec{i} + (ax + bz)\vec{j} + by\vec{k}$.

Тут a і b — сталі, \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — орти осей x, y, z .

2.42. Потенціал поля всередині зарядженої кулі залежить тільки від відстані r до її центра як $\varphi = ar^2 + b$, де a і b — сталі. Знайдіть розподіл об'ємного заряду $\rho(r)$ усередині кулі.

3. ПОЛЕ ДИПОЛЯ. ПРОВІДНИКИ ТА ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

Електричний момент диполя (дипольний момент)

$$\vec{p} = q\vec{r},$$

де q — величина позитивного і негативного зарядів; $\vec{r} = \vec{r}_- - \vec{r}_+$. Тут \vec{r}_- — положення негативного заряду, \vec{r}_+ — позитивного.

Потенціал і напруженість поля точкового диполя з електричним моментом \vec{p}

$$\varphi = \frac{k(\vec{p}\vec{r})}{r^3}, \quad E = \frac{kp}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta},$$

де ϑ — кут між векторами \vec{r} і \vec{p} .

Момент сил \vec{N} , що діють на диполь у зовнішньому електричному полі,

$$\vec{N} = [\vec{p} \vec{E}].$$

Сила \vec{F} , що діє на диполь, та її проекція F_x

$$\vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}, \quad F_x = (\vec{p} \nabla E_x),$$

де $\partial \vec{E} / \partial l$ — похідна вектора \vec{E} за напрямом диполя; ∇E_x — градієнт складової поля E_x .

Потенціальна енергія взаємодії диполя \vec{p} з полем напруженістю \vec{E}

$$W = -(\vec{p} \vec{E}).$$

Напруженість електричного поля біля поверхні провідника у вакуумі

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Потік поляризації \vec{P} крізь замкнену поверхню

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = -q',$$

де q' — алгебрична сума зв'язаних зарядів усередині цієї поверхні.

Вектор \vec{D} (електрична індукція) та теорема Остроградського–Гаусса для нього

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \oint \vec{D} d\vec{S} = q,$$

де q — алгебрична сума вільних (сторонніх) зарядів усередині замкненої поверхні.

Теорема Остроградського–Гаусса у диференціальному вигляді:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Умови на межі поділу двох діелектриків:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad E_{2\tau} = E_{1\tau},$$

де σ' та σ — поверхневі густини зв'язаних та вільних зарядів, відповідно, а орт нормалі \vec{n} напрямлений з середовища 1 до середовища 2.

Для ізотропних діелектриків

$$\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \varepsilon = 1 + \kappa,$$

де κ — діелектрична сприйнятливість.

У випадку ізотропного діелектрика, який заповнює весь простір між екіпотенціальними поверхнями, напруженість електричного поля порівняно з вакуумом зменшується в ε разів:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}.$$



3.1. Поле утворене точковим диполем з електричним моментом $p = 100$ пКл·м. Знайдіть різницю потенціалів між двома точками, розташованими симетрично відносно цього диполя на його осі на відстані $r = 10$ см від центра диполя.

3.2. Електричний диполь складається з двох точкових зарядів q та $-q$, які розташовані на відстані l один від одного. Диполь перебуває у стані стійкої рівноваги в однорідному електричному полі з напруженістю E . Яку роботу треба виконати, щоб повернути диполь на 180° ?

3.3. Знайдіть силу взаємодії двох точкових диполів з моментами \vec{p}_1 та \vec{p}_2 , якщо вектори \vec{p}_1 та \vec{p}_2 скеровані вздовж прямої, яка з'єднує диполі. Відстань між ними дорівнює l .

3.4. Доведіть, що потенціал поля диполя з електричним моментом p (рис. 7) може бути зображений у довільній точці S як $\varphi = k(\vec{p} \vec{r})/r^3$, де \vec{r} — радіус-вектор. Знайдіть за допомогою цього виразу модуль напруженості електричного поля диполя як функцію r і ϑ .

3.5. Точковий диполь з електричним моментом p , що орієнтований у додатному напрямі осі z , розташований у початку координат. Знайдіть проекції напруженості електричного поля E_z і E_\perp на площину, перпендикулярну до осі z у точці S (див. рис. 7).

3.6. Точковий електричний диполь з моментом \vec{p} перебуває в зовнішньому однорідному електричному полі, напруженість якого дорівнює \vec{E}_0 , причому $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E}_0$. Одна з еквіпотенціальних поверхонь, що охоплюють диполь, є сферою. Знайдіть її радіус.

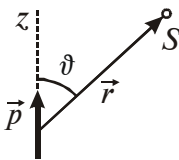


Рис. 7

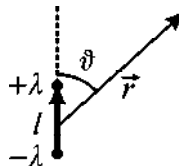


Рис. 8

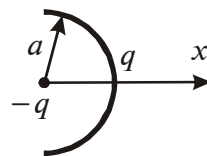


Рис. 9

3.7. Дві паралельні тонкі нитки рівномірно заряджені з лінійною густиною λ і $-\lambda$. Відстань між нитками — l . Знайдіть потенціал і модуль напруженості електричного поля на відстані $r \gg l$ під кутом ϑ до вектора \vec{l} (рис. 8).

3.8. Система складається із заряду $q > 0$, рівномірно розподіленого по півколу радіусом a . У центрі системи розміщений точковий заряд $-q$ (рис. 9). Знайдіть електричний дипольний момент цієї системи та модуль напруженості електричного поля на осі x на відстані $r \gg a$.

3.9. Два коаксіальні кільця з тонкого дроту, кожне радіусом R , розташовані на малій відстані l одне від одного ($l \ll R$) і мають заряди q та $-q$. Знайдіть потенціал і напруженість електричного поля на осі системи як функції координати x (рис. 10).

3.10. Дві безмежні площини, віддалені одна від одної на відстань l , заряджені рівномірно з поверхневою густиною $+\sigma$ та $-\sigma$ (рис. 11). Площини мають коаксіальні отвори радіусом R , причому $l \ll R$. Вибравши вісь x з початком відліку O , як показано на рис. 11, знайдіть потенціал і проекцію напруженості електричного поля E_x на вісь системи як функції координати x .

3.11. Яку роботу проти сил електричного поля потрібно виконати, щоб перенести диполь з електричним моментом p з положення 1, де напруженість поля дорівнює E_1 , у положення 2 з напруженістю E_2 (рис. 12), повернувши його на 90° ?

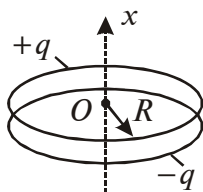


Рис. 10

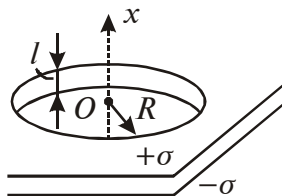


Рис. 11

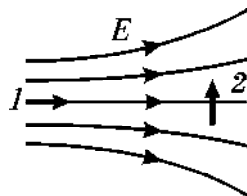


Рис. 12

3.12. Диполь з електричним моментом \vec{p} перебуває на відстані r від довгої нитки, зарядженої рівномірно з лінійною густиною λ . Знайдіть силу \vec{F} , що діє на диполь, якщо вектор \vec{p} орієнтований: а) уздовж нитки; б) по радіусу-вектору \vec{r} ; в) перпендикулярно до нитки й радіуса-вектора \vec{r} .

3.13. Знайдіть силу взаємодії двох молекул води, віддалених одна від одної на відстань $l = 10$ нм, якщо їхні електричні моменти орієнтовані вздовж однієї прямої. Дипольний момент кожної молекули $p = 0,62 \cdot 10^{-29}$ Кл·м.

3.14. Доведіть, що сила взаємодії між зарядом $+q$ та провідною нескінченною площиною, яка розташована на відстані d від заряду, така ж, як між цим зарядом та зарядом $-q$, розташованим симетрично відносно площини.

3.15. На відстані h від нескінченної провідної площини розташовано точковий заряд $+q$. Знайдіть напруженість поля E у точці, яка розташована на відстані h від заряду і від площини.

3.16. Невелика кулька висить над горизонтальною провідною площиною на ізолювальній пружній нитці з жорсткістю k . Після того, як кульці надали заряд, вона опустилась на x см, і її відстань до площини стала дорівнювати l . Знайдіть заряд кульки.

3.17. Точковий заряд $q = 100$ мкКл розміщений на відстані $l = 1,5$ см від провідної площини. Яку роботу треба виконати проти електричних сил для того, щоб повільно віддалити цей заряд на дуже велику відстань від площини?

3.18. Два точкові заряди q та $-q$ розташовані на відстані l один від одного та на однаковій відстані $l/2$ від провідної площини по один бік від неї. Знайдіть модуль електричної сили, яка діє на кожен заряд.

3.19. Три різнойменні точкові заряди розташовані у вершинах квадрата з діагоналлю $l = 50$ см, як показано на рис. 13, де точка O — центр квадрата, AOB — прямий кут, утворений двома провідними півплощинами. Знайдіть силу, яка діє на заряд $-q$, якщо $q = 11$ мкКл.

3.20. Точковий заряд $q = 2$ мкКл розміщений між двома взаємно перпендикулярними провідними півплощинами. Відстань від заряду до кожної півплощини $l = 5$ см. Знайдіть модуль сили, яка діє на заряд.

3.21. Точковий диполь з електричним моментом \vec{p} розташований на відстані l від провідної площини. Знайдіть силу, яка діє на диполь, якщо вектор \vec{p} перпендикулярний до площини.

3.22. Точковий заряд q розташований на відстані l від провідної площини. Визначте поверхневу густину зарядів, індукованих на площині, як функцію від відстані r до основи перпендикуляра, опущеного із заряду на площину.

3.23. Тонка нескінченно довга нитка з лінійною густиною заряду λ розташована паралельно до провідної площини. Відстань між ниткою та площиною дорівнює l . Знайдіть: а) модуль сили, яка діє на одиницю довжини нитки; б) розподіл поверхневої густини заряду $\sigma(r)$ по площині (тут r — відстань між проекцією нитки на площину і точкою на цій площині, де $\sigma = \sigma_{\max}$).

3.24. Дуже довга нитка орієнтована перпендикулярно до провідної площини і не доходить до цієї площини на відстань l . Нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною λ . Нехай точка O — слід нитки на площині. Знайдіть поверхневу густину індукованого заряду на площині: а) у точці O ; б) залежно від відстані до точки O .

3.25. Тонке провідне кільце радіусом R має заряд q . Площина кільця розташована паралельно до провідної площини на

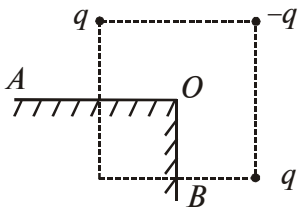


Рис. 13



Рис. 14

відстані l від неї. Знайдіть поверхневу густину індукованого заряду в точці площини, розташованій симетрично щодо кільця.

3.26. Знайдіть потенціал незарядженої провідної сфери, поза якою на відстані $l = 30$ см від її центра розташований точковий заряд $q = 0,5$ мкКл.

3.27. Точковий заряд $q = 3,4$ нКл розташовано на відстані $r = 2,5$ см від центра O незарядженого сферичного шару провідника, радіуси якого $R_1 = 5,0$ см і $R_2 = 8,0$ см. Знайдіть потенціал у точці O .

3.28. Чотири великі металеві пластини розташовані на малій відстані d одна від одної (рис. 14). Крайні пластини з'єднані провідником, а на внутрішні пластини подана різниця потенціалів $\Delta\phi$. Знайдіть: а) напруженість електричного поля між пластинами; б) сумарний заряд на одиницю площі кожної пластини.

3.29. Знайдіть електричну силу, яка діє на заряд, що припадає на одиницю поверхні довільного провідника, у точці, де $\sigma = 46$ мкКл/м².

3.30. Металева кулька радіусом $R = 1,5$ см має заряд $q = 10$ мкКл. Знайдіть модуль сумарної сили, яка діє на заряд, розташований на одній половині кульки.

3.31. Неполарна молекула з поляризованістю β перебуває на великій відстані l від полярної молекули з електричним моментом \vec{p} . Знайдіть модуль сили взаємодії цих молекул, якщо вектор \vec{p} орієнтований уздовж прямої, що проходить через обидві молекули.

3.32. На осі тонкого рівномірно зарядженого кільця радіусом R розташована неполярна молекула. На якій відстані x від центра кільця модуль сили \vec{F} , що діє на цю молекулу: а) дорівнює нулю; б) має максимальне значення? Зобразіть схематичний графік залежності $F_x(x)$.

3.33. Точковий вільний заряд q розташований у центрі кулі з однорідного діелектрика з проникністю ϵ . Знайдіть поляризацію \vec{P} як функцію радіуса-вектора \vec{r} відносно центра кулі,

а також зв'язаний заряд q' усередині сфери, радіус якої менший від радіуса кулі.

3.34. Доведіть, що на межі однорідного діелектрика з провідником поверхнева густина зв'язаних зарядів $\sigma' = -\sigma(\epsilon - 1)/\epsilon$, де ϵ — діелектрична проникність, σ — поверхнева густина зарядів на провіднику.

3.35. Провідник довільної форми, що має заряд $q = 2,5$ мкКл, оточений однорідним діелектриком з проникністю $\epsilon = 5$ (рис. 15). Знайдіть сумарні поверхневі зв'язані заряди на внутрішній і зовнішній поверхнях діелектрика.

3.36. Однорідний діелектрик має вигляд сферичного шару з радіусами a та b , причому $a < b$. Зобразіть схематичні графіки модуля напруженості електричного поля E і потенціалу ϕ як функцій відстані r від центра системи, якщо діелектрик має позитивний вільний заряд, розподілений рівномірно: а) по внутрішній поверхні шару; б) за об'ємом шару.

3.37. Поблизу точки A (рис. 16) межі поділу скло–вакуум напруженість електричного поля у вакуумі $E_0 = 10$ В/м, причому кут між вектором \vec{E}_0 і нормаллю \vec{n} до межі поділу $\alpha_0 = 30^\circ$. Знайдіть напруженість E поля в склі поблизу точки A , кут α між векторами \vec{E} і \vec{n} , а також поверхневу густина σ' зв'язаних зарядів у точці A .

3.38. Поблизу плоскої поверхні однорідного діелектрика з проникністю ϵ напруженість електричного поля у вакуумі

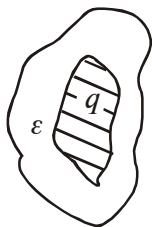


Рис. 15

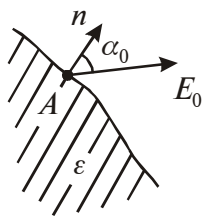


Рис. 16

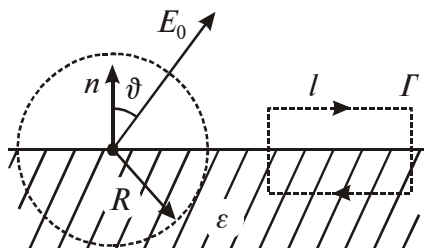


Рис. 17

дорівнює E_0 . Причому вектор \vec{E}_0 утворює кут ϑ з нормаллю до поверхні діелектрика (рис. 17). Уважаючи поле всередині й поза діелектриком однорідним, знайдіть: а) потік вектора \vec{E} крізь сферу радіусом R з центром на поверхні діелектрика; б) циркуляцію вектора \vec{D} по контуру Γ довжиною l (див. рис. 17), площина якого перпендикулярна до поверхні діелектрика і паралельна до вектора \vec{E}_0 .

3.39. Нескінченно велика пластина однорідного діелектрика з проникністю ϵ заряджена рівномірно вільним зарядом з об'ємною густиною ρ . Товщина пластини — $2d$. Знайдіть: а) модуль напруженості електричного поля та потенціал як функції відстані l від середини пластини (потенціал усередині пластини вважайте нульовим); б) поверхневу й об'ємну густину зв'язаного заряду.

3.40. Вільні заряди рівномірно розподілені з об'ємною густиною $\rho > 0$ по кулі радіусом R з однорідного ізотропного діелектрика з проникністю ϵ . Знайдіть: а) модуль напруженості електричного поля та потенціал як функції відстані r від центра кулі; б) об'ємну та поверхневу густини зв'язаних зарядів.

3.41. Круглий діелектричний диск радіусом R і товщиною d статично поляризований так, що поляризованість \vec{P} всюди однакова, і вектор \vec{P} лежить у площині диска. Знайдіть напруженість \vec{E} електричного поля в центрі диска, якщо $d \ll R$.

3.42. За деяких умов поляризація безмежної незарядженої пластини з діелектрика має вигляд $\vec{P} = \vec{P}_0(1 - x^2/d^2)$, де \vec{P}_0 — вектор, перпендикулярний до пластини; x — відстань від середини пластини; d — її напівтовщина. Знайдіть напруженість електричного поля усередині пластини та різницю потенціалів між її поверхнями.

3.43. Точковий заряд q розміщений у вакуумі на відстані l від плоскої поверхні однорідного ізотропного діелектрика, що заповнює весь напівпростір. Проникність діелектрика

дорівнює ϵ . Знайдіть: а) поверхневу густину зв'язаних зарядів як функцію відстані r від точкового заряду q ; розгляньте випадок $l \rightarrow 0$; б) сумарний зв'язаний заряд на поверхні діелектрика.

3.44. Довгий діелектричний циліндр круглого перерізу поляризований так, що вектор $\vec{P} = \alpha \vec{r}$, де α — додатна стала; \vec{r} — відстань від осі циліндра. Знайдіть об'ємну густину ρ' зв'язаних зарядів як функцію відстані r від осі.

3.45. Діелектрична куля поляризована однорідно і статично. Її поляризація — \vec{P} . Зважаючи на те, що таку поляризовану кулю можна зобразити як результат малого зсуву всіх позитивних зарядів діелектрика відносно всіх негативних зарядів: а) знайдіть напруженість електричного поля всередині кулі; б) доведіть, що поле за межами кулі є полем диполя, розташованого всередині кулі, і потенціал поля $\varphi = k\vec{p}_0\vec{r}/r^3$, де \vec{p}_0 — електричний момент диполя; \vec{r} — відстань від центра.

3.46. Нескінченно довгий діелектричний циліндр круглого перерізу поляризований однорідно і статично, причому поляризація \vec{P} перпендикулярна до осі циліндра. Знайдіть напруженість електричного поля в діелектрику.

4. ЄМНІСТЬ. КОНДЕНСАТОРИ

Зв'язок потенціалу віддаленого від електричних полів провідника з його зарядом

$$q = C\varphi,$$

де C — ємність віддаленого провідника.

Ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де S — площа пластин конденсатора; ε — діелектрична проникність діелектрика між обкладками; d — товщина діелектрика.

Ємність сферичного конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)},$$

де R_1, R_2 — радіуси внутрішньої та зовнішньої обкладок.

Ємність циліндричного конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon L}{2k \ln(R_2/R_1)},$$

де L — висота коаксіальних циліндрів; R_1, R_2 — радіуси внутрішнього та зовнішнього циліндрів.

Ємність системи конденсаторів у разі послідовного з'єднання

$$C = 1 / \sum_i \frac{1}{C_i},$$

у випадку паралельного —

$$C = \sum_i C_i.$$

Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

Об'ємна густина енергії електричного поля

$$w = \frac{(\vec{E} \vec{D})}{2} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2},$$

де $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ — вектор електричної індукції (вектор зміщення).



4.1. Обкладки плоского конденсатора зроблені з прямокутних смужок фольги розміром 5×10 см і наклеєні на парафінований папір ($\varepsilon = 3$) товщиною 0,1 мм. До конденсатора прикладено напругу 150 В. Який заряд q отримаємо на обкладках?

4.2. Площа пластин плоского повітряного конденсатора $S = 0,01$ м², відстань між пластинами $d = 5$ мм. До них прикладено напругу $U_1 = 300$ В. Після відімкнення конденсатора від джерела напруги простір між пластинами заповнюють ебонітом. Якою буде різниця потенціалів U_2 між пластинами після заповнення? Знайдіть ємності конденсатора C_1 і C_2 та поверхневу густина заряду σ_1 і σ_2 на пластинах до й після заповнення.

4.3. Між пластинами плоского конденсатора, що перебувають на відстані $d = 1$ см одна від одної, прикладено напругу $U_1 = 100$ В. До однієї з пластин прилягає плоскопаралельна пластинка кристалічного бромистого талію ($\varepsilon = 173$) товщиною $d_0 = 9,5$ мм. Після відімкнення конденсатора від джерела напруги пластинку кристала виймають. Якою буде після цього різниця потенціалів U_2 між пластинами конденсатора?

4.4. Коаксіальний електричний кабель складається з центральної жили і концентричної циліндричної оболонки, між якими міститься діелектрик ($\varepsilon = 3,2$). Знайдіть ємність $C_{\text{од}}$

одиниці довжини такого кабелю, якщо радіус жили $r = 1,3$ см, радіус оболонки $R = 3,0$ см.

4.5. Радіус центральної жили коаксіального кабелю $r = 1,5$ см, радіус оболонки $R = 3,5$ см. Між центральною жилою й оболонкою прикладена різниця потенціалів $U = 2,3$ кВ. Знайдіть напруженість E електричного поля на відстані $x = 2$ см від осі кабелю.

4.6. Циліндричний конденсатор складається з внутрішнього циліндра радіусом $r = 3$ мм, двох шарів діелектрика і зовнішнього циліндра радіусом $R = 1$ см. Перший шар діелектрика товщиною $d_1 = 3$ мм прилягає до внутрішнього циліндра. Знайдіть відношення напруг U_1/U_2 у цих шарах.

4.7. Під час вивчення фотоелектричних явищ використовують сферичний конденсатор, що складається з металевої кульки діаметром $d = 1,5$ см (катода) і внутрішньої поверхні посрібленої зсередини сферичної колби діаметром $D = 11$ см (анода). Повітря з колби відкачують. Знайдіть ємність C такого конденсатора.

4.8. Радіус внутрішньої кулі повітряного сферичного конденсатора $r = 1$ см, радіус зовнішньої кулі $R = 4$ см. Різниця потенціалів між кулями $U = 2$ кВ. Знайдіть напруженість E електричного поля на відстані $x = 3$ см від центра кулі.

4.9. Кулю радіусом $R = 1$ м заряджено до потенціалу $\varphi = 30$ кВ. Знайдіть енергію зарядженої кулі.

4.10. Кулю 1 радіусом $R_1 = 10$ см, заряджену до потенціалу $\varphi_1 = 3$ кВ, після від'єднання від джерела напруги з'єднують дротиною (ємністю якої можна знехтувати) спочатку з віддаленою незарядженою кулею 2, а потім, після від'єднання від кулі 2, з віддаленою незарядженою кулею 3. Кулі 2 і 3 мають радіуси $R_2 = R_3 = 10$ см. Знайдіть: а) початкову енергію W_1 кулі 1; б) енергії W'_1 і W'_2 куль 1 і 2 після з'єднання і роботу A розряду під час з'єднання; в) енергії W''_1 і W''_3 куль 1 і 3 після з'єднання і роботу A' розряду під час з'єднання.

4.11. Знайдіть ємність кульового провідника радіусом $R_1 = 100$ мм, оточеного прилеглим до нього концентричним шаром однорідного діелектрика з проникністю $\varepsilon = 6$ і зовнішнім радіусом $R_2 = 200$ мм.

4.12. Знайдіть ємність сферичного конденсатора, радіуси обкладок якого дорівнюють a і b , причому $a < b$. Простір між обкладками заповнений діелектриком, проникність якого залежить від відстані r до центра конденсатора як $\varepsilon = \alpha/r$, де α — стала.

4.13. Циліндричний конденсатор заповнений двома циліндричними шарами діелектриків з проникністю ε_1 і ε_2 . Внутрішні радіуси шарів дорівнюють, відповідно, R_1 і $R_2 > R_1$. Максимально допустима напруженість електричного поля для цих діелектриків дорівнює $E_{1\max}$ і $E_{2\max}$. За якого співвідношення між ε , R і E_{\max} напруженість поля в разі підвищення напруги одночасно досягне значення, яке відповідає пробою обох діелектриків?

4.14. Два довгі прямі дроти з однаковим радіусом перерізу a розташовані в повітрі паралельно один до одного. Відстань між їхніми осями дорівнює b . Знайдіть взаємну ємність дротів $C_{\text{о.д}}$ на одиницю їхньої довжини за умови $b \gg a$. Обчисліть $C_{\text{о.д}}$, якщо $a = 1$ мм і $b = 50$ мм.

4.15. Знайдіть взаємну ємність системи з двох однакових металевих кульок радіусом a , відстань між центрами яких — b , причому $b \gg a$. Система перебуває в однорідному діелектрику з проникністю ε .

4.16. Сферичну оболонку радіусом R_1 , рівномірно заряджену зарядом q , розширили до радіуса R_2 . Знайдіть роботу, виконану електричними силами під час розширення.

4.17. У центрі сферичної оболонки, рівномірно зарядженої зарядом $q = 5$ мкКл, розташований точковий заряд $q_0 = 1,5$ мкКл. Знайдіть роботу електричних сил під час розширення оболонки — збільшення її радіуса від $R_1 = 50$ мм до $R_2 = 100$ мм.

4.18. Пластини плоского конденсатора площею $S = 0,01 \text{ м}^2$ кожна притягуються одна до одної з силою $F = 30 \text{ мН}$. Простір між пластинами заповнений слюдою. Знайдіть заряди q на пластинах, напруженість E поля між пластинами й об'ємну густину w енергії поля.

4.19. Площа пластин плоского повітряного конденсатора $S = 0,01 \text{ м}^2$, відстань між ними $d_1 = 1 \text{ мм}$. До пластин конденсатора прикладено різницю потенціалів $U = 0,1 \text{ кВ}$. Пластини розсовують до відстані $d_2 = 25 \text{ мм}$. Знайдіть енергії W_1 і W_2 конденсатора до і після розсування пластин, якщо джерело напруги перед розсуванням: а) не відмикають; б) відмикають.

4.20. Плоский конденсатор заповнений діелектриком і на його пластини подано деяку різницю потенціалів. Його енергія в цьому разі $W = 20 \text{ мкДж}$. Після того, як конденсатор відімкнули від джерела напруги, діелектрик вийняли з конденсатора. Робота, яку треба було виконати проти сил електричного поля, щоб вийняти діелектрик, $A = 70 \text{ мкДж}$. Знайдіть діелектричну проникність діелектрика.

4.21. На пластини плоского конденсатора, відстань між якими $d = 3 \text{ см}$, подано різницю потенціалів $U = 1 \text{ кВ}$. Простір між пластинами заповнюють діелектриком з $\varepsilon = 7$. Наскільки зміниться поверхнева густина заряду на пластинах у разі заповнення конденсатора діелектриком? Задачу розв'яжіть для випадків, якщо конденсатор заповнюють діелектриком: а) після відімкнення конденсатора від джерела напруги; б) до відімкнення конденсатора від джерела напруги.

4.22. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений діелектриком, діелектрична сприйнятливість якого $\kappa = 0,08$. Відстань між пластинами $d = 5 \text{ мм}$. На пластини конденсатора подано різницю потенціалів $U = 4 \text{ кВ}$. Знайдіть поверхневу густину зв'язаних зарядів σ' на діелектрику і поверхневу густину заряду σ на пластинах конденсатора.

4.23. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений трансформаторним мастилом з $\varepsilon = 2,2$. Відстань між

пластинами $d = 1$ см. Яку різницю потенціалів U треба подати на пластини конденсатора, щоб поверхнева густина зв'язаних зарядів у трансформаторному мастилі дорівнювала $\sigma' = 6,2$ мкКл/м²?

4.24. Плоский конденсатор розташований горизонтально так, що одна його пластина міститься над поверхнею рідини, інша — під її поверхнею. Діелектрична проникність рідини — ε , густина — ρ . На яку висоту підніметься рівень рідини в конденсаторі після надання його пластинам заряду, який розподілиться по них з поверхневою густиною σ ?

4.25. У циліндричний конденсатор уводять довгий циліндричний шар діелектрика з проникністю ε , що заповнює весь простір між обкладками. Середній радіус обкладок — R , відстань між ними — d , причому $d \gg R$. Обкладки конденсатора приєднані до джерела постійної напруги U . Знайдіть модуль електричної сили, що втягує діелектрик у конденсатор.

4.26. Знайдіть ємність C системи конденсаторів, зображеної на рис. 18. Ємність кожного конденсатора $C_i = 0,5$ мкФ.

4.27. Різниця потенціалів між точками A і B (рис. 19) $U = 6$ В. Ємність першого конденсатора $C_1 = 2$ мкФ, ємність другого конденсатора $C_2 = 4$ мкФ. Знайдіть заряди q_1 і q_2 та різницю потенціалів U_1 і U_2 на обкладках кожного конденсатора.

4.28. До джерела з ЕРС $\mathcal{E} = 100$ В приєднали послідовно два повітряні конденсатори, кожен ємністю $C = 40$ пФ. Потім один з конденсаторів заповнили однорідним діелектриком з проникністю $\varepsilon = 3$. У скільки разів зменшилася напруженість електричного поля в цьому конденсаторі? Який заряд пройде через джерело?

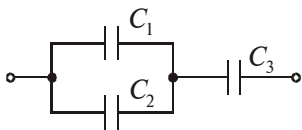


Рис. 18

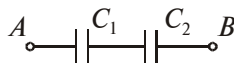


Рис. 19

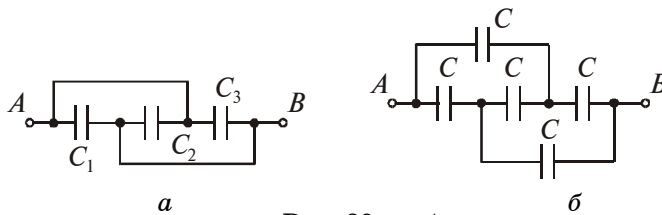


Рис. 20, а, б

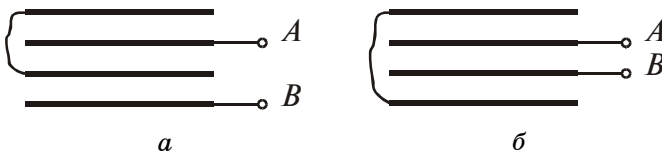


Рис. 21, а, б

4.29. Знайдіть ємність системи однакових конденсаторів між точками A і B , яка показана: а) на рис. 20, а; б) на рис. 20, б.

4.30. Чотири однакові металеві пластини розташовані в повітрі на відстані $d = 1$ мм одна від одної. Площа кожної пластини $S = 220$ см². Знайдіть ємність системи між точками A і B , якщо пластини з'єднані так, як показано: а) на рис. 21, а; б) на рис. 21, б.

4.31. Конденсатор ємністю $C_1 = 1$ мкФ витримує напругу не більше $U_1 = 6$ кВ, а конденсатор ємністю $C_2 = 2$ мкФ — не більше $U_2 = 4$ кВ. Яку напругу може витримати система з цих двох конденсаторів у разі послідовного з'єднання?

4.32. У схемі на рис. 22 знайдіть різницю потенціалів між точками A і B , якщо ЕРС $\mathcal{E} = 110$ В і відношення ємностей $C_2/C_1 = \eta = 2$.

4.33. Знайдіть ємність нескінченного кола, утвореного повторенням однієї й тієї ж ланки, що складається з двох однакових конденсаторів, кожен ємністю C (рис. 23).

4.34. У деякому колі є ділянка AB , показана на рис. 24. ЕРС джерела $\mathcal{E} = 10$ В, ємності конденсаторів $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ

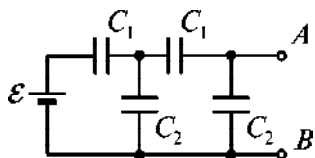


Рис. 22

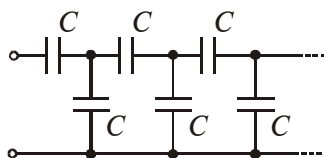


Рис. 23

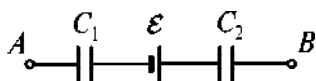


Рис. 24

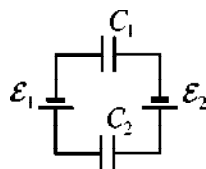


Рис. 25

і різниця потенціалів $\varphi_A - \varphi_B = 5$ В. Знайдіть напругу на кожному конденсаторі.

4.35. У схемі на рис. 25 знайдіть різницю потенціалів між лівою і правою обкладками кожного конденсатора.

4.36. Знайдіть заряд кожного конденсатора в колі, показаному на рис. 25.

4.37. Визначте різницю потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$ між точками А і В схеми на рис. 26. За якої умови вона дорівнює нулю?

4.38. Конденсатор ємністю $C_1 = 1$ мкФ, заряджений до напруги $U = 110$ В, приєднали паралельно до кінців системи з двох послідовно з'єднаних незаряджених конденсаторів, ємності яких $C_2 = 2$ мкФ і $C_3 = 3$ мкФ. Який заряд пройде в цьому разі по підвідних провідниках?

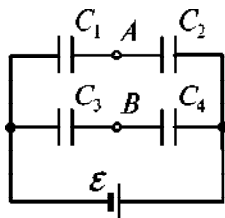


Рис. 26

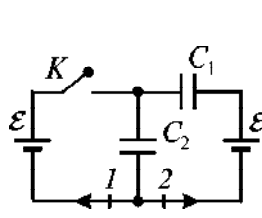


Рис. 27

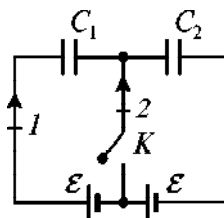


Рис. 28

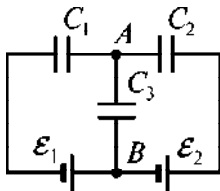


Рис. 29

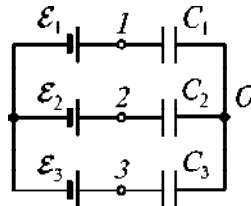


Рис. 30

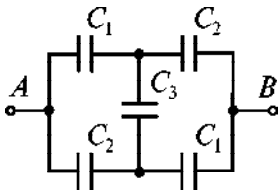


Рис. 31

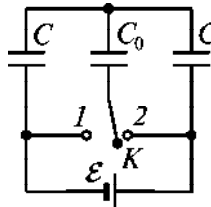


Рис. 32

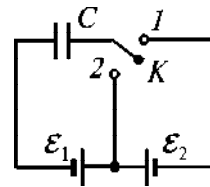


Рис. 33

4.39. Які заряди пройдуть після замикання ключа K у схемі на рис. 27 через перетини 1 і 2 у напрямках, вказаних стрілками?

4.40. У схемі на рис. 28 ЕРС кожної батареї $\mathcal{E} = 60$ В, ємності конденсаторів $C_1 = 2$ мкФ і $C_2 = 3$ мкФ. Знайдіть заряди, які пройдуть після замикання ключа K через перетини 1 і 2 у напрямках, вказаних стрілками.

4.41. Знайдіть різницю потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$ між точками A і B схеми на рис. 29.

4.42. Визначте потенціал у точці 1 схеми на рис. 30, вважаючи потенціал точки O таким, що дорівнює нулю. Використовуючи симетрію отриманої формули, запишіть вирази для потенціалів у точках 2 і 3 .

4.43. Знайдіть ємність між точками A і B (рис. 31).

4.44. Яка кількість тепла виділиться в колі (рис. 32) після перемикання ключа K з положення 1 у положення 2 ?

4.45. Яка кількість тепла виділиться в колі (рис. 33) після перемикання ключа K з положення 1 у положення 2 ?

5. ОПІР. ПРОВІДНІСТЬ. РЕЗИСТОРИ В КОЛАХ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

Опір прямолінійного провідника довжиною l та площею поперечного перерізу S

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ — питомий опір провідника.

Залежність питомого опору металів від температури

$$\rho(T) = \rho_0 (1 + \alpha T),$$

де ρ_0 — питомий опір за $T_0 = 0^\circ\text{C}$; α — температурний коефіцієнт опору, $^\circ\text{C}^{-1}$; T — температура, $^\circ\text{C}$.

Сила струму (струм) чисельно дорівнює кількості заряду, який проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Якщо сила струму стала ($I = \text{const}$), то $I = q/t$.

Густиною електричного струму називають вектор \vec{j} , який збігається за напрямом із дрейфовою швидкістю його носіїв і чисельно дорівнює силі струму, який проходить через одиницю площі перерізу провідника, перпендикулярної до прямої струму

$$j = \frac{dI}{dS}.$$

В однорідному провіднику густина струму в кожній точці поперечного перерізу провідника є сталою

$$j = \frac{I}{S}.$$

Струм, який тече по ділянці однорідного провідника, описують законом Ома

$$I = \frac{U}{R},$$

де U — різниця потенціалів на кінцях ділянки; R — опір цієї ділянки.

Закон Ома для замкненої ділянки кола

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r},$$

де \mathcal{E} — ЕРС джерела напруги; R — зовнішній опір; r — внутрішній опір джерела.

Опір системи резисторів у разі послідовного з'єднання

$$R = \sum_i R_i,$$

у випадку паралельного —

$$R = 1 / \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

Закон Ома в диференційній формі

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^*),$$

де \vec{E}^* — напруженість поля сторонніх сил; $\sigma = 1/\rho$ — питома провідність.



5.1. Скільки витків ніхромового дроту діаметром $d = 1$ мм треба навити на фарфоровий циліндр радіусом $a = 2,5$ см, щоб отримати нагрівач з опором $R = 40$ Ом?

5.2. Мідна й алюмінієва дротини мають однакову довжину l і однаковий опір R . У скільки разів мідна дротина важча, ніж алюмінієва?

5.3. Вольфрамова нитка електричної лампочки за температури $T_1 = 20^\circ\text{C}$ має опір $R_1 = 35,8$ Ом. Якою буде температура

T_2 нитки лампочки, якщо під час увімкнення в мережу з напругою $U = 120$ В по нитці тече струм $I = 0,33$ А?

5.4. Реостат із залізного дроту, амперметр і джерело ввімкнені послідовно. За температури $T_0 = 0$ °С опір реостата $R_0 = 120$ Ом, опір амперметра $R_A = 20$ Ом. Амперметр показує струм $I_0 = 22$ мА. Який струм I показуватиме амперметр, якщо реостат нагріється на $\Delta T = 50$ °С?

5.5. Обмотка котушки з мідного дроту за температури $T_1 = 14$ °С має опір $R_1 = 10$ Ом. Після пропускання струму опір обмотки $R_2 = 12,2$ Ом. До якої температури T_2 нагрілася обмотка?

5.6. Довгий рівномірно заряджений по поверхні циліндр радіусом $a = 1$ см рухається зі швидкістю $v = 10$ м/с уздовж своєї осі. Напруженість електричного поля безпосередньо біля поверхні циліндра $E = 0,9$ кВ/см. Знайдіть струм, зумовлений механічним перенесенням заряду.

5.7. Повітряний циліндричний конденсатор, приєднаний до джерела напруги $U = 200$ В, занурюють у вертикальному положенні в посудину з дистильованою водою зі швидкістю $v = 5$ мм/с. Щілина між обкладками конденсатора $d = 2$ мм, середній радіус обкладок $r = 50$ мм. Уважаючи, що $d \ll r$, знайдіть струм, який тече по підвідних провідниках. Діелектрична проникність води $\epsilon_b = 81$.

5.8. Однорідне слабкопровідне середовище з питомим опором ρ заповнює простір між двома коаксіальними ідеально провідними тонкими циліндрами. Радіуси циліндрів — a та b , причому $a < b$, довжина кожного циліндра — l . Нехтуючи крайовими ефектами, знайдіть опір середовища між циліндрами.

5.9. Металева куля радіусом a оточена концентричною тонкою металевою оболонкою радіусом b . Простір між цими електродами заповнено однорідним слабкопровідним середовищем з питомим опором ρ . Знайдіть опір міжелектродного проміжку. Розгляньте випадок, коли $b \rightarrow \infty$.

5.10. Простір між двома провідними концентричними сферами, радіуси яких — a та b (причому $a < b$), заповнений однорідним

слабкопровідним середовищем. Ємність такої системи дорівнює C . Знайдіть її питомий опір, якщо різниця потенціалів між сферами, відімкненими від зовнішньої напруги, зменшується в η разів за час Δt .

5.11. Дві металеві кульки з однаковим радіусом a розміщені в однорідному слабопровідному середовищі з питомим опором ρ . Знайдіть опір середовища між кульками за умови, що відстань між ними є значно більшою від a .

5.12. Металева кулька радіусом a розташована на відстані l від безмежної ідеально провідної площини. Простір навколо кульки заповнений однорідним слабопровідним середовищем з питомим опором ρ . Знайдіть для випадку, коли $a \ll l$: а) густину струму поблизу провідної площини як функцію від відстані r до кульки, якщо різниця потенціалів між кулькою та площиною дорівнює U ; б) опір середовища між кулькою та площиною.

5.13. Два довгі паралельні провідники розташовані у слабопровідному середовищі з питомим опором ρ . Відстань між осями провідників — l , радіус перерізу кожного провідника — a . Знайдіть для випадку, коли $a \ll l$: а) густину струму в точці, рівновіддаленій від осей провідників на відстань r , якщо різниця потенціалів між провідниками дорівнює U ; б) опір середовища на одиницю довжини провідників.

5.14. Проміжок між обкладками плоского конденсатора заповнений склом з питомим опором $\rho = 100 \text{ ГОм} \cdot \text{м}$. Ємність конденсатора $C = 4 \text{ нФ}$. Знайдіть струм провідності через конденсатор у разі подачі на нього напруги $U = 2,0 \text{ кВ}$.

5.15. Два провідники довільної форми розміщені в безмежному однорідному слабопровідному середовищі з питомим опором ρ і діелектричною проникністю ϵ . Знайдіть значення добутку RC для такої системи, де R — опір середовища між провідниками, C — взаємна ємність провідників за наявності середовища.

5.16. Провідник із питомим опором ρ межує з діелектриком із проникністю ϵ . У точці A біля поверхні провідника

електрична індукція дорівнює D , причому вектор \vec{D} напрямлений від провідника й утворює кут α з нормаллю до поверхні. Знайдіть поверхневу густину зарядів на провіднику поблизу точки A і густину струму в провіднику поблизу цієї точки.

5.17. Проміжок між пластинами плоского конденсатора заповнений неоднорідним слабкопровідним середовищем, питомою провідність якого змінюється в напрямі, перпендикулярному до пластин, за лінійним законом від $\sigma_1 = 1$ пСм/м до $\sigma_2 = 2$ пСм/м. Площа кожної пластини $S = 230$ см², ширина проміжку $d = 2$ мм. Знайдіть струм через конденсатор за напруги на ньому $U = 300$ В.

5.18. Доведіть, що закон заломлення ліній постійного струму на межі поділу двох провідних середовищ $\operatorname{tg} \alpha_2 / \operatorname{tg} \alpha_1 = \sigma_2 / \sigma_1$, де σ_1 і σ_2 — провідність середовищ; α_1 і α_2 — кути між лініями струму і нормаллю до поверхні поділу цих середовищ.

5.19. Два циліндричні провідники однакового перерізу, але з різними питомими опорами $\rho_1 = 84$ нОм·м і $\rho_2 = 50$ нОм·м, притиснуті торцями один до одного. Знайдіть заряд на межі поділу цих провідників, якщо в напрямі від провідника 1 до провідника 2 тече струм $I = 50$ А.

5.20. Проміжок між обкладками плоского конденсатора заповнений послідовно двома діелектричними шарами 1 і 2 завтовшки d_1 і d_2 , з проникністю ε_1 і ε_2 і питомими опорами ρ_1 і ρ_2 . Конденсатор перебуває під постійною напругою U , причому електричне поле напрямлене від шару 1 до шару 2. Знайдіть σ — поверхневу густину вільних зарядів на межі поділу діелектричних шарів і умову, за якої $\sigma = 0$.

5.21. Пластины 1 і 2 плоского конденсатора перебувають у неоднорідному слабкопровідному середовищі. Його діелектрична проникність і питомий опір змінюються від значень ε_1 , ρ_1 біля пластини 1 до значень ε_2 , ρ_2 біля пластини 2. До конденсатора прикладено постійну напругу і через нього тече постійний струм I від пластини 1 до пластини 2. Знайдіть сумарний вільний заряд у цьому середовищі.

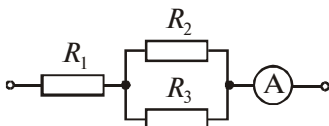


Рис. 34

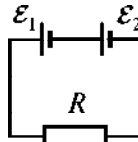


Рис. 35

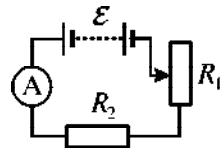


Рис. 36

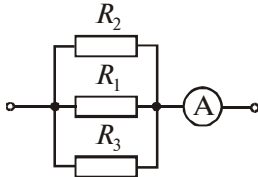


Рис. 37

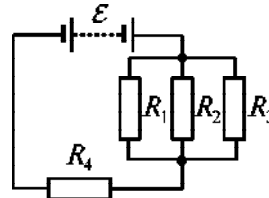


Рис. 38

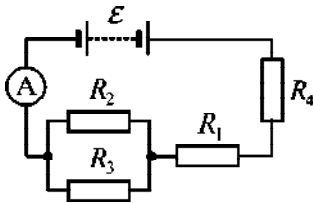


Рис. 39

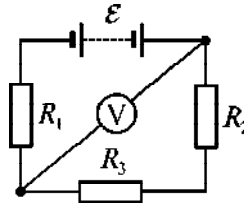


Рис. 40

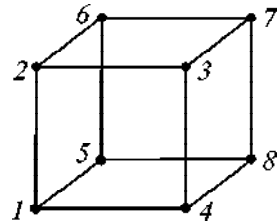


Рис. 41

5.22. Довгий провідник круглого перерізу радіусом a зроблений з матеріалу, питомий опір якого залежить лише від відстані r до осі провідника за законом $\rho = \alpha/r^2$, де α — стала. Знайдіть: а) опір $R_{\text{о.д}}$ одиниці довжини такого провідника; б) напруженість E електричного поля в провіднику, за якої по ньому тектиме струм I .

5.23. Знайдіть напругу U на опорах $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 2$ Ом і $R_3 = 4$ Ом (рис. 34), якщо амперметр показує струм $I_1 = 3$ А. Знайдіть струми I_2 і I_3 через опори R_2 і R_3 .

5.24. ЕРС елемента $\mathcal{E} = 6$ В. За зовнішнього опору $R = 1,1$ Ом струм у колі $I = 3$ А. Знайдіть напругу U_r на елементі та його внутрішній опір r .

5.25. Є два однакові елементи з ЕРС $\mathcal{E} = 2$ В і внутрішнім опором $r = 0,3$ Ом. Як треба з'єднати ці елементи (попередньо чи паралельно), щоб отримати більший струм, якщо зовнішній опір: а) $R = 0,2$ Ом; б) $R = 16$ Ом? Знайдіть струм I у кожному з цих випадків.

5.26. Два послідовно з'єднані елементи з однаковими ЕРС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 2$ В і внутрішніми опорами $r_1 = 1$ Ом і $r_2 = 1,5$ Ом замкнені на зовнішній опір $R = 0,5$ Ом (рис. 35). Знайдіть напруги на затискачах кожного елемента.

5.27. Батарея з ЕРС $\mathcal{E} = 20$ В, амперметр і реостати з опорами R_1 і R_2 з'єднані послідовно (рис. 36). У разі виведеного реостата R_1 амперметр показує струм $I = 8$ А, у разі введеного реостата R_1 — струм $I' = 5$ А. Знайдіть опори R_1 і R_2 реостатів та спади напруг U_1 і U_2 на них, коли реостат R_1 повністю ввімкнений.

5.28. Опори $R_2 = 20$ Ом і $R_3 = 15$ Ом (рис. 37). Через опір R_2 тече струм $I_2 = 0,3$ А. Амперметр показує струм $I = 0,8$ А. Знайдіть опір R_1 .

5.29. ЕРС батареї $\mathcal{E} = 100$ В, опори $R_1 = R_3 = 40$ Ом, $R_2 = 86$ Ом і $R_4 = 34$ Ом (рис. 38). Знайдіть струм I_2 , який тече через опір R_2 , і напругу U_2 на ньому.

5.30. ЕРС батареї $\mathcal{E} = 120$ В, опори $R_3 = 20$ Ом і $R_4 = 25$ Ом (рис. 39). На опорі R_1 напруга $U_1 = 40$ В. Амперметр показує струм $I = 2$ А. Знайдіть опір R_2 .

5.31. ЕРС батареї $\mathcal{E} = 100$ В, опори $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 200$ Ом і $R_3 = 300$ Ом, опір вольтметра $R_V = 2$ кОм (рис. 40). Яку напругу U_V показує вольтметр?

5.32. Опори $R_1 = R_2 = R_3 = 200$ Ом, опір вольтметра $R_V = 1$ кОм (див. рис. 40). Вольтметр показує напругу $U = 100$ В. Знайдіть ЕРС \mathcal{E} батареї.

5.33. Знайдіть опір провідникового каркаса, який має форму куба (рис. 41), у разі ввімкнення його в коло між точками: а) 1–7; б) 1–2; в) 1–3. Опір ребра каркаса дорівнює R .

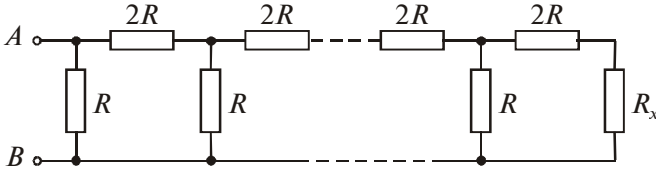


Рис. 42

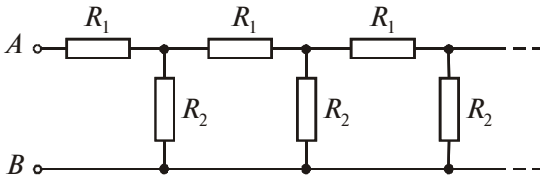


Рис. 43

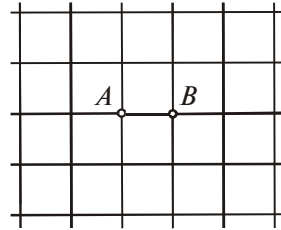


Рис. 44

5.34. За якого опору R_x у колі на рис. 42 опір між точками A і B не залежить від кількості ланок?

5.35. На рис. 43 показано нескінченне коло, утворене повторенням однієї й тієї ж ланки — опорів $R_1 = 4$ Ом і $R_2 = 3$ Ом. Знайдіть опір між точками A і B .

5.36. Є безмежна дротяна сітка з квадратними ланками (рис. 44). Опір кожного провідника між вузлами дорівнює R_0 . Знайдіть опір R цієї сітки між точками A і B . *Вказівка: скористайтеся принципом симетрії.*

5.37. Амперметр і вольтметр приєднали послідовно до батареї з ЕРС $\mathcal{E} = 6$ В. Якщо паралельно до вольтметра приєднати деякий опір, то показ вольтметра зменшується в $\eta = 2$ рази, а показ амперметра у стільки ж збільшується. Знайдіть показ вольтметра після приєднання опору.

5.38. Знайдіть різницю потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ між точками 1 і 2 схеми на рис. 45, якщо $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $\mathcal{E}_1 = 5$ В і $\mathcal{E}_2 = 2$ В. Внутрішні опори джерел струму дуже малі.

5.39. Два послідовно сполучені однакові джерела ЕРС мають різні внутрішні опори r_1 і r_2 , причому $r_2 > r_1$. Знайдіть зовнішній опір R , за якого різниця потенціалів на клеммах одного з джерел (якого саме?) дорівнюватиме нулю.

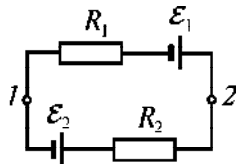


Рис. 45

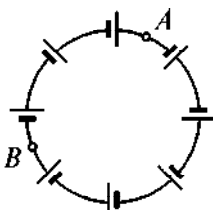


Рис. 46

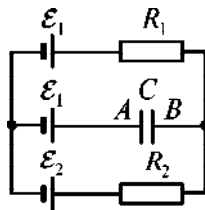


Рис. 47

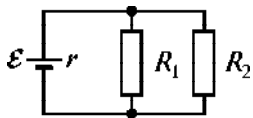


Рис. 48

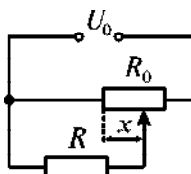


Рис. 49

5.40. Джерела напруги з різними ЕРС сполучені, як показано на рис. 46. ЕРС джерел пропорційні до їхніх внутрішніх опорів: $\mathcal{E} = \alpha r$, де α — стала. Опір провідників дуже малий. Знайдіть: а) струм у колі; б) різницю потенціалів між точками А і В.

5.41. Резистор з опором R і нелінійний опір, вольт-амперна характеристика якого має вигляд $U = \alpha\sqrt{I}$, де α — стала, з'єднані послідовно і приєднані до джерела напруги U_0 . Знайдіть струм у колі.

5.42. У схемі на рис. 47 $\mathcal{E}_1 = 1$ В, $\mathcal{E}_2 = 2,5$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом. Внутрішні опори джерел дуже малі. Знайдіть різницю потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$ між обкладками конденсатора С.

5.43. У схемі на рис. 48 $\mathcal{E} = 5$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом. Внутрішній опір джерела $r = 0,1$ Ом. Знайдіть струми, які течуть через опори R_1 та R_2 .

5.44. На рис. 49 показана схема потенціометра, за допомогою якого можна змінювати напругу U , яку подають на деякий прилад з опором R . Потенціометр має довжину l , опір R_0 і перебуває під напругою U_0 . Знайдіть напругу U як функцію довжини x . Розгляньте окремо випадок $R \gg R_0$.

6. ПРАВИЛА КІРХГОФА

Правила Кірхгофа застосовують для розрахунку розгалужених електричних кіл, тобто кіл, що містять вузли. Вузол — це точка з'єднання трьох і більше провідників. Під контуром електричного кола розуміють замкнені кола з провідників. У цьому разі провідник може входити до кількох контурів. Прийнято, що струм, який напрямлений до вузла, позитивний, від вузла — негативний.

Перше правило Кірхгофа: сумарний струм у вузлі електричного кола дорівнює нулю:

$$\sum_i I_i = 0.$$

Це правило виражає закон збереження електричного заряду. Інакше, який заряд входить у вузол, такий же з нього й виходить.

Якщо коло містить n вузлів, то можна описати $n-1$ незалежних рівнянь для струмів.

Друге правило Кірхгофа: сума всіх спадів напруг у замкненому контурі електричного кола дорівнює сумі всіх електрорушійних сил, які діють у цьому контурі:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_i \mathcal{E}_i.$$

Якщо в контурі немає ЕРС, то сумарна напруга дорівнює нулю. Іншими словами, у разі обходу кола по контуру потенціал, змінюючись, повертається до початкового значення. Якщо коло містить m гілок, то його описують $m - (n - 1)$ рівняннями для напруг. Як приклад, можна розглянути розв'язок до задачі **6.2**.

Зменшити кількість вихідних рівнянь під час розв'язування задач на знаходження струмів у розгалужених колах

дає змогу *метод контурних струмів*. У ньому приймають, що на всіх ділянках кожного замкнутого довільно вибраного контуру тече один і той же струм (тому його називають контурним). Повна сила струму, що тече по ділянці контуру, дорівнює алгебричній сумі сил контурних струмів, для яких ця ділянка є спільною. Напрямок обходу контуру вибирають довільно, він збігається з напрямом контурного струму в ньому. Далі для кожного довільно вибраного контуру (який не є комбінацією інших) записують друге правило Кірхгофа, у якому струми є контурними. Знак контурних струмів визначають так: якщо напрям контурного струму збігається з обходом контуру, то він позитивний, якщо ні — то негативний. Так отримують стільки алгебричних рівнянь, скільки є в розгалуженому колі незалежних контурів. З отриманої системи рівнянь знаходять контурні струми. Реальний струм кожної ділянки кола розраховують як алгебричну суму всіх контурних струмів (з урахуванням їхніх знаків), що течуть по ній. Як приклад, можна розглянути розв'язок до задачі 6.3.



6.1. Визначте струм, який тече через кожен з резисторів (рис. 50): $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 6 \text{ Ом}$, $\mathcal{E}_1 = 6 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3 = 4 \text{ В}$.

6.2. Визначте струм, який тече через кожен з резисторів (рис. 51): $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 5 \text{ Ом}$, $R_4 = 6 \text{ Ом}$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_4 = 6 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 10 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3 = 3 \text{ В}$.

6.3. Визначте струм, який тече через кожен з резисторів (рис. 52): $R_1 = 6 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $R_3 = 8 \text{ Ом}$, $R_4 = 5 \text{ Ом}$, $R_5 = 4 \text{ Ом}$, $\mathcal{E}_1 = 4 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3 = 3 \text{ В}$.

6.4. У схему ввімкнено два однакові гальванічні елементи з ЕРС $1,5 \text{ В}$ і внутрішнім опором 2 Ом так, як показано на рис. 53. Який струм тече через елементи? Що покаже вольтметр V ? Опором провідників знехтуйте.

6.5. Яку напругу покаже вольтметр, якщо за умовою попередньої задачі внутрішній опір одного гальванічного елемента — 3 Ом, а іншого — 1 Ом.

6.6. Що покаже вольтметр, якщо його ввімкнути разом з трьома однаковими гальванічними елементами так, як показано на рис. 54? Опором провідників знехтуйте.

6.7. Знайдіть умову, за якої струм, що його створюють два з'єднані послідовно гальванічні елементи з ЕРС \mathcal{E}_1 та \mathcal{E}_2 і внутрішніми опорами r_1 та r_2 , буде меншим від струму, який дає перший із них, якщо зовнішній опір навантаження є однаковим і дорівнює R .

6.8. За якого співвідношення між опорами r , R_x та R у схемі, зображеній на рис. 55, амперметр показуватиме дуже малу зміну сили струму за великих змін опору R_x ? Внутрішнім опором джерела знехтуйте.

6.9. У колі, зображеному на рис. 56, батареї увімкнені назустріч і їхні ЕРС $\mathcal{E}_1 = 1,5$ В та $\mathcal{E}_2 = 1$ В. Опори резисторів $R = 100$ Ом, $R_1 = 50$ Ом та $R_2 = 80$ Ом. Знайдіть струм через опір R .

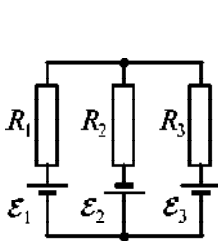


Рис. 50

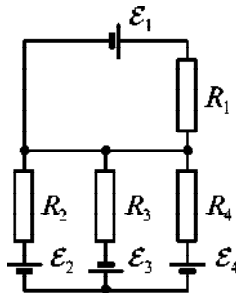


Рис. 51

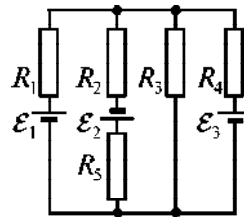


Рис. 52

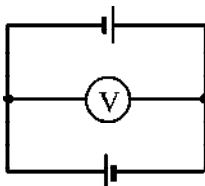


Рис. 53

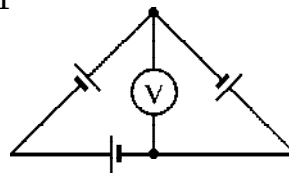


Рис. 54

6.10. Яке має бути співвідношення між опорами та ЕРС у колі, зображеному на рис. 56, щоб через другу батарею не протікав струм?

6.11. Опори в колі, зображеному на рис. 57, підбрано так, що струм через першу батарею не тече. Яка напруга на резисторі R_2 та сила струму через R_3 ? Внутрішні опори батарей дорівнюють нулю, $R_3 = 2$ Ом, $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 5$ В.

6.12. За умов попередньої задачі знайдіть опори R_1 , R_2 та R_4 .

6.13. Батарея з ЕРС \mathcal{E} замкнена на реостат з опором R та довжиною l . До кінця реостата і до повзунка підімкнено вольтметр з внутрішнім опором r . Як залежать покази вольтметра від положення повзунка на реостаті?

6.14. Замість однакових гальванічних елементів довелося ввімкнути паралельно два гальванічні елементи з ЕРС \mathcal{E}_1 та \mathcal{E}_2 і внутрішніми опорами r_1 та r_2 . Вони дають струм у зовнішнє коло з загальним опором R . Знайдіть ЕРС \mathcal{E} і внутрішній опір r такого гальванічного елемента, який даватиме у зовнішнє коло такий же струм за будь-якого загального опору R . Доведіть, що $\mathcal{E} < \max\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$.

6.15. У колі, схема якого зображена на рис. 58, відомі опори R_1 , R_2 , R_3 та сила струму I_3 через опір R_3 . Знайдіть ЕРС \mathcal{E} і сили струму I_1 та I_2 , які течуть через опори R_1 та R_2 .

6.16. Знайдіть струми в окремих гілках моста Вітстона (рис. 59) за умови, що через гальванометр тече струм $I_G = 0$ А. ЕРС елемента $\mathcal{E} = 2$ В, опори $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 45$ Ом, $R_3 = 200$ Ом.

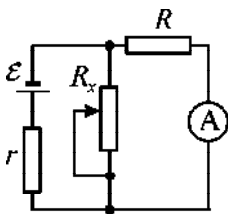


Рис. 55

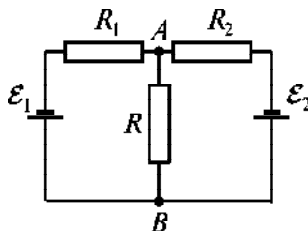


Рис. 56

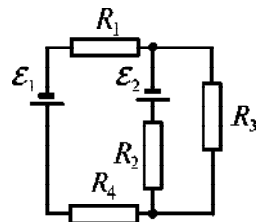


Рис. 57

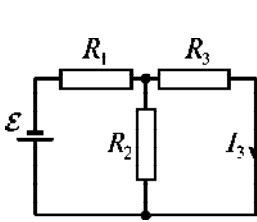


Рис. 58

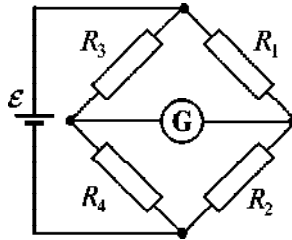


Рис. 59

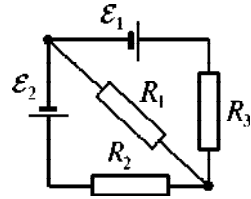


Рис. 60

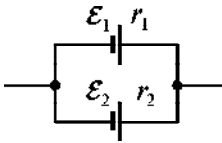


Рис. 61

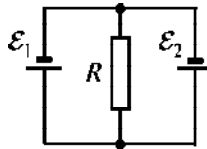


Рис. 62

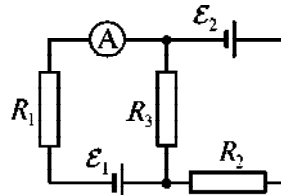


Рис. 63

6.17. ЕРС елементів $\mathcal{E}_1 = 2,1$ В, $\mathcal{E}_2 = 1,9$ В, опори $R_1 = 45$ Ом, $R_2 = R_3 = 10$ Ом. Знайдіть струми у всіх гілках кола, зображеного на рис. 60.

6.18. Яку різницю потенціалів отримаємо на клеммах двох елементів, увімкнених паралельно (рис. 61), якщо їхні ЕРС $\mathcal{E}_1 = 1,4$ В, $\mathcal{E}_2 = 1,2$ В, а внутрішні опори $r_1 = 0,6$ Ом, $r_2 = 0,4$ Ом?

6.19. Дві батареї з однаковими ЕРС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 2$ В та внутрішніми опорами $r_1 = 1$ Ом та $r_2 = 2$ Ом замкнено на зовнішній опір R (рис. 62). Через батарею \mathcal{E}_1 тече струм $I_1 = 1$ А. Знайдіть струм I_2 , який тече через батарею \mathcal{E}_2 , струм I_R , який тече через опір R , а також опір R .

6.20. Батареї мають ЕРС $\mathcal{E}_1 = 110$ В та $\mathcal{E}_2 = 220$ В (рис. 63). Опори $R_3 = 500$ Ом, $R_1 = R_2 = 100$ Ом. Знайдіть покази амперметра.

6.21. Батареї мають ЕРС $\mathcal{E}_1 = 2$ В та $\mathcal{E}_2 = 4$ В. Опір $R_1 = 0,5$ Ом (див. рис. 63). На резисторі R_2 напруга $U_2 = 1$ В (струм через R_2 тече справа наліво). Знайдіть покази амперметра.

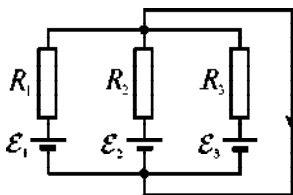


Рис. 64

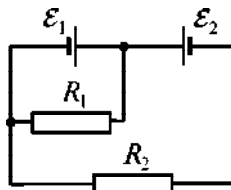


Рис. 65

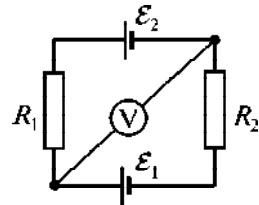


Рис. 66

6.22. Батареї мають ЕРС $\mathcal{E}_1 = 30$ В та $\mathcal{E}_2 = 5$ В. Опори $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом (див. рис. 63). Через амперметр тече струм $I = 1$ А, напрямлений від R_3 до R_1 . Знайдіть опір R_1 .

6.23. Батареї мають ЕРС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 6$ В. Опори $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 12$ Ом (рис. 64). У разі короткого замикання верхньої клемми з негативними полюсами батарей через замикальний провід тече струм $I = 1,6$ А. Знайдіть струми в усіх ділянках кола та опір R_3 .

6.24. Дві однакові батареї мають ЕРС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 2$ В та внутрішні опори $r_1 = r_2 = 0,5$ Ом (рис. 65). Знайдіть струми, які течуть через опори $R_1 = 0,5$ Ом та $R_2 = 1,5$ Ом, а також струм через елемент з ЕРС \mathcal{E}_1 .

6.25. Батареї мають ЕРС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, опори $R_2 = 2R_1$ (рис. 66). У скільки разів струм, який тече через вольтметр, більший від струму через опір R_2 ?

6.26. Батареї мають ЕРС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 1,5$ В та внутрішні опори $r_1 = r_2 = 0,5$ Ом (рис. 67). Опори $R_1 = R_2 = 5$ Ом та $R_3 = 1$ Ом, опір амперметра $R_A = 3$ Ом. Знайдіть показ амперметра.

6.27. Батарея має ЕРС $\mathcal{E} = 200$ В, опори $R_1 = 2$ кОм та $R_2 = 3$ кОм, опори вольтметрів $R_{V1} = 3$ кОм та $R_{V2} = 2$ кОм (рис. 68). Знайдіть покази вольтметрів V_1 та V_2 , якщо ключ K : а) розімкнутий; б) замкнений. Задачу розв'яжіть, застосовуючи правила Кірхгофа.

6.28. У колі, схема якого зображена на рис. 69, відомі всі опори і сила струму I_4 через опір R_4 . Знайдіть ЕРС батареї. Внутрішнім опором батареї знехтуйте.

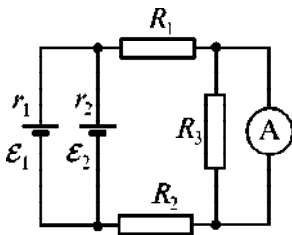


Рис. 67

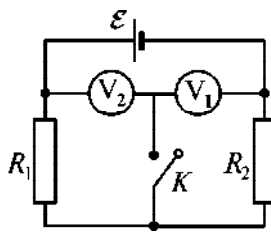


Рис. 68

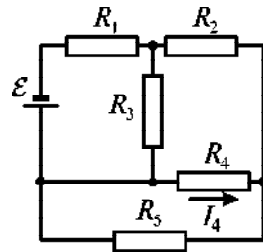


Рис. 69

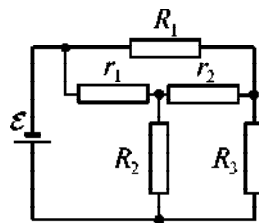


Рис. 70

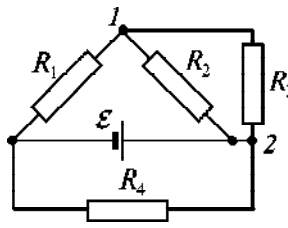


Рис. 71

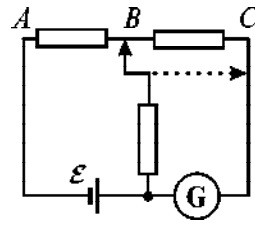


Рис. 72

6.29. У колі постійного струму, зображеному на рис. 70, $\mathcal{E} = 10$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = R_3 = 1$ Ом, $r_1 = r_2 = 1$ Ом. Знайдіть сили струмів у кожній гілці. Внутрішнім опором батареї знехтуйте.

6.30. Чому дорівнює ЕРС батареї (у схемі до попередньої задачі за тих же значень опорів), якщо через батарею тече струм $3,24$ А?

6.31. В електричному колі, схема якого зображена на рис. 71, відомі опори R_1 , R_2 та R_3 . Через джерело тече струм I , а між точками 1 та 2 напруга дорівнює U_{12} . Знайдіть R_4 .

6.32. Для визначення внутрішнього опору батареї можна скористатися схемою, зображеною на рис. 72, у якій гальванометр G з відомим опором R дає однакові відхилення стрілки незалежно від того, у якій точці є рухомий контакт — B чи C . У цьому разі опір ділянки AB спеціально підбирають. Нехай $R_{AB} = r$. Чому дорівнює внутрішній опір батареї?

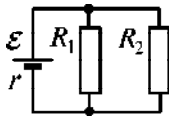


Рис. 73

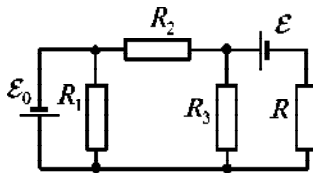


Рис. 74

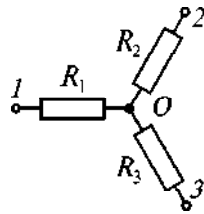


Рис. 75

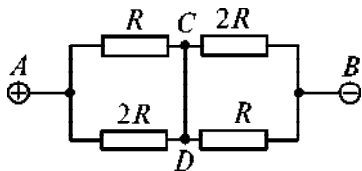


Рис. 76

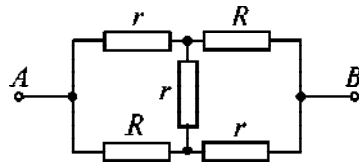


Рис. 77

6.33. Як влаштувати освітлення прохідного коридору однією лампочкою, щоб людина, заходячи з будь-якого кінця, могла ввімкнути лампочку, яка висітиме посередині коридору, незалежно від положення вимикача на іншому кінці коридору?

6.34. У схемі, зображеній на рис. 73, $\mathcal{E} = 5$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом. Внутрішній опір джерела $r = 0,1$ Ом. Знайдіть струми, які течуть через опори R_1 та R_2 .

6.35. Знайдіть струм через опір R у схемі, зображеній на рис. 74. Вважайте внутрішній опір джерел дуже малим.

6.36. Знайдіть струм через опір R_1 ділянки кола (рис. 75), якщо $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом, а потенціали точок 1, 2, 3 дорівнюють $\varphi_1 = 10$ В, $\varphi_2 = 6$ В, $\varphi_3 = 5$ В.

6.37. Між точками A та B кола, зображеного на рис. 76, підтримують напругу $U = 20$ В. Знайдіть струм та його напрям на ділянці CD, якщо $R = 5$ Ом.

6.38. У схемі, зображеній на рис. 77, знайдіть опір R_{AB} між точками A та B, якщо $R = 100$ Ом, а $r = 50$ Ом.

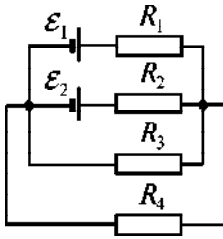


Рис. 78

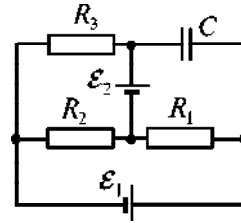


Рис. 79

6.39. Знайдіть напруги на опорах $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = R_3 = 4$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, що увімкнені в коло, як показано на рис. 78, якщо $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В. Внутрішній опір джерел дуже малий.

6.40. Знайдіть різницю потенціалів $\Delta\phi$ між обкладками конденсатора C у схемі, зображеній на рис. 79, якщо $\mathcal{E}_1 = 4$ В, $\mathcal{E}_2 = 1$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом. Уважайте внутрішній опір джерел дуже малим.

7. ПОТУЖНІСТЬ ПОСТІЙНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ. ЗАКОН ДЖОУЛЯ–ЛЕНЦА

На ділянці електричного кола постійного струму потужність

$$P = UI,$$

де U — прикладена напруга; I — сила струму.

Робота електричного струму за час τ визначена формулою

$$A = IU\tau = I^2 R\tau = \frac{U^2}{R} \tau.$$

ККД постійного електричного струму чисельно дорівнює відношенню споживаної електроприймачем потужності до повної потужності в електричному колі:

$$\eta = \frac{P_{\text{спож}}}{P_{\text{повн}}} \cdot 100\%.$$

Під час протікання струму по провіднику відбувається перетворення електричної енергії в теплову, причому кількість виділеної теплоти дорівнює роботі електричних сил:

$$Q = A.$$

Закон Джоуля–Ленца: кількість теплоти, яка виділяється у провіднику, дорівнює добутку квадрата сили струму, опору провідника і часу протікання струму:

$$Q = I^2 R\tau.$$



7.1. Елемент з ЕРС $\mathcal{E} = 1,1$ В і внутрішнім опором $r = 1$ Ом, замкнений на зовнішній опір $R = 9$ Ом. Знайдіть струм I у колі, напругу U на опорі та напругу U_r на елементі. З яким ККД працює елемент?

7.2. Елемент з ЕРС $\mathcal{E} = 1,6$ В має внутрішній опір $r = 0,5$ Ом. Знайдіть ККД елемента, якщо струм у колі $I = 2,4$ А.

7.3. Амперметр з опором $R_A = 0,16$ Ом зашунтований опором $R = 0,04$ Ом. Амперметр показує струм $I_0 = 8$ А. Знайдіть струм у колі.

7.4. Маємо амперметр, призначений для вимірювання струму до $I = 10$ А з опором $R_A = 0,18$ Ом, шкала якого розділена на 100 поділок. Шунт з яким опором треба взяти і як його увімкнути, щоб цим амперметром можна було вимірювати струм до $I_0 = 100$ А? Як зміниться в цьому разі ціна поділки амперметра?

7.5. Маємо вольтметр, призначений для вимірювання різниці потенціалів до $U = 30$ В з опором $R_V = 2$ кОм, шкала якого поділена на 150 поділок. Який додатковий опір R треба взяти і як його увімкнути, щоб цим вольтметром можна було вимірювати різницю потенціалів до $U_0 = 75$ В? Як зміниться в цьому разі ціна поділки вольтметра?

7.6. Маємо амперметр, призначений для вимірювання струмів до $I = 15$ мА з внутрішнім опором $R_A = 5$ Ом. Який опір R треба взяти і як його увімкнути для того, щоб цим пристроєм вимірювати: а) струм до $I_0 = 150$ мА; б) різницю потенціалів до $U_0 = 150$ В.

7.7. Маємо 120-вольтну електричну лампу розжарення потужністю $P = 40$ Вт. Який додатковий опір R треба увімкнути послідовно з лампою, щоб вона давала нормальне розжарення за напруги в мережі $U_0 = 220$ В? Яку довжину l ніхромового дроту діаметром $d = 0,3$ мм треба взяти, щоб отримати такий опір?

7.8. Маємо три 110-вольтні електричні лампи, потужності яких $P_1 = P_2 = 40$ Вт та $P_3 = 80$ Вт. Як треба увімкнути ці

лампи, щоб вони давали нормальне розжарення за напруги в мережі $U_0 = 220$ В? Накресліть схему. Знайдіть струми I_1 , I_2 та I_3 , які протікають через лампи за нормального розжарення?

7.9. Від генератора з ЕРС $\mathcal{E} = 110$ В треба передати електроенергію на відстань $l = 250$ м. Споживана потужність $P = 1$ кВт. Знайдіть мінімальний переріз S підвідних мідних провідників за умови, що втрати в мережі не повинні перевищувати 1 %.

7.10. У коло увімкнені послідовно мідний і сталевий провідники однакових діаметрів та довжин. Знайдіть: а) відношення кількостей теплот, які виділяються в цих провідниках; б) відношення напруг на цих провідниках.

7.11. Розв'яжіть попередню задачу для випадку, коли провідники увімкнені паралельно.

7.12. Гальванічний елемент замикають на опір $R_1 = 2$ Ом, а потім — на опір $R_2 = 0,5$ Ом. Знайдіть ЕРС \mathcal{E} елемента і його внутрішній опір r , якщо відомо, що в кожному з цих випадків потужність P , яка виділяється в зовнішньому колі, однакова і $P = 2,54$ Вт.

7.13. ЕРС батареї $\mathcal{E} = 120$ В, опори $R_3 = 30$ Ом, $R_2 = 60$ Ом. Амперметр показує силу струму $I = 2$ А (рис. 80). Знайдіть потужність P_1 , яка виділяється на опорі R_1 .

7.14. ККД батареї $\eta = 80$ %, опір $R_1 = 100$ Ом (рис. 80). На опорі R_1 виділяється потужність $P_1 = 16$ Вт. Знайдіть ЕРС \mathcal{E} батареї, якщо на опорі R_3 напруга $U_3 = 40$ В.

7.15. Який об'єм води можна закип'ятити, витративши енергію $W = 3$ ГВт·год? Початкова температура води $t_0 = 10$ °С. Втратами тепла знехтувати.

7.16. Яку потужність P споживає нагрівач електричного чайника, якщо об'єм води $V = 1$ л закипає за час $\tau = 5$ хв? Який опір R нагрівача, якщо напруга в мережі $U = 120$ В? Початкова температура води $t_0 = 13,5$ °С.

7.17. На плитці потужністю $P = 0,5$ кВт стоїть чайник, у який залито об'єм води $V = 1$ л із температурою $t_0 = 16$ °С. Вода в

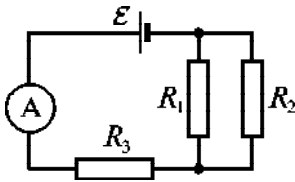


Рис. 80

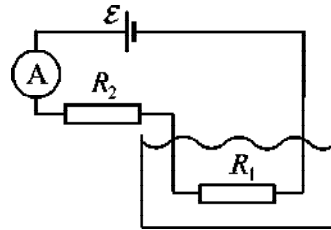


Рис. 81

чайнику закипіла через час $\tau = 20$ хв після ввімкнення плитки. Яку кількість теплоти Q в цьому разі втрачено на нагрівання чайника?

7.18. Нагрівник електричного чайника опором R_1 увімкнений у коло так, як показано на рис. 81. ЕРС батареї $\mathcal{E} = 120$ В, опір $R_2 = 10$ Ом. Амперметр показує силу струму $I = 2$ А. За який час закипить об'єм $V = 2$ л води? Початкова температура води $t_0 = 4$ °С. ККД нагрівника $\eta = 76$ %.

7.19. Об'єм $V = 4,5$ л води можна закип'ятити, витративши електричну енергію $W = 0,5$ кВт·год. Початкова температура води $t_0 = 23$ °С. Знайдіть ККД нагрівача.

7.20. Температуру водяного термостата об'ємом $V = 1$ л підтримують сталою за допомогою нагрівника потужністю $P = 26$ Вт. На нагрівання води витрачається $\eta = 80$ % цієї потужності. На скільки знизиться температура води у термостаті за час $\tau = 10$ хв, якщо нагрівач вимкнути?

7.21. Скільки треба заплатити за користування електричною енергією за місяць (30 днів), якщо щоденно впродовж $\tau = 6$ год горять дві 120-вольтні лампи, які споживають струм $I = 0,5$ А? Окрім того, щоденно кип'ятять $V = 3$ л води. Початкова температура води $t_0 = 10$ °С. Вартість 1 кВт·год енергії $n = 40$ коп. ККД нагрівача $\eta = 80$ %.

7.22. Електричний чайник, який містить об'єм $V = 600$ см³ води з температурою $t_0 = 9$ °С, забули вимкнути. Опір нагрівника $R = 16$ Ом. За який час після вмикання вода в чайнику

википить? Напруга в мережі $U = 120$ В, ККД нагрівника $\eta = 60\%$, питома теплота пароутворення $\lambda = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

7.23. У ртутній дифузійній pompі за одиницю часу випаровується маса $m = 100$ г за 1 хв. Яким має бути опір R нагрівача, якщо він вмикається в мережу з напругою $U = 127$ В? Питома теплота пароутворення ртуті $\lambda = 296$ кДж/кг.

7.24. У коло, яке складається з мідного провідника площею поперечного перерізу $S_m = 3$ мм², увімкнено свинцевий запобіжник площею поперечного перерізу $S_{св} = 1$ мм². На яке підвищення температури Δt_m мідного провідника в разі короткого замикання розрахований запобіжник? Уважайте, що під час короткого замикання завдяки короткочасності процесу все виділене тепло йде на нагрівання кола. Початкова температура запобіжника $t_0 = 17^\circ\text{C}$.

7.25. Для опалення кімнати електричну піч вмикають у мережу з напругою $U = 120$ В. За добу кімната втрачає $Q = 86,4$ МДж теплоти. Необхідно підтримувати сталу температуру в кімнаті. Знайдіть: а) опір R печі; б) довжину l ніхромового дроту діаметром $d = 1$ мм, необхідного для намотування без пропусків між витками такої печі; в) потужність печі.

7.26. Знайдіть кількість теплоти Q , яка виділиться за одиницю часу в одиниці об'єму мідного провідника за густини струму $j = 300$ кА/м².

7.27. Скільки теплоти виділиться в спіралі з опором $R = 75$ Ом під час проходження через неї заряду $q = 100$ Кл, якщо струм у спіралі: а) рівномірно спадає до нуля впродовж $\Delta\tau = 50$ с; б) монотонно спадає до нуля так, що через кожні $\Delta\tau = 2$ с він зменшувався вдвічі?

7.28. До джерела постійного струму з внутрішнім опором r приєднали три однакові опори R , з'єднані між собою, як показано на рис. 82. За якого значення R теплова потужність, що виділяється на цій ділянці, буде максимальна?

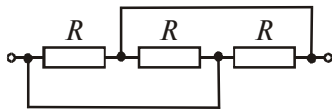


Рис. 82

7.29. Доведіть, що розподіл струму в паралельно з'єднаних опорах R_1 і R_2 завжди відповідає мінімуму теплової потужності, яка виділяється на цій ділянці.

7.30. Акумулятор з ЕРС $\mathcal{E} = 2,6$ В, замкнений на зовнішній опір, дає струм $I = 1$ А. У цьому разі різниця потенціалів між полюсами акумулятора $U = 2$ В. Знайдіть теплову потужність, яка виділяється в акумуляторі, і потужність, яку розвивають у ньому електричні сили.

7.31. Електродвигун постійного струму приєднали до напруги U . Опір обмотки якоря дорівнює R . За якого значення струму через обмотку корисна потужність двигуна буде максимальною? Чому вона дорівнюватиме? Який у цьому разі ККД двигуна?

7.32. На скільки відсотків зменшився діаметр d дротини електричного обігрівача завдяки випаровуванню її матеріалу, якщо для підтримки навколишньої температури довелося підвищити напругу на $\eta = 1\%$? Уважайте, що тепловіддача дротини в навколишній простір пропорційна до площі її поверхні.

7.33. Є провідник, у якого відомі опір R , що не залежить від температури, і загальна теплоємність C . У момент $\tau = 0$ його приєднали до постійної напруги U . Знайдіть залежність температури t провідника від часу τ , уважаючи, що теплова потужність, яку він віддає у навколишній простір, $P = k(t - t_0)$, де k — стала; t_0 — температура навколишнього середовища (вона ж є температурою провідника в початковий момент часу).

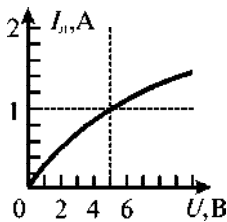


Рис. 83

7.34. Лампочку, паралельно з'єднану з опором $R = 2$ Ом, приєднали до джерела з ЕРС $\mathcal{E} = 15$ В і внутрішнім опором $r = 3$ Ом. Знайдіть потужність, яка виділяється в лампочці, якщо залежність струму від напруги для неї має вигляд, показаний на рис. 83.

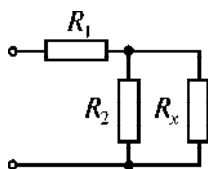


Рис. 84

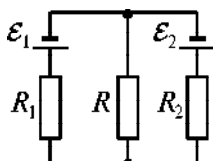


Рис. 85

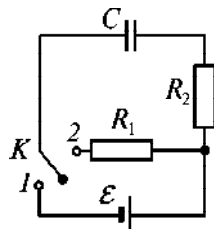


Рис. 86

7.35. У схемі на рис. 84 $R_1 = 20$ Ом і $R_2 = 30$ Ом. За якого опору R_x теплова потужність, що виділяється на ньому, майже не залежатиме від малих змін цього опору? Напруга між точками A і B стала.

7.36. У схемі на рис. 85 задані R_1 і R_2 , а також \mathcal{E}_1 і \mathcal{E}_2 . Внутрішні опори джерел дуже малі. За якого опору R теплова потужність, яка виділяється на ньому, буде максимальна? Чому вона дорівнюватиме?

7.37. Конденсатор ємністю $C = 5$ мкФ приєднали до джерела постійної ЕРС $\mathcal{E} = 200$ В (рис. 86). Потім ключ K перемкнули з контакту 1 на контакт 2 . Знайдіть кількість теплоти Q , яка виділилася на опорі $R_1 = 500$ Ом, якщо $R_2 = 330$ Ом.

7.38. Між обкладками плоского конденсатора паралельно до них поміщена металева пластинка, товщина якої $\eta = 0,6$ відстані між обкладками. Без пластинки ємність конденсатора $C = 20$ нФ. Конденсатор приєднаний до джерела постійної напруги $U = 100$ В. Пластинку поволі витягнули з конденсатора. Знайдіть: а) приріст енергії конденсатора; б) механічну роботу, витрачену на витягання пластинки.

7.39. Склояна пластинка цілком заповнює проміжок між обкладками плоского конденсатора, ємність якого без пластинки $C = 20$ нФ. Конденсатор приєднаний до джерела постійної напруги $U = 100$ В. Пластинку поволі (без тертя) витягнули з проміжку між обкладками. Знайдіть приріст енергії конденсатора і механічну роботу, виконану проти електричних сил під час витягання пластинки.

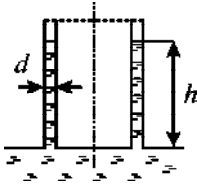


Рис. 87

ди між обкладками конденсатора. Капілярними явищами знехтуйте.

7.40. Циліндричний конденсатор, приєднаний до джерела постійної напруги U , упирається торцем у поверхню води (рис. 87). Відстань d між обкладками конденсатора значно менша від їхнього середнього радіуса. Знайдіть висоту h , на яку підніметься рівень води між обкладками конденсатора. Капілярними явищами знехтуйте.

8. СТРУМ У РІЗНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Маса речовини, яка виділилась на електроді під час електролізу, дорівнює сумарній масі всіх іонів, які надійшли до електрода:

$$m = m_0 N = m_0 \frac{Q}{q} = \frac{m_0}{q} \int I(t) dt,$$

де m_0 та q — маса та заряд одного йона; $N = Q/q$ — кількість іонів, які надійшли до електрода під час проходження через електроліт заряду Q ; t — час, упродовж якого в електроліті протікає струм I .

Електрохімічний еквівалент k дорівнює масі m речовини, яка виділяється на електроді за умови проходження крізь розчин одиниці заряду Q ; також його можна виразити як відношення маси m_0 йона речовини до його заряду q :

$$k = \frac{m}{Q} = \frac{m_0}{q}.$$

Звідси

$$m = kQ = kIt.$$

Це рівняння є математичним записом *першого закону Фарадея*: маса речовини, що виділилась на електроді, пропорційна до кількості електрики, що пройшла через електроліт.

З урахуванням того, що заряд іона дорівнює добутку його валентності на елементарний заряд $q = ze$, перепишемо вираз для електрохімічного еквівалента у вигляді

$$k = \frac{m_0}{q} = \frac{m_0}{ze} \frac{N_A}{N_A} = \frac{1}{F} \frac{\mu}{z}.$$

де N_A — число Авогадро; $\mu = m_0 N_A$ — молярна маса; $F = e N_A = 9,6 \cdot 10^4$ Кл/моль — стала Фарадея. Стала Фарадея чисельно дорівнює заряду, який має пройти через електроліт,

щоб на електроді виділився один моль одновалентної речовини. Останнє рівняння є математичним записом *другого закону Фарадея*.

Питома електропровідність електроліту

$$\sigma = \alpha ezn(u_+ + u_-),$$

де α — коефіцієнт дисоціації; n — концентрація молекул розчиненої речовини; e — заряд електрона; u_+ та u_- — рухливості йонів.

Рухливість u йона — це величина, яка чисельно дорівнює швидкості v , що її набуває йон у полі з одиничною напруженістю:

$$u = \frac{v}{E}.$$

Коефіцієнт дисоціації $\alpha = n_d/n$ — це відношення концентрації дисоційованих молекул в одиниці об'єму до концентрації всіх молекул розчиненої речовини.

Найменша кінетична енергія частинки, за якої можлива ударна йонізація молекули газу,

$$W_k = A_i \left(1 + \frac{m}{M} \right),$$

де A_i — робота йонізації молекули газу; m та M — маси частинки і молекули газу.

Концентрація йонів кожного знака (кількість пар іонів)

$$n_i = \sqrt{\frac{n_{i,0}}{\gamma}},$$

де $n_{i,0}$ — кількість пар іонів, створених іонізатором в одиниці об'єму за одиницю часу; γ — коефіцієнт рекомбінації.

За невеликих густин струму, який проходить у газі, застосовний закон Ома

$$j = qn_i(u_+ + u_-)E = \sigma E,$$

де E — напруженість поля; σ — питома провідність газу; q — заряд іона; u_+ та u_- — рухливості йонів.

Коли струм у газі досягає насичення, то його густина

$$j_n = n_{i.o} q d,$$

де d — відстань між електродами.



8.1. Через електроліт протікає струм 1 А. Рухливість іонів уважати однаковою, тобто щосекунди позитивні йони переносять в один бік заряд $+0,5$ Кл, а негативні — в інший бік заряд $-0,5$ Кл. Якому заряду відповідає кількість речовини, відкладена на електродах: $0,5$ Кл на аноді та $0,5$ Кл на катоді чи 1 Кл на аноді та 1 Кл на катоді?

8.2. Яка кількість електрики пройшла через розчин мідної солі за час $t = 10$ с, якщо сила струму за цей час рівномірно зросла від нуля до $I_{\max} = 4$ А? Скільки міді виділиться в цьому випадку? Мідь двовалентна.

8.3. За який час t унаслідок електролізу водяного розчину хлорної міді CuCl_2 на катоді виділиться $m = 4,74$ г міді за струму $I = 2$ А?

8.4. Визначте масу атома водню, якщо відомо його електрохімічний еквівалент $k = 0,01042$ мг/Кл та заряд іона водню $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

8.5. За який час t унаслідок електролізу мідного купоросу CuSO_4 маса мідної пластинки (катода) збільшиться на $\Delta m = 99$ мг? Площа пластинки $S = 25$ см², густина струму $j = 200$ А/м². Знайдіть товщину d утвореного на пластинці шару міді.

8.6. Під час електролізу мідного купоросу CuSO_4 за 1 год виділилось $m = 0,5$ г міді. Площа кожного електрода $S = 75$ см². Знайдіть густина струму.

8.7. Амперметр, увімкнений послідовно до електролітичної ванни з розчином AgNO_3 , показує струм $I = 0,9$ А. Чи правильні

покази амперметра, якщо за час $t = 5$ хв проходження струму виділилось $m = 316$ мг срібла? Срібло одновалентне.

8.8. Дві електролітичні ванни з розчинами AgNO_3 та CuSO_4 з'єднані послідовно. Яка маса міді виділиться за час, упродовж якого виділилось $m_{\text{Ag}} = 180$ мг срібла? Срібло одновалентне, мідь двовалентна.

8.9. Під час отримання алюмінію електролізом розчину Al_2O_3 у розплавленому кріоліті протікав струм $I = 20$ кА за різниці потенціалів на електродах $U = 5$ В. За який час t виділиться $m = 1$ т алюмінію? Яка електрична енергія W в цьому разі буде затрачена? Алюміній тривалентний.

8.10. Яку електричну енергію W треба витратити, щоб під час електролізу розчину AgNO_3 виділилось $m = 500$ мг срібла? Різниця потенціалів на електродах $U = 4$ В. Срібло одновалентне.

8.11. Реакція утворення води з водню та кисню відбувається з виділенням тепла: $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O} + 5,57 \cdot 10^5$ Дж. Знайдіть найменшу різницю потенціалів, за якої відбуватиметься розкладання води електролізом.

8.12. Нікелювання металевого виробу з поверхнею $S = 120$ см² тривало $t = 5$ год за струму $I = 0,3$ А. Визначте товщину шару нікелю. Нікель одновалентний.

8.13. Батарея гальванічних елементів (ЕРС $\mathcal{E} = 0,9$ В, внутрішній опір $r = 0,6$ Ом) складається з $n = 30$ елементів, з'єднаних у три однакові паралельні групи. Яка кількість міді виділиться на катоді за час $t = 5$ хв роботи батареї, увімкненої на навантаження $R = 205$ Ом.

8.14. Скільки часу t повинен тривати електроліз підкисленої води, щоб отриманим воднем за нормальних умов наповнити повітряну кулю з підйнятною силою $F_{\text{під}}$? Сила струму під час електролізу дорівнює I . Масою оболонки знехтуйте.

8.15. Струм $I = 1$ А пропускають упродовж $t = 1$ хв через підкислену воду. Який об'єм V займе гримучий газ, що в цьому разі утвориться, за нормальних умов?

8.16. Під час розчинення $m = 2,92$ г кухонної солі у $V = 1$ л води 44 % всіх розчинених молекул солі дисоціювало на йони. Визначте електропровідність електроліту.

8.17. Знайдіть сумарний імпульс p електронів у прямому провіднику довжиною $l = 1000$ м, по якому тече струм $I = 0,7$ А.

8.18. По мідному провіднику тече струм густиною $j = 1$ А/мм². Уважаючи, що на кожен атом міді припадає один вільний електрон, оцініть, який шлях пройде електрон, перемістившись уздовж провідника на відстань $l = 10$ м.

8.19. По прямому мідному провіднику довжиною $l = 1000$ м та площею поперечного перерізу $S = 1$ мм² тече струм $I = 4,5$ А. Уважаючи, що на кожен атом міді припадає один вільний електрон, знайдіть: а) час t , за який електрон переміститься з одного кінця провідника до іншого; б) суму електричних сил F , які діють на всі вільні електрони в цьому провіднику.

8.20. Однорідний пучок протонів, прискорених різницею потенціалів $U = 600$ кВ, має круговий переріз радіусом $r = 5$ мм. Знайдіть напруженість електричного поля на поверхні пучка та різницю потенціалів між поверхнею і віссю пучка за струму $I = 50$ мА.

8.21. Через розчин азотної кислоти пропускають струм I . Який заряд переносять іони кожного знака за час t ? Рухливість позитивних іонів — u_+ , негативних — u_- .

8.22. До електродів розрядної трубки прикладено $U = 5$ В, відстань між ними $d = 10$ см. Газ у трубці одноразово йонізований. Концентрація йонів кожного знака $n_i = 10^8$ м⁻³; рухливості позитивних і негативних іонів $u_+ = 3 \cdot 10^{-2}$ м²/(с · В), $u_- = 2 \cdot 10^{-2}$ м²/(с · В). Знайдіть густину струму в трубці. Яку частину струму переносять позитивні йони?

8.23. Площа кожного з електродів йонізаційної камери $S = 0,01$ м², відстань між ними $d = 6,2$ см. Знайдіть струм насичення в такій камері, якщо в одиниці об'єму за одиницю часу утворюється $n_{i,0} = 10^{15}$ іонів з елементарним зарядом.

8.24. Знайдіть опір трубки довжиною $l = 84$ см та площею поперечного перерізу $S = 5$ мм², якщо вона заповнена повітрям, іонізованим так, що в одиниці об'єму за рівноваги перебувають $n_i = 10^{13}$ іонів з елементарним зарядом. Рухливості йонів різного знака такі: $u_+ = 1,3 \cdot 10^{-4}$ м²/(с·В), $u_- = 1,8 \cdot 10^{-4}$ м²/(с·В).

8.25. Який струм протече між електродами йонізаційної камери, описаної в задачі **8.23**, якщо до електродів прикладено напругу $U = 20$ В? Рухливості позитивних і негативних іонів — 10^{-4} м²/(с·В), коефіцієнт рекомбінації $\gamma = 10^{-12}$ м³/с. У скільки разів цей струм менший, ніж струм насичення?

8.26. Рухливості одновалентних іонів електроліту дорівнюють u_+ (для катіона) та u_- (для аніона). Які кількості йонів обох знаків пройдуть через електроліт, якщо крізь нього пропустити повний заряд Q ?

8.27. Посередині між електродами йонізаційної камери пролетіла α -частинка, рухаючись паралельно до електродів, і утворила на своєму шляху ланцюжок іонів. За який час t після прольоту α -частинки йони долетять до електродів, якщо відстань між електродами $d = 4$ см, різниця потенціалів між електродами $U = 5$ кВ, а середня рухливість іонів обох знаків $u = 2$ см²/(с·В)?

8.28. Азот іонізують X -променями. Визначте питому провідність азоту, якщо в 1 см³ газу за умов рівноваги $\epsilon n_i = 10^7$ пар іонів.

8.29. Повітря між плоскими електродами йонізаційної камери йонізують X -променями. Сила струму, який протікає через камеру, $I = 1,2$ мкА. Площа кожного електрода $S = 300$ см², відстань між ними $d = 2$ см, різниця потенціалів $U = 100$ В. Знайдіть концентрацію n_i іонів між пластинами, якщо струм набагато менший від струму насичення. Заряд кожного йона вважайте елементарним.

8.30. Газ у йонізаційній камері між плоскими пластинами опромінюють X -променями. Знайдіть густину струму насичення, якщо йонізатор утворює в 1 см³ газу $n_{i,0} = 4,5 \cdot 10^7$ пар

іонів за секунду. Вважайте заряд кожного йона елементарним. Відстань між пластинами камери $d = 1,5$ см.

8.31. На відстані $d = 2$ см одна від одної розташовані дві пластини площею $S = 300$ см² кожна. Повітря між пластинами йонізують X -променями. За напруги $U = 150$ В між пластинами протікає струм $I = 4$ А, який є значно меншим від струму насичення. Визначте концентрацію n_i іонів однакового знака між пластинами. Заряд кожного йона вважайте елементарним.

8.32. Об'єм газу між двома електродами йонізаційної камери $V = 0,5$ л. Газ йонізують X -променями. Сила струму насичення $I_n = 4$ нА. Скільки пар іонів $n_{i.o}$ утворюється за 1 с в 1 см³ газу? Заряд кожного йона вважайте елементарним.

8.33. За якої найменшої швидкості v електрон може спричинити йонізацію атома гелію? Потенціал йонізації гелію $U = 24,5$ В. Тепловим рухом атомів гелію знехтуйте.

8.34. В 1 см³ атмосферного повітря в середньому є $n_i = 700$ пар іонів. Визначте густину вертикального струму, якщо напруженість електричного поля Землі $E = 130$ В/см. Уважайте, що заряди всіх іонів однакові й дорівнюють заряду електрона. Рухливості іонів — $u_+ = 1,3 \cdot 10^{-4}$ м²/(с·В), $u_- = 1,8 \cdot 10^{-4}$ м²/(с·В).

8.35. Два плоскі електроди площею $S = 100$ см² кожний віддалені один від одного на відстань $d = 5$ см. Під час йонізації X -променями між ними протікає струм насичення $I_n = 10^{-7}$ А. Визначте кількість пар іонів $n_{i.o}$, що їх утворюють X -промені в 1 м³ за 1 с. Йони, які виникають, уважайте одновалентними.

8.36. Дві великі паралельні пластини розташовані у вакуумі. Одна з пластин відіграє роль катода — джерела електронів, початкова швидкість яких дуже мала. Електронний потік, направлений до протилежної пластини, створює в просторі об'ємний заряд, завдяки чому потенціал у проміжку між пластинами змінюється за законом $\varphi = \alpha \sqrt[3]{x^4}$, де α — додатна стала; x — відстань від катода. Знайдіть: а) густину ρ просторового заряду залежно від x ; б) густину струму j .

8.37. Повітря між двома паралельними пластинами, віддаленими одна від одної на відстань $d = 20$ мм, іонізують X -променями. Площа кожної пластини $S = 500$ см². Знайдіть концентрацію позитивних іонів, якщо за напруги $U = 100$ В між пластинами протікає струм $I = 3$ мкА, який є значно меншим, ніж струм насичення.

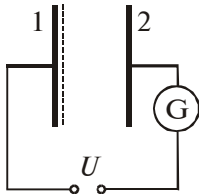


Рис. 88

8.38. Газ іонізують безпосередньо біля поверхні плоского електрода 1 (рис. 88), віддаленого від електрода 2 на відстань d . Між електродами приклали змінну напругу, яка змінюється з часом t за законом $U = U_0 \sin \omega t$. Зменшуючи частоту ω , виявили, що гальванометр G показує струм лише при $\omega < \omega_0$, де ω_0 —

деяка гранична частота. Знайдіть рухливість іонів, які за цих умов досягають електрода 2.

8.39. Повітря між двома близько розташованими пластинами рівномірно йонізують ультрафіолетовим випромінюванням. Об'єм повітря між пластинами $V = 500$ см³, струм насичення $I_n = 0,48$ мкА. Знайдіть: а) кількість $n_{i,0}$ пар іонів, які створює йонізатор за одиницю часу в одиниці об'єму; б) рівноважну концентрацію n_i пар іонів, якщо коефіцієнт рекомбінації йонів повітря $\gamma = 1,67 \cdot 10^{-6}$ см³/с.

8.40. Йонізатор, який працював тривалий час і створював за одиницю часу в одиниці об'єму повітря $n_{i,0} = 3,5 \cdot 10^9$ см⁻³·с⁻¹ пар іонів, вимкнули. Уважаючи, що єдиним процесом втрати іонів у повітрі є рекомбінація з коефіцієнтом $\gamma = 1,67 \cdot 10^{-6}$ см³/с, знайдіть, за який час t після вимкнення йонізатора концентрація йонів зменшиться в $\eta = 2$ рази.

8.41. Плоский повітряний конденсатор, відстань між пластинами якого $d = 5$ мм, зарядили до $U = 90$ В і від'єднали від джерела напруги. Знайдіть час t , за який напруга на конденсаторі зменшиться на $\eta = 1\%$, якщо в повітрі за одиницю часу в одиниці об'єму в середньому утворюється $n_{i,0} = 5$ см⁻³·с⁻¹ пар іонів і що така напруга відповідає струму насичення.

8.42. Простір між двома плоскими пластинами конденсатора, віддаленими одна від одної на відстань d , заповнено газом. Одна з пластин (катод) емітує щосекунди n електронів, які, рухаючись в електричному полі, іонізують молекули газу так, що кожен електрон на одиниці довжини шляху створює α електронів (і йонів). Знайдіть електронний струм біля протилежної пластини (анод), нехтуючи йонізацією молекул газу йонами.

8.43. Газ між пластинами конденсатора, віддаленими одна від одної на відстань d , рівномірно йонізують ультрафіолетовим випромінюванням так, що щосекунди в одиниці об'єму створюється $n_{i,0}$ електронів. Ці електрони, рухаючись в електричному полі конденсатора, іонізують молекули газу, причому кожен електрон створює на одиниці довжини свого шляху α нових електронів (і йонів). Нехтуючи йонізацією йонами, знайдіть густину електронного струму біля пластини з більшим потенціалом.

9. ПОСТІЙНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ. СИЛА АМПЕРА. ЗАКОН БІО–САВАРА–ЛАПЛАСА

Зв'язок між індукцією магнітного поля \vec{B} та напруженістю \vec{H} :

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H},$$

де μ — магнітна проникність середовища; μ_0 — магнітна стала (магнітна проникність вакууму), $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

Сила Ампера $d\vec{F}$, що діє на елемент струму $I d\vec{l}$ (або елемент об'єму dV з густиною струму \vec{j}), поміщеного у задану точку магнітного поля з індукцією \vec{B} ,

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \vec{B}], \quad d\vec{F} = [\vec{j} \vec{B}] dV.$$

Закон Біо–Савара–Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \vec{r}]}{r^3}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j} \vec{r}]}{r^3} dV,$$

де \vec{r} — радіус-вектор, проведений від елемента провідника $d\vec{l}$ в розглядувану точку.

Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції \vec{B} , або закон повного струму (часто називають законом Ампера):

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 I, \quad \text{або} \quad \oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = I,$$

де I — алгебрична сума всіх струмів, які пронизують замкнутий контур L .

Індукція магнітного поля точкового заряду q , який рухається з нерелятивістською швидкістю \vec{v} ,

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}.$$

Індукція магнітного поля всередині соленоїда

$$B = \frac{\mu\mu_0 nI}{\sqrt{1 + (2R/l)^2}} = \frac{\mu\mu_0 nI}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

де n — кількість витків на одиницю довжини; R — радіус; l — довжина соленоїда; α_1, α_2 — кути між віссю соленоїда та радіусом-вектором, проведеним з розглядуваної точки до його кінців.

Індукція магнітного поля тороїда та нескінченного соленоїда

$$B = \mu\mu_0 nI.$$

Сила взаємодії двох довгих паралельних провідників зі струмами I_1 та I_2 , які розташовані на відстані r один від одного, на одиницю довжини кожного провідника

$$F_{\text{о.д}} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}.$$



9.1. Точковий заряд рухається зі швидкістю $v = 900$ м/с. У деякий момент часу в точці спостереження A напруженість електричного поля цього заряду $E = 600$ В/м, а між векторами напруженості електричного поля та швидкості кут $\alpha = 30^\circ$. Знайдіть індукцію магнітного поля цього заряду в точці A у цей момент.

9.2. По коловому витку радіусом $R = 100$ мм, який виконано з тонкого дроту, циркулює струм $I = 1$ А. Знайдіть магнітну індукцію: а) у центрі витка; б) на осі витка в точці, віддаленій від його центра на $x = 100$ мм.

9.3. Знайдіть напруженість H магнітного поля в точці, віддаленій на відстань $a = 2$ м від нескінченно довгого провідника зі струмом $I = 5$ А.

9.4. Знайдіть напруженість H магнітного поля, що його створює відрізок AB прямолінійного провідника зі струмом, у точці C , розташованій на перпендикулярі до середини цього відрізка на відстані $a = 5$ см від нього. По провіднику тече струм $I = 20$ А. Відрізок AB провідника видно з точки C під кутом $\varphi = 60^\circ$.

9.5. Струм I тече по тонкому провіднику, який має вигляд правильного n -кутника, вписаного в коло радіусом R . Знайдіть магнітну індукцію в центрі цього контуру. Дослідіть отриманий вираз при $n \rightarrow \infty$.

9.6. На рис. 89 зображені перерізи трьох прямолінійних нескінченно довгих провідників зі струмами. Відстані $AB = BC = 5$ см, струми $I_1 = I_2 = I$ та $I_3 = 2I$. Знайдіть точку на прямій AC , у якій напруженість магнітного поля, створеного струмами I_1 , I_2 та I_3 , дорівнює нулю.

9.7. Два прямолінійні нескінченно довгі провідники розташовані перпендикулярно один до одного і лежать у взаємно перпендикулярних площинах (рис. 90). Знайдіть напруженості H_1 і H_2 магнітного поля в точках M_1 та M_2 , якщо струми $I_1 = 2$ А, $I_2 = 3$ А. Відстані $AM_1 = AM_2 = 1$ см і $AB = 2$ см.

9.8. Два прямолінійні нескінченно довгі провідники перпендикулярні один до одного в одній площині (рис. 91). Знайдіть напруженості H_1 та H_2 магнітного поля в точках M_1 та M_2 , якщо струми $I_1 = 2$ А, $I_2 = 3$ А. Відстані $AM_1 = AM_2 = 1$ см, $BM_1 = CM_2 = 2$ см.

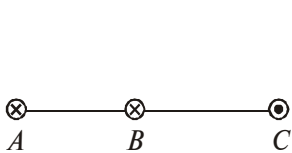


Рис. 89

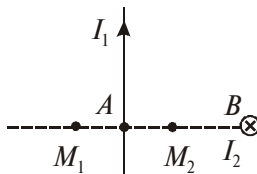


Рис. 90

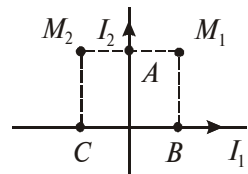


Рис. 91

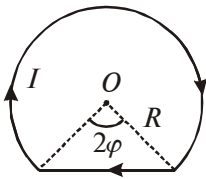


Рис. 92

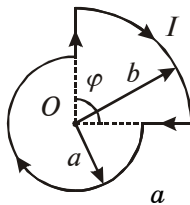
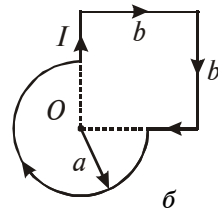


Рис. 93, а, б



9.9. Знайдіть індукцію магнітного поля в центрі контуру, що має вигляд прямокутника, якщо його діагональ $d = 16$ см, кут між діагоналями $\varphi = 30^\circ$ і струм у контурі $I = 5$ А.

9.10. Струм $I = 5$ А тече по тонкому замкнутому провіднику (рис. 92). Радіус зігнутої частини провідника $R = 20$ мм, кут $2\varphi = 90^\circ$. Знайдіть магнітну індукцію в точці O .

9.11. Знайдіть індукцію магнітного поля в точці O контуру зі струмом I , що показаний: а) на рис. 93, а, причому радіуси a і b та кут φ відомі; б) на рис. 93, б, причому радіус a і сторона b відомі.

9.12. Струм I тече вздовж довгої тонкостінної труби радіусом R , що має по всій довжині поздовжній проріз шириною h . Знайдіть індукцію магнітного поля всередині труби, якщо $h \ll R$.

9.13. Струм $I = 11$ А тече по довгому прямому провіднику, переріз якого має форму тонкого півкільця радіусом $R = 5$ см (рис. 94). Знайдіть індукцію магнітного поля в точці O .

9.14. Довгий провідник зі струмом $I = 5$ А зігнутий під прямим кутом. Знайдіть магнітну індукцію в точці, яка віддалена від площини провідника на $l = 35$ см і розміщена на перпендикулярі, що проходить через точку згину.



Рис. 94

9.15. Знайдіть магнітну індукцію в точці O , якщо провідник зі струмом $I = 8 \text{ А}$ має вигляд, показаний: а) на рис. 95, а; б) на рис. 95, б. Радіус зігнутої частини провідника $R = 100 \text{ мм}$, прямолінійні ділянки провідника дуже довгі.

9.16. Визначте індукцію магнітного поля струму, який рівномірно розподілений: а) по площині з лінійною густиною i ; б) по двох паралельних площинах з лінійною густиною i та $-i$.

9.17. Постійний струм I тече по довгій прямій дротині й далі розтікається радіально-симетрично по провідній площині, перпендикулярній до дротини. Знайдіть індукцію магнітного поля в усіх точках простору.

9.18. Струм I тече по довгій прямій дротині й потім розтікається рівномірно по всіх напрямках в однорідному провідному середовищі, як показано на рис. 96. Магнітна проникність середовища дорівнює одиниці. Знайдіть індукцію магнітного поля в точці A , віддаленій від точки O на відстань r під кутом ϑ .

9.19. По однорідній прямій дротині, радіус перерізу якої — R , тече постійний струм густиною \vec{j} . Знайдіть індукцію магнітного поля цього струму в точці, положення якої відносно осі дроту описує радіус-вектор \vec{r} . Магнітна проникність $\mu = 1$.

9.20. Усередині однорідного довгого прямого провідника кругового перерізу є довга циліндрична порожнина, вісь якої паралельна до осі провідника і зміщена відносно неї на відстань l .

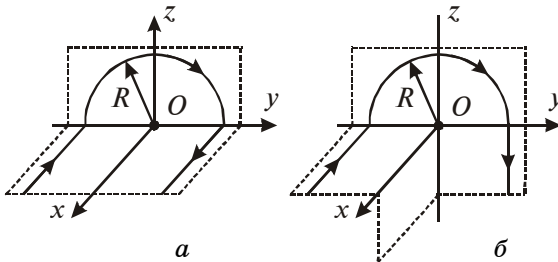


Рис. 95, а, б

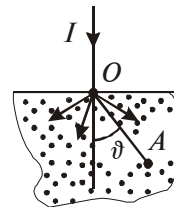


Рис. 96

По провіднику тече постійний струм густиною \vec{j} . Знайдіть індукцію магнітного поля всередині порожнини.

9.21. Знайдіть густину струму як функцію відстані r від осі аксіально-симетричного паралельного потоку електронів, якщо індукція магнітного поля всередині потоку залежить від r як $B = br^\alpha$, де b і α — додатні сталі.

9.22. Одношарова котушка (соленоїд) має довжину l , радіус перерізу R і кількість витків на одиницю довжини n . Знайдіть індукцію магнітного поля в центрі котушки, якщо струм через неї дорівнює I (виведіть формулу, наведену в теоретичній частині).

9.23. Отримайте напруженість магнітного поля $H = 1$ кА/м в соленоїді довжиною $l = 20$ см і діаметром $D = 5$ см. Знайдіть потрібну для цього соленоїда кількість ампер-витків IN (добуток сили струму I на кількість витків N соленоїда) і різницю потенціалів U , яку треба прикласти до кінців обмотки з мідного дроту діаметром $d = 0,5$ мм. Уважайте поле соленоїда однорідним.

9.24. Конденсатор ємністю $C = 10$ мкФ періодично заряджається від батареї з ЕРС $\mathcal{E} = 120$ В і розряджається через соленоїд довжиною $l = 10$ см. Соленоїд має $N = 200$ витків. Середнє значення напруженості магнітного поля всередині соленоїда $H = 240$ А/м. З якою частотою n відбувається перемикання конденсатора? Діаметр соленоїда вважайте малим порівняно з його довжиною.

9.25. Обмоткою довгого прямого соленоїда з радіусом перерізу $R = 2,5$ см слугує тонка стрічка-провідник шириною $h = 2$ см, намотана одним шаром упритул. По стрічці тече струм $I = 5$ А. Знайдіть індукцію магнітного поля всередині й поза соленоїдом як функцію відстані r від його осі.

9.26. На дерев'яний тороїд малого поперечного перерізу намотано рівномірно $N = 2\,500$ витків дроту, по якому тече струм I . Знайдіть відношення η індукції магнітного поля всередині тороїда до індукції в центрі тороїда.

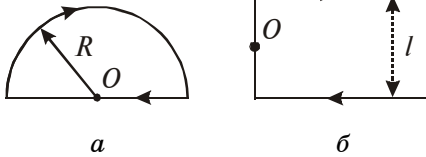


Рис. 97, а, б

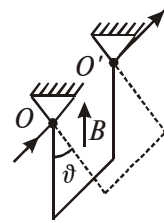


Рис. 98

9.27. Непровідна сфера радіусом $R = 50$ мм, заряджена рівномірно з поверхневою густиною $\sigma = 10$ мКл/м², обертається з кутовою швидкістю $\omega = 70$ рад/с навколо осі, що проходить через її центр. Знайдіть магнітну індукцію в центрі сфери.

9.28. Знайдіть силу, що діє на одиницю довжини тонкого провідника зі струмом $I = 8$ А в точці O , якщо провідник зігнутий, як показано: а) на рис. 97, а, радіус заокруглення $R = 10$ см; б) на рис. 97, б, відстань між довгими паралельними одна до одної ділянками провідника $l = 20$ см.

9.29. Алюмінієвий провідник з площею поперечного перерізу $S = 1$ см² підвісили у горизонтальній площині перпендикулярно до магнітного меридіана. По ньому протікає струм (з заходу на схід) $I = 1,6$ А. Яку частку від сили тяжіння, що діє на провідник, становить сила Ампера F_A з боку магнітного поля Землі? На скільки сила Ампера зменшить силу тяжіння на одиницю довжини провідника? Горизонтальна складова напруженості магнітного поля Землі $H_r = 16$ А/м.

9.30. Два прямолінійні довгі провідники розташовані на відстані $d_1 = 10$ см один від одного. По провідниках в однаковому напрямі течуть струми $I_1 = 20$ А та $I_2 = 30$ А. Яку роботу A на одиницю довжини шляху треба виконати, щоб розвести провідники на відстань між ними $d_2 = 20$ см.

9.31. Котушку зі струмом $I = 10$ мА помістили в однорідне магнітне поле так, що її вісь збіглася з напрямом поля. Обмотка котушки одношарова з мідного дроту діаметром $d = 0,1$ мм,

радіус витків $R = 30$ мм. За якого значення індукції зовнішнього поля обмотка котушки може бути розірвана?

9.32. Мідний дріт перерізом $S = 2,5$ мм², зігнутий у вигляді трьох сторін квадрата, може повертатися навколо горизонтальної осі OO' (рис. 98). Дріт перебуває в однорідному вертикально напрямленому магнітному полі. Знайдіть індукцію поля, якщо в разі пропускання по цьому дроту струму $I = 16$ А кут відхилення $\vartheta = 20^\circ$.

9.33. Квадратна рамка зі струмом $I_0 = 0,9$ А розташована в одній площині з довгим прямим провідником, по якому тече струм $I = 5$ А. Сторона рамки $a = 8$ см. Вісь рамки, яка проходить через середини протилежних сторін, паралельна до провідника і віддалена від нього на відстань, яка в $\eta = 1,5$ раза більша, ніж сторона рамки. Знайдіть: а) силу Ампера, яка діє на рамку; б) механічну роботу, яку потрібно виконати під час повільного повертання рамки навколо її осі на 180° .

9.34. Постійний струм $I = 14$ А протікає по довгому прямому провіднику, переріз якого має форму тонкого півкільця радіусом $R = 5$ см. Такий же струм тече в протилежному напрямі по тонкому провіднику, розташованому на “осі” першого провідника (точка O на рис. 94). Знайдіть силу магнітної взаємодії цих провідників на одиницю їхньої довжини.

9.35. По двох довгих тонких паралельних провідниках, вигляд яких показаний на рис. 99, течуть постійні струми I_1 і I_2 . Відстань між провідниками — a , ширина правого провідника — b . Уважаючи, що обидва провідники лежать в одній площині, знайдіть силу магнітної взаємодії між ними на одиницю їхньої довжини.

9.36. Система складається з двох паралельних одна до одної площин зі струмами, які створюють між площинами однорідне магнітне поле з індукцією B . Поза цією областю магнітного поля нема. Знайдіть магнітну силу, яка діє на одиницю поверхні кожної площини.

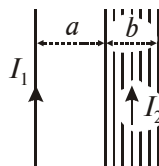


Рис. 99

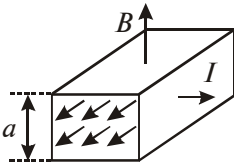


Рис. 100

9.37. В електромагнітній pompі для перекачування розплавленого металу ділянка труби з металом перебуває в однорідному магнітному полі з індукцією B (рис. 100). Через цю ділянку труби в перпендикулярному до вектора \vec{B} та осі труби напрямі пропускають рівномірно розподілений струм I . Знайдіть надлишковий тиск, який створює помпа за умов $B = 0,1$ Тл, $I = 100$ А, $a = 2$ см.

9.38. Уздовж довгого тонкостінного круглого циліндра радіусом $R = 5$ см тече струм $I = 50$ А. Який тиск діє на стінки циліндра?

9.39. Якого тиску зазнає бокова поверхня довгого прямого соленоїда, що має $n = 20$ витків на 1 см його довжини, коли по ньому тече струм $I = 20$ А?

9.40. Струм I тече по довгому одношаровому соленоїду з радіусом перерізу $R = 5,5$ см. Соленоїд має $n = 15$ витків на 1 см його довжини. Знайдіть граничну силу струму, за якої обмотка може розірватись, якщо граничне навантаження на розрив дроту обмотки $F_{\text{гр}} = 100$ Н.

10. МАГНІТНИЙ МОМЕНТ. МАГНІТНИЙ ПОТІК. МАГНЕТИКИ

Обертальний момент, який діє на контур зі струмом I і площею \vec{S} в однорідному магнітному полі з індукцією \vec{B} ,

$$\vec{M} = I [\vec{B} \vec{S}].$$

Магнітний потік (потік вектора магнітної індукції) через контур

$$\Phi = (\vec{B} \vec{S}),$$

де S — площа поперечного перерізу контуру.

Елементарна робота сили Ампера в разі переміщення контуру зі струмом

$$dA = I d\Phi,$$

де $d\Phi$ — магнітний потік, який перетинає провідник під час його руху.

Сила \vec{F} і момент сил \vec{M} , які діють на магнітний момент $\vec{p}_m = IS\vec{n}$,

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}, \quad \vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}],$$

де $\partial \vec{B} / \partial n$ — похідна вектора \vec{B} за напрямом \vec{n} .

Теорема Остроградського–Гаусса для магнітного поля

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0.$$

Циркуляція вектора намагніченості \vec{J}

$$\oint_L (\vec{J} d\vec{l}) = I',$$

де I' — сумарний молекулярний струм, що пронизує контур L .

Вектор напруженості магнітного поля \vec{H} і його циркуляція

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad \oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = I,$$

де I — алгебрична сума струмів провідності.

Умови на межі поділу двох магнетиків

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

Для магнетиків, у яких $\vec{J} = \chi \vec{H}$, де χ — магнітна сприйнятливість,

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \mu = 1 + \chi.$$



10.1. З провідників довжиною $l = 20$ см зроблено квадратний та коловий контури. Знайдіть обертальні моменти сил M_1 та M_2 , які діють на кожен з контурів, поміщених в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0,1$ Тл. По контурах протікає струм $I = 2$ А. Площина кожного контуру утворює кут 45° з напрямом поля.

10.2. Котушка гальванометра, яка складається з $N = 400$ витків тонкого провідника, намотаного на прямокутний каркас довжиною $l = 3$ см та шириною $b = 2$ см, підвішена на нитці у магнітному полі з індукцією $B = 0,1$ Тл. По котушці протікає струм $I = 0,1$ мкА. Знайдіть обертальний момент M , який діє на котушку гальванометра, якщо площина котушки: а) паралельна до напрямку магнітного поля; б) утворює кут 60° з напрямом магнітного поля.

10.3. На відстані $a = 20$ см від довгої прямолінійної вертикальної дротини на нитці довжиною $l = 0,1$ м та діаметром $d = 0,1$ мм висить коротка магнітна стрілка, магнітний момент якої $p_m = 0,01 \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Стрілка розташована в площині, що проходить через дротину і нитку. На який кут φ обернеться стрілка, якщо по дротині пропустити струм $I = 30$ А?

Модуль зсуву матеріалу нитки $G = 5,9$ ГПа. Система екранована від магнітного поля Землі.

10.4. Котушка гальванометра, яка складається з $N = 600$ витків дроту, підвішена на нитці завдовжки $l = 10$ см і діаметром $d = 0,1$ мм у магнітному полі напруженістю $H = 160$ кА/м так, що її площина паралельна до напрямку магнітного поля. Довжина рамки котушки $a = 2,2$ см, ширина $b = 1,9$ см. Який струм I тече по обмотці котушки, якщо котушка обернулася на кут $\varphi = 0,5^\circ$? Модуль зсуву матеріалу нитки $G = 5,9$ ГПа.

10.5. Коловий контур поміщено в однорідне магнітне поле так, що площина контуру перпендикулярна до напрямку магнітного поля. Напруженість магнітного поля $H = 150$ кА/м. По контуру протікає струм $I = 2$ А. Радіус контуру $R = 2$ см. Яку роботу A треба виконати, щоб повернути контур на кут $\varphi = 90^\circ$ навколо його осі, яка збігається з діаметром контуру?

10.6. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,5$ Тл рівномірно рухається провідник довжиною $l = 10$ см. По провіднику протікає струм $I = 2$ А. Швидкість руху провідника $v = 20$ см/с і напрямлена перпендикулярно до напрямку магнітного поля. Знайдіть роботу A , необхідну для переміщення провідника впродовж часу $t = 10$ с, та потужність P , задіяну для такого переміщення.

10.7. Однорідний мідний диск A радіусом $R = 5$ см поміщений у магнітне поле з індукцією $B = 0,2$ Тл так, що площина диска перпендикулярна до напрямку магнітного поля (рис. 101). Струм $I = 5$ А проходить по радіусу диска ab (a і b — ковзні контакти). Диск обертається з частотою $\nu = 3$ с⁻¹. Знайдіть: а) потужність P такого двигуна; б) напрям обертання диска за умови, що магнітне поле напрямлене від рисунка до нас; в) обертальний момент M , який діє на диск.

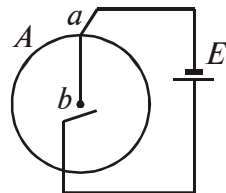


Рис. 101

10.8. Однорідний мідний диск A масою $m = 0,35$ кг поміщений у магнітне поле з індукцією $B = 24$ мТл так, що площина

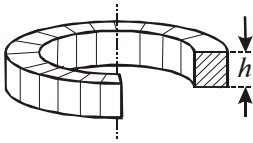


Рис. 102



Рис. 103

диска перпендикулярна до напрямку магнітного поля (рис. 101). У разі замикання кола aba диск починає обертатися і через час $t = 30$ с після початку обертання досягає частоти обертання $\nu = 5$ Гц. Знайдіть струм I у колі.

10.9. Знайдіть магнітний потік Φ , що його перетинає радіус ab диска A (рис. 101) за час $t = 1$ хв обертання. Радіус диска $R = 10$ см. Індукція магнітного поля $B = 0,1$ Тл. Диск обертається з частотою $\nu = 5,3$ Гц.

10.10. Струм $I = 10$ А тече по довгому прямому провіднику круглого перерізу. Знайдіть магнітний потік $\Phi_{\text{о.д}}$ через одну з половин осевого перерізу провідника з розрахунку на один метр його довжини.

10.11. Є дуже довгий прямий соленоїд зі струмом I . Площа поперечного перерізу соленоїда — S , кількість витків на одиницю довжини — n . Знайдіть потік вектора \vec{B} через торець соленоїда.

10.12. На рис. 102 показано кільцевий соленоїд з прямокутним перерізом. Знайдіть магнітний потік через цей переріз, якщо струм в обмотці $I = 1,7$ А, повна кількість витків $N = 1000$, відношення зовнішнього діаметра до внутрішнього $\eta = 1,6$, товщина $h = 5$ см.

10.13. Магнітний потік крізь соленоїд (без осердя) $\Phi = 5$ мкВб. Знайдіть магнітний момент $p_{\text{м.с}}$ соленоїда, якщо його довжина $l = 25$ см.

10.14. Знайдіть магнітний момент тонкого колового витка зі струмом, якщо радіус витка $R = 100$ мм, а індукція магнітного поля в його центрі $B = 6$ мкТл.

10.15. Обчисліть магнітний момент p_m тонкого провідника зі струмом $I = 0,8$ А, щільно навитого на половину тора (рис. 103). Діаметр перерізу тора $D = 5$ см, кількість витків $N = 500$.

10.16. Тонкий дрот (з ізоляцією) утворює плоску спіраль з $N = 100$ щільно розташованих витків, по яких тече струм $I = 8$ мА (рис. 104). Радіуси внутрішнього та зовнішнього витків $a = 5$ см, $b = 10$ см. Знайдіть: а) індукцію магнітного поля в центрі спіралі; б) магнітний момент спіралі за цього струму.

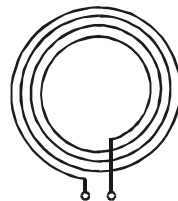


Рис. 104

10.17. Непровідний тонкий диск радіусом R , рівномірно заряджений з одного боку з поверхневою густиною σ , обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Знайдіть: а) індукцію магнітного поля в центрі диска; б) магнітний момент диска.

10.18. Заряд q рівномірно розподілений по об'єму однорідної кулі масою m і радіусом R , яка обертається навколо осі, що проходить через його центр, з кутовою швидкістю ω . Знайдіть відповідний магнітний момент p_m і його відношення до механічного моменту M .

10.19. Невеликий виток зі струмом перебуває на відстані r від довгого прямого провідника зі струмом I . Магнітний момент витка дорівнює p_m . Знайдіть модуль і напрям сили, що діє на виток, якщо вектор \vec{p}_m : а) паралельний до прямого провідника; б) напрямлений по радіусу-вектору \vec{r} ; в) збігається за напрямом з магнітним полем струму I в місці розташування витка.

10.20. Невелика котушка зі струмом, яка має магнітний момент \vec{p}_m , розташована на осі колового витка радіусом R , по якому тече струм I . Знайдіть модуль сили, що діє на котушку, якщо її відстань від центра витка дорівнює x , а вектор \vec{p}_m збігається за напрямом з віссю витка.

10.21. Знайдіть силу взаємодії двох котушок з магнітними моментами $p_{1m} = 4 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$ і $p_{2m} = 6 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$, якщо їхні осі лежать

на одній прямій і відстань між котушками $l = 20$ см значно перевищує їхні лінійні розміри.

10.22. Постійний магніт має форму тонкого диска, намагніченого вздовж його осі. Радіус диска $R = 10$ см. Оцініть значення молекулярного струму I' , який тече по ободу диска, якщо індукція магнітного поля на осі диска в точці, віддаленій на $x = 10$ см від його центра, становить $B = 30$ мкТл.

10.23. Індукція магнітного поля у вакуумі поблизу плоскої поверхні однорідного ізотропного магнетика дорівнює B , причому вектор \vec{B} утворює кут α з нормаллю до поверхні. Магнітна проникність магнетика μ . Знайдіть індукцію B' магнітного поля в магнетикі поблизу поверхні.

10.24. Індукція магнітного поля у вакуумі поблизу плоскої поверхні магнетика дорівнює B , причому вектор \vec{B} утворює кут ϑ з нормаллю \vec{n} до поверхні (рис. 105). Магнітна проникність магнетика μ . Знайдіть: а) потік вектора \vec{H} через поверхню сфери S радіусом R , центр якої лежить на поверхні магнетика; б) циркуляцію вектора \vec{B} по квадратному контуру Γ зі стороною l , розташованому, як показано на рис. 105.

10.25. Постійний струм I тече уздовж довгої однорідної циліндричної дротини круглого перерізу. Дротина зроблена із парамагнетика з магнітною сприйнятливістю χ . Знайдіть об'ємний молекулярний струм $I'_{\text{об}}$ у дротині.

10.26. Довгий соленоїд заповнений неоднорідним парамагнетиком, сприйнятливість якого залежить лише від відстані r

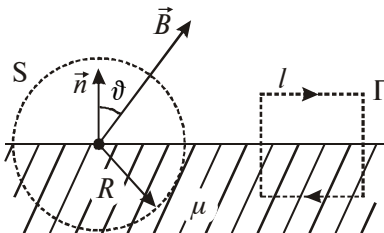


Рис. 105

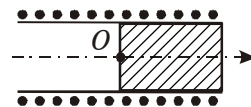


Рис. 106

до осі соленоїда як $\chi = ar^2$, де a — стала. На осі соленоїда індукція магнітного поля дорівнює B_0 . Знайдіть залежність від r : а) намагніченості магнетика $J(r)$; б) густини молекулярного струму $j'(r)$ всередині магнетика.

10.27. Нескінченно довгий прямий соленоїд зі струмом I наполовину заповнений парамагнетиком, як показано на рис. 106. Зобразіть схематичні графіки магнітної індукції B , напруженості H і намагніченості J на осі соленоїда залежно від x .

10.28. Прямий нескінченно довгий провідник зі струмом I лежить у площині поділу двох непровідних середовищ з магнітною проникністю μ_1 і μ_2 . Знайдіть модуль вектора індукції магнітного поля у просторі залежно від відстані r до дроту. Вражайте, що лінії вектора \vec{B} є колами з центром на осі провідника.

10.29. Коловий контур зі струмом лежить на плоскій межі поділу вакууму і магнетика. Проникність магнетика дорівнює μ . Знайдіть індукцію \vec{B} магнітного поля в довільній точці на осі контуру, якщо індукція поля в цій точці без магнетика дорівнює \vec{B}_0 . Узагальніть отриманий результат на все поле.

10.30. Кулю з однорідного магнетика магнітною проникністю μ помістили в зовнішнє однорідне магнітне поле індукцією \vec{B}_0 . Знайдіть індукцію магнітного поля \vec{B} всередині такої однорідно намагніченої кулі, якщо відомо, що напруженість $\vec{H}' = -\vec{J}/3$, де \vec{J} — намагніченість.

10.31. На постійний магніт, що має форму циліндра довжиною $l = 15$ см, намотали рівномірно $N = 300$ витків тонкого дроту. Під час пропускання по ньому струму $I = 3$ А поле поза магнітом зникло. Знайдіть коерцитивну силу H_k матеріалу магніту.

10.32. Постійний магніт має вигляд кільця з вузьким прорізом між полюсами. Середній діаметр кільця $d = 20$ см. Ширина прорізу $b = 2$ мм, індукція магнітного поля в прорізі

$B_{\text{пр}} = 40$ мТл. Нехтуючи розсіянням магнітного потоку на краях прорізу, знайдіть модуль напруженості магнітного поля всередині магніту.

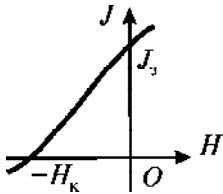


Рис. 107

10.33. Постійний магніт має вигляд кільця з вузьким поперечним прорізом шириною $b = 2,5$ мм. Середній радіус кільця $a = 5$ см. Залишкова намагніченість матеріалу магніту $J_s = 1000$ кА/м, його коерцитивна сила $H_k = 25$ кА/м. Уважаючи, що залежність $J(H)$ на ділянці від H_k до 0 (рис. 107) є лінійною і розсіяння магнітного поля на краях прорізу немає, знайдіть індукцію $B_{\text{пр}}$ магнітного поля в прорізі.

10.34. На залізному осерді у вигляді тора з середнім радіусом $R = 25$ см є обмотка із загальною кількістю витків $N = 1000$. В осерді зроблено поперечний проріз шириною $b = 1$ мм. За струму $I = 0,85$ А через обмотку індукція магнітного поля в прорізі $B = 0,75$ Тл. Нехтуючи розсіянням магнітного потоку на краях прорізу, знайдіть магнітну проникність заліза за цих умов.

10.35. На рис. 108 показана головна крива намагнічення технічно чистого заліза. Побудуйте за допомогою цього графіка криву залежності магнітної проникності μ від напруженості H магнітного поля. За якого значення H проникність μ буде максимальна? Знайдіть μ_{max} .

10.36. Тонке залізне кільце з середнім діаметром $d = 50$ см має на собі обмотку з $N = 800$ витків зі струмом $I = 3$ А. У кільці є поперечний проріз шириною $b = 2$ мм. Нехтуючи розсіянням магнітного потоку на краях прорізу, знайдіть за допомогою графіка (рис. 108) магнітну проникність μ заліза за цих умов.

10.37. Довгий тонкий циліндричний стрижень із парамагнетика з магнітною сприйнятливістю χ і площею поперечного перерізу S розташований уздовж осі котушки зі струмом. Один кінець стрижня перебуває в центрі котушки, де індукція магнітного поля дорівнює B , а інший кінець — у

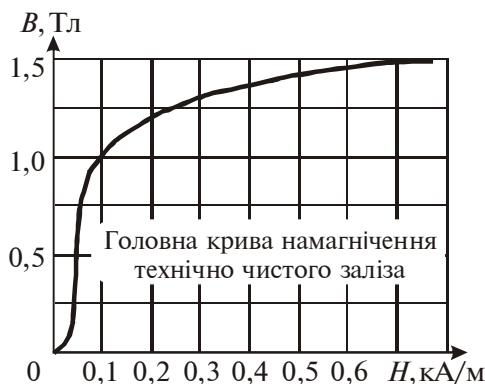


Рис. 108

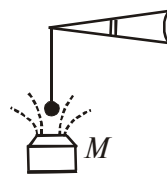


Рис. 109

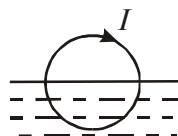


Рис. 110

ділянці, де магнітного поля практично нема. З якою силою F котушка діє на стрижень?

10.38. У пристрої, зображеному на рис. 109, за допомогою терезів вимірюють силу, з якою парамагнітна кулька об'ємом $V = 41 \text{ мм}^3$ притягується до полюса електромагніту M . Індукція магнітного поля на осі полюсного наконечника залежить від висоти x як $B = B_0 \exp(-ax^2)$, де $B_0 = 1,5 \text{ Тл}$, $a = 100 \text{ м}^{-2}$. Знайдіть: а) на якій висоті x_{max} треба помістити кульку, щоб сила притягання була максимальною; б) магнітну сприйнятливість χ парамагнетика, якщо максимальна сила притягання $F_{\text{max}} = 160 \text{ мкН}$.

10.39. Невелику кульку об'ємом V із парамагнетика з магнітною сприйнятливістю χ поволі перемістили вздовж осі котушки зі струмом з точки, де індукція магнітного поля дорівнює B , у ділянку, де магнітного поля майже нема. Яку роботу A проти магнітних сил у цьому разі виконали?

10.40. Довгий прямий соленоїд, який має n витків на одиницю довжини, занурили наполовину в парамагнітну рідину (рис. 110). Знайдіть магнітну силу $F_{\text{о.п}}$, яка діє на одиницю поверхні рідини, якщо її магнітна сприйнятливість χ і через соленоїд тече струм I . Куди ця сила направлена?

11. РУХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ТА МАГНІТНОМУ ПОЛЯХ

Сила, яка діє на електричний заряд q , що рухається зі швидкістю \vec{v} у магнітному полі з індукцією \vec{B}

$$\vec{F} = q[\vec{v} \vec{B}].$$

Сила Лоренца за наявності електричного та магнітного поля

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \vec{B}].$$

Період обертання зарядженої частинки в однорідному магнітному полі

$$T = \frac{2\pi m_r}{qB},$$

де m_r — релятивістська маса частинки; $m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$, де m_0 — маса спокою частинок.

Рівняння руху релятивістської частинки:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \vec{F}.$$

Умова руху електрона по коловій рівноважній траєкторії у бетатроні (бетатронна умова):

$$B_0 = \frac{1}{2} \langle B \rangle,$$

де B_0 — індукція магнітного поля на траєкторії; $\langle B \rangle$ — середнє значення індукції магнітного поля в центрі колової траєкторії.



11.1. У момент $t = 0$ з однієї пластини плоского конденсатора вилетів електрон з дуже малою швидкістю. Між пластинами прикладено прискорювальну напругу, яка залежить від часу за законом $U = at$, де $a = 100$ В/с. Відстань між пластинами $l = 5$ см. З якою швидкістю електрон підлетить до протилежної пластини?

11.2. Протон, прискорений різницею потенціалів U , потрапляє у момент часу $t_0 = 0$ в однорідне електричне поле плоского конденсатора, довжина пластин якого в напрямі руху дорівнює l . Напруженість поля змінюється в часі як $E = at$, де a — стала. Вважаючи протон нерелятивістським, знайдіть кут між напрямками його руху до і після прольоту конденсатора. Крайовими ефектами знехтуйте.

11.3. Частинка з питомим зарядом q/m рухається прямолінійно під дією електричного поля $E = E_0 - ax$, де a — додатна стала; x — відстань від точки, у якій частинка спочатку перебувала в стані спокою. Знайдіть відстань, яку частинка пройде до зупинки.

11.4. Електрон починає рухатися в однорідному електричному полі з напруженістю $E = 10$ кВ/см. Через скільки часу після початку руху кінетична енергія електрона дорівнюватиме його енергії спокою?

11.5. Релятивістський протон у момент часу $t_0 = 0$ влетів зі швидкістю \vec{v}_0 у ділянку простору, де є поперечне однорідне електричне поле напруженістю \vec{E} , причому $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$. Знайдіть залежність від часу t кута ϑ між швидкістю \vec{v} протона і початковим напрямом його руху.

11.6. Два протони рухаються паралельно один до одного з однаковою швидкістю $v = 300$ км/с. Знайдіть відношення сил магнітної та електричної взаємодії цих протонів.

11.7. Електрон, прискорений різницею потенціалів $U = 300$ В, рухається паралельно до довгого прямолінійного провідника на відстані $a = 4$ см від нього. Яка сила F діє на електрон, якщо по провіднику пропустили струм $I = 5$ А?

11.8. Електрон, прискорений різницею потенціалів $U = 1$ кВ, влітає в однорідне магнітне поле, напрям якого перпендикулярний до напрямку руху електрона. Індукція магнітного поля $B = 1,19$ Тл. Знайдіть радіус R кола, по якому рухатиметься електрон, період обертання T електрона та момент імпульсу L електрона.

11.9. Електрон влітає в однорідне магнітне поле, напрям якого перпендикулярний до напрямку його руху. Швидкість електрона $v = 4 \cdot 10^7$ м/с. Індукція магнітного поля $B = 1$ мТл. Знайдіть тангенціальне a_t та нормальне a_n прискорення електрона у магнітному полі.

11.10. На фотографії, отриманій у камері Вільсона, траєкторія електрона в однорідному магнітному полі є дугою кола радіусом $R = 10$ см. Індукція магнітного поля $B = 10$ мТл. Знайдіть енергію W електрона (в електрон-вольтах).

11.11. Протон та α -частинка влітають в однорідне магнітне поле, напрям якого перпендикулярний до напрямку їхнього руху. У скільки разів період обертання T_1 протона в магнітному полі більший, ніж період обертання T_2 α -частинки?

11.12. Протон, прискорений різницею потенціалів $U = 500$ кВ, пролітає поперечне однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0,51$ Тл. Товщина ділянки з полем $d = 10$ см (рис. 111). Знайдіть кут α відхилення протона від початкового напрямку руху.

11.13. Заряджена частинка рухається по колу радіусом $R = 100$ мм в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 10$ мТл. Знайдіть її швидкість v та період обертання T , якщо частинкою є: а) протон; б) релятивістський електрон.

11.14. Для яких значень кінетичної енергії W_k період обертання електрона та протона в однорідному магнітному полі на $\eta = 1\%$ більший, ніж період їхнього обертання в разі нерелятивістських швидкостей.

11.15. Однорідні магнітне поле напруженістю $H = 8$ кА/м і електричне поле напруженістю $E = 1$ кВ/м мають однаковий напрям силових ліній. Електрон влітає в таке електромагнітне

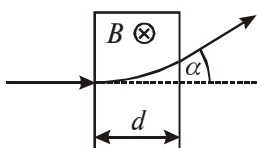


Рис. 111

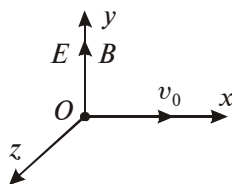


Рис. 112

поле зі швидкістю $v = 10^5$ м/с. Знайдіть нормальне a_n , тангенціальне a_t та повне a прискорення електрона. Задачу розв'яжіть для двох випадків, коли швидкість електрона напрямлена до напрямку електричного поля: а) паралельно; б) перпендикулярно.

11.16. Магнітне поле, індукція якого $B = 0,5$ мТл, напрямлене перпендикулярно до електричного поля, напруженість якого $E = 1$ кВ/м. Пучок електронів влітає в електромагнітне поле, причому швидкість \vec{v} електронів перпендикулярна до площини, в якій лежать вектори \vec{E} та \vec{B} . Знайдіть швидкість v електронів, якщо в разі одночасної дії обох полів пучок не зазнає відхилення. Яким буде радіус R траєкторії руху електронів за умови, що увімкнене лише магнітне поле?

11.17. Електрон, прискорений різницею потенціалів $U = 6$ кВ, влітає в однорідне магнітне поле під кутом $\alpha = 30^\circ$ до напрямку поля і рухається по гвинтоподібній траєкторії. Індукція магнітного поля $B = 13$ мТл. Знайдіть радіус R та крок h гвинтоподібної траєкторії.

11.18. Електрон влітає у плоский горизонтальний конденсатор паралельно до його пластин зі швидкістю $v = 10^7$ м/с. Довжина конденсатора $l = 5$ см. Напруженість електричного поля конденсатора $E = 10$ кВ/м. На вильоті з конденсатора електрон потрапляє у магнітне поле, напрям якого паралельний до \vec{v} . Індукція магнітного поля $B = 10$ мТл. Знайдіть радіус R та крок h гвинтоподібної траєкторії електрона у магнітному полі.

11.19. Створено паралельні до осі y однорідні електричне та магнітне поля з напруженістю E та індукцією B (рис. 112). З

початку координат (точка O) вилітає в напрямі осі x нерелятивістська частинка з питомим зарядом q/m та початковою швидкістю v_0 . Знайдіть: а) координату y_n частинки у момент, коли вона n -й раз перетне вісь y ; б) кут α між швидкістю частинки та віссю y в цей момент.

11.20. Електрон, прискорений різницею потенціалів $U = 3$ кВ, влітає у магнітне поле соленоїда під кутом $\alpha = 30^\circ$ до його осі. Кількість ампер-витків соленоїда $IN = 5\,000$ А·в. Довжина соленоїда $l = 25$ см. Знайдіть крок h гвинтоподібної траєкторії електрона в магнітному полі.

11.21. Слабко сфокусований пучок нерелятивістських заряджених частинок, прискорених різницею потенціалів $\Delta\varphi$, виходить з точки A уздовж осі прямого соленоїда. Пучок фокусується на відстані l від точки A за двох різних значень індукції магнітного поля B_1 та B_2 . Знайдіть питомий заряд q/m частинок.

11.22. З точки A , яка лежить на осі прямого соленоїда, влітає нерелятивістський електрон зі швидкістю v під кутом α до осі. Індукція магнітного поля B . Знайдіть відстань r від осі до точки потрапляння електрона на екран, розташований перпендикулярно до осі на відстані l від точки A .

11.23. Через переріз $S = ab$ мідної пластинки товщиною $a = 0,5$ мм та шириною $b = 10$ мм пропускають струм $I = 20$ А. Коли пластинку помістили у магнітне поле, перпендикулярне до ребра b та до напрямку струму, то у пластинці виникла поперечна напруга Холла $U_x = 3,1$ мкВ. Індукція магнітного поля $B = 1$ Тл. Знайдіть концентрацію n електронів провідності в міді та їхню швидкість v за цих умов.

11.24. Через поперечний переріз $S = ab$ алюмінієвої пластинки (a — товщина, b — ширина) пропускають струм $I = 5$ А. Пластинку помістили у магнітне поле, перпендикулярне до ребра b та напрямку струму. Знайдіть напругу Холла U_x , яка в цьому разі виникає. Індукція магнітного поля $B = 0,5$ Тл. Товщина пластинки $a = 0,1$ мм. Вважайте, що концентрація електронів провідності дорівнює концентрації атомів.

11.25. Пластинку напівпровідника товщиною $a = 0,2$ мм помістили у магнітне поле, перпендикулярне до пластинки. Питомий опір напівпровідника $\rho = 10$ мкОм·м. Індукція магнітного поля $B = 1$ Тл. Перпендикулярно до напрямку поля вздовж пластинки пропускають струм $I = 0,1$ А. У цьому разі виникає поперечна напруга $U_x = 3,25$ мВ. Знайдіть рухливість u носіїв струму в напівпровіднику.

11.26. Уздовж мідного прямого провідника круглого перерізу радіусом $R = 5$ мм тече струм $I = 50$ А. Знайдіть різницю потенціалів U між віссю провідника та його поверхнею. Концентрація електронів провідності міді $n = 9 \cdot 10^{22}$ см⁻³.

11.27. Під час дослідження ефекту Холла в натрієвому провіднику за густини струму $j = 200$ А/см² та індукції магнітного поля $B = 1$ Тл виникла напруженість поперечного поля $E = 5$ мкВ/см. Знайдіть концентрацію n електронів провідності в цьому провіднику.

11.28. З поверхні циліндричного провідника радіусом R , по якому тече постійний струм I , вилітає електрон з початковою швидкістю v_0 , перпендикулярною до поверхні провідника. На яку максимальну відстань r_{\max} віддалиться електрон від осі провідника, перш ніж поверне назад під дією магнітного поля струму.

11.29. Нерелятивістська заряджена частинка пролітає електричне поле циліндричного конденсатора і потрапляє в однорідне поперечне магнітне поле з індукцією B (рис. 113). У конденсаторі частинка рухається по дузі кола, а в магнітному полі — по півколу радіусом r . Різниця потенціалів на конденсаторі — $\Delta\phi$, радіуси обкладок — a та b , причому $a < b$. Знайдіть швидкість v частинки та її питомий заряд q/m .

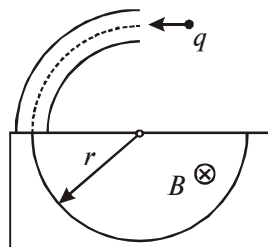


Рис. 113

11.30. Вузкий пучок однакових іонів з питомим зарядом q/m , які мають різні швидкості, входить у

точці O (рис. 112) в ділянку, де створено однорідні електричне та магнітне поля з напруженістю E та індукцією B . Напрямок пучка у точці O збігається з віссю x . На відстані l від точки O розташований плоский екран, орієнтований перпендикулярно до осі x . Знайдіть рівняння сліду йонів на екрані. Доведіть, що при $z \ll l$ це буде рівняння параболи.

11.31. Пучок нерелятивістських протонів проходить, не відхиляючись, через ділянку, в якій створено однорідні поперечні взаємно перпендикулярні електричне та магнітне поля з $E = 120$ кВ/м та $B = 50$ мТл. Потім пучок потрапляє на заземлену мішень. Знайдіть силу, з якою пучок діє на мішень, якщо струм у пучку $I = 0,8$ мА.

11.32. Пучок нерелятивістських заряджених частинок проходить, не відхиляючись, через область A (рис. 114), у якій створені однорідні поперечні взаємно перпендикулярні електричне та магнітне поля з напруженістю E та індукцією B . Якщо магнітне поле вимкнути, то слід пучка на екрані E_k зміститься на Δx . Знаючи відстані a та b , знайдіть питомий заряд q/m частинок.

11.33. Частинка з питомим зарядом q/m рухається в ділянці простору, де створені однорідні взаємно перпендикулярні електричне та магнітне поля з напруженістю E та індукцією B (рис. 115). У момент часу $t = 0$ частинка перебувала в точці O і мала нульову швидкість. Знайдіть для нерелятивістського випадку: а) рівняння руху частинки $x(t)$ та $y(t)$; який

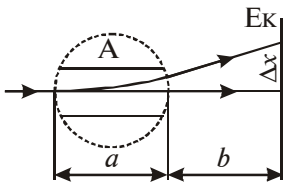


Рис. 114

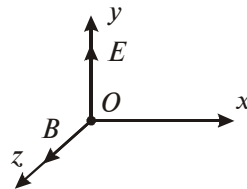


Рис. 115

вигляд має траєкторія? б) довжину L ділянки траєкторії між двома найближчими точками, де швидкість частинки дорівнює нулю; в) середнє значення проекції швидкості $\langle v_x \rangle$ частинки на вісь x (дрейфова швидкість).

11.34. Система складається з довгого циліндричного анода радіусом a та коаксіального до нього циліндричного катода радіусом b ($b < a$). На осі системи є нитка розжарювання зі струмом I , який створює в навколишньому просторі магнітне поле. Знайдіть найменшу різницю потенціалів U між катодом та анодом, за якої термоелектрони, що покидають катод без початкової швидкості, зможуть досягти анода.

11.35. Магнетрон — це прилад, який складається з нитки розжарювання радіусом a та коаксіального циліндричного анода радіусом b , які розташовані в однорідному магнітному полі, паралельному до нитки. Між ниткою та анодом прикладено прискорювальну напругу U . Знайдіть значення індукції B магнітного поля, за якого електрони, що вилітають з нульовою початковою швидкістю, досягатимуть анода.

11.36. Заряджена частинка з питомим зарядом q/m починає рухатись у ділянці простору, де створені однорідні взаємно перпендикулярні електричне та магнітне поля. Магнітне поле постійне і має індукцію B , електричне поле — змінне в часі $E = E_{\max} \cos \omega t$, де $\omega = qB/m$. Знайдіть для нерелятивістського випадку рівняння руху частинки $x(t)$ та $y(t)$, якщо в момент часу $t = 0$ вона перебувала в точці O (рис. 115). Який приблизно вигляд має траєкторія частинки?

11.37. Частота генератора циклотрона $\nu = 100$ МГц. Знайдіть ефективну прискорювальну напругу U на дуантах циклотрона, за якої відстань між сусідніми траєкторіями протонів з радіусом кривини $r = 0,5$ м не менша ніж $\Delta r = 1$ см.

11.38. Протони прискорюються в циклотроні так, що максимальний радіус кривини їхньої траєкторії $r = 50$ см. Знайдіть: а) кінетичну енергію W_k протонів наприкінці прискорення, якщо індукція магнітного поля в циклотроні $B = 1$ Тл;

б) мінімальну частоту ν_{\min} генератора циклотрона, за якої наприкінці прискорення протони матимуть кінетичну енергію $W_k = 20 \text{ MeV}$.

11.39. Оскільки період обертання електронів в однорідному магнітному полі швидко зростає зі збільшенням енергії, то циклотрон стає непридатним для їхнього прискорення. Цей недолік усунуто в мікротроні (рис. 116), у якому зміна періоду

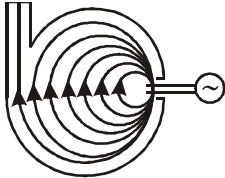


Рис. 116

обертання електрона ΔT є кратною періоду прискорювального поля T_0 . Скільки разів електрону треба пройти через прискорювальний проміжок мікротрона для того, щоб набути енергію $W = 4,6 \text{ MeV}$, якщо $\Delta T = T_0$, індукція магнітного поля $B = 107 \text{ мТл}$ і частота прискорювального поля $\nu = 3000 \text{ МГц}$?

11.40. Знайдіть за допомогою бетатронної умови радіус r_0 колової траєкторії електрона, знаючи залежність індукції магнітного поля від відстані r до осі поля. Розгляньте це завдання для поля $B = B_0 - ar^2$, де B_0 та a — додатні сталі.

12. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ. ІНДУКТИВНІСТЬ

Закон електромагнітної індукції Фарадея: електрорушійна сила (ЕРС), що індукується у контурі, прямо пропорційна до швидкості зміни магнітного потоку, який пронизує цей контур:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Магнітний потік Φ , що пронизує замкнутий провідний контур, прямо пропорційний до величини струму I у цьому контурі:

$$\Phi = LI,$$

де L — коефіцієнт пропорційності, або індуктивність контуру.

ЕРС самоіндукції, зумовлена зміною струму в контурі,

$$\mathcal{E}_{ci} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Для випадку соленоїда та тороїда:

$$\Phi = N\Phi_1.$$

де N — кількість витків; Φ_1 — магнітний потік через один виток.

Індуктивність соленоїда довжиною l та площею поперечного перерізу S , який має N витків,

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}, \quad \text{або} \quad L = \mu\mu_0 n^2 S l.$$

де μ — магнітна проникність матеріалу осердя соленоїда, а $n = N/l$.

Взаємна індуктивність двох соленоїдів

$$L_{12} = \mu\mu_0 n_1 n_2 S l,$$

де n_1 та n_2 — концентрація витків на одиницю довжини цих соленоїдів.



12.1. У магнітному полі, індукція якого $B = 0,05$ Тл, обертається стрижень довжиною $l = 1$ м. Вісь обертання, яка проходить через один з кінців стрижня, паралельна до напрямку магнітного поля. Знайдіть магнітний потік Φ , який перетинає стрижень під час кожного оберту.

12.2. Рамка, площа якої $S = 16$ см², обертається в однорідному магнітному полі з частотою $\nu = 2$ Гц. Вісь обертання розташована у площині рамки і перпендикулярна до напрямку магнітного поля. Напруженість магнітного поля $H = 79,6$ кА/м. Знайдіть залежність магнітного потоку Φ , який пронизує рамку, від часу t і найбільше значення Φ_{\max} магнітного потоку.

12.3. Швидкість літака з реактивним двигуном $v = 950$ км/год. Знайдіть ЕРС індукції \mathcal{E}_i , яка виникає на кінцях крил такого літака, якщо вертикальна складова напруженості магнітного поля Землі $H_v = 39,8$ А/м, а розмах крил літака $l = 12,5$ м.

12.4. Горизонтальний стрижень довжиною $l = 1$ м обертається навколо вертикальної осі, яка проходить через один з його кінців. Вісь обертання паралельна до магнітного поля, індукція якого $B = 50$ мкТл. За якої частоти ν обертання стрижня різниця потенціалів на його кінцях $U = 1$ мВ?

12.5. Однорідний мідний диск радіусом $R = 5$ см помістили у магнітне поле з індукцією $B = 0,2$ Тл так, що площина диска перпендикулярна до ліній магнітного поля (рис. 117). По колу aba може протікати струм (a та b — ковзні контакти). Диск обертається з частотою $\nu = 5$ Гц. Знайдіть ЕРС такого генератора. Вкажіть напрям електричного струму, якщо магнітне поле напрямлене від нас до рисунка, а диск обертається проти годинникової стрілки.

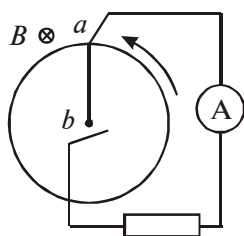


Рис. 117

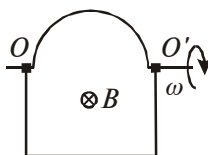


Рис. 118

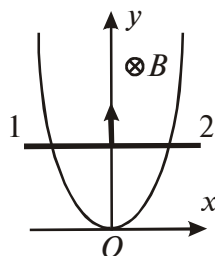


Рис. 119

12.6. В однорідному магнітному полі, індукція якого $B = 0,8$ Тл, рівномірно обертається рамка з кутовою швидкістю $\omega = 15$ рад/с. Площа рамки $S = 150$ см². Вісь обертання розташована у площині рамки й утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з напрямком магнітного поля. Знайдіть максимальну ЕРС індукції \mathcal{E}_{\max} у рамці.

12.7. На соленоїд довжиною $l = 20$ см і площею поперечного перерізу $S = 30$ см² натягнули дровий виток. Соленоїд має $N = 320$ витків і по ньому тече струм $I_0 = 3$ А. Яка середня ЕРС $\mathcal{E}_{\text{ср}}$ індукується у натягнутому на соленоїд витку, коли струм у соленоїді вимикають упродовж часу $t = 1$ мс?

12.8. Контур розташований в однорідному магнітному полі з індукцією B (рис. 118). Верхню частину контуру — дrottину у вигляді півкола радіусом R — обертають зі сталою кутовою швидкістю ω навколо осі OO' . У момент $t = 0$ магнітний потік через контур максимальний. Знайдіть ЕРС індукції \mathcal{E}_1 в контурі як функцію від часу t .

12.9. Дріт, що має форму параболи $y = kx^2$, перебуває в однорідному магнітному полі з індукцією B (рис. 119). З вершини параболи у момент $t_0 = 0$ почали переміщати перемичку 12. Знайдіть ЕРС індукції \mathcal{E}_1 в такому контурі як функцію від y , якщо перемичку переміщують: а) зі сталою швидкістю v ; б) зі сталим прискоренням a , причому в момент $t_0 = 0$ швидкість перемички дорівнювала нулю.

12.10. Металевий диск радіусом $R = 25$ см обертають зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 130$ рад/с навколо його осі.

Знайдіть різницю потенціалів між центром і краєм диска, якщо: а) зовнішнього магнітного поля немає; б) є перпендикулярне до диска зовнішнє однорідне магнітне поле з індукцією $B = 5$ мТл.

12.11. Довгий прямий провідник зі струмом I і П-подібний провідник з рухомою перемичкою розташовані в одній площині (рис. 120). Перемичку, довжина якої — l , переміщують праворуч зі сталою швидкістю v . Знайдіть ЕРС індукції в контурі як функцію відстані r .

12.12. Квадратна рамка зі стороною a і довга пряма дротина зі струмом I розташовані в одній площині (рис. 121). Рамку поступально переміщують праворуч зі сталою швидкістю v . Знайдіть ЕРС індукції в рамці як функцію відстані x .

12.13. По двох гладких мідних шинах, встановлених під кутом α до горизонту, під дією сили тяжіння ковзає мідна перемичка масою m (рис. 122). Шини замкнуті на опір R . Відстань між шинами — l . Система перебуває в однорідному магнітному полі з індукцією B , перпендикулярному до площини, у якій рухається перемичка. Опори шин, перемички і ковзних контактів, а також самоіндукція контуру дуже малі. Знайдіть швидкість перемички.

12.14. Між полюсами електромагніту розташована невелика котушка, вісь якої збігається з напрямом магнітного поля. Площа поперечного перерізу котушки $S = 3$ мм², кількість витків $N = 60$. Під час повертання котушки на 180° навколо

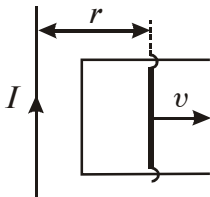


Рис. 120

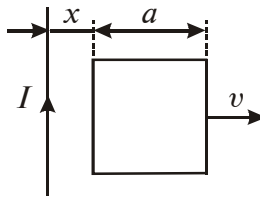


Рис. 121

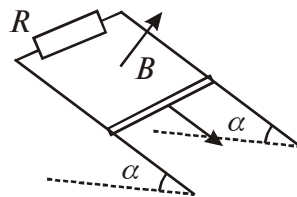


Рис. 122

її діаметра через приєднаний до неї балістичний гальванометр проходить заряд $q = 4,5 \text{ мкКл}$. Знайдіть модуль індукції B магнітного поля між полюсами, якщо опір електричного кола $R = 40 \text{ Ом}$.

12.15. Квадратна дротяна рамка зі стороною a і прямий провідник з постійним струмом I лежать в одній площині (рис. 123). Опір рамки — R . Її повернули на 180° навколо осі OO' , віддаленої від провідника зі струмом на відстань b . Знайдіть заряд q , який пройде в рамці.

12.16. На відстанях a і b від довгого прямого провідника з постійним струмом I_0 розташовані дві паралельні до нього дротини, замкнені на одному кінці опором R (рис. 124). По дросинах без тертя рухають зі сталою швидкістю v стрижень-перемичку. Нехтуючи опором дросин, стрижня та ковзних контактів, а також індуктивністю контуру, знайдіть: а) величину індукційного струму в стрижні; б) силу, потрібну для забезпечення сталої швидкості.

12.17. Стрижень 12 масою m ковзає без тертя по двох довгих провідних рейках, розташованих на відстані l одна від одної (рис. 125). Зліва кінці рейки замкнені опором R . Система перебуває у вертикальному однорідному магнітному полі з індукцією B . У момент $t = 0$ стрижню 12 надали вправо початкову швидкість v_0 . Нехтуючи опором рейок і стрижня 12 та самоіндукцією, знайдіть: а) відстань a , яку пройде стрижень до зупинки; б) кількість теплоти Q , яка виділиться при цьому на опорі.

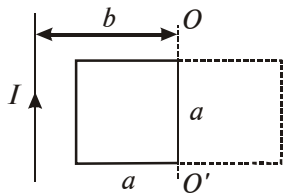


Рис. 123

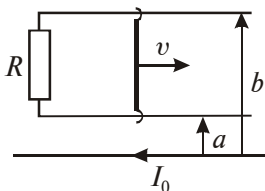


Рис. 124

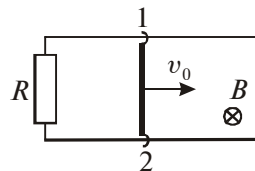


Рис. 125

12.18. Плоский контур (рис. 126), що має вигляд двох квадратів зі сторонами $a = 20$ см і $b = 10$ см, перебуває в однорідному магнітному полі, перпендикулярному до його площини. Індукція поля змінюється з часом за законом $B(t) = B_0 \sin(\omega t)$, де $B_0 = 10$ мТл і $\omega = 100$ с⁻¹. Знайдіть амплітуду індукційного струму I_0 в контурі, якщо опір його одиниці довжини $R_{\text{о.д}} = 50$ мОм/м. Індуктивністю контуру знехтуйте.

12.19. Плоска спіраль з дуже великою кількістю витків N , які щільно прилягають один до одного, перебуває в однорідному магнітному полі, перпендикулярному до площини спіралі. Зовнішній радіус витків спіралі дорівнює a . Індукція поля змінюється з часом за законом $B(t) = B_0 \sin(\omega t)$, де B_0 і ω — сталі. Знайдіть амплітудне значення ЕРС \mathcal{E}_{10} індукції в спіралі.

12.20. Всередині довгого соленоїда розташована котушка з N витків із площею поперечного перерізу S . Котушку обертають зі сталою кутовою швидкістю ω навколо осі, яка збігається з її діаметром і перпендикулярна до осі соленоїда. Знайдіть ЕРС \mathcal{E}_i індукції в котушці, якщо індукція магнітного поля в соленоїді змінюється з часом за законом $B(t) = B_0 \sin(\omega t)$ і в момент $t_0 = 0$ вісь котушки і соленоїда збігалися.

12.21. На довгий прямий соленоїд, який має діаметр перерізу $d = 5$ см і містить $n = 20$ витків на один сантиметр довжини, щільно натягнуто коловий виток з мідного дроту перерізом $S = 1$ мм². Знайдіть струм I у витку, якщо струм в обмотці соленоїда збільшують зі сталою швидкістю $i = 100$ А/с.

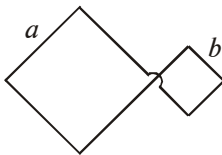


Рис. 126

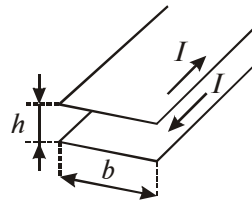


Рис. 127

12.22. Обмотка соленоїда складається з N витків мідного дроту, поперечний переріз якого $S = 1 \text{ мм}^2$. Довжина соленоїда $l = 25 \text{ см}$, а його опір $R = 0,2 \text{ Ом}$. Знайдіть індуктивність L соленоїда.

12.23. Скільки витків дроту діаметром $d = 0,6 \text{ см}$ має одношарова обмотка котушки, індуктивність якої $L = 1 \text{ мГн}$ і діаметр $D = 4 \text{ см}$? Витки щільно прилягають один до одного.

12.24. Магнітний потік через нерухомий контур з опором R змінюється впродовж часу τ за законом $\Phi = at(\tau - t)$, де a — константа. Знайдіть кількість теплоти Q , яка виділиться в контурі за час τ . Індуктивністю контуру знехтуйте.

12.25. Скільки метрів тонкого дроту треба взяти для виготовлення соленоїда довжиною $l_c = 100 \text{ см}$ з індуктивністю $L = 1 \text{ мГн}$, якщо діаметр перерізу соленоїда значно менший від його довжини?

12.26. Знайдіть індуктивність L соленоїда довжиною l_c , обмоткою якого є мідний дріт масою m . Опір обмотки — R . Діаметр соленоїда значно менший від його довжини.

12.27. Знайдіть індуктивність $L_{\text{о.д}}$ одиниці довжини кабелю, який виготовлений у вигляді двох тонкостінних коаксіальних металевих циліндрів, якщо радіус зовнішнього циліндра в $\eta = 3,6$ рази більший, ніж радіус внутрішнього. Вважайте, що магнітна проникність середовища між циліндрами дорівнює одиниці.

12.28. Визначте індуктивність L тороїдальної котушки соленоїда з N витків, внутрішній радіус якої дорівнює b , а поперечний переріз має форму квадрата зі стороною a . Простір усередині тороїда заповнений однорідним парамагнетиком з магнітною проникністю μ .

12.29. Обчисліть індуктивність $L_{\text{о.д}}$ одиниці довжини двопровідної стрічкової лінії (рис. 127), якщо відстань між стрічками h значно менша від їхньої ширини b , а саме — $b/h = 50$.

12.30. Знайдіть індуктивність $L_{\text{о.д}}$ одиниці довжини двопровідної лінії, якщо радіус кожного провідника в η разів менший,

ніж відстань між їхніми осями. Полем усередині провідників знехтуйте, магнітну проникність усюди вважайте такою, що дорівнює одиниці, а $\eta \gg 1$.

12.31. Кільце з тонкого дроту (радіусом $a = 50$ мм), яке має індуктивність $L = 0,26$ мкГн, помістили в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0,5$ мТл так, що його площина стала перпендикулярною до напрямку поля. Потім кільце охолодили до надпровідного стану і вимкнули магнітне поле. Знайдіть струм I в кільці.

12.32. Надпровідне кільце радіусом a , яке має індуктивність L , перебуває в однорідному магнітному полі з індукцією B . Площина кільця паралельна до вектора \vec{B} і струм у кільці дорівнює нулю. Потім площину кільця повернули на 90° у положення, перпендикулярне до поля. Знайдіть: а) струм I в кільці після повертання; б) виконану під час цього роботу A .

12.33. Струм $I_0 = 1,9$ А тече по довгому замкненому надпровідному соленоїду. Знайдіть струм у соленоїді після того, як його розтягнули, збільшивши довжину на $\eta = 5\%$.

12.34. Два довгі коаксіальні соленоїди мають n_1 і n_2 витків на одиницю довжини. Внутрішній соленоїд, що має площу поперечного перерізу S , заповнений магнетиком з проникністю μ . Знайдіть взаємну індуктивність $L_{12\text{о.д}}$ соленоїдів з розрахунку на одиницю їхньої довжини.

12.35. Обчисліть взаємну індуктивність L_{12} довгої прямої дротини і прямокутної рамки зі сторонами a і b . Рамка і пряма дротина лежать в одній площині, причому ближча до дротини сторона рамки довжиною b паралельна до дротини і віддалена від неї на відстань l .

12.36. Визначте взаємну індуктивність тороїдальної котушки і нескінченної прямої дротини, яка проходить по її осі. Котушка має прямокутний переріз, її внутрішній радіус — a , зовнішній — b . Довжина сторони поперечного перерізу тора, паралельна до дротини, дорівнює h . Кількість витків котушки N . Система розміщена в однорідному магнетиком з проникністю μ .

12.37. Два концентричні тонкі провідники у формі кіл з радіусами a і b лежать в одній площині. Вважаючи, що $a \ll b$, знайдіть: а) їхню взаємну індуктивність L_{12} ; б) магнітний потік Φ_{21} через поверхню, натягнену на зовнішній провідник, якщо по внутрішньому провіднику тече струм I .

12.38. По тонкому кільцю радіусом a тече струм I . Знайдіть індукцію B магнітного поля в площині кільця в точці, що розташована на відстані r від його центра, якщо $r \gg a$.

12.39. Невеликий циліндричний магніт M (рис. 128) розташований у центрі тонкої котушки радіусом a , що складається з N витків. Котушка приєднана до балістичного гальванометра. Опір усього кола дорівнює R . Знайдіть магнітний момент p_m магніту, якщо під час його видалення з котушки через гальванометр пройшов заряд q .



Рис. 128

12.40. Знайдіть наближену формулу для взаємної індуктивності L_{12} двох тонких витків однакового радіуса a , якщо осі витків збігаються, а їхні центри перебувають один від одного на відстані l , причому $l \gg a$.

13. ЕНЕРГІЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

Власна енергія магнітного поля котушки з індуктивністю L , утвореного струмом I ,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Взаємна енергія магнітного поля, утвореного струмами I_1 , I_2 у двох котушках,

$$W_{12} = L_{12}I_1I_2,$$

де L_{12} — коефіцієнт взаємної індукції.

Об'ємна густина енергії магнітного поля

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{(\vec{B}\vec{H})}{2}.$$

Густина струму зміщення

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Рівняння Максвелла в інтегральній формі:

Закон електромагнітної індукції Фарадея — змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}.$$

Закон повного струму — струми провідності та зміщення породжують вихрове магнітне поле:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{\text{пр}} d\vec{s} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s}.$$

Теорема Остроградського–Гаусса для електричного поля:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = q.$$

Теорема Остроградського–Гаусса для магнітного поля:

$$\oint_S \vec{H} d\vec{s} = 0.$$

Рівняння Максвелла у диференціальній формі:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Об'ємна густина енергії електромагнітного поля

$$w = \frac{(\vec{E}\vec{D})}{2} + \frac{(\vec{B}\vec{H})}{2}.$$

Густина потоку електромагнітної енергії (вектор Умова–Пойнтінга)

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}].$$

Формули перетворення електричного і магнітного полів у разі переходу від K -системи відліку до рухомої відносно неї зі швидкістю \vec{v} K' -системи:

а) у загальному випадку:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{v}\vec{B}]}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - [\vec{v}\vec{E}]/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

тут символами \parallel і \perp позначено складові полів, паралельні та перпендикулярні до вектора \vec{v} ; c — швидкість світла; $\beta = \frac{v}{c}$;

б) при $v \ll c$:

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}\vec{B}], \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{[\vec{v}\vec{E}]}{c^2}.$$

Інваріанти електромагнітного поля:

$$(\vec{E}\vec{B}) = \operatorname{inv}, \quad E^2 - c^2 B^2 = \operatorname{inv}.$$



13.1. Скільки ампер-витків потрібно для того, щоб усередині соленоїда малого діаметра довжиною $l = 20$ см об'ємна густина енергії магнітного поля $w_m = 1,75$ Дж/м³?

13.2. Соленоїд довжиною $l = 50$ см і площею поперечного перерізу $S = 2$ см² має індуктивність $L = 0,2$ мкГн. За якого струму I об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда $w_m = 1$ мДж/м³?

13.3. На тор з магнетика намотано $N = 500$ витків. Знайдіть енергію W магнітного поля, якщо за струму $I = 2$ А через поперечний переріз тора проходить магнітний потік $\Phi = 1$ мВб.

13.4. На залізне осердя, яке має форму тора з круговим перерізом радіуса $a = 3$ см, намотано обмотку з $N = 1000$ витків, по якій тече струм $I = 1$ А. Середній радіус тора $b = 32$ см. Знайдіть за допомогою рис. 108 магнітну енергію, накопичену в осерді, вважаючи, що напруженість поля H однакова по всьому перерізу і дорівнює її значенню в центрі перерізу осердя соленоїда.

13.5. На тонке кільце з магнетика, яке має середній діаметр $d = 30$ см, намотано обмотку з $N = 800$ витків. Площа поперечного перерізу кільця $S = 5$ см². У кільці зроблено поперечний проріз шириною $b = 2$ мм. Коли по обмотці тече деякий струм, магнітна проникність магнетика $\mu = 1400$. Нехтуючи розсіянням магнітного потоку на краях прорізу, знайдіть: а) відношення магнітної енергії $W_{\text{пр}}$ в прорізі до магнітної енергії $W_{\text{магн}}$ в магнетіку; б) індуктивність L системи, причому двома способами — через потік і через енергію.

13.6. Довгий циліндр радіусом a , заряджений рівномірно по поверхні, обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Знайдіть енергію $W_{\text{о.д}}$ магнітного поля на одиницю довжини циліндра, якщо лінійна густина заряду циліндра дорівнює λ , а магнітна проникність $\mu = 1$.

13.7. За якої напруженості електричного поля у вакуумі об'ємна густина енергії цього поля буде такою ж, як магнітного поля з індукцією $B = 1$ Тл (теж у вакуумі)?

13.8. Тонке рівномірно заряджене кільце радіусом $a = 10$ см обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega = 100$ рад/с. Знайдіть відношення об'ємних густин енергій магнітного w_m і електричного w_e полів на осі кільця в точці, віддаленій від його центра на відстань $l = a$.

13.9. За допомогою виразу для об'ємної густини енергії магнітного поля доведіть, що робота, яка витрачається на намагнічення одиниці об'єму пара- або діамагнетика, $A = (\vec{J} \vec{B})/2$.

13.10. Доведіть, що магнітну енергію взаємодії двох контурів зі струмами, що перебувають у вакуумі, можна описати виразом $W_{\text{вз}} = \frac{1}{\mu_0} \int_V (\vec{B}_1 \vec{B}_2) dV$, де \vec{B}_1 і \vec{B}_2 — індукції магнітного поля в об'ємі dV , створювані окремо струмами першого та другого контурів.

13.11. Знайдіть енергію взаємодії двох контурів зі струмами I_1 та I_2 , якщо обидва контури мають вигляд кіл радіусів a і b ($a \ll b$), центри цих контурів розташовані в одній точці, а їхні площини утворюють одна з одною кут ϑ .

13.12. Простір між двома концентричними металевими сферами заповнений однорідним слабко провідним середовищем з питомим опором ρ і діелектричною проникністю ϵ . У момент $t = 0$ внутрішній сфері надали деякого заряду Q . Знайдіть: а) зв'язок між векторами густини струму зміщення і струму провідності в довільній точці середовища в один і той же момент; б) струм зміщення через довільну розташовану цілком у середовищі замкнену поверхню, що охоплює внутрішню сферу, заряд якої в цей момент дорівнює q .

13.13. У точці середовища з діелектричною проникністю $\epsilon = 3$ електричне поле змінюється за законом $\vec{E}(t) = \vec{i} E_{\text{max}} \cos(100\pi t)$, $E_{\text{max}} = 100$ В/м. Знайдіть у цій точці густину струму зміщення.

13.14. Точковий заряд q рухається з нерелятивістською швидкістю $\vec{v} = \text{const}$. Знайдіть густину струму зміщення $\vec{j}_{\text{зм}}$

в точці, яка розташована на відстані r від заряду на прямій:
 а) яка збігається з траєкторією заряду; б) яка є перпендикулярною до траєкторії і проходить через заряд.

13.15. Струм, який протікає по обмотці соленоїда радіусом R , змінюють так, що індукція магнітного поля всередині соленоїда змінюється з часом за функцією $B(t) = \beta t^2$, $\beta = \text{const}$. Визначте залежність густини струму зміщення від відстані r від осі соленоїда. *Зауваження: під час розв'язування задачі використовуйте одне з рівнянь Максвелла і вираз для густини струму зміщення.*

13.16. Визначте діелектричну проникність довгого циліндричного стрижня з діелектрика радіусом $r = 1$ см, якщо його пронизує в осьовому напрямі однорідне електричне поле з напруженістю, яка монотонно змінюється на $\Delta E = 5 \cdot 10^5$ В/м за час $\Delta t = 10^{-7}$ с, і на відстані $d = 2$ см від осі стрижня виникає магнітне поле з напруженістю $H = 0,8$ А/м.

13.17. Плоский конденсатор, пластини якого мають форму дисків радіусом a , заповнений непровідним середовищем з діелектричною ε і магнітною μ проникностями, приєднали до джерела напруги, яка змінюється за законом $u(t) = U_{\text{max}} \cos \omega t$. Визначте відношення максимальних значень енергій магнітного $W_{\text{магн.макс}}$ і електричного $W_{\text{ел.макс}}$ полів усередині конденсатора.

13.18. Простір між пластинами плоского конденсатора, обкладки якого мають форму круглих дисків, заповнено однорідним слабо провідним середовищем з питомою електропровідністю σ і діелектричною проникністю ε . Дослідіть залежність напруженості $H(r)$ магнітного поля від відстані r між розглядуваною точкою та віссю конденсатора, якщо напруженість електричного поля між обкладками змінюється за функцією $E(t) = E_{\text{max}} \cos(\omega t)$.

13.19. Плоский конденсатор утворений двома дисками, між якими є однорідне слабо провідне середовище. Конденсатор зарядили і відімкнули від джерела напруги. Нехтуючи

крайовими ефектами, доведіть, що всередині конденсатора магнітного поля нема.

13.20. Плоский повітряний конденсатор, площа кожної пластини якого $S = 100 \text{ см}^2$, увімкнений послідовно в коло змінного струму. Знайдіть амплітуду напруженості електричного поля в конденсаторі, якщо амплітуда синусоїдального струму в підвідних провідниках $I_{\max} = 1 \text{ мА}$, а його частота $\omega = 1,6 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$.

13.21 Доведіть за допомогою рівнянь Максвелла, що: а) змінне з часом магнітне поле не може існувати без електричного поля; б) однорідне електричне поле не може існувати за наявності змінного з часом магнітного поля.

13.22. Доведіть, що з рівнянь Максвелла випливає закон збереження електричного заряду, тобто $\text{div } \vec{j} = -\partial \rho / \partial t$.

13.23. Доведіть, що одне з рівнянь Максвелла $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ не суперечить іншому рівнянню $\text{div } \vec{B} = 0$.

13.24. У деякій ділянці інерційної системи відліку є магнітне поле, яке обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ і його індукція \vec{B} . Знайдіть $\text{rot } \vec{E}$ в цій ділянці як функцію векторів $\vec{\omega}$ і \vec{B} .

13.25. В інерціальній K -системі відліку є однорідне суто магнітне поле з індукцією \vec{B} . Знайдіть напруженість E' електричного поля в K' -системі, яка рухається з нерелятивістською швидкістю \vec{v} відносно K -системи, причому $\vec{v} \perp \vec{B}$. Для розв'язування цієї задачі розгляньте сили, які діють на уявний заряд q в обох системах відліку в момент, коли швидкість заряду в K' -системі дорівнює нулю.

13.26. Велика пластина з ферромагнітного металу рухається зі швидкістю $v = 90 \text{ см/с}$ в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 50 \text{ мТл}$ (рис. 129). Знайдіть поверхневу густину електричних зарядів, що виникають на пластині завдяки її руху.

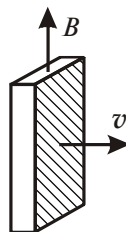


Рис. 129

13.27. Довгий суцільний алюмінієвий циліндр радіусом $a = 5$ см обертають навколо його осі в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 10$ мТл. Кутова швидкість обертання $\omega = 45$ рад/с, причому $\vec{\omega} \uparrow \uparrow \vec{B}$. Нехтуючи магнітним полем зарядів, які виникають, знайдіть їхню об'ємну і поверхневу густину.

13.28. Нерелятивістський точковий заряд q рухається зі сталою швидкістю \vec{v} . Знайдіть за допомогою формул перетворення полів індукцію \vec{B} магнітного поля цього заряду в точці, положення якої щодо заряду визначене радіусом-вектором \vec{r} .

13.29. Доведіть за допомогою формул перетворення електричного і магнітного полів (при $v \ll c$: $\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]$, $\vec{B}' = \vec{B} - \frac{[\vec{v} \vec{E}]}{c^2}$): якщо в інерціальной K -системі відліку є лише електричне або лише магнітне поле, то в будь-якій іншій інерціальной K' -системі існуватимуть як електричне, так і магнітне поле одночасно, причому $\vec{E}' \perp \vec{B}'$.

13.30. В інерціальной K -системі є лише електричне поле з напруженістю $\vec{E} = a(x\vec{i} + y\vec{j})/(x^2 + y^2)$, де a — стала, \vec{i} і \vec{j} — орти осей x і y . Знайдіть індукцію магнітного поля в K' -системі, яка рухається відносно K -системи зі сталою нерелятивістською швидкістю $\vec{v} = v\vec{k}$, де \vec{k} — орт осі z . Уважайте, що вісь z' збігається з віссю z . Який вигляд має поле \vec{B}' ?

13.31. Переконайтеся, що формули перетворення полів $\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]$, $\vec{B}' = \vec{B} - [\vec{v} \vec{E}]/c^2$ випливають з формул $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$, $\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$, $\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{v} \vec{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, $\vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - [\vec{v} \vec{E}]/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ при $v \ll c$.

13.32. В інерціальной K -системі є лише однорідне електричне поле з напруженістю $E = 8$ кВ/м. Знайдіть модуль і напрям: а) вектора \vec{E}' ; б) вектора \vec{B}' в інерціальной K' -системі, яка рухається відносно K -системи зі сталою швидкістю \vec{v} під кутом $\alpha = 45^\circ$ до вектора \vec{E} . Швидкість K' -системи становить $0,6$ швидкості світла ($\beta = v/c = 0,6$).

13.33. Розв'яжіть задачу **13.32** за умови, що в K -системі є не електричне, а магнітне поле з індукцією $B = 0,8$ Тл.

13.34. Переконайтеся за допомогою формул перетворення в інваріантності наведених величин: а) $(\vec{E}\vec{B})$; б) $E^2 - c^2B^2$.

13.35. В інерціальній K -системі відліку є два однорідні взаємно перпендикулярні поля: електричне з напруженістю $E = 40$ кВ/м і магнітне з індукцією $B = 0,2$ мТл. Знайдіть напруженість E' (або індукцію B') поля в тій K' -системі відліку, де спостерігають тільки одне поле (електричне або магнітне). *Вказівка: скористайтеся інваріантами поля, наведеними в попередній задачі!*

13.36. Точковий заряд q рухається рівномірно і прямолінійно з релятивістською швидкістю v , яка становить β від швидкості світла ($\beta = v/c$). Знайдіть напруженість \vec{E} електричного поля цього заряду в точці, радіус-вектор якої відносно заряду дорівнює \vec{r} і утворює кут ϑ з вектором його швидкості.

13.37. Виразіть модуль напруженості E електричного поля плоскої електромагнітної хвилі через модуль S вектора Умова–Пойнтінга. Параметри середовища (ϵ , μ) відомі.

13.38. Пучок електронів, що рухаються зі сталою швидкістю v , має круглий переріз. Пучок заряджених частинок, які рухаються, можна характеризувати силою струму I . Визначте напрям і модуль вектора Умова–Пойнтінга поза пучком на відстані r від осі пучка.

13.39. Частинка із зарядом q рухається у вакуумі рівномірно зі швидкістю v , значно меншою від швидкості світла. Визначте модуль і напрям вектора Умова–Пойнтінга на відстані r від частинки.

13.40. Електричний диполь — система з двох точкових зарядів $+q$ і $-q$, які розташовані на малій відстані l один від одного. Диполь рухається рівномірно зі швидкістю v уздовж лінії, яка збігається з віссю диполя. Визначте модуль вектора Умова–Пойнтінга у точці на відстані r від середини осі диполя.

14. RC- ТА RL-КОЛА. ЗМІННИЙ СТРУМ У RLC-КОЛАХ

Закон Ома для змінного струму записують у вигляді

$$I_{\text{еф}} = \frac{U_{\text{еф}}}{Z},$$

де Z — повний опір кола (імпеданс); $I_{\text{еф}}$ та $U_{\text{еф}}$ — ефективні (діючі) значення струму і напруги, пов'язані з їхніми амплітудними значеннями I_0 і U_0 співвідношеннями

$$I_{\text{еф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{еф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Якщо коло містить опір R , ємність C та індуктивність L , з'єднані послідовно, то

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

де ω — циклічна частота змінного струму, яка пов'язана з лінійною частотою ν формулою $\omega = 2\pi\nu$.

У цьому разі різницю фаз φ між напругою і струмом знаходять за таким виразом:

$$\text{tg } \varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) / R.$$

Реактивний опір котушки індуктивністю L та конденсатора ємністю C , відповідно,

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Потужність змінного струму

$$P = I_{\text{еф}} U_{\text{еф}} \cos \varphi.$$

Струм зміщення через конденсатор

$$I_{\text{зм}} = C \frac{dU}{dt}.$$

ЕРС самоіндукції, яка виникає в котушці індуктивності,

$$\mathcal{E}_{\text{ci}} = -L \frac{dI}{dt}.$$

У колі змінного струму реальна котушка, окрім індуктивності L , має ненульовий опір R , тому еквівалентна схема заміщення котушки складається з послідовно з'єднаних L і R . Конденсатор з ємністю C має деякий скінченний опір R , а схема заміщення конденсатора складається з паралельно з'єднаних C і R .



14.1. Конденсатор ємністю $C = 400$ пФ приєднали через опір $R = 650$ Ом до джерела постійної напруги U_0 . Через скільки часу t_0 напруга U_C на конденсаторі становитиме $0,9U_0$?

14.2. Конденсатор, заповнений діелектриком з проникністю $\varepsilon = 2,1$, втрачає за час $t_0 = 3$ хв половину наданого йому заряду. Вважаючи, що втрата заряду відбувається тільки внаслідок провідності діелектрика, знайдіть його питомий опір.

14.3. Коло складається з джерела постійної ЕРС \mathcal{E} і послідовно приєднаних до нього опору R і конденсатора ємністю C . Внутрішній опір джерела дуже малий. У момент $t_0 = 0$ ємність конденсатора швидко (стрибком) зменшили в η разів. Знайдіть струм у колі як функцію часу t .

14.4. Знайдіть залежність напруги від часу на конденсаторі C (рис. 130) після замикання ключа K .

14.5. Радіуси обкладок сферичного конденсатора дорівнюють a та b , причому $a < b$. Простір між обкладками

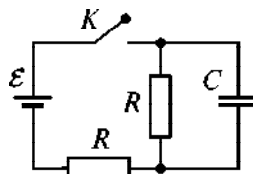


Рис. 130

заповнений однорідною речовиною з діелектричною проникністю ε і питомим опором ρ . Спочатку конденсатор не заряджений. У момент $t_0 = 0$ внутрішній обкладці надали заряду q_0 . Знайдіть: а) закон зміни заряду від часу на внутрішній обкладці; б) кількість теплоти, яка виділилася під час розтікання заряду.

14.6. Обкладкам конденсатора ємністю $C = 2,0$ мкФ надали різнойменних зарядів $q_0 = 1,0$ мкКл. Потім обкладки замкнули через опір $R = 5,0$ МОм. Знайдіть: а) заряд Δq , який пройшов через цей опір за $t_0 = 2,0$ с; б) кількість теплоти Q , яка виділилася на опорі за той же час.

14.7. У схемі, показаній на рис. 131, один конденсатор зарядили до напруги U_0 і замкнули ключ K . Знайдіть: а) струм I у колі як функцію часу t ; б) кількість виділеної теплоти Q , знаючи залежність $I(t)$.

14.8. Котушку індуктивністю $L = 300$ мГн і опором $R = 140$ МОм приєднали до джерела постійної напруги. За скільки часу t_0 струм через котушку досягне $\eta = 50\%$ від максимального значення?

14.9. Обчисліть сталу часу τ прямого соленоїда довжиною $l_c = 1$ м, який має одношарову обмотку з мідного дроту масою $m = 1$ кг. Уважайте, що діаметр перерізу соленоїда значно менший від його довжини. *Примітка: сталого часу τ називають відношення L/R , де L — індуктивність; R — активний опір.*

14.10. Замкнуте коло складається з послідовно увімкнених джерела постійної ЕРС \mathcal{E} і котушки з індуктивністю L .

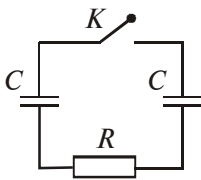


Рис. 131

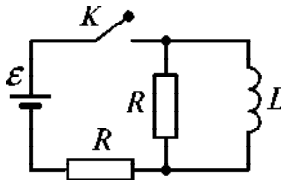


Рис. 132

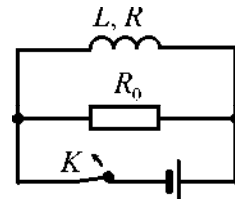


Рис. 133

Активний опір кола дорівнює R . У момент $t_0 = 0$ індуктивність котушки стрибком зменшили в η разів. Знайдіть струм у колі як функцію часу t . *Вказівка: у момент стрибкоподібної зміни індуктивності повний магнітний потік є незмінним.*

14.11. Знайдіть закон зміни з часом струму, який тече через індуктивність L у схемі (рис. 132) після замикання ключа K .

14.12. Струм $I_0 = 1,8$ А тече по довгому замкненому надпровідному соленоїду. Після того, як його розтягнули, струм у соленоїді став $I = 2$ А. На скільки зросла довжина соленоїда.

14.13. Взаємна індуктивність двох нерухомих контурів — L_{12} . В одному з контурів почали змінювати струм за законом $I_1 = \alpha t$, де α — стала; t — час. Знайдіть закон зміни струму $I_2(t)$ в іншому контурі, індуктивність якого — L_2 , а опір — R .

14.14. Котушка індуктивністю $L = 2$ мкГн і опором $R = 1$ Ом приєднана до джерела постійної ЕРС $\mathcal{E} = 3$ В (рис. 133). Паралельно до котушки увімкнено опір $R_0 = 2$ Ом. Знайдіть кількість теплоти, яка виділиться в котушці після розмикання ключа K . Внутрішній опір джерела дуже малий.

14.15. Котушка завдовжки $l = 50$ см і площею поперечного перерізу $S = 10$ см² увімкнена в коло змінного струму частотою $\nu = 50$ Гц. Кількість витків котушки $N = 3\,000$. Знайдіть активний опір R котушки, якщо різниця фаз між напругою і струмом $\varphi = 60^\circ$.

14.16. Обмотка котушки складається з $N = 500$ витків мідного дроту, площа поперечного перерізу якого $S = 1$ мм². Довжина котушки $l = 50$ см, її діаметр $D = 5$ см. За якої частоти ν змінного струму повний опір Z котушки вдвічі більший, ніж її активний опір R ?

14.17. У коло змінного струму з напругою $U = 220$ В і частотою $\nu = 50$ Гц увімкнені послідовно два конденсатори з ємностями $C_1 = 0,2$ мкФ і $C_2 = 0,1$ мкФ. Знайдіть струм I у колі й напруги U_1 та U_2 на першому і другому конденсаторах.

14.18. Котушка завдовжки $l = 25$ см і радіусом $r = 2$ см має обмотку з $N = 1\,000$ витків мідного дроту, площа поперечного перерізу якого $S = 1$ мм². Котушка увімкнена в коло змінного струму частотою $\nu = 50$ Гц. Яку частину повного опору Z котушки становлять активний опір R та індуктивний опір X_L ?

14.19. Конденсатор ємністю $C = 20$ мкФ і резистор, опір якого $R = 150$ Ом, увімкнені послідовно в коло змінного струму з частотою $\nu = 50$ Гц. Яку частину напруги U , прикладеної до цього кола, становлять напруги на конденсаторі U_C і на резисторі U_R ?

14.20. Конденсатор і електрична лампочка з'єднані послідовно й увімкнені в коло змінного струму з напругою $U = 440$ В і частотою $\nu = 50$ Гц. Яку ємність C має конденсатор, якщо струм у колі $I = 0,5$ А, а напруга на лампочці $U_{\text{л}} = 110$ В?

14.21. Котушка з активним опором $R = 10$ Ом та індуктивністю L приєднана до джерела змінного струму з напругою $U = 127$ В і частотою $\nu = 50$ Гц. Знайдіть індуктивність L котушки, якщо на ній виділяється потужність $P = 400$ Вт, а різниця фаз між напругою і струмом $\phi = 60^\circ$.

14.22. Знайдіть формули для повного опору кола Z і різницю фаз ϕ між напругою і струмом за різних способів увімкнення опору R , ємності C , індуктивності L . Розгляньте випадки: а) R і C увімкнені послідовно; б) R і C увімкнені паралельно; в) R і L увімкнені послідовно; г) R і L увімкнені паралельно; д) R , C і L увімкнені послідовно.

14.23. Конденсатор ємністю $C = 1$ мкФ і резистор з опором $R = 3$ кОм увімкнені в коло змінного струму частотою $\nu = 50$ Гц. Знайдіть повний опір Z кола, якщо конденсатор і резистор увімкнені: а) послідовно; б) паралельно.

14.24. У коло змінного струму з напругою $U = 220$ В і частотою $\nu = 50$ Гц увімкнені послідовно ємність $C = 35,4$ мкФ, опір $R = 100$ Ом та індуктивність $L = 0,7$ Гн. Знайдіть струм у колі й напруги U_C , U_R та U_L на ємності, опорі та індуктивності.

14.25. Індуктивність $L = 22,6$ мГн і опір R увімкнені паралельно в коло змінного струму частотою $\nu = 50$ Гц. Знайдіть

опір R , якщо відомо, що різниця фаз між напругою і струмом $\varphi = 60^\circ$.

14.26. Активний опір R та індуктивність L з'єднані паралельно й увімкнені в коло змінного струму з ефективною напругою $U = 127$ В і частотою $\nu = 50$ Гц. Знайдіть опір R та індуктивність L , якщо відомо, що коло поглинає потужність $P = 404$ Вт і різниця фаз між напругою та струмом $\varphi = 60^\circ$.

14.27. У коло змінного струму з напругою $U = 220$ В увімкнені послідовно ємність C , опір R та індуктивність L . Знайдіть напругу U_R на опорі, якщо відомо, що напруга на конденсаторі $U_C = 2U_R$, а на індуктивності $U_L = 3U_R$.

14.28. Послідовно з'єднані конденсатор та активний опір $R = 110$ Ом приєднали до джерела змінної напруги з амплітудою $U_0 = 110$ В. Амплітуда струму в колі $I_0 = 0,5$ А. Знайдіть різницю фаз між струмом і напругою.

14.29. На рис. 134 показана проста схема згладжувального фільтра. На вхід подають напругу $U(t) = U_0(1 + \cos(\omega t))$. Циклічна частота $\omega = 314$ с⁻¹. Знайдіть вихідну напругу $U'(t)$ та значення RC , за якого амплітуда змінної складової напруги на виході буде в $\eta = 7$ разів менша від постійної складової.

14.30. Зобразіть приблизні векторні діаграми напруг в електричних колах змінного струму, показаних на рис. 135, а, б.

14.31. Послідовно з'єднані конденсатор ємністю $C = 22$ мкФ і котушку з активним опором $R = 20$ Ом та індуктивністю $L = 0,35$ Гн приєднали до мережі змінної напруги з амплітудою $U_0 = 180$ В і циклічною частотою $\omega = 314$ с⁻¹. Знайдіть: а) амплітуду струму в колі; б) різницю фаз між струмом і напругою; в) амплітуди напруг на конденсаторі та котушці.

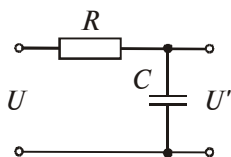


Рис. 134

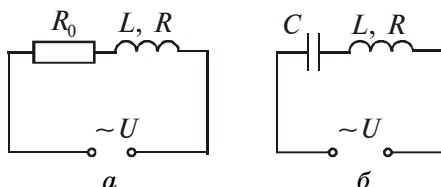


Рис. 135, а, б

14.32. Послідовно з'єднані конденсатор ємністю C , опір R та котушка з індуктивністю L і дуже малим активним опором приєднані до генератора синусоїдальної напруги, частоту якої можна змінювати за сталої амплітуди. Знайдіть циклічну частоту, за якої амплітуда напруги максимальна: а) на конденсаторі; б) на котушці.

14.33. Джерело змінної напруги амплітудою $U_0 = 180$ В і циклічною частотою $\omega = 314$ с⁻¹ приєднано до кола послідовно з'єднаних конденсатора і котушки з активним опором $R = 40$ Ом та індуктивністю $L = 0,36$ Гн. За якого значення ємності конденсатора C амплітуда напруги U_L на котушці буде максимальною? Чому дорівнює ця амплітуда і відповідна амплітуда напруги U_C на конденсаторі?

14.34. Конденсатор ємністю C , простір між обкладками якого заповнено слабко провідним середовищем з активним опором R , приєднали до джерела змінної напруги $U = U_0 \cos(\omega t)$. Знайдіть залежність від часу струму $I(t)$ у підвідних провідниках. Опір провідників дуже малий.

14.35. Соленоїд з індуктивністю $L = 7$ мГн і активним опором $R = 44$ Ом приєднали спочатку до джерела постійної напруги U_0 , а потім до генератора синусоїдальної напруги з ефективним значенням $U = U_0$. За якої лінійної частоти генератора потужність, споживана соленоїдом, буде в $\eta = 5$ разів менша, ніж у першому випадку?

14.36. До мережі з ефективною напругою $U = 100$ В приєднали котушку, індуктивний опір якої $X_L = 30$ Ом, імпеданс $Z = 50$ Ом. Знайдіть різницю фаз φ між струмом і напругою, а також теплову потужність P , яка виділяється в котушці.

14.37. Котушка з індуктивністю $L = 0,7$ Гн і активним опором $r = 20$ Ом з'єднана послідовно з безіндукційним опором R . До кінців цього кола прикладено змінну напругу з ефективним значенням $U = 220$ В і циклічною частотою $\omega = 314$ с⁻¹. За якого значення опору R у колі виділятиметься максимальна теплова потужність P_{\max} ? Чому вона дорівнюватиме?

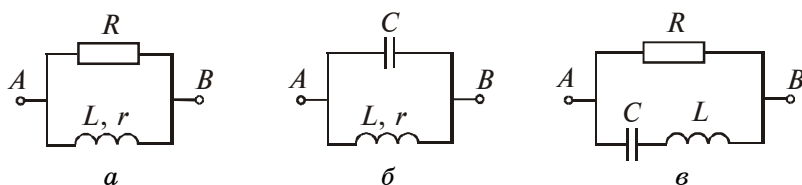


Рис. 136, а, б, в

14.38. Коло, яке складається з послідовно з'єднаних безіндукційного опору $R = 0,16$ кОм і котушки L з активним опором R_L , приєднали до мережі з ефективною напругою $U = 220$ В. Знайдіть теплову потужність P_L , яка виділяється на котушці, якщо ефективна напруга на опорі R і котушці L , відповідно, $U_R = 80$ В та $U_L = 180$ В.

14.39. Котушка L і безіндукційний опір $R = 25$ Ом приєднані паралельно до мережі змінної напруги. Знайдіть теплову потужність P_L , яка виділяється в котушці, якщо з мережі споживають струм $I = 0,9$ А, а через котушку і опір течуть струми $I_L = 0,5$ А та $I_R = 0,6$ А.

14.40. Побудуйте схематично векторні діаграми струмів в електричних контурах, показаних на рис. 136. Уважайте, що до точок A і B підводять синусоїдальну напругу і параметри кожного контуру підбрані так, що сумарний струм I_0 через контур зміщений за фазою від зовнішньої напруги на кут φ .

14.41. До джерела синусоїдальної напруги з циклічною частотою ω приєднали паралельно конденсатор ємності C і котушку з активним опором R та індуктивністю L . Знайдіть різницю фаз φ між струмом, який підводять до контуру, і напругою на джерелі.

14.42. Ділянка кола складається з паралельно увімкнених конденсатора ємністю C і котушки з активним опором R та індуктивністю L . Знайдіть повний опір цієї ділянки для змінної напруги з циклічною частотою ω .

15. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ. ВИПРОМІНЮВАННЯ

Період T електромагнітних коливань у контурі, який складається з ємності C , індуктивності L та опору R , визначають за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}.$$

Якщо опір R такого контуру дуже малий, то за умови $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC}$ період коливань можна визначати за формулою Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Тоді циклічна частота власних коливань у контурі

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

а часова зміна напруги на обкладках конденсатора

$$U(t) = U_0 \cos \omega_0 t.$$

Якщо опір R контуру не дорівнює нулю, то коливання будуть загасальними. У цьому разі напруга $U(t)$ на обкладках конденсатора

$$U(t) = U_0 \exp(-\beta t) \cos \omega t,$$

де $\beta = R/2L$ — коефіцієнт загасання; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ — частота загасальних коливань.

Величину $\delta = \beta T$ називають логарифмічним декрементом загасання. Якщо $\beta = 0$, то коливання будуть незагасальними і тоді $\omega = \omega_0$.

Логарифмічний декремент загасання δ і добротність Q контуру

$$\delta = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Фазова швидкість електромагнітної хвилі

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

де $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ — швидкість електромагнітної хвилі у вакуумі.

Для біжучої плоскої електромагнітної хвилі вирази напруженостей електричного і магнітного полів у точці з радіусом-вектором \vec{r}

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}\vec{r})), \quad \vec{H}(t) = \vec{H}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}\vec{r})),$$

де \vec{k} — хвильовий вектор, у середовищі $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}$.

Зв'язок між електричним і магнітним полем такий:

$$E\sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}.$$

Для плоскої електромагнітної хвилі у вакуумі, яка поширюється в напрямі осі x :

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial B_z}{\partial x}.$$

Об'ємна густина енергії електромагнітного поля

$$w = \frac{ED}{2} + \frac{BH}{2}.$$

Густина потоку електромагнітної енергії — вектор Умова-Пойнтінга:

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}].$$

Амплітуда електромагнітної хвилі, яку випромінює диполь, у хвильовій зоні

$$E_0 \sim \frac{1}{r} \sin \vartheta,$$

де r — відстань від диполя; ϑ — кут між радіусом-вектором \vec{r} і віссю диполя.

Потужності випромінювання диполя з електричним моментом $p(t)$ та зарядом q , який рухається з прискоренням a ,

$$P = \frac{2k}{3c^3} \left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right), \quad P = \frac{2kq^2 a^2}{3c^3},$$

де $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ — електрична стала.



15.1. На який діапазон довжин хвиль λ можна налаштувати коливальний контур, якщо його індуктивність $L = 2$ мГн, ємність може змінюватися від $C_1 = 69$ пФ до $C_2 = 533$ пФ?

15.2. Котушка з індуктивністю $L = 30$ мкГн приєднана до плоского конденсатора з площею пластин $S = 0,01$ м² і відстанню між ними $d = 0,1$ мм. Знайдіть діелектричну проникність ϵ середовища, що заповнює простір між пластинами, якщо контур налаштований на довжину хвилі $\lambda = 750$ м.

15.3. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 25$ нФ і котушки з індуктивністю $L = 1,015$ Гн. Обкладки конденсатора мають заряд $q = 2,5$ мкКл. Напишіть рівняння (з числовими коефіцієнтами) зміни різниці потенціалів U на обкладках конденсатора і струму I у колі. Знайдіть різницю потенціалів на обкладках конденсатора і струм у колі в моменти часу $T/8$, $T/4$ і $T/2$.

15.4. Для коливального контуру з попередньої задачі напишіть рівняння (з числовими коефіцієнтами) зміни з часом t енергії електричного поля $W_{\text{ел}}$, енергії магнітного поля $W_{\text{магн}}$ і повної енергії поля W . Знайдіть енергію електричного поля, енергію магнітного поля і повну енергію поля в моменти часу $T/8$, $T/4$ і $T/2$.

15.5. Рівняння зміни з часом різниці потенціалів на обкладках конденсатора в коливальному контурі має вигляд $U(t) = 50 \cos 10^4 \pi t$ В. Ємність конденсатора $C = 0,1$ мкФ. Знайдіть період T коливань, індуктивність контуру, закон зміни з

часом t струму I у колі та довжину хвилі λ , яка відповідає цьому контуру.

15.6. Рівняння зміни з часом струму в коливальному контурі має вигляд $I(t) = -0,02 \sin 400\pi t$ А. Індуктивність контуру $L = 1$ Гн. Знайдіть період T коливань, ємність C контуру, максимальну енергію $W_{\text{магн}}$ магнітного поля і максимальну енергію $W_{\text{ел}}$ електричного поля.

15.7. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 7$ мкФ і котушки з індуктивністю $L = 0,23$ Гн та опором $R = 40$ Ом. Обкладки конденсатора мають заряд $q = 0,56$ мКл. Знайдіть період T коливань контуру і логарифмічний декремент δ загасання коливань. Напишіть рівняння зміни з часом різниці потенціалів $U(t)$ на обкладках конденсатора. Знайдіть різницю потенціалів у моменти часу $T/2$, T , $3T/2$ і $2T$.

15.8. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 0,2$ мкФ і котушки з індуктивністю $L = 5$ мГн. За якого логарифмічного декременту загасання δ різниця потенціалів на обкладках конденсатора за час $t_0 = 1$ мс зменшиться в 3 рази? Який у цьому разі опір R контуру?

15.9. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 2,22$ нФ і котушки завдовжки $l = 20$ см з мідного дроту діаметром $d = 0,5$ мм. Знайдіть логарифмічний декремент загасання δ коливань.

15.10. Коливальний контур має ємність $C = 1,1$ нФ, індуктивність $L = 5$ мГн. Логарифмічний декремент загасання $\delta = 0,005$. За який час t унаслідок загасання контур утратить 99 % енергії?

15.11. У коливальному контурі (рис. 137) індуктивність котушки $L = 2,5$ мГн, а ємності конденсаторів $C_1 = 2$ мкФ і $C_2 = 3$ мкФ. Конденсатори зарядили до напруги $U = 180$ В і замкнули ключ K . Знайдіть: а) період T власних коливань; б) амплітудне значення струму I_0 через котушку.

15.12. Електричне коло (рис. 138) має дуже малий активний опір. Лівий конденсатор зарядили до напруги U_0 і потім,

у момент $t = 0$, замкнули ключ K . Знайдіть залежність напруг на обох конденсаторах від часу t .

15.13. У контурі з ємністю C та індуктивністю L відбуваються вільні загасальні коливання, за яких струм змінюється з часом за законом $I = I_0 \exp(-\beta t) \sin(\omega t)$. Знайдіть напругу $U_C(t)$ на конденсаторі залежно від часу, а також у момент $t = 0$.

15.14. Коливальний контур має ємність $C = 10$ мкФ, індуктивність $L = 25$ мГн і активний опір $R = 1$ Ом. Через скільки коливань амплітуда струму в цьому контурі зменшиться в e разів?

15.15. У контурі, добротність якого $Q = 50$ і власна частота коливань $\nu = 5,5$ кГц, збуджуються загасальні коливання. За який час енергія, накопичена в контурі, зменшиться в $n = 2$ рази?

15.16. Коливальний контур містить конденсатор зі слабо провідним діелектриком. Ємність конденсатора — C , його активний опір — R . Індуктивність котушки — L . Опір котушки і провідників дуже малий. Знайдіть: а) циклічну частоту загасальних коливань такого контуру; б) його добротність.

15.17. Яку середню потужність має споживати коливальний контур з активним опором $R = 4,5$ Ом, щоб у ньому підтримувалися незгасальні гармонічні коливання з амплітудою струму $I_0 = 100$ мА?

15.18. Коло, яке містить послідовно з'єднані конденсатор і котушку з активним опором, приєднане до джерела гармонічної напруги, частоту якої можна змінювати, не змінюючи амплітуди. За частот ω_1 і ω_2 амплітуда струму виявилася в n

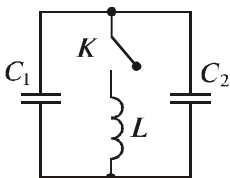


Рис. 137

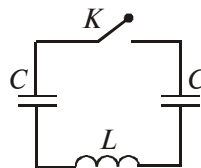


Рис. 138

разів меншою, ніж резонансна. Знайдіть: а) резонансну частоту ω_p ; б) добротність кола Q .

15.19. Доведіть, що в разі малого загасання добротність контуру, у якому відбуваються вимушені коливання, $Q \approx \omega_0/\Delta\omega$, де ω_0 — власна частота коливань; $\Delta\omega$ — ширина резонансної кривої $I(\omega)$ на “висоті”, в $\sqrt{2}$ разів меншій від амплітуди струму під час резонансу.

15.20. У коливальний контур з добротністю $Q = 100$ увімкнене послідовно джерело синусоїдальної ЕРС зі сталою амплітудою напруги. За деякої частоти зовнішньої напруги теплова потужність, яка виділяється в контурі, виявляється максимальною. На скільки відсотків треба змінити цю частоту, щоб потужність, яка виділяється, зменшилася в $n = 2$ рази?

15.21. Електромагнітна хвиля з частотою $\nu = 3$ МГц переходить з вакууму в немагнітне середовище з діелектричною проникністю $\epsilon = 4$. Знайдіть приріст її довжини хвилі.

15.22. Плоска електромагнітна хвиля з частотою $\nu = 10$ МГц поширюється в слабо провідному середовищі з питомою провідністю $\sigma = 10$ мСм/м і діелектричною проникністю $\epsilon = 9$. Знайдіть відношення амплітуд густин струмів провідності та зміщення.

15.23. Плоска електромагнітна хвиля $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k} \vec{r}))$ поширюється у вакуумі. Вважаючи вектори \vec{E}_0 і \vec{k} відомими, знайдіть вектор \vec{H} як функцію часу t в точці з радіусом-вектором $\vec{r} = 0$.

15.24. Знайдіть середнє значення вектора Умова–Пойнтінга $\langle \vec{S} \rangle$ для плоскої електромагнітної хвилі $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k} \vec{r}))$, якщо хвиля поширюється у вакуумі.

15.25. У вакуумі поширюється плоска електромагнітна хвиля, частота якої $\nu = 100$ МГц і амплітуда електричної складової $E_0 = 50$ мВ/м. Знайдіть середні за період коливання значення: а) модуля густини струму зміщення; б) густини потоку електромагнітної енергії.

15.26. У вакуумі встановилася стояча електромагнітна хвиля у напрямі осі x , складова напруженості електричного поля $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos kx \cos \omega t$. Знайдіть складову індукції $B(x, t)$ магнітного поля хвилі.

15.27. Плоский повітряний конденсатор, обкладки якого мають форму дисків радіусом $R = 6$ см, приєднаний до змінної синусоїдальної напруги частотою $\omega = 1\,000$ с⁻¹. Знайдіть відношення амплітудних значень магнітної та електричної енергій усередині конденсатора.

15.28. Змінний синусоїдальний струм частотою $\omega = 1\,000$ с⁻¹ тече по обмотці прямого соленоїда, радіус перерізу якого $R = 6$ см. Знайдіть відношення амплітудних значень магнітної та електричної енергій усередині соленоїда.

15.29. По прямому провідникові круглого перерізу тече постійний струм I . Знайдіть потік вектора Умова–Пойнтінга через бокову поверхню ділянки цього провідника, яка має опір R .

15.30. Струм, який протікає по обмотці довгого прямого соленоїда, дуже повільно збільшують. Доведіть, що швидкість зростання енергії магнітного поля в соленоїді пропорційна до потоку вектора Умова–Пойнтінга через його бокову поверхню.

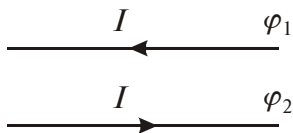


Рис. 139

15.31. На рис. 139 показано ділянку двопровідної лінії передавання постійного струму, напрям якого помічено стрілками. Вважаючи, що потенціал $\phi_2 > \phi_1$, визначте за допомогою вектора Умова–Пойнтінга, де розташований генератор струму (ліворуч чи праворуч).

15.32. Енергія від джерела постійної напруги U передається до споживача по довгому прямому коаксіальному кабелю з дуже малим активним опором. Споживаний струм дорівнює I . Знайдіть потік енергії через поперечний переріз кабелю. Зовнішню провідну оболонку кабелю вважайте тонкостінною.

15.33. Доведіть, що у замкненій системі заряджених нерелятивістських частинок з однаковим питомим зарядом дипольне випромінювання відсутнє.

15.34. Знайдіть середню потужність випромінювання електрона, який робить гармонічні коливання з амплітудою $a = 0,1$ нм і частотою $\omega = 6,5 \cdot 10^{14}$ с⁻¹.

15.35. Знайдіть потужність випромінювання нерелятивістської частинки зарядом e і масою m , яка рухається по коловій орбіті радіусом r у полі нерухомого точкового заряду q .

15.36. Нерелятивістський протон влетів по нормалі в напівпростір з поперечним однорідним магнітним полем, індукція якого $B = 1$ Тл. Знайдіть відношення енергії, втраченої протоном на випромінювання за час руху в полі, до його початкової кінетичної енергії.

15.37. Нерелятивістська заряджена частинка рухається в поперечному однорідному магнітному полі з індукцією $B = 1$ Тл. Знайдіть закон спадання (завдяки випромінюванню) кінетичної енергії частинки з часом. Через скільки часу t_0 її кінетична енергія зменшиться в e разів? Обчисліть цей час для електрона і протона.

15.38. Електромагнітна хвиля, випромінена елементарним диполем, поширюється у вакуумі так, що в хвильовій зоні на промені, перпендикулярному до осі диполя, на відстані r від нього середнє значення густини потоку енергії дорівнює S_0 . Знайдіть середню потужність випромінювання диполя.

15.39. Середня потужність, яку випромінює елементарний диполь, дорівнює P_0 . Знайдіть середню об'ємну густину енергії електромагнітного поля у вакуумі в хвильовій зоні на промені, перпендикулярному до осі диполя, на відстані r від нього.

15.40. Сталий за модулем електричний диполь з моментом p обертають зі сталою кутовою швидкістю Ω навколо осі, яка перпендикулярна до осі диполя і проходить через його середину. Знайдіть потужність випромінювання такого диполя.

ЧАСТИНА II

ВІДПОВІДІ ТА РОЗВ'ЯЗКИ

1. Електростатичне поле.

Закон Кулона. Напруженість

1.1. $9 \cdot 10^3$ Н.

1.2. $2,3 \cdot 10^{-8}$ Н.

1.3. Рівновага нестійка згідно теореми Ірншоу.

1.4. 8,9 см.

1.5. $\sim 10^{36}$.

1.6. $1,86 \cdot 10^{-9}$ кг.

1.7. $1,75 \cdot 10^{15}$ Н.

1.8. $q' = -q \frac{2\sqrt{2} + 1}{4}$. Рівновага нестійка.

1.9. $q' = -\frac{q}{\sqrt{3}}$.

1.10. $9 \cdot 10^{-7}$ Кл.

1.11. $q = \sqrt{\frac{3l^2 mg \sin \alpha}{2k}} = 2$ мкКл.

1.12. $\rho = \rho_{\text{н}} \left[1 - \frac{\varepsilon_{\text{н}} \sin^2 \alpha_{\text{н}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{н}}}{\varepsilon_{\text{н}} \sin^2 \alpha_{\text{н}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{н}}} \right]^{-1}$.

1.13. $\rho_0 = \frac{\rho \varepsilon}{\varepsilon - 1}$.

1.14. 1 м/с².

1.15. $q = \frac{4\pi R^3 g(\rho - \rho_0)}{3E} = 11$ нКл.

$$1.16. q_2 = \frac{FLR}{kq_1} \approx 3,5 \text{ нКл.}$$

$$1.17. F_a = \int_a^{\infty} dF = \int_a^{\infty} \frac{kq\lambda dl}{l^2} = -kq\lambda \left. \frac{1}{l} \right|_a^{\infty} = \frac{kq\lambda}{a}; \quad F_b = \frac{kq\lambda}{b}.$$

$$F = \sqrt{F_a^2 + F_b^2} = \frac{kq\lambda}{ab} \sqrt{b^2 + a^2} = 18,75 \text{ мкН.}$$

$$1.18. Q = -\frac{q(\sqrt{l^2 + 4h^2})^3}{4l^3} \approx 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

1.19. З рис. 140 видно:

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{13}|, \quad |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{23}|.$$

$$\text{Тобто } k \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}, \quad k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} = k \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2}.$$

$$\text{Отже, } \sqrt{q_1} |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = \sqrt{q_2} |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|.$$

Для відстаней між зарядами запишемо

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| \quad (\text{див. рис. 140}).$$

$$\text{Отже, } |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \left(1 + \frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}} \right) |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|.$$

Підставимо у перше рівняння, отримаємо

$$\frac{q_3 \left(1 + \frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}} \right)^2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} = \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2},$$

$$\text{звідки } q_3 = -\frac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}.$$

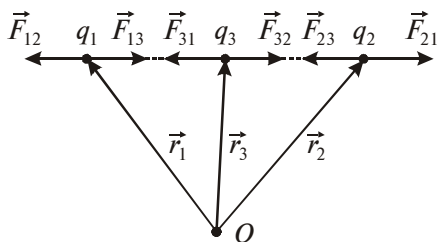


Рис. 140

Розглянемо рівняння $-\vec{F}_{12} = \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}$;

$$-k \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -k \frac{q_1 q_3 (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3}.$$

З урахуванням результату для q_3 та рівності

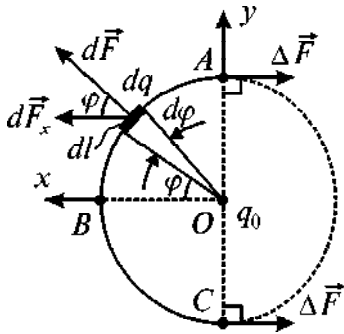


Рис. 141

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \left(1 + \frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}}\right) |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|$$

$$\text{отримаємо } \vec{r}_3 = -\frac{\vec{r}_1 \sqrt{q_2} + \vec{r}_2 \sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}.$$

1.20. Позначимо через ΔF додаткову силу розтягу кільця, яка зумовлена зарядом q_0 . З умови рівноваги зображеного на рис. 141 напівкільця та заряду q_0 отри-

маємо, що сумарна кулонівська сила взаємодії заряду q_0 та напівкільця дорівнює $F = 2\Delta F$.

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dF_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dF \cos \varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{q_0 \cos \varphi dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{q_0 \cos \varphi \lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{q_0 q \cos \varphi d\varphi}{8\pi^2 \epsilon_0 R^2} = \frac{q_0 q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2}, \end{aligned}$$

де λ — лінійна густина заряду кільця.

$$\text{Отже, } \Delta F = \frac{F}{2} = \frac{q_0 q}{8\pi^2 \epsilon_0 R^2} = 50,1 \text{ Н.}$$

1.21. $E = 36 \text{ ГВ/м.}$

1.22. $E = 50,4 \text{ кВ/м.}$

1.23. Очевидно, що серед варіантів розташування зарядів є три, за яких отримаємо різну напруженість у центрі шести-

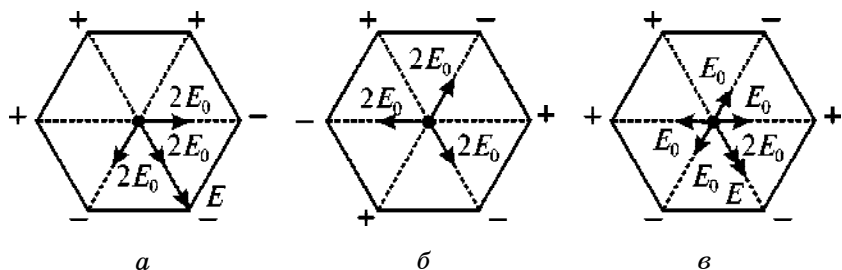


Рис. 142, а, б, в

кутника. Решта випадків буде подібна до трьох, зображених на рис. 142, а, б, в:

$$а) E = \frac{4kq}{a^2} = 60 \text{ кВ/м}; \quad б) E = 0; \quad в) E = \frac{kq}{a^2} = 15 \text{ кВ/м}.$$

$$1.24. E = 112 \text{ кВ/м}.$$

$$1.25. E = \frac{2\sqrt{2}kql}{(l^2 + x^2)^{3/2}}.$$

$$1.26. \vec{E} = 2,7\vec{i} - 3,6\vec{j} \text{ кВ/м}; \quad E = 4,5 \text{ кВ/м}.$$

$$1.27. E = \frac{2k\lambda}{a}.$$

$$1.28. E = \frac{2kq}{\pi R^2} = 100 \text{ В/м}.$$

$$1.29. E = \frac{kql}{(R^2 + l^2)^{3/2}}. \text{ При } l \gg R \text{ напруженість } E \approx \frac{kq}{l^2};$$

$$E_{\max} = \frac{2kq}{3\sqrt{3}R^2} \text{ при } l = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

$$1.30. E = \frac{kq}{x^2} - \frac{kqx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \text{ Спростимо цей вираз. З урахуванням } x \gg R \text{ розкладемо його в ряд Тейлора і, обмежившись двома першими членами, отримаємо}$$

ванням $x \gg R$ розкладемо його в ряд Тейлора і, обмежившись двома першими членами, отримаємо

$$E = \frac{kq}{x^2} \left(1 - \frac{x^3}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \right) = \frac{kq}{x^2} \left(1 - \left(\frac{R^2}{x^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \approx$$

$$\approx \frac{kq}{x^2} \left(1 - \left(1 - \frac{3R^2}{2x^2} \right) \right) = \frac{3kqR^2}{2x^4}.$$

1.31. На відстані x від центра кільця $E = \frac{kqx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$.

Обчислимо силу, яка діє на заряджену нитку в такому полі:

$$F = kq \int_0^{\infty} \frac{x\lambda dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = kq\lambda (-2) \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{kq\lambda}{R}.$$

1.32. а) $E = \frac{k\pi\lambda_0}{R}$;

б) $E = \frac{k\pi\lambda_0 R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$. При $x \gg R$: $E = \frac{k\pi\lambda_0 R^2}{x^3}$.

1.33. а) Розглянемо рис. 143, а: $dq = \frac{q}{2a} dl$, $\cos \varphi = \frac{E_x}{E} = \frac{r}{l}$;

$$E(r) = 2 \int_0^a \frac{k dq}{l^2} \cos \varphi = 2 \int_0^a \frac{k q dl}{2al^2} \cos \varphi = \frac{kq}{al} \int_0^{\arcsin \frac{a}{r}} \cos \varphi d\varphi = \frac{kq}{al} \frac{a}{r} =$$

$$= \frac{kq}{r\sqrt{r^2 + a^2}}.$$

б) З рис. 143, б: $E(r) = \frac{kq}{2a} \int_{-a}^a \frac{dl}{(l+r)^2} = \frac{kq}{r^2 - a^2}$.

В обидвох випадках при $r \gg a$ напруженість $E = \frac{kq}{r^2}$.

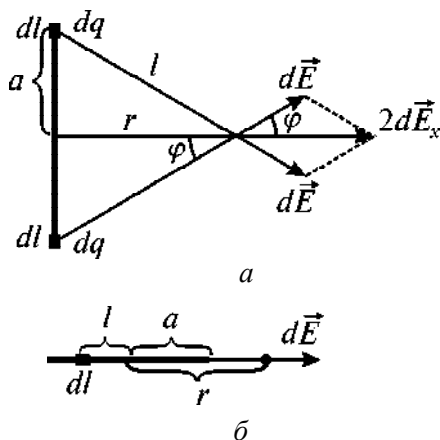


Рис. 143, а, б

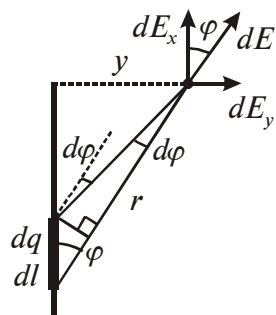


Рис. 144

1.34. Розглянемо рис. 144:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}, \quad \angle(\vec{E}, \vec{E}_x) = \operatorname{arctg}(E_y/E_x);$$

$$\sin \varphi = \frac{rd\varphi}{dl} = \frac{y}{r}, \quad \text{звідси} \quad dl = \frac{yd\varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad r = \frac{y}{\sin \varphi};$$

$$E_y = \int_0^{\pi/2} dE_y \sin \varphi = \int_0^{\pi/2} k \frac{\lambda dl}{r^2} \sin \varphi = \frac{k\lambda}{y} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{k\lambda}{y};$$

$$E_x = \int_0^{\pi/2} dE_x \cos \varphi = \int_0^{\pi/2} k \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \varphi = \frac{k\lambda}{y} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{k\lambda}{y}.$$

$$\text{Отже, } E = \frac{k\lambda\sqrt{2}}{y}, \quad \angle(\vec{E}, \vec{E}_x) = 45^\circ.$$

1.35. $|\vec{E}| = k \frac{2\sqrt{3}\lambda}{a} = 3,12 \text{ МВ/м}$. Вектор \vec{E} перпендикулярний до площини розташування ниток.

$$1.36. F_{\text{о.д}} = 2k \frac{\lambda^2}{r_1} = 15 \text{ Н/м}. \quad A_{\text{о.д}} = 2k\lambda^2 \ln \frac{r_2}{r_1} = -0,49 \text{ Дж/м}.$$

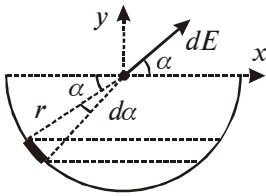


Рис. 145

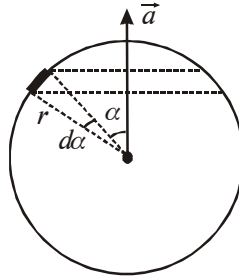


Рис. 146

1.37. а) $E = \frac{k\lambda\sqrt{2}}{R}$; б) $E = 0$.

1.38. Розглянемо рис. 145. Кожне кільце, яке видно під кутом α з центра сфери, створює в її центрі елементарну напруженість

$$dE = \frac{k\sigma \cdot r d\alpha \cdot 2\pi(r \cos \alpha)}{r^2} \sin \alpha = \pi k\sigma \sin 2\alpha d\alpha;$$

$$E = \pi k\sigma \int_0^{\pi/2} \sin 2\alpha d\alpha = \pi k\sigma.$$

1.39. Розглянемо рис. 146. Кожне кільце, яке видно під кутом α з центра сфери, створює в її центрі елементарну напруженість

$$dE = -\frac{k(ar \cos \alpha) \cdot r d\alpha \cdot 2\pi(r \sin \alpha)}{r^2} \cos \alpha = 2k\pi ar \cos^2 \alpha d(\cos \alpha),$$

$$E = \int_0^{\pi} 2k\pi ar \cos^2 \alpha d(\cos \alpha) = -\frac{4k\pi ar}{3}; \quad \vec{E} = -\frac{4k\pi r}{3} \vec{a}.$$

1.40. Розглянемо рис. 147. З огляду на сферичну симетрію системи перейдемо на сферичну систему координат (r, φ, θ) :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta;$$

$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$, $(\vec{a} \vec{r}) = ar \cos \theta$. Елемент dV створює в точці з координатою \vec{r}' поле напруженістю

$$\vec{E}(\vec{r}') = k \int_V \frac{\rho(\vec{r}) \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} dV.$$

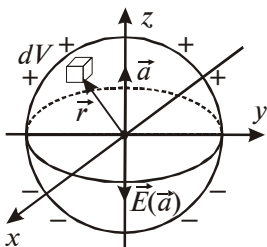


Рис. 147

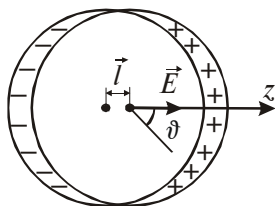


Рис. 148

У центрі кулі напруженість поля $\vec{E}(\vec{0}) = -k \int_V \frac{\rho(\vec{r}) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} dV$.

$$E_x(0) = -k \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{ar \cos \theta \cdot r \sin \theta \cos \varphi \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta}{r^3} =$$

$$= -ka \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^\pi \cos \theta \cdot \sin^2 \theta d\theta = \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0 \right) = 0;$$

$$E_y(0) = -ka \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^\pi \cos \theta \cdot \sin^2 \theta d\theta = \left(\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0 \right) = 0;$$

$$E_z(0) = -ka \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \frac{2ka\pi R^2}{3};$$

$$\vec{E}(0) = -\frac{2k\pi R^2}{3} \vec{a}.$$

2. Теорема Остроградського–Гаусса.

Електричний потенціал. Енергія взаємодії електричних зарядів

2.1. 86,6 В·м.

2.2. а) $F = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \approx 60 \text{ мкН}$; б) $F = \frac{\sigma q}{2\epsilon\epsilon_0} \approx 377 \text{ мкН}$;

в) $F = \frac{\sigma R^2 q}{\epsilon\epsilon_0 (r + R)^2} \approx 188 \text{ мкН}$.

2.3. $7,8 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$.

2.4. $F_{\text{о.д}} = \frac{\sigma \lambda}{2\varepsilon_0} = 3,4 \text{ Н/м}$.

2.5. $F_{\text{о.д}} = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 r_1} = 8,1 \text{ Н/м}$;

$$A_{\text{о.д}} = -\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = 0,112 \text{ Дж/м}.$$

2.6. $F_{\text{о.п}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = 5,1 \text{ кН/м}^2$. 2.7. $E_{\text{макс}} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 l} = 40 \text{ кВ/м}$.

2.8. Напруженість поля всередині рівномірно зарядженої кулі

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}, \text{ де } \rho \text{ — об'ємна густина заряду. У місці перетину}$$

двох заряджених куль, центри яких зсунуті на \vec{l} (рис. 148),

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho \vec{l}}{3\varepsilon_0}.$$

При $l \rightarrow 0$ отримаємо поверхневий заряд на сфері. Товщина зарядженої ділянки — $l \cos \vartheta$. Тоді $\sigma = \rho l \cos \vartheta = \sigma_0 \cos \vartheta$, де $\sigma_0 = \rho l$.

Отже, $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \vec{k}$, де \vec{k} — орт осі z .

2.9. Розіб'ємо циліндр на тонкі смужки товщиною dl нескінченної довжини (рис. 149), які створюють на осі циліндра поле

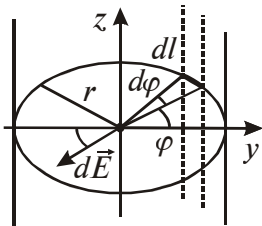


Рис. 149

$$dE = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma dl}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Тоді сумарне поле всіх смужок

$$E = 2 \int_0^\pi \frac{\sigma_0 \cos \varphi \cdot r d\varphi}{2\pi\varepsilon_0 r} \cos \varphi = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

і напрямлене протилежно до осі z .

$$\begin{aligned}
 2.10. \quad \Phi &= \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_S a \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2} \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = \\
 &= \oint_S a \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{a}{R} \oint_S dS = 4\pi aR.
 \end{aligned}$$

$$2.11. \text{ а) } E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right) \text{ при } r \leq R, \quad E = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r^2} \text{ при } r \geq R;$$

$$\text{ б) } E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\epsilon_0} \text{ при } r_{\max} = \frac{2R}{3}.$$

2.12. З теореми Остроградського–Гаусса для поля за межами кулі потік

$$\Phi = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \int_R^r \alpha 4\pi r^2 dr = \frac{q}{\epsilon_0} + \frac{2\pi\alpha}{\epsilon_0} (r^2 - R^2).$$

$$\text{Звідси напруженість } E(r) = \frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\epsilon_0} + \frac{q - 2\pi\alpha R^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

E не залежить від r при $q = 2\pi\alpha R^2$.

У цьому разі $E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0}$.

$$\begin{aligned}
 2.13. \quad \Phi &= \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^r \exp(-\alpha r^3) \cdot 4\pi r^2 dr = \\
 &= \frac{4\pi\rho_0}{3\epsilon_0\alpha} [1 - \exp(-\alpha r^3)].
 \end{aligned}$$

$$\text{Звідси } E(r) = \frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0\alpha r^2} [1 - \exp(-\alpha r^3)].$$

При $\alpha r^3 \ll 1$ $E \approx \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$, а при $\alpha r^3 \gg 1$ $E \approx \frac{\rho_0}{3\epsilon_0\alpha r^2}$.

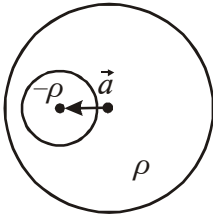


Рис. 150

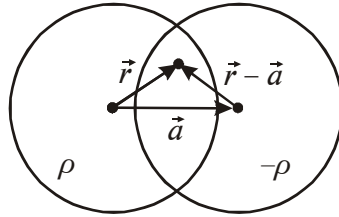


Рис. 151

2.14. Розглянемо заряджену кулю без порожнини (рис. 150).

За теоремою Остроградського-Гаусса $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$.

Напрямок поля збігається з радіусом-вектором: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$.

Порожнину можемо змодельовати наявністю ще однієї кулі з протилежним за знаком зарядом. Тоді сумарне поле буде суперпозицією полів двох куль:

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0} - \frac{(-\rho) \cdot \vec{0}}{3\epsilon_0} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}.$$

2.15. З рис. 151: $\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} + \frac{(-\rho)(\vec{r} - \vec{a})}{3\epsilon_0} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}$.

2.16. $E = 0$, $\varphi = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$ при $d < R$; $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{d^2}$, $\varphi = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{d}$ при $d \geq R$.

Графіки зображені на рис. 152, а, б.

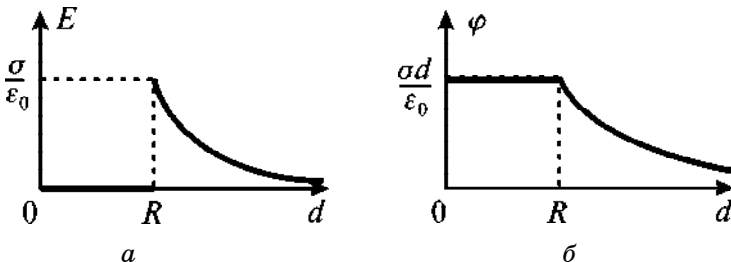


Рис. 152, а, б

$$2.17. r = \frac{2kq_0q}{mv^2} = 6 \text{ см.} \quad 2.18. r = \frac{2ke^2}{mv_0^2} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

$$2.19. r = \sqrt{\frac{kZ_1Z_2e^2}{F}} = 6,01 \cdot 10^{-15} \text{ м;}$$

$$v = \sqrt{\frac{2kZ_1Z_2e^2}{rm_\alpha}} = 1,59 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

$$2.20. A = kq_1q_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = 1,2 \text{ мкДж.}$$

$$2.21. q = m\sqrt{\frac{nG}{k}} = 17 \text{ нКл, де } G \text{ — гравітаційна стала.}$$

$$2.22. \text{ а) } \varphi = \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r} = 11,3 \text{ В; б) } \varphi = \varphi_0 \frac{R}{r} = 30 \text{ В.}$$

$$2.23. A = \frac{qR^2\sigma}{\varepsilon_0(R+r)} = 113 \text{ мкДж.}$$

$$2.24. v_1 = \sqrt{v_2^2 - \frac{2q(\varphi_1 - \varphi_2)}{m}} = 16,7 \text{ см/с.}$$

$$2.25. W = \frac{m_\alpha v^2}{2} = 8,5 \cdot 10^{-13} \text{ Дж; } \Delta\varphi = \frac{W}{q} = 2,66 \text{ МВ.}$$

$$2.26. \lambda = \frac{m_\alpha(v_2^2 - v_1^2)}{4kq \ln \frac{r_1}{r_2}} = 3,7 \text{ мкКл/м.}$$

$$2.27. \sigma = \frac{2A\varepsilon_0}{q\Delta r} = 6,7 \text{ мкКл/м}^2. \quad 2.28. \varphi = \frac{n}{\sqrt[3]{n}} \frac{kq}{\varepsilon R} = 360 \text{ В.}$$

$$2.29. E(r) = \frac{m_e \omega^2 r}{e}; \Delta\varphi = \frac{m_e \omega^2 R^2}{2e}.$$

$$2.30. A = kq(q_1 - q_2) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

$$2.31. \Delta\varphi = 2kq \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + l^2}} \right) = 12 \text{ кВ.}$$

$$2.32. \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\lambda \ln n \approx 5 \text{ кВ.}$$

$$2.33. A = kq'q \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + l^2}} \right) = 0,1 \text{ Дж.}$$

$$2.34. \varphi = \int_S k \frac{\sigma dS}{R} = k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma \cdot R \sin\theta d\theta \cdot R d\varphi}{R} = 2k\pi\sigma R.$$

2.35. Внесок тонкого кільця радіусом r і товщиною dr у сумарний потенціал (рис. 153):

$$d\varphi = k \frac{\sigma dS}{l} = \frac{k\sigma \cdot 2\pi r dr}{\sqrt{L^2 + R^2}};$$

$$\varphi = 2\pi k\sigma \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{L^2 + R^2}} = 2\pi k\sigma \left(\sqrt{L^2 + R^2} - L \right);$$

$$E(L) = \left| -\text{grad}(\varphi(L)) \right| = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right);$$

$$E(L \rightarrow 0) = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right) \rightarrow 2\pi k\sigma;$$

$$\begin{aligned} E(L \gg R) &= 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right) \approx 2\pi k\sigma \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{L^2} \right) \right) = \\ &= 2\pi k\sigma \left(\frac{R^2}{2L^2 + R^2} \right) \rightarrow k \frac{\sigma\pi R^2}{L^2}. \end{aligned}$$

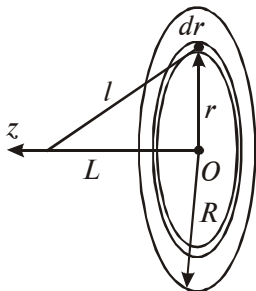


Рис. 153

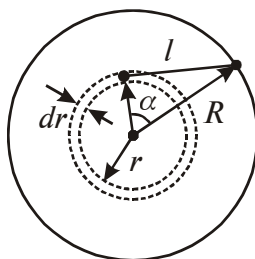


Рис. 154

2.36. Розіб'ємо круг на тонкі кільця товщиною dr , радіусом r (рис. 154). Знайдемо потенціал поля кільця на краю круга:

$$\begin{aligned}
 d\varphi &= 2 \int_0^\pi k \frac{\sigma r d\alpha dr}{l} = 2 \int_0^\pi k \frac{\sigma r d\alpha dr}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha}}; \\
 \varphi &= 2 \int_0^R \int_0^\pi k \frac{\sigma r d\alpha dr}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha}} = 2k\sigma \int_0^R \int_0^\pi \frac{r dr d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha}} = \\
 &= 2k\sigma \int_0^\pi \int_0^R \frac{(r - R \cos \alpha + R \cos \alpha) dr d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha}} = \\
 &= 2k\sigma \int_0^\pi \left(\int_0^R \frac{d(R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha)}{2\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha}} + \int_0^R \frac{R \cos \alpha d(r - R \cos \alpha)}{\sqrt{(r - R \cos \alpha)^2 + R^2(1 - \cos^2 \alpha)}} \right) d\alpha = \\
 &= 2k\sigma \int_0^\pi \left(\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha} \Big|_0^R + \right. \\
 &\quad \left. + R \cos \alpha \ln \left| (r - R \cos \alpha) + \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha} \right| \Big|_0^R \right) d\alpha = \\
 &= 2k\sigma R \int_0^\pi \left(\sqrt{2 - 2 \cos \alpha} - 1 + \cos \alpha \left(\ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \alpha}} \right) \right) \right) d\alpha = \\
 &= 2k\sigma R \left(\int_0^\pi \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} d\alpha - \pi + \int_0^\pi \cos \alpha \left(\ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \alpha}} \right) \right) d\alpha \right);
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} d\alpha = \int_0^{\pi} 2 \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha = 4 \left(-\cos \frac{\alpha}{2} \right)_0^{\pi} = 4;$$

$$\int_0^{\pi} \cos \alpha \left(\ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \alpha}} \right) \right) d\alpha =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha d\alpha = dv; v = \sin \alpha; du = \frac{-\cos \frac{\alpha}{2} d\frac{\alpha}{2}}{\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}; \ln \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos \alpha}} \right) = u; \\ vdu = \frac{-2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} d\frac{\alpha}{2}}{\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{-2 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) d\frac{\alpha}{2}}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + 1 \right)} = -2 \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right) d\frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \sin \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha/2} \right) \Big|_0^{\pi} = 0 - \ln \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha/2} \right)^{\sin \alpha} = -\ln 1 = 0.$$

Отже, $\varphi = 2k\sigma R(4 - \pi + 0 + \pi - 2) = 4k\sigma R = 1,8 \text{ кВ}$.

2.37. а) $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$;

$$\varphi = \int_0^q \frac{k dq}{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R k \frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{r} = \frac{3kq}{4\pi R^3} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{3kq}{2R}.$$

б) Знайдемо спочатку напруженість поля у довільній точці кулі. За теоремою Остроградського–Гаусса

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_V \frac{\rho dV}{\epsilon_0}. \text{ Тоді } 4\pi r^2 E = \frac{3q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \oint_V dV = \frac{qr^3}{\epsilon_0 R^3}.$$

$$\text{Звідси } E = \frac{qr}{4\pi \epsilon_0 R^3}.$$

$$\varphi(r) = -\int E dr = -\int \frac{qr dr}{4\pi \epsilon_0 R^3} = -\frac{qr^2}{8\pi \epsilon_0 R^3} + C.$$

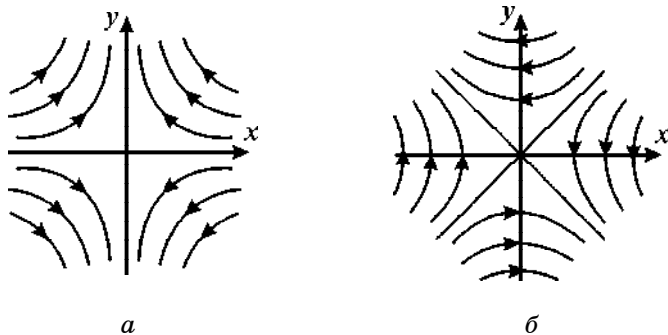


Рис. 155, а, б

Отже, $\varphi(0) = C = \frac{3kq}{2R} = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R}$; $\varphi(r) = \varphi(0) \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right)$.

2.38. $\vec{E} = -\vec{a}$.

2.39. а) $\vec{E} = -2a(x\vec{i} - y\vec{j})$; б) $\vec{E} = -a(y\vec{i} + x\vec{j})$.

Для $a > 0$ поля зображені на рис. 155, а та б, відповідно.

2.40. $E_a = |\vec{E}_M| \cos \angle(\vec{E}_M, \vec{a}) = |\vec{E}_M| \frac{(\vec{E}_M \vec{a})}{|\vec{E}_M| |\vec{a}|} = -\frac{\alpha(y_M - 6z_M)}{\sqrt{10}} \approx -6\alpha$.

2.41. $\vec{E} = I(x, y, z)\vec{i} + J(x, y, z)\vec{j} + K(x, y, z)\vec{k}$;

$$\varphi = - \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} I(x, y, z) dx + J(x, y, z) dy + K(x, y, z) dz =$$

$$= - \int_{\substack{(0,0,0) \\ y=0 \\ z=0}}^{(x,0,0)} (Idx + Jdy + Kdz) - \int_{\substack{(x,0,0) \\ dx=0 \\ z=0}}^{(x,y,0)} (Idx + Jdy + Kdz) -$$

$$- \int_{\substack{(x,y,0) \\ dx=0 \\ dy=0}}^{(x,y,z)} (Idx + Jdy + Kdz).$$

$$\text{Отже, } \varphi = - \int_{\substack{0 \\ y=0 \\ z=0}}^x I(x, y, z) dx - \int_{\substack{0 \\ x=x \\ z=0}}^y J(x, y, z) dy - \int_{\substack{0 \\ x=x \\ y=y}}^z K(x, y, z) dz.$$

$$\text{а) } \varphi_1 = - \int_{y=0}^x ay dx - \int_{x=x}^y ax dy = -axy + C;$$

$$\text{б) } \varphi_2 = - \int_{y=0}^x 2axy dx - \int_{x=x}^y a(x^2 - y^2) dy = -ax^2y + \frac{1}{3}ay^3 + C;$$

$$\text{в) } \varphi_3 = - \int_{\substack{0 \\ y=0 \\ z=0}}^x ay dx - \int_{\substack{0 \\ x=x \\ z=0}}^y (ax + bz) dy - \int_{\substack{0 \\ x=x \\ y=y}}^z by dz = -axy - byz + C.$$

$$\mathbf{2.42.} \quad \varphi(x, y, z) = ar^2 + b = a(x^2 + y^2 + z^2) + b;$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

$$\text{Отже, } -6a = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{і} \quad \rho = -6a\varepsilon_0.$$

3. Поле диполя. Провідники та діелектрики в електричному полі

$$\mathbf{3.1.} \quad \Delta\varphi = 2 \frac{kp}{r^2} = 180 \text{ В.}$$

$$\mathbf{3.2.} \quad A = W_2 - W_1 = 2qlE.$$

$$\mathbf{3.3.} \quad F = p_1 \left| \frac{\partial E}{\partial l} \right|, \quad E = \frac{2kp_2}{l^3}, \quad \text{звідси} \quad F = \frac{6kp_1 p_2}{l^4}.$$

Диполі притягуватимуться за умови $\vec{p}_1 \uparrow\uparrow \vec{p}_2$ і відштовхуватимуться, якщо $\vec{p}_1 \uparrow\downarrow \vec{p}_2$.

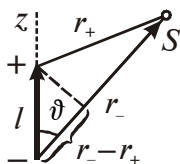


Рис. 156

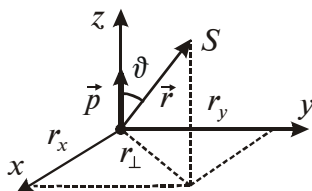


Рис. 157

3.4. Розглянемо рис. 156. Тут $l \ll r_-$ і r_+ , тому

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = kq \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = kq \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \approx k \frac{ql \cos \vartheta}{r^2} = k \frac{(\vec{p} \vec{r})}{r^3};$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta = kql \left(\frac{2 \cos \vartheta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{1 \sin \vartheta}{r} \frac{1}{r^2} \vec{e}_\vartheta \right).$$

$$\text{Отже, } |\vec{E}| = \sqrt{E_r^2 + E_\vartheta^2} = \frac{kql}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta} = \frac{kp}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta},$$

де E_r — радіальна складова \vec{E} ; E_ϑ — перпендикулярна до неї.

3.5. Розглянемо рис. 157: $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r}) = -k \left(\nabla, \frac{(\vec{p} \vec{r})}{r^3} \right);$

$$E_z = -k \left(\frac{p_z}{r^3} - \frac{3(\vec{p} \vec{r}) r_z}{r^5} \right) = -k \left(\frac{p}{r^3} - \frac{3pr^2 \cos \vartheta}{r^5} \right) = \frac{kp(3 \cos \vartheta - 1)}{r^3};$$

$$E_x = -k \left(\frac{p_x}{r^3} - \frac{3(\vec{p} \vec{r}) r_x}{r^5} \right) = k \frac{3(\vec{p} \vec{r}) r_x}{r^5} = \frac{3kpr_x \cos \vartheta}{r^4};$$

$$E_y = \frac{3kpr_y \cos \vartheta}{r^4};$$

$$E_\perp = \frac{3kp \cos \vartheta}{r^4} \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \frac{3kp \cos \vartheta}{r^4} r_\perp = \frac{3kp \cos \vartheta \sin \vartheta}{r^3}.$$

3.6. Потенціал поля $\varphi_{\vec{E}_0} = -\int (\vec{E}_0 d\vec{r}) = -(\vec{E}_0 \vec{r}) + C$.

Потенціал диполя $\varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{k(\vec{p} \vec{r})}{r^3}$.

Сума потенціалів $\varphi(\vec{r}) = -(\vec{E}_0 \vec{r}) + \frac{k(\vec{p} \vec{r})}{r^3} + C = \text{const}$;

$$-(\vec{E}_0 \vec{r}) + \frac{k(\vec{p} \vec{r})}{r^3} = -E_0 R \cos \alpha + \frac{kpR \cos \alpha}{R^3} = 0.$$

Отже, радіус екіпотенціальної поверхні $R = \sqrt[3]{\frac{kp}{E_0}}$.

3.7. Елементарні ділянки ниток утворюють елементарні диполі. Отже, зведемо задачу до підсумовування потенціалів, створених окремими елементарними диполями (рис. 158):

$$\begin{aligned} \varphi &= 2k \int_0^\infty \frac{\lambda l dx}{r^2 + x^2} \cos \alpha \cos \vartheta = 2k\lambda l \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d(r^2 + x^2)}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \cos \vartheta = \\ &= -\frac{2k\lambda l \cos \vartheta}{\sqrt{r^2 + x^2}} \Big|_0^\infty = \frac{2k\lambda l \cos \vartheta}{r}. \end{aligned}$$

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2k\lambda l \cos \vartheta}{r^2}.$$

3.8. Розглянемо елементарні диполі з електричними моментами $d\vec{p} = \vec{a}dq$ (рис. 159), сума яких утворюватиме шуканий дипольний електричний момент системи:

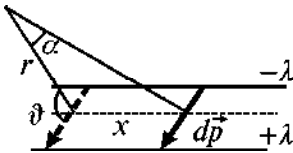


Рис. 158

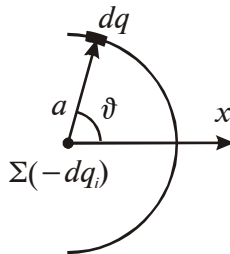


Рис. 159

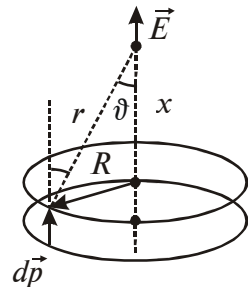


Рис. 160

$$|\vec{p}| = \int_0^p dp_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos \vartheta dq = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos \vartheta \frac{qad\vartheta}{\pi a} = \frac{2aq}{\pi};$$

$$\vec{p} \uparrow \uparrow x; \quad E = \frac{4kaq}{\pi r^3}.$$

3.9. Розглянемо рис. 160:

$$\varphi(r) = k \int_0^p \frac{(d\vec{p} \vec{r})}{r^3} = k \int_0^{2\pi} \frac{qR d\varphi}{2\pi R} l \frac{r}{r^3} \cos \vartheta.$$

$$\text{Тоді } \varphi(x) = \frac{kql}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x d\varphi}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \varphi = \frac{kqlx}{(R^2 + x^2)^{3/2}};$$

$$E(x) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = kql \frac{R^2 - 2x^2}{(R^2 + x^2)^{5/2}}.$$

3.10. Аналогічно до попередньої задачі:

$$\varphi(x) = k \int_R^{\infty} \frac{l\sigma 2\pi r dr}{r^2 + x^2} \cos \vartheta = 2\pi k\sigma l \int_R^{\infty} \frac{xr dr}{(\sqrt{r^2 + x^2})^3} =$$

$$= -\frac{2\pi k\sigma l x}{\sqrt{r^2 + x^2}} \Big|_R^{\infty} = \frac{2\pi k\sigma l x}{\sqrt{R^2 + x^2}};$$

$$E(x) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2\pi k\sigma l R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Тут r — відстань від елементарного диполя $d\vec{p}$ до осі x .

3.11. $A = pE_1$, від E_2 не залежить, бо потенціальна енергія в положенні 2 дорівнює нулю.

3.12. $\vec{F} = (\vec{p} \nabla \vec{E})$. Розв'яжемо задачу в циліндричній системі координат:

$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{e}_r}{2\pi\epsilon_0 r}; \quad \nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\text{а) } \vec{p} = p \vec{e}_z, \text{ звідси } \vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \mathbf{0};$$

$$\text{б) } \vec{p} = p \vec{e}_r, \text{ звідси } \vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} = -\frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = -\frac{\lambda \vec{p}}{2\pi\epsilon_0 r^2};$$

$$\text{в) } \vec{p} = p \vec{e}_\varphi, \text{ звідси } \vec{F} = p \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \varphi} = \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_\varphi = \frac{\lambda \vec{p}}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

3.13. $F = p_1 \left| \frac{\partial E_2}{\partial l} \right|$, $E_2 = \frac{kp_2}{l^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}$. Оскільки електричні моменти орієнтовані вздовж однієї прямої, то $\vartheta = 0$ і $p_1 = p_2 = p$.

$$\text{Отже, } F = \frac{6kp^2}{l^4} = 2,1 \cdot 10^{-16} \text{ Н.}$$

3.14. Площина симетрії між двома точковими зарядами $+q$ та $-q$ є площиною нульового потенціалу. Тому, якщо цю площину сумістити з нескінченною провідною площиною, то картина поля на провідній площині не зміниться. Отже, поле, створене зарядом $+q$ і зарядами, що індукуються на площині, буде тотожне полю двох точкових зарядів $+q$ та $-q$ (якщо його розглядати, звісно, по один бік від площини симетрії). Тому сили, які діють на заряд $+q$, в обох випадках мають бути однаковими.

$$\text{3.15. } E = \frac{kq}{5h^2} \sqrt{26 - 2\sqrt{5}}.$$

$$\text{3.16. } q = 2l \sqrt{\frac{\kappa x}{k}}.$$

$$\text{3.17. } A = \frac{kq^2}{4l} = 0,15 \text{ Дж.}$$

$$\text{3.18. } F = \frac{kq^2}{l^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{3.19. } F = \frac{kq^2}{l^2} (2\sqrt{2} - 1) = 8 \text{ Н.}$$

$$\text{3.20. } F = \frac{kq^2}{l^2} \frac{2\sqrt{2} - 1}{8} = 3,3 \text{ Н.}$$

$$\text{3.21. } F = \frac{3kp^2}{8l^4}.$$

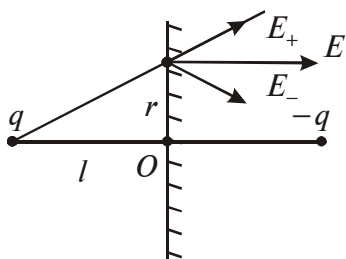


Рис. 161

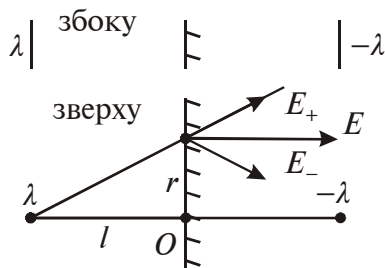


Рис. 162

3.22. Розглянемо рис. 161. Поле поблизу поверхні площини буде суперпозицією поля заряду q та віртуального заряду $-q$, який розташований дзеркально відносно площини. Отже, поле, створене площиною, еквівалентне полю віртуального заряду $-q$. Нормальну складову цього поля поблизу площини можна описати за теоремою Остроградського-Гаусса:

$$E(r) = \frac{kq}{(l^2 + r^2)} \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} \quad \text{та} \quad E(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

$$\text{Отже, } \sigma = \frac{2k\epsilon_0 ql}{(\sqrt{l^2 + r^2})^3}.$$

Ліворуч на рис. 161 $\sigma < 0$, а праворуч — $\sigma > 0$.

3.23. а) Аналогічно до міркувань попередньої задачі, поле площини, з яким взаємодіє нитка (рис. 162), $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(2l)}$.

$$\text{Тоді } F_{\text{о.д}} = |\lambda E| = \frac{k\lambda^2}{l}.$$

$$\text{б) } \frac{\sigma(r)}{2\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{l^2 + r^2}} \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)}.$$

$$\text{Звідси } \sigma(r) = \frac{\lambda l}{\pi(l^2 + r^2)}.$$

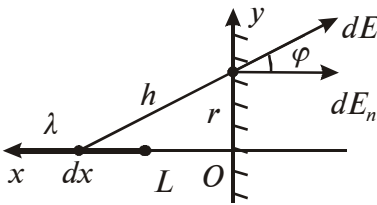


Рис. 163

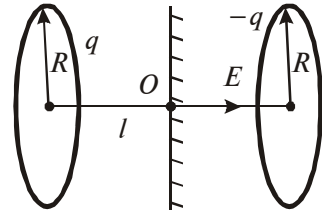


Рис. 164

3.24. а) Розглянемо рис. 163. Нормальна складова напруженості поблизу площини

$$E_n(O) = 2 \int_l^{\infty} \frac{k\lambda dx}{x^2} = \frac{2k\lambda}{l}. \text{ Отже, } \sigma(O) = \varepsilon_0 E = \frac{\lambda}{2\pi l}.$$

$$\text{б) } E_n(r) = 2 \int_l^{\infty} \frac{k\lambda dx}{(x^2 + r^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} = 2k\lambda \int_l^{\infty} \frac{x dx}{(\sqrt{x^2 + r^2})^3} = \frac{2k\lambda}{\sqrt{l^2 + r^2}};$$

$$\sigma(r) = \frac{2k\lambda\varepsilon_0}{\sqrt{l^2 + r^2}}.$$

3.25. Розглянемо рис. 164. Кільця у точці O створюють напруженість

$$E(O) = \frac{2kql}{(\sqrt{R^2 + l^2})^3}, \text{ отже, } \sigma(O) = \frac{2kql\varepsilon_0}{(\sqrt{R^2 + l^2})^3}.$$

3.26. Усередині незарядженої провідної сфери електричного заряду немає. Тому за теоремою Остроградського–Гаусса напруженість поля дорівнює нулю, тобто потенціал провідної сфери всередині сталий. Поле точкового заряду перерозподіляє заряди на поверхні сфери так, що всередині напруженість дорівнює нулю. Тоді $\varphi = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} + \frac{kq}{l}$, де q_i та r_i — точковий заряд на поверхні сфери і відстань до нього. Проте $r_i = r$,

$$\text{а } \sum_i q_i = 0. \text{ Отже, } \varphi = \frac{kq}{l} = 15 \text{ кВ.}$$

3.27. Заряд q індукує на внутрішній поверхні шару негативний заряд $-q$, а на зовнішній — позитивний $+q$ (рис. 165). Поле всередині провідного шару дорівнює нулю. Отже, його потік крізь шар дорівнює нулю, або $\Phi = \sum q/\varepsilon_0 = 0$. Сумарний заряд — це сума точкового заряду та індукованого. Тому потенціал у точці O

$$\varphi = kq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 1 \text{ кВ.}$$

3.28. Якщо між пластинами 2 і 3 (рис. 166) прикладено різницю потенціалів $\Delta\varphi$, то $\sigma_3 = -\sigma_2$, а, відповідно, індуковані заряди на пластинках 1 і 4: $\sigma_1 = -\sigma_4$. Поле пластин 2 і 3 сконцентровано між ними: $E_{\text{вн}} = \sigma_2/\varepsilon_0$. Поле пластин 1 і 4 протилежно напрямлене до $E_{\text{вн}}$: $E_{\text{зовн}} = \sigma_4/\varepsilon_0$. Тоді поле між різними пластинами:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{12} &= \vec{E}_{\text{зовн}}, & \vec{E}_{23} &= \vec{E}_{\text{вн}} - \vec{E}_{\text{зовн}}, & \vec{E}_{34} &= \vec{E}_{\text{зовн}}; \\ E_{12} &= \sigma_4/\varepsilon_0, & E_{23} &= E_{\text{вн}} - E_{\text{зовн}}, & E_{34} &= \sigma_4/\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Для внутрішніх пластин $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_3 = E_{23}d$.

Для зовнішніх пластин $\varphi_4 - \varphi_1 = E_{12}d + E_{34}d - E_{23}d = 0$, оскільки пластини з'єднано провідником. Отже:

$$\text{а) } E_{23} = \frac{\Delta\varphi}{d}, \quad E_{12} = E_{34} = \frac{E_{23}}{2};$$

$$\text{б) } -\sigma_1 = \sigma_4 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\Delta\varphi}{2d}, \quad \sigma_2 = -\sigma_3 = 3\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\Delta\varphi}{2d}.$$

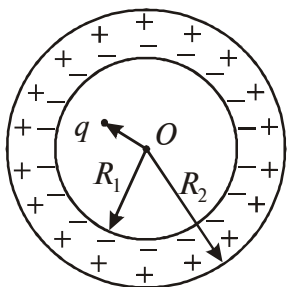


Рис. 165

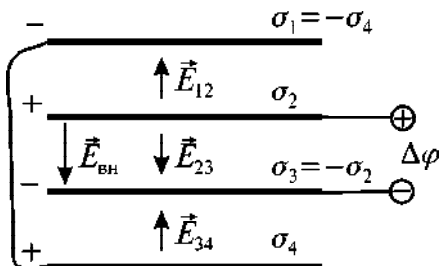


Рис. 166



Рис. 167

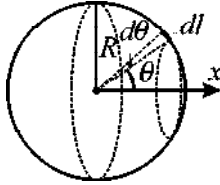


Рис. 168

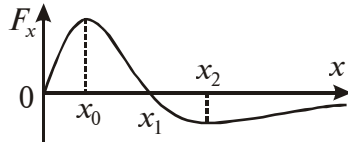


Рис. 169

3.29. Напруженість електричного поля, що його створює маленька ділянка безпосередньо біля поверхні провідника, $E_n = \sigma/2\epsilon_0$ (рис. 167). Поле по різні боки від цієї ділянки напрямлене по нормалі в протилежні боки. У цій невеликій ділянці простору також існує поле, створене рештою зарядів провідника. Причому сумарна напруженість усередині ділянки дорівнює нулю, оскільки провідник екранує електричне поле: $E_{\text{зовн}} - E_n = 0$. Звідси $E_{\text{зовн}} = \sigma/2\epsilon_0$. Це зовнішнє поле спричиняє електричну силу тиску (силу виштовхування поверхневого заряду)

$$F = qE_{\text{зовн}}, \quad \text{або} \quad \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = 0,12 \text{ кН/м}^2.$$

3.30. З урахуванням розв'язку попередньої задачі та згідно з рис. 168, де $dl = R d\theta$:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{\pi/2} \frac{dF}{dS} \cos \theta dS = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos \theta 2\pi R \sin \theta R d\theta = \\ &= \frac{2\pi R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{q^2}{16\pi^2 R^4} = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2} = 0,5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

3.31. Під дією поля диполя $E = \frac{2kp}{l^3}$ неполярна молекула набуває дипольного моменту $p_1 = \beta\epsilon_0 E = \frac{2k\beta\epsilon_0 p}{l^3}$. Сила їхньої взаємодії

$$F = p_1 \left| \frac{\partial E}{\partial l} \right| = \frac{2k\beta\epsilon_0 p}{l^3} \cdot \frac{6kp}{l^4} = \frac{12k^2\beta\epsilon_0 p^2}{l^7}.$$

3.32. Поле на осі кільця на відстані x від його центра

$$E(x) = \frac{kqx}{\left(\sqrt{R^2 + x^2}\right)^3}.$$

Індукований дипольний момент молекули

$$p = \beta \varepsilon_0 E = \frac{\beta \varepsilon_0 k q x}{\left(\sqrt{R^2 + x^2}\right)^3}.$$

Сила взаємодії

$$F = p \left| \frac{\partial E}{\partial x} \right| = \frac{\beta \varepsilon_0 k q x}{\left(\sqrt{R^2 + x^2}\right)^3} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{kq}{\left(\sqrt{R^2 + x^2}\right)^3} \right| = \frac{\beta \varepsilon_0 k^2 q^2 x (R^2 - 2x^2)}{(R^2 + x^2)^4}.$$

а) Сила взаємодії дорівнює нулю при $x_0 = 0$, $x = x_1 = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $x = \infty$.

б) Максимальні значення сили взаємодії при $x_0 = 0,29R$ (відштовхування), $x_2 = 1,1R$ (притягання). Схематичний графік зображено на рис. 169.

3.33. У середині кулі $\vec{D}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$. Також $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$.

Звідси $\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r}$, а $q' = -\oint (\vec{P} d\vec{S}) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q}{4\pi r^2} \int dS = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q$.

3.34. $D_{\text{діел}} = \varepsilon \varepsilon_0 E_{\text{діел}} = D_{\text{пров}} = \sigma$, або $E_{\text{діел}} = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}$;

$$P_n = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E_{\text{діел}} = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \sigma; \quad \sigma' = -P_n = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma.$$

Це і є поверхнева густина зв'язаних зарядів.

3.35. З задачі 3.33:

$$q'_{\text{вн}} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q = -2 \text{ мкКл}.$$

З нейтральності діелектрика загалом:

$$q'_{\text{зовн}} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q = 2 \text{ мкКл}.$$

3.36. а) Нехай σ_0 — поверхнева густина заряду на внутрішній поверхні діелектрика. З теореми Остроградського–Гаусса отримаємо, що для $r < a$ $E = 0$.

$$\text{При } a < r < b: \oint_s E dS = \frac{4\pi a^2 \sigma_0}{\epsilon \epsilon_0}. \quad \text{Звідси } E = \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon \epsilon_0 r^2}.$$

$$\text{Аналогічно, для } r > b: E = \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon_0 r^2}.$$

Відповідно, потенціал з урахуванням того, що $\varphi(\infty) = 0$,

$$\varphi = \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon_0 r}, \quad \text{при } r > b.$$

$$\text{При } a < r < b: \varphi = \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon \epsilon_0 r} + \text{const}, \quad \text{де з умови неперервності маємо}$$

$$\text{const} = \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon_0 b} - \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon \epsilon_0 b}, \quad \text{і, відповідно, } \varphi = \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon_0 b}.$$

Для $r < a$ $\varphi = \text{const}$. А з умови неперервності

$$\varphi = \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon_0 b}.$$

Схематичні графіки зображено на рис. 170, а.

б) Для $r < a$: $E = 0$.

$$\text{При } a < r < b: \oint_s E dS = \frac{4\pi \rho_0}{3} (r^3 - a^3), \quad \text{звідси } E = \frac{\rho_0}{3\epsilon \epsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right).$$

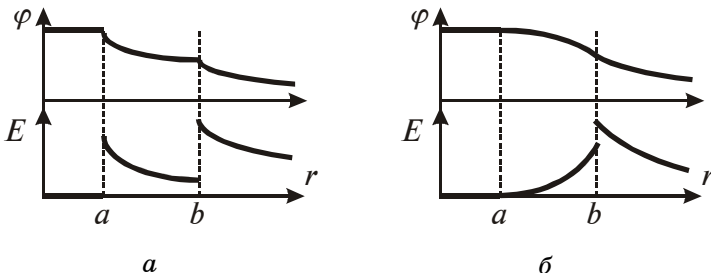


Рис. 170, а, б

Для $r > b$, аналогічно, $E = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$.

Потенціал при $r > b$: $\varphi = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r}$.

При $a < r < b$: $\varphi = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r} \right) + \text{const}$, де з умови неперерв-

ності маємо $\text{const} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon(b^3 - a^3)}{b} + \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{b} \right) \right\}$, а, відповідно,

$$\varphi = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon(b^3 - a^3)}{b} + \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{b} \right) \right\} - \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r} \right).$$

Для $r < a$: $\varphi = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon(b^3 - a^3)}{b} + \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{b} \right) \right\} - \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$.

Схематичні графіки зображено на рис. 170, б.

3.37. Нехай напруженість електричного поля у діелектрику \vec{E} утворює кут α з нормаллю. Тоді граничні умови для нормальної та тангенціальної складових

$$E_0 \cos \alpha_0 = \varepsilon E \cos \alpha, \quad E_0 \sin \alpha_0 = E \sin \alpha.$$

Отже, $E = E_0 \sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \frac{\cos^2 \alpha_0}{\varepsilon^2}} = 5,2 \text{ В/м}$; $\alpha = \arctg(\varepsilon \tg \alpha_0) = 74^\circ$.

Індукція $D_n = \varepsilon_0 \varepsilon E_n = \varepsilon_0 \varepsilon E \cos \alpha = \varepsilon_0 E_0 \cos \alpha$, отже,

$$\sigma' = P_n = D_n - \varepsilon_0 E_n = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon_0 E_0 \cos \alpha_0 = 64 \text{ пКл/м}^2.$$

3.38. З попередньої задачі $\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \varepsilon_0 E_0 \cos \vartheta$. Отже,

$$\text{а) } \oint (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} q = \pi R^2 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cos \vartheta;$$

б) $\oint (\vec{D} d\vec{l}) = (D_{1\tau} - D_{2\tau})l = (\varepsilon_0 E_0 \sin \vartheta - \varepsilon \varepsilon_0 E_0 \sin \vartheta)l =$
 $= -(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_0 l \sin \vartheta$, де $D_{1\tau}$ та $D_{2\tau}$ — тангенціальні складові
 вектора \vec{D} у вакуумі та діелектрику.

3.39. а) Напруженість електричного поля знайдемо з теореми Остроградського–Гаусса:

$$\Phi = \oint (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad ES = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0} V.$$

$$\text{При } l \leq d: E \cdot 2S = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0} S \cdot 2l, \text{ або } E(l) = \frac{ql}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

$$\text{При } l > d: E \cdot 2S = \frac{q}{\varepsilon_0} S \cdot 2d, \text{ або } E(l) = \frac{qd}{\varepsilon_0}.$$

Тоді потенціал

$$\text{при } l \leq d: \varphi(l) = -\int_0^l \frac{ql}{\varepsilon \varepsilon_0} dl = -\frac{\rho l^2}{2\varepsilon \varepsilon_0};$$

$$\text{при } l > d: \varphi(l) = -\int_0^d \frac{\rho l}{\varepsilon \varepsilon_0} dl - \int_d^l \frac{\rho d}{\varepsilon_0} dl = -\frac{\rho d^2}{\varepsilon \varepsilon_0} - \frac{\rho ld}{\varepsilon_0} + \frac{\rho d^2}{\varepsilon_0}.$$

$$\text{б) } \sigma' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E(d) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho d, \quad \rho' = -\frac{\sigma' 2S}{V} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho.$$

3.40. а) При $r \leq R$ з теореми Остроградського–Гаусса напруженість електричного поля

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon \varepsilon_0}, \quad \text{а при } r > R: E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

При $r > R$ потенціал $\varphi(r) = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + \text{const}$, де з умови $\varphi(\infty) = 0$ маємо $\text{const} = 0$.

При $r \leq R$ потенціал $\varphi(r) = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon \varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon \varepsilon_0} + \text{const}$, де з

умови неперервності $\text{const} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\varepsilon \varepsilon_0}$.

б) У сферичній системі координат

$$\rho' = \operatorname{div} \vec{P} = \operatorname{div} (\kappa \epsilon_0 \vec{E}) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\rho r^3}{3\epsilon} (\epsilon - 1) \right\};$$

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n} = (\kappa_{\text{вакууму}} = 0) = P_{1n} = E(R) \kappa \epsilon_0 = \frac{\rho r (\epsilon - 1)}{3\epsilon}.$$

3.41. Через перервність поляризації на межі діелектричного диска з'являється зв'язаний поверхневий заряд σ' , який є джерелом електричного поля всередині та зовні диска. Поле

в центрі диска $\vec{E} = -\int k \frac{\sigma' dS}{r^3} \vec{r}$, де \vec{r} — відстань до центра

від елемента dS ; $\sigma' = P_n = P \cos \theta$, тут θ — кут між \vec{r} та \vec{P} , причому $P_n = 0$ для кругових поверхонь диска. З міркувань

симетрії $\vec{E} = -\int k \frac{P \cos \theta \cdot R d\theta \cdot d \cdot \cos \theta}{R^3} = \frac{-k\pi P d}{R}$.

Отже, $\vec{E} = \frac{-k\pi d}{R} \vec{P}$.

3.42. Без сторонніх електричних зарядів $\operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial D}{\partial x} = 0$, або

$D = \text{const}$. Оскільки ж $D(\infty) = 0$, то $D = 0$ всюди. Отже,

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}_0}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right), \quad E(x) = -\frac{P_0}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right).$$

Тоді потенціал $\varphi(x) = -\int E(x) dx = \frac{P_0}{\epsilon_0} \left(x - \frac{x^3}{3d^2} \right) + \text{const}$, а

$$\Delta\varphi = \varphi(d) - \varphi(-d) = \frac{P_0}{\epsilon_0} \left(2d - \frac{2d}{3} \right) = \frac{4P_0 d}{3\epsilon_0}.$$

3.43. а) Скористаємося неперервністю нормальної складової вектора \vec{D} на межі діелектрика (рис. 171):

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad \text{або} \quad -k \frac{q}{r^2} \cos \alpha + \frac{\sigma'}{2\epsilon_0} = \epsilon \left(-k \frac{q}{r^2} \cos \alpha - \frac{\sigma'}{2\epsilon_0} \right),$$

де $\cos \alpha = \frac{l}{r}$, отже, $\sigma' = -k \frac{2ql\epsilon_0}{r^3} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}$. При $l \rightarrow 0$ $\sigma' \rightarrow 0$.

б) Розглянемо кільце з центром у точці O . Його заряд

$$dq' = \sigma' \cdot 2\pi R dR, \quad r^2 = l^2 + R^2, \quad \text{або} \quad r dr = R dR;$$

$$q' = \int_0^{q'} dq' = -ql \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \int_l^\infty \frac{dr}{r^2} = -q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}.$$

$$\mathbf{3.44.} \quad \operatorname{div} \vec{P} = -\rho', \quad \rho' = -\nabla(\alpha \vec{r}) = -\alpha \nabla \vec{r},$$

$$\nabla \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2 \quad (\text{рис. 172}). \quad \text{Отже,} \quad \rho' = -2\alpha.$$

3.45. а) Для однорідно зарядженої кулі електричне поле всередині на відстані r від її центра $\vec{E}_r = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\epsilon_0}$. Тоді в нашому

$$\text{випадку} \quad \vec{E} = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0(\vec{r} - \delta \vec{r})}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_0 \delta \vec{r}}{3\epsilon_0} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}, \quad \text{де} \quad \rho_0 \delta \vec{r} = -\vec{P} \quad -$$

поляризація кулі, $\delta \vec{r}$ — значення зсуву зарядів.

б) Потенціал за межами куль

$$\varphi = k \frac{q}{|\vec{r}|} - k \frac{q}{|\vec{r} - \delta \vec{r}|} = kq \frac{|\delta \vec{r}|}{|\vec{r}| |\vec{r} - \delta \vec{r}|} = kq \frac{\delta r}{r^2} = k \frac{(\vec{P}_0 \vec{r})}{r^3},$$

де $q = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$, R — радіус кулі.

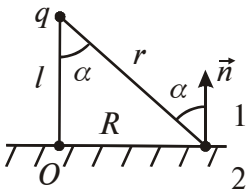


Рис. 171

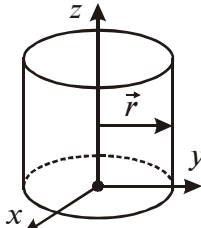


Рис. 172

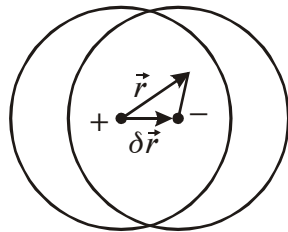


Рис. 173

3.46. Всередині однорідно зарядженого циліндра напруженість електричного поля $\vec{E}_r(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \vec{r}$. Тоді для нашої задачі, як видно з рис. 173,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_r(\vec{r}) - \vec{E}_r(\vec{r} - \delta\vec{r}) = \frac{\rho\delta\vec{r}}{2\varepsilon_0} = -\frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0}.$$

4. Ємність. Конденсатори

4.1. $q = 0,2$ мкКл.

$$\mathbf{4.2.} \quad U_2 = \frac{\varepsilon_{\text{пов}} U_1}{\varepsilon_{\text{сб}}} = 111 \text{ В}; \quad C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\text{пов}} S}{d} = 17,7 \text{ пФ};$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\text{сб}} S}{d} = 46 \text{ пФ}; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{C_1 U_1}{S} = 531 \text{ нКл/м}^2.$$

$$\mathbf{4.3.} \quad U_2 = \frac{\varepsilon d U_1}{\varepsilon_{\text{пов}} d_0 + \varepsilon(d - d_0)} = 1,8 \text{ кВ}.$$

$$\mathbf{4.4.} \quad C_{\text{о.д}} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(R/r)} = 214 \text{ нФ/м}. \quad \mathbf{4.5.} \quad E = \frac{U}{x \ln(R/r)} = 136 \text{ кВ/м}.$$

$$\mathbf{4.6.} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{\ln[(r+d_1)/r]}{\ln[R/(r+d_1)]} = 1,35. \quad \mathbf{4.7.} \quad C = \frac{2\pi\varepsilon_0 d D}{D-d} = 0,96 \text{ пФ}.$$

$$\mathbf{4.8.} \quad E = \frac{URr}{(R-r)x^2} = 29,6 \text{ кВ/м}. \quad \mathbf{4.9.} \quad W = 2\pi\varepsilon_0 R\varphi^2 = 0,05 \text{ Дж}.$$

$$\mathbf{4.10.} \quad \text{а) } W_1 = 2\pi\varepsilon_0 R\varphi_1^2 = 50 \text{ мкДж};$$

$$\text{б) } W_1' = W_2' = \frac{\pi\varepsilon_0 R\varphi_1^2}{2} = 12,5 \text{ мкДж}, \quad A = W_1 - (W_1' + W_2') = 25 \text{ мкДж};$$

$$\text{в) } W_1'' = W_3'' = \frac{\pi\varepsilon_0 R\varphi_1^2}{8} = 3,12 \text{ мкДж}, \quad A' = W_1' - (W_1'' + W_3'') = 6,25 \text{ мкДж}.$$

4.11. Нехай на кулі є заряд q . Тоді в нескінченно віддаленій від кулі точці заряд дорівнює $-q$. Різниця потенціалів між поверхнею кулі та нескінченно віддаленою від неї точкою

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{qdr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} + \int_{R_2}^{\infty} \frac{qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon - 1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Тоді ємність кулі $C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 + (\varepsilon - 1)R_1} = 19 \text{ пФ}$.

4.12. Нехай на обкладках конденсатора є заряд q . Тоді різниця потенціалів між обкладками

$$\Delta\varphi = \int_a^b (\vec{E} d\vec{r}) = \int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \alpha/r} \cdot \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \alpha} \ln \frac{b}{a},$$

а ємність конденсатора $C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\varepsilon_0 \alpha}{\ln(b/a)}$.

4.13. Нехай λ — заряд одиниці довжини внутрішнього циліндра. З теореми Остроградського–Гаусса для довільної точки з радіусом-вектором $r < R_1$ напруженість $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$.

Тоді $E_{1\max} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}$, $E_{2\max} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}$.

Пробій відбудеться за умови $\varepsilon_1 R_1 E_{1\max} = \varepsilon_2 R_2 E_{2\max}$.

4.14. Нехай лінійна густина заряду на одній з дротин $+\lambda$, а на іншій $-\lambda$. Тоді різниця потенціалів між дротинами

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \varphi - (-\varphi) = 2\varphi,$$

де $\varphi = \int_a^{b-a} E dx = \int_a^{b-a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b-a}{a}$ — різниця потенціалів

поля, що його створює одна з дротин між двома точками, перша з яких лежить на поверхні цієї дротини, а друга — на поверхні іншої. Взаємна ємність дротів на одиницю їхньої довжини

$$C_{\text{о.д}} = \frac{\lambda}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln[(b-a)/a]} \approx \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)} = 7,1 \text{ пФ/м}.$$

4.15. При $b \gg a$ можна вважати, що заряди розподілені по поверхні кульок рівномірно. Аналогічно до задачі 4.14,

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon a}, \quad \text{відповідно, } C \approx \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-} = 2\pi\epsilon_0\epsilon a.$$

$$**4.16.** A = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

4.17. Енергія системи є сумою потенціальної енергії сфери та потенціальної енергії взаємодії сфери з зарядом. Робота дорівнює різниці енергії кінцевого та початкового станів:

$$A = \frac{q(q_0 + q/2)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 1,8 \text{ Дж.}$$

$$**4.18.** q = \sqrt{2F\epsilon\epsilon_0 S} = 200 \text{ нКл}; E = \sqrt{\frac{2F}{\epsilon\epsilon_0 S}} = 300 \text{ кВ/м};$$

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = 3 \text{ Дж/м}^3.$$

$$**4.19.** \text{ а) } W_1 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d_1} = 443 \text{ нДж}, W_2 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d_2} = 17,8 \text{ нДж};$$

$$\text{ б) } W_1 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d_1} = 443 \text{ нДж}, W_2 = \frac{\epsilon_0 S U^2 d_2}{2d_1^2} = 11,1 \text{ мкДж}.$$

$$**4.20.** \epsilon = \frac{A}{W} + 1 = 4,5.$$

4.21. σ_0 — поверхнева густина зарядів на пластинах без діелектрика; σ — поверхнева густина зарядів на пластинах за наявності діелектрика.

а) Під час заповнення конденсатора діелектриком після відімкнення його від джерела напруги заряд сталий:

$$q = \text{const}; \quad \sigma = \sigma_0; \quad \Delta\sigma = 0.$$

б) Під час заповнення конденсатора діелектриком з увімкненим джерелом напруги $U = \text{const}$; напруженість поля вільних зарядів на пластинах $E = U/d = \text{const}$.

Оскільки $E = \sigma/\varepsilon\varepsilon_0 = U/d$ та $E = \sigma_0/\varepsilon_0 = U/d$, то

$$\Delta\sigma = \sigma - \sigma_0 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon U}{d} - \frac{\varepsilon_0 U}{d} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d} = 1,77 \text{ мкКл/м}^2.$$

4.22. Поляризованість P , яка чисельно дорівнює поверхневій густині σ' зв'язаних зарядів на діелектрику, пропорційна до напруженості поля в ньому:

$$P = \sigma' = \varepsilon_0\kappa E = \varepsilon_0\kappa U/d = 0,57 \text{ мкКл/м}^2.$$

Оскільки $\sigma' = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$ (див. задачу 4.21), то $\varepsilon = 1 + \kappa = 1,08$.

Напруженість $E = U/d = \sigma/\varepsilon\varepsilon_0$, звідси поверхнева густина заряду на пластинах конденсатора $\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 U/d = 7,6 \text{ мкКл/м}^2$.

4.23. $U = \frac{\sigma'd}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} = 5,8 \text{ кВ}$ (див. задачу 4.21).

4.24. Розглянемо рис. 174. Енергія піднятої у конденсаторі рідини є сумою гравітаційної W_r та поляризаційної W_n енергій.

$$\text{Гравітаційна енергія } W_r = \rho g \cdot Sh \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\rho gSh^2.$$

Знайдемо поляризаційну енергію. Поле, що його створюють заряди густиною σ на пластинах конденсатора — σ/ε_0 . Поле зв'язаних у рідині зарядів — σ'/ε_0 . Сумарне поле — $\sigma/\varepsilon\varepsilon_0$. Звідси $\sigma' = (\varepsilon - 1)\sigma/\varepsilon$ — об'ємна густина індукованого дипольного моменту (поляризація). Тоді об'ємна густина енергії поляризації

$$w = -\frac{1}{2}\sigma'E_0 = -\frac{1}{2}\sigma'\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{-(\varepsilon - 1)\sigma_0^2}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

і повна енергія поляризації

$$W_n = \frac{-(\varepsilon - 1)\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} S(a + h).$$

Отже, повна енергія рідини

$$W = W_n + W_r = -\frac{(\varepsilon - 1)\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} S(a + h) + \frac{1}{2}\rho gSh^2.$$

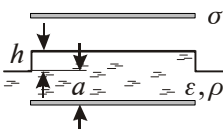


Рис. 174

Рівноважний стан рідини буде за умови $\frac{dW}{dh} = 0$, звідки

$$h = \frac{(\varepsilon - 1)\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon\rho g}.$$

4.25. Енергія конденсатора $W = q^2/2C$. Тоді сила, яка втягує

діелектрик у напрямі x , $F_x = \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{q=\text{const}} = \frac{q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x}$. Ємність кон-

денсатора дорівнює сумі ємностей паралельно з'єднаних його частин довжиною x та $l-x$. При $R \gg d$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon Rx}{d} + \frac{2\pi\varepsilon_0 R(l-x)}{d}. \text{ Звідси } F = \frac{\pi R\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{d}.$$

4.26. $C = 2C_i/3 = 0,33$ мкФ.

$$\mathbf{4.27.} \quad U_1 = \frac{C_2 U}{C_2 + C_1} = 4 \text{ В}; \quad U_2 = \frac{C_1 U}{C_2 + C_1} = 2 \text{ В};$$

$$q_1 = q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_2 + C_1} U = 8 \text{ мкКл.}$$

4.28. Початкова різниця потенціалів на кожному з конденсаторів $\Delta\varphi = \mathcal{E}/2$, заряд $q = C\mathcal{E}/2$, ємність системи конденсаторів $C/2$. Після введення діелектрика ємність системи конденсаторів $C' = C\varepsilon/(1+\varepsilon)$, а різниця потенціалів на конденса-

торі з діелектриком $\Delta\varphi' = \frac{q'}{\varepsilon C} = \frac{C\varepsilon\mathcal{E}}{1+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon C} = \frac{\mathcal{E}}{1+\varepsilon}$. Оскільки на-

пруженість поля пропорційна до різниці потенціалів, то на конденсаторі з діелектриком вона зменшиться у $(1+\varepsilon)/2 = 2$ рази. Заряд, який пройде через джерело,

$$\Delta q = q' - q = \frac{C\varepsilon}{1+\varepsilon} \mathcal{E} - \frac{C}{2} \mathcal{E} = \frac{1}{2} C \mathcal{E} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} = 1 \text{ нКл.}$$

4.29. а) $C_{\text{зар}} = C_1 + C_2 + C_3$; б) $C_{\text{зар}} = C$.

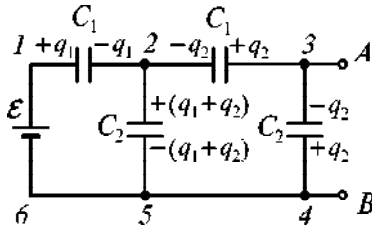


Рис. 175

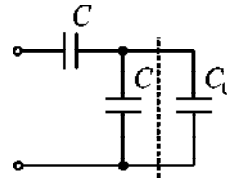


Рис. 176

4.30. За такого геометричного розташування пластин маємо з'єднання трьох однакових конденсаторів з ємністю $C = \varepsilon_0 S/d$. У першому випадку два паралельно з'єднані конденсатори приєднані послідовно до третього, а у другому — два послідовно з'єднані конденсатори приєднані паралельно до третього.

$$\text{а) } C = \frac{2\varepsilon_0 S}{3d} = 0,13 \text{ нФ}; \quad \text{б) } C = \frac{3\varepsilon_0 S}{2d} = 0,29 \text{ нФ}.$$

4.31. За такого з'єднання заряд на конденсаторах однаковий. Отже, максимальний заряд, який може бути на конденсаторах, $q_{\max} = \min(U_1 C_1, U_2 C_2) = U_1 C_1$, а допустима напруга

$$U \leq \frac{q_{\max}}{C_{\text{зар}}} = U_1 C_1 \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = U_1 \frac{C_1 + C_2}{C_2} = 9 \text{ кВ}.$$

4.32. Нехай заряди на пластинах конденсаторів такі, як показано на рис. 175. Тоді різниця потенціалів у замкнених колах має дорівнювати нулю. Для кола 13461

$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = \varepsilon, \quad \text{або} \quad q_1 = C_1 \left[\varepsilon + q_2 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \right].$$

$$\text{Для кола 12561} \quad \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 + q_2}{C_2} = \varepsilon.$$

$$\text{З цих рівнянь} \quad q_2 \left[\frac{1}{C_1} + \frac{3}{C_2} + \frac{C_1}{C_2^2} \right] = -\frac{\varepsilon C_1}{C_2};$$

$$\varphi_A - \varphi_B = -\frac{q_2}{C_2} = \frac{\varepsilon}{\frac{C_2^2}{C_1} + \frac{3}{C_2} + \frac{C_1}{C_2^2}} = \frac{E}{\eta^2 + 3\eta + 1} = 10 \text{ В}.$$

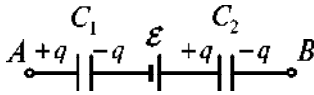


Рис. 177

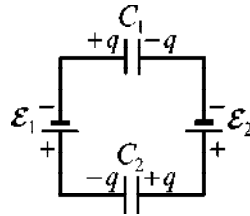


Рис. 178

4.33. Нехай C_0 — ємність шуканого нескінченного кола. Тоді в разі додавання до нього ще однієї такої ж ланки ємність нескінченного кола не зміниться (рис. 176). Отже,

$$\frac{1}{C + C_0} + \frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}, \text{ а звідси } C_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} C.$$

4.34. Нехай заряди розподілені на пластинах так, як показано на рис. 177. Тоді $\varphi_A - \varphi_B = \frac{q}{C_1} - \mathcal{E} + \frac{q}{C_2}$, або

$$q = \frac{(\varphi_A - \varphi_B) + \mathcal{E}}{C_1 + C_2} C_1 C_2. \text{ Звідси}$$

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{(\varphi_A - \varphi_B) + \mathcal{E}}{C_1 + C_2} C_2 = 10 \text{ В};$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{(\varphi_A - \varphi_B) + \mathcal{E}}{C_1 + C_2} C_1 = 5 \text{ В}.$$

4.35. Нехай $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ (рис. 178). Тоді для замкнутого контуру

$$-\frac{q}{C_1} + \mathcal{E}_1 - \frac{q}{C_2} - \mathcal{E}_2 = 0, \text{ або } q = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) C_1 C_2}{C_1 + C_2};$$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) C_2}{C_1 + C_2}, \text{ а } \Delta\varphi_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) C_1}{C_1 + C_2}.$$

4.36. Із задачі 4.35 $|q| = \frac{|\mathcal{E}E_2 - \mathcal{E}E_1| C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

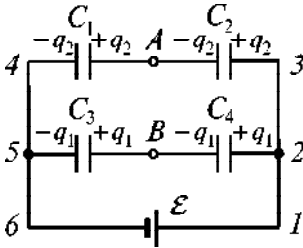


Рис. 179

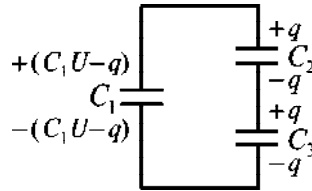


Рис. 180

4.37. Нехай заряди розподілені, як показано на рис. 179. Тоді для контуру 12561 $\frac{q_1}{C_4} + \frac{q_1}{C_3} - \mathcal{E} = 0$, або $q_1 = \frac{\mathcal{E}C_3C_4}{C_3 + C_4}$. Аналогіч-

но, для контуру 13461 $\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_2}{C_1} - \mathcal{E} = 0$, або $q_2 = \frac{\mathcal{E}C_1C_2}{C_1 + C_2}$. Звідси

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{q_2}{C_1} - \frac{q_1}{C_3} = \mathcal{E} \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{C_4}{C_3 + C_4} \right) = \mathcal{E} \frac{C_2C_3 - C_1C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}.$$

Якщо $\varphi_A - \varphi_B = 0$, то $C_2C_3 - C_1C_4 = 0$, або $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$.

4.38. Нехай через провідники пройде заряд q . Тоді в стані рівноваги розподіл зарядів буде такий, як показано на рис. 180. Для замкненого контуру $-\frac{C_1U - q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} = 0$,

$$\text{звідси } q = \frac{UC_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} = 60 \text{ мкКл.}$$

4.39. Початковий заряд на C_1 та C_2 (рис. 181, а) $q = \frac{\mathcal{E}C_1C_2}{C_1 + C_2}$.

Після замикання ключа у колі $CDEF C$ (рис. 181, б) $\mathcal{E} - \frac{q_2}{C_2} = 0$,

або $q_2 = C_2\mathcal{E}$, а для кола $BCFAB$ $-\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} - \mathcal{E} = 0$. З цих

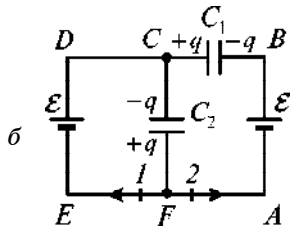
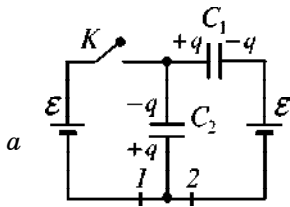


Рис. 181, а, б

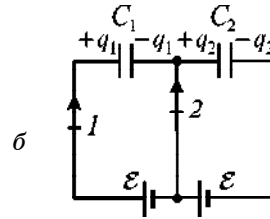
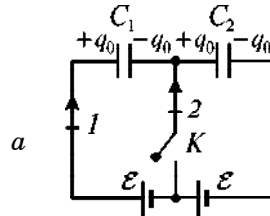


Рис. 182, а, б

рівнянь отримаємо, що $q_1 = 0$. Отже, заряд, який пройде через секцію 1, $\Delta q_1 = (q_1 + q_2) - 0 = C_2 \mathcal{E}$, а заряд, який пройде через секцію 2, $\Delta q_2 = -q_1 - q_2 = -\frac{C_1 C_2 \mathcal{E}}{C_1 + C_2}$.

4.40. Доки ключ не замкнено (рис. 182, а), $q_0 = \frac{2\mathcal{E}C_1C_2}{C_1 + C_2}$. Коли ключ замкнено (рис. 182, б), то $q_1 = C_1 \mathcal{E}$, $q_2 = C_2 \mathcal{E}$. Отже, заряд, який пройде крізь переріз 1, $q_1 - q_0 = \mathcal{E}C_1 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = 24 \text{ мкКл}$. Заряд, який пройде крізь переріз 2, $q_2 - q_1 = \mathcal{E}(C_2 - C_1) = 60 \text{ мкКл}$.

4.41. Розподіл зарядів на пластинах конденсаторів зображений на рис. 183. Для контурів 12341 та 14561, відповідно,

$$\frac{q_1}{C_1} - \mathcal{E}_1 + \frac{q_1 - q_2}{C_3} = 0, \quad \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_2 - q_1}{C_3} - \mathcal{E}_2 = 0.$$

Звідси $q_2 - q_1 = \frac{(\mathcal{E}_2 C_2 - \mathcal{E}_1 C_1) C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$, а $\varphi_A - \varphi_B = \frac{q_2 - q_1}{C_3} = \frac{\mathcal{E}_2 C_2 - \mathcal{E}_1 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}$.

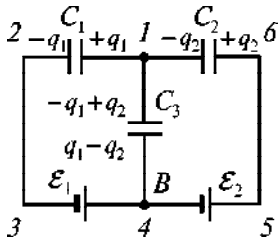


Рис. 183

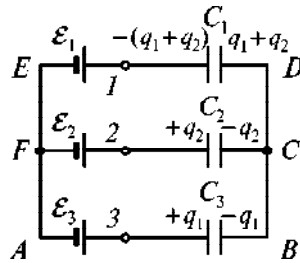


Рис. 184

4.42. Для контурів $ABDEA$ та $ODEFO$ (рис. 184), відповідно,

$$-\mathcal{E}_3 + \frac{q_1}{C_3} + \frac{q_1 + q_2}{C_1} + \mathcal{E}_1 = 0; \quad \frac{q_1 + q_2}{C_1} + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \frac{q_2}{C_2} = 0.$$

$$\text{Звідси } q_1 + q_2 = \frac{\mathcal{E}_2 C_2 - \mathcal{E}_1 C_2 - \mathcal{E}_1 C_3 + \mathcal{E}_3 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} C_1.$$

Оскільки $\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_1 = -\frac{q_1 + q_2}{C_1}$, то

$$\varphi_1 = \frac{\mathcal{E}_1(C_2 + C_3) - \mathcal{E}_2 C_2 - \mathcal{E}_3 C_3}{C_1 + C_2 + C_3},$$

$$\varphi_2 = \frac{\mathcal{E}_2(C_3 + C_1) - \mathcal{E}_3 C_3 - \mathcal{E}_1 C_1}{C_1 + C_2 + C_3},$$

$$\varphi_3 = \frac{\mathcal{E}_3(C_1 + C_2) - \mathcal{E}_1 C_1 - \mathcal{E}_2 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

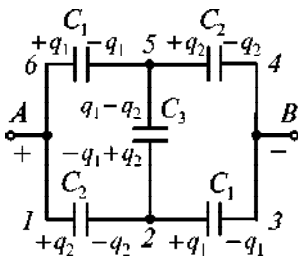


Рис. 185

4.43. З огляду на симетрію задачі, розпишемо розподіл зарядів так, як показано на рис. 185.

Для контуру 12561

$$\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_2 - q_1}{C_3} - \frac{q_1}{C_1} = 0,$$

$$\text{або } \frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1(C_3 + C_2)}{C_2(C_1 + C_3)}.$$

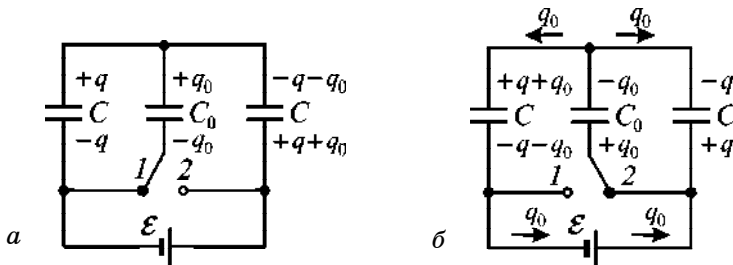


Рис. 186, а, б

Тоді ємність кола

$$C_{AB} = \frac{q_1 + q_2}{\varphi_A - \varphi_B} = (q_1 + q_2) \left/ \left(\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_1}{C_1} \right) \right. = \left(1 + \frac{q_1}{q_2} \right) \left/ \left(\frac{1}{C_2} + \frac{q_1}{q_2 C_1} \right) \right., \text{ або}$$

$$C_{AB} = \frac{2C_1 C_2 + C_3 (C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + 2C_3}.$$

4.44. У положенні 1 ключа (рис. 186, а)

$$\frac{q}{C} = \frac{q_0}{C_0} = \frac{q + q_0}{C + C_0} \quad \text{та} \quad (q + q_0) \left(\frac{1}{C + C_0} + \frac{1}{C} \right) = \mathcal{E}, \text{ або}$$

$$q + q_0 = \frac{C(C + C_0)}{2C + C_0} \mathcal{E}. \quad \text{Звідси} \quad q = \frac{C^2 \mathcal{E}}{2C + C_0}, \quad \text{та} \quad q_0 = \frac{CC_0 \mathcal{E}}{2C + C_0}.$$

Після перемикання ключа в положення 2 (рис. 186, б) у правому контурі та крізь батарею перейде заряд q_0 . З симетрії задачі видно, що зміни енергії конденсаторів не буде. Отже, виділена теплота буде роботою, яку виконає джерело під час переходу заряду:

$$Q = \Delta q \mathcal{E} = q_0 \mathcal{E} = \frac{CC_0 \mathcal{E}^2}{2C + C_0}.$$

4.45. Початковий заряд на пластинах конденсатора $q = C(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)$, а після перемикання ключа $q' = C\mathcal{E}_1$. Отже, зміна заряду $\Delta q = q' - q = C\mathcal{E}_2$. Із закону збереження енергії повна робота

батареї $A_{\text{батареї}} = \Delta W + Q$, де ΔW — робота, виконана батареєю \mathcal{E}_1 для зміни заряду (оскільки лише вона причетна до зміни заряду); Q — теплота, яка виділилась.

$$\Delta W = \frac{1}{2} C \mathcal{E}_1^2 - \frac{1}{2} C (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2; \quad C \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \frac{1}{2} C \mathcal{E}_2^2 + Q = C \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1.$$

$$\text{Звідси } Q = \frac{1}{2} C \mathcal{E}_2^2.$$

5. Опір. Провідність. Резистори в колах постійного струму

$$5.1. N = \frac{Rd^2}{8\rho a} = 182.$$

$$5.2. \frac{m_{\text{м}}}{m_{\text{а}}} = \frac{\rho_{\text{м}}}{\rho_{\text{а}}} \cdot \frac{\rho'_{\text{м}}}{\rho'_{\text{а}}} = 2,2, \text{ де } \rho \text{ — питомий опір; } \rho' \text{ — густина.}$$

$$5.3. T_2 = \frac{U(1 + \alpha T_1) - IR_1}{IR_1 \alpha} \approx 2110^\circ \text{C}.$$

$$5.4. I = \frac{I_0(R_0 + R_A)}{R_0(1 + \alpha \Delta T) + R_A} = 17,2 \text{ мА}.$$

$$5.5. T_2 = \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{\alpha} + T_1 \right) - \frac{1}{\alpha} \approx 70^\circ \text{C}.$$

$$5.6. I = 2\pi a \varepsilon_0 E v = 0,5 \text{ мкА}.$$

5.7. Ємність конденсатора у момент, коли він занурений на глибину h у воду, за умови, що $d \ll r$,

$$C \approx \frac{\varepsilon_{\text{в}} \varepsilon_0 \cdot 2\pi r h}{d} + \frac{\varepsilon_0 \cdot 2\pi r (l - h)}{d} = \frac{2\pi \varepsilon_0 r}{d} (\varepsilon_{\text{в}} h + l - h),$$

де l — висота конденсатора. Тоді заряд на пластинах $q = CU$, а струм у провідниках

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = \frac{2\pi\varepsilon_0 r U}{d} \frac{d(\varepsilon_b h + l - h)}{dt} =$$

$$= \frac{2\pi(\varepsilon_b - \varepsilon_n)\varepsilon_0 r v U}{d} = 0,11 \text{ мкА.}$$

$$5.8. R = \int_a^b \rho \frac{dr}{S(r)} = \int_a^b \rho \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{b}{a}.$$

$$5.9. R = \int_a^b \rho \frac{dr}{S(r)} = \int_a^b \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \text{ При } b \rightarrow \infty: R = \frac{\rho}{4\pi a}.$$

$$5.10. R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \text{ (див. задачу 5.9). } I = \frac{U}{R} = \frac{4\pi a b U}{\rho(b-a)}.$$

$$\text{З іншого боку, } I = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{dU}{dt}. \text{ Отже, } \frac{4\pi a b U}{\rho(b-a)} = -C \frac{dU}{dt},$$

$$\text{або } \frac{4\pi a b}{\rho(b-a)C} \Delta t = -\int \frac{dU}{U}. \text{ Звідси } \rho = \frac{4\pi \Delta t a b}{(b-a)C \ln \eta}.$$

5.11. Уявно розташуємо заряди $+q$ та $-q$ на кульках. Тоді можна вважати, що напруженість поля, що його створює кулька на своїй поверхні, спричинена лише її зарядом, оскільки інший

є дуже далеко: $E = \frac{kq}{a^2}$. Тоді густина струму $j = \frac{1}{\rho} E = \frac{kq}{\rho a^2}$. Від-

повідно, струм $I = \int (\vec{j} \cdot d\vec{S}) = jS = \frac{kq}{\rho a^2} \cdot 4\pi a^2 = \frac{q}{\rho \varepsilon_0}$. Різниця потен-

ціалів $\varphi_+ - \varphi_- = 2 \frac{kq}{a}$, а опір $R = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I} = \frac{\rho}{2\pi a}$.

5.12. Для розрахунку шуканих значень розташуємо на кульці уявний заряд $+q$. Напруженість електричного поля у провідному середовищі можна розрахувати як суперпозицію поля кульки та її дзеркального відображення від площини (рис. 187). Нормальна складова поля поблизу площини (тангенціальна дорівнює нулю)

$$E_n(x) = 2 \frac{kq}{r^2} \cos \varphi = \frac{2kql}{r^3}, \text{ тут } r = \sqrt{x^2 + l^2}.$$

а) Різниця потенціалів між кулькою та площиною

$$U = \int_{y=a}^l E(y) dy = \int_{y=a}^l \left(\frac{kq}{y^2} + \frac{kq}{(2l-y)^2} \right) dy = \frac{2kq(a-l)}{a(a-2l)}, \text{ звідси}$$

$$q = \frac{a(a-2l)U}{2k(a-l)}. \text{ При } l \gg a \text{ заряд } q = \frac{Ua}{k}.$$

$$\text{Густина струму } j(r) = \frac{1}{\rho} E_n(x) = \frac{1}{\rho} \frac{2kql}{r^3} = \frac{2Ual}{r^3 \rho}.$$

б) Сила струму

$$I = \int_0^\infty j(r) dS = \int_0^\infty j(r) 2\pi x dx = \int_0^\infty \frac{2Ual \cdot 2\pi x}{\left(\sqrt{x^2 + l^2}\right)^3 \rho} dx = \frac{4Ua\pi}{\rho}.$$

$$\text{Звідси опір } R = \frac{U}{I} = \frac{U\rho}{4Ua\pi} = \frac{\rho}{4a\pi}.$$

5.13. Розташуємо на нитках уявні заряди з лінійною густиною $+\lambda$ та $-\lambda$ (рис. 188). Аналогічно до задачі 5.12, напруженість у площині симетрії між нитками

$$E(r) = 2 \frac{2k\lambda}{r} \cos \varphi = \frac{4k\lambda}{r} \cdot \frac{l}{2r} = \frac{2k\lambda l}{r^2}.$$

а) Напруженість поля на осі x $E_x(x) = \frac{2k\lambda}{x} + \frac{2k\lambda}{l-x}$. Різниця

$$\text{потенціалів між провідниками } U = \int_a^l E(x) dx = 4k\lambda \ln \frac{l-a}{a}.$$

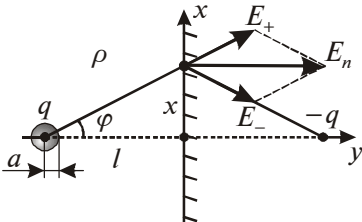


Рис. 187

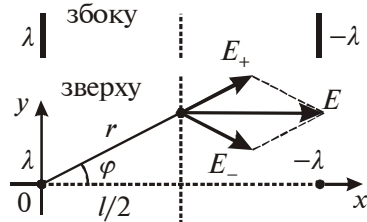


Рис. 188

Якщо $l \gg a$, то $U = 4k\lambda \ln \frac{l}{a}$. Звідси $\lambda = \frac{U}{4k \ln(l/a)}$, а напруженість в точці, рівновіддаленій від осей провідників на відстань r , $E(r) = \frac{Ul}{2r^2 \ln(l/a)}$. Тоді густина струму

$$j(r) = \frac{1}{\rho} E(r) = \frac{lU}{2\rho r^2 \ln(l/a)}.$$

б) Повний струм між провідниками на відрізку довжиною h

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} j(r) h dy = 2h \int_0^{+\infty} j(\sqrt{y^2 + l^2/4}) dy = 2h \int_0^{+\infty} \frac{Ul}{2\rho(y^2 + l^2/4) \ln(l/a)} dy = \\ &= \frac{hUl}{\rho \ln(l/a)} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + l^2/4} = \frac{hUl\pi}{\rho l \ln(l/a)} = \frac{hU\pi}{\rho \ln(l/a)}. \end{aligned}$$

Тоді опір на одиницю довжини провідників

$$R_h = Rh = \frac{U}{I} h = \frac{\rho}{\pi} \ln \frac{l}{a}.$$

5.14. Розмістимо на пластинах конденсатора уявні заряди $+q$

та $-q$, відповідно. Ємність конденсатора $C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon\epsilon_0 \int E_n dS}{U}$.

Тоді сила струму $I = \int (\vec{j} d\vec{S}) = \int \sigma E_n dS$, оскільки $\vec{j} \uparrow \uparrow \vec{E}$.

$$\text{Звідси } I = \frac{CU}{\epsilon\epsilon_0} \sigma = \frac{CU}{\epsilon\epsilon_0 \rho} = 1,5 \text{ мкА.}$$

5.15. $RC = \rho\epsilon\epsilon_0$ (див. задачу 5.14).

5.16. Діелектрик межує з провідником. З боку діелектрика електрична індукція D показана на рис. 189. У провіднику в довільній його точці A не може бути нормальної складової електричного поля (інакше по ньому протікав би струм до компенсації цього поля). З теореми Остроградського–Гаусса $\sigma = D_n = D \cos \alpha$, де σ — густина заряду в точці A . Тангенціальну складову визначають з теореми про циркуляцію

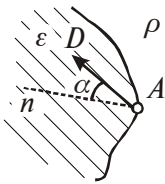


Рис. 189

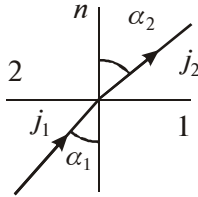


Рис. 190

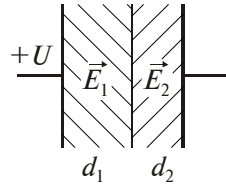


Рис. 191

$\oint (\vec{E} d\vec{r}) = 0$. Вона має бути неперервною в разі переходу з провідника у діелектрик. Отже, всередині провідника в точці A є тангенціальна складова електричного поля $\frac{D \sin \alpha}{\epsilon \epsilon_0}$. Тоді за

законом Ома густина струму $j = \frac{D \sin \alpha}{\rho \epsilon \epsilon_0}$.

5.17. Опір середовища товщиною dx між пластинами на відстані x від першої пластини $dR = \frac{1}{\sigma(x) S} dx$, де $\sigma(x) = \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{d} x$.

Повний опір $R = \frac{d}{S} \int_0^d \frac{dx}{\sigma_1 d + (\sigma_2 - \sigma_1) x} = \frac{d \ln \sigma_2 / \sigma_1}{S(\sigma_2 - \sigma_1)}$, а струм

$$I = \frac{U}{R} = \frac{SU(\sigma_2 - \sigma_1)}{d \ln(\sigma_2 / \sigma_1)} = 5 \text{ мкА.}$$

5.18. За законом збереження заряду струм, який виходить з середовища 1, має весь пройти в середовище 2 (рис. 190): $j_1 \cos \alpha_1 = j_2 \cos \alpha_2$. Інше співвідношення випливає з граничної умови $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, тобто $\frac{1}{\sigma_1} j_1 \sin \alpha_1 = \frac{1}{\sigma_2} j_2 \sin \alpha_2$.

Отже, $\frac{\text{tg } \alpha_1}{\sigma_1} = \frac{\text{tg } \alpha_2}{\sigma_2}$, або $\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$.

5.19. Напруженість поля в середовищі 1 та 2, відповідно,

$E_1 = \frac{\rho_1 I}{\pi R^2}$ та $E_2 = \frac{\rho_2 I}{\pi R^2}$. Застосувавши теорему Остроградського—

Гаусса для малого циліндричного об'єму на межі середовищ, отримаємо $-\frac{\rho_1 I}{\pi R^2} dS + \frac{\rho_2 I}{\pi R^2} dS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$, або $\sigma = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\pi R^2} \varepsilon_0 I$. Отже,

$$q = (\rho_2 - \rho_1) \varepsilon_0 I = -1,5 \cdot 10^{-17} \text{ Кл.}$$

5.20. З рис. 191 $E_1 d_1 + E_2 d_2 = U$. Із закону збереження заряду

$$\frac{1}{\rho_1} E_1 = \frac{1}{\rho_2} E_2. \text{ Звідси } E_1 = \frac{\rho_1 U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} \text{ та } E_2 = \frac{\rho_2 U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}.$$

Поверхнева густина зарядів на межі розділу діелектриків

$$\sigma = D_2 - D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_0 U (\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1)}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}.$$

Отже, $\sigma = 0$ за умови $\varepsilon_2 \rho_2 = \varepsilon_1 \rho_1$.

5.21. Із закону збереження заряду (струм від пластини до пластини (рис. 192) однаковий)

$$\frac{E(x)}{\rho(x)} = \frac{E(x) + dE(x)}{\rho(x) + d\rho(x)} = \frac{dE(x)}{d\rho(x)}.$$

$$\text{Звідси } E(x) = C\rho(x) = \frac{I}{S} \rho(x),$$

де S — площа поперечного перерізу. Отже, заряд, індукований на одиниці площі,

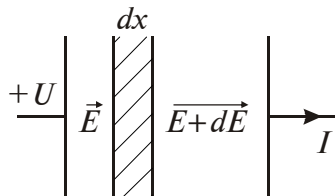


Рис. 192

$$\begin{aligned} d\sigma &= \varepsilon_0 \frac{I}{S} \left[\{ \varepsilon(x) + d\varepsilon(x) \} \{ \rho(x) + d\rho(x) \} - \varepsilon(x) \rho(x) \right] = \\ &= \varepsilon_0 \frac{I}{S} d[\varepsilon(x) \rho(x)]. \end{aligned}$$

Звідси $dq = \varepsilon_0 I d[\varepsilon(x) \rho(x)]$, а $q = \varepsilon_0 I (\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1)$.

5.22. а) Розглянемо циліндр одиничної довжини і розділимо його на циліндричні оболонки радіусом r та товщиною dr . Всі вони є паралельними, тому провідність однієї оболонки

$$\text{одиничної довжини } d \left(\frac{1}{R_{\text{о.д}}} \right) = \frac{2\pi r dr}{\alpha / r^2} = \frac{2\pi r^3 dr}{\alpha}.$$

Після інтегрування отримаємо $\frac{1}{R_{\text{о.д}}} = \frac{\pi a^4}{2\alpha}$, або $R_{\text{о.д}} = \frac{2\alpha}{\pi a^4}$.

б) Напруженість електричного поля не залежить від r (інакше це суперечить теоремі про циркуляцію $\oint (\vec{E} d\vec{r}) = 0$). Отже,

$$I = \int_s (\vec{j} d\vec{S}) = \int_0^R \frac{2\pi r E dr}{\alpha/r^2} = \frac{\pi a^4 E}{2\alpha}, \text{ або } E = \frac{2\alpha I}{\pi a^4}.$$

$$5.23. I_2 = \frac{I_1 R_3}{R_2 + R_3} = 2 \text{ A}; \quad I_3 = \frac{I_1 R_2}{R_2 + R_3} = 1 \text{ A};$$

$$U_1 = I_1 R_1 = 12 \text{ В}; \quad U_2 = U_3 = I_2 R_2 = 4 \text{ В}.$$

$$5.24. U_r = \mathcal{E} - IR = 2,7 \text{ В}; \quad r = (\mathcal{E}/I) - R = 0,9 \text{ Ом}.$$

$$5.25. \text{ а) } I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{2R + r} \approx 5,7 \text{ А} \text{ — паралельно};$$

$$\text{ б) } I_2 = \frac{2\mathcal{E}}{R + 2r} \approx 0,24 \text{ А} \text{ — послідовно}.$$

$$5.26. U_1 = \mathcal{E}_1 \frac{R + r_2 - r_1}{R + r_1 + r_2} = 0,67 \text{ В}; \quad U_2 = \mathcal{E}_2 \frac{R + r_1 - r_2}{R + r_1 + r_2} = 0 \text{ В}.$$

$$5.27. R_1 = \frac{\mathcal{E}}{I'} - \frac{\mathcal{E}}{I} = 1,5 \text{ Ом}; \quad R_2 = \frac{\mathcal{E}}{I} = 2,5 \text{ Ом};$$

$$U_1 = I'R_1 = 7,5 \text{ В}; \quad U_2 = I'R_2 = 12,5 \text{ В}.$$

$$5.28. R_1 = \frac{I_2 R_2 R_3}{IR_3 - I_2 R_2 - I_2 R_3} = 60 \text{ Ом}.$$

$$5.29. U_2 = \frac{R_1 R_2 R_3 \mathcal{E}}{R_4 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) + R_1 R_2 R_3} = 32 \text{ В};$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 0,4 \text{ А}.$$

$$5.30. R_2 = \frac{(\mathcal{E} - IR_4 - U_1)R_3}{IR_3 + IR_4 + U_1 - \mathcal{E}} = 60 \text{ Ом}.$$

5.31.
$$U_V = \frac{R_V(R_2 + R_3)\mathcal{E}}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_V(R_1 + R_2 + R_3)} = 80 \text{ В.}$$

5.32.
$$\mathcal{E} = \frac{R_V(R_1 + R_2 + R_3) + R_1R_2 + R_1R_3}{R_V(R_2 + R_3)} U = 170 \text{ В.}$$

5.33. Розглянувши потенціали кожної з вершин куба, з'єднаємо ті з них, що мають однаковий потенціал. Тепер можна знехтувати ребрами куба між цими вершинами, оскільки через них не тече струм:

а) (рис. 193, а) $5R/6$; б) (рис. 193, б) $7R/12$; в) (рис. 193, в) $3R/4$.

5.34. Кількість ланок може бути довільною, тому розглянемо різні випадки: якщо $n = 0$, то $R_{AB} = R_x$; якщо $n = 1$, то $R_{AB} = \frac{(2R + R_x)R}{3R + R_x}$. Звідси $R_x = R(\sqrt{3} - 1)$.

5.35. Оскільки коло нескінченне, то всі ланки, починаючи з другої, можуть бути замінені опором R , який шукаємо.

Звідси опір кола $R = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1}}\right) \frac{R_1}{2} = 6 \text{ Ом.}$

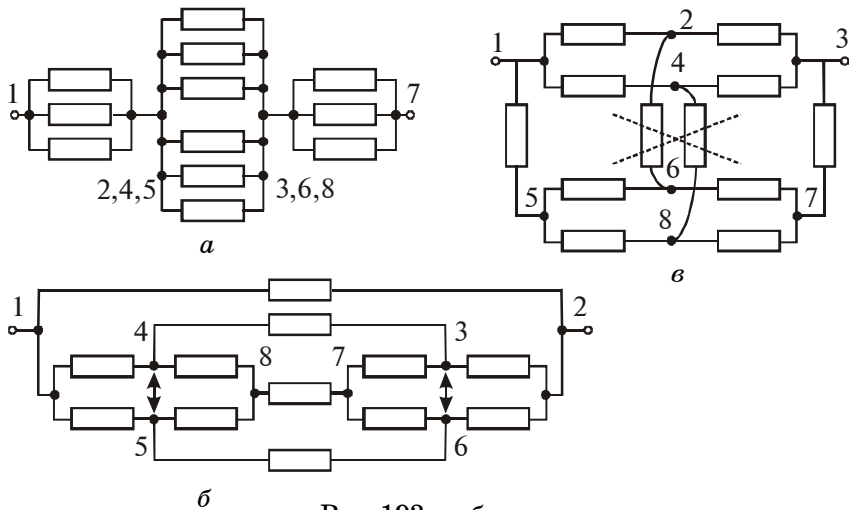


Рис. 193, а, б, в

5.36. Уявно приєднаємо до точок A та B (рис. 194) джерело напруги U . Тоді $U = IR = I_0 R_0$, де I — струм у підвідних провідниках, I_0 — струм у провіднику AB . Струм I_0 можна зобразити як суму двох струмів. Якби у точку A надходив струм I і розтікався по сітці до нескінченності, то по провіднику AB , враховуючи симетрію, протікав би струм $I/4$. Аналогічно, якби струм I надходив у сітку з нескінченності і виходив з точки B , то по провіднику AB також протікав би струм $I/4$. Сума цих двох струмів $I_0 = I/4 + I/4 = I/2$. Тому $R = R_0/2$.

5.37. Нехай опір амперметра дорівнює нулю, а опір вольтметра — R_V (рис. 195). Якщо опір джерела r , то без додаткового опору біля вольтметра $U = \mathcal{E} - Ir$, $I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_V}$.

Отже, $U = \mathcal{E} \frac{R_V}{r + R_V}$. Після приєднання опору R

$$\frac{U}{\eta} = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}r}{r + \frac{RR_V}{R + R_V}}, \quad \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{RR_V}{R + R_V}} = \eta \frac{\mathcal{E}}{r + R_V}.$$

Звідси $R_V = \eta r$, а $\frac{U}{\eta} = \frac{\mathcal{E}}{\eta + 1} = 2 \text{ В}$.

$$\mathbf{5.38.} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} R_1 - \mathcal{E}_1 = -4 \text{ В}.$$

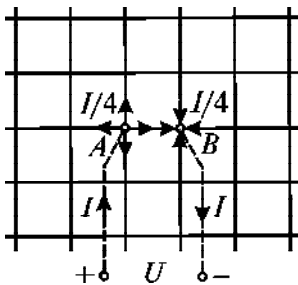


Рис. 194

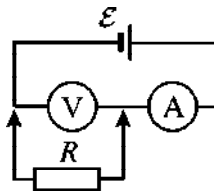


Рис. 195

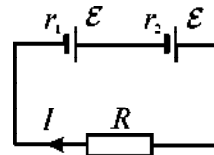


Рис. 196

5.39. Струм, який тече по колу (рис. 196), $I = \frac{2\mathcal{E}}{r_1 + r_2 + R}$. Тоді різниця потенціалів на першому джерелі $\Delta\varphi_{r_1} = Ir_1 - \mathcal{E}$, а на другому — $\Delta\varphi_{r_2} = Ir_2 - \mathcal{E}$. Прирівнявши обидві ці величини до нуля, отримаємо $R = r_1 - r_2$ та $R = r_2 - r_1$. Фізичний зміст має лише другий розв'язок.

5.40. а) $I = \frac{N\mathcal{E}}{Nr} = \frac{N\alpha r}{Nr} = \alpha$; б) $\varphi_A - \varphi_B = n\mathcal{E} - n\alpha r = 0$. Тут N — кількість джерел; n — різниця кількості джерел у гілках.

5.41. Напруга на нелінійному опорі $U = \alpha\sqrt{I} = U_0 - IR$. Розв'язавши це квадратне рівняння відносно I , отримаємо

$$I = \frac{\alpha^2}{4R^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4RU_0}{\alpha^2}} - 1 \right)^2.$$

5.42. Коли конденсатор зарядиться повністю, струм по середній гілці не тектиме. Тоді струм через резистори $I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_1 + R_2}$, оскільки $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$. Різниця потенціалів на конденсаторі

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + IR_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} R_1 = -0,5 \text{ В.}$$

5.43. $I_1 = \frac{\mathcal{E}R_2}{rR_1 + R_1R_2 + R_2r} = 1,2 \text{ А}$; $I_2 = \frac{I_1R_1}{R_2} = 0,8 \text{ А}$.

5.44. $U = \frac{U_0 R x l}{Rl^2 + R_0(l-x)x}$. Якщо $R \gg R_0$, то $U \approx \frac{U_0 x}{l}$.

6. Правила Кірхгофа

6.1. $I_{R1} = 0,36 \text{ А}$; $I_{R2} = 0,51 \text{ А}$; $I_{R3} = 0,15 \text{ А}$.

6.2. Розв'яжемо задачу за допомогою правил Кірхгофа. Для цього розглянемо рис. 197. Електрична схема має два вузли та

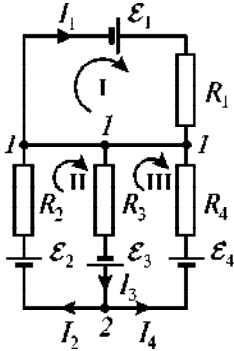


Рис. 197

три лінійно незалежні контури. Тому складемо систему з чотирьох рівнянь: одного — за першим правилом Кірхгофа і три — за другим.

Для вузла 2: $I_3 - I_2 - I_4 = 0$.

Для контуру I: $I_1 R_1 = \mathcal{E}_1$.

Для контуру II: $I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$.

Для контуру III: $I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$.

Розв'язавши цю систему, отримаємо

$I_1 = 0,75$ А; $I_2 = 0,7$ А; $I_3 = 1,2$ А;

$I_4 = 0,5$ А.

6.3. Розв'яжемо задачу методом контурних струмів. Для цього розглянемо рис. 198. На схемі виділено три незалежні контури I, II та III. Уважаємо, що по них течуть контурні струми I_1 , I_2 та I_3 , які задають напрям обходу контурів. Запишемо для кожного з контурів друге правило Кірхгофа й отримаємо систему з трьох алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_5)I_1 - (R_2 + R_5)I_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2; \\ -(R_2 + R_3)I_1 + (R_2 + R_3 + R_5)I_2 - R_3 I_3 = -\mathcal{E}_2; \\ -R_3 I_2 + (R_3 + R_4)I_3 = -\mathcal{E}_3, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 13I_1 - 7I_2 = 6; \\ -7I_1 + 15I_2 - 8I_3 = -2; \\ -8I_2 + 13I_3 = -3. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо контурні струми

$I_1 = 0,41$ А; $I_2 = -0,10$ А; $I_3 = -1,20$ А.

З рис. 198 випливає, що реальні струми, які течуть через кожний з резисторів,

$I_{R1} = I_1 = 0,41$ А; $I_{R2} = I_{R5} = I_1 - I_2 = 0,51$ А;

$I_{R3} = I_2 - I_3 = 1,10$ А; $I_{R4} = I_3 = -1,20$ А.

Знак “мінус” означає, що струм має протилежний до вибраного напрям.

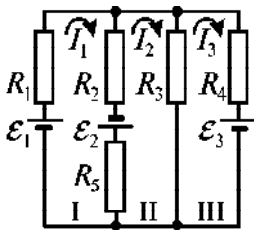


Рис. 198

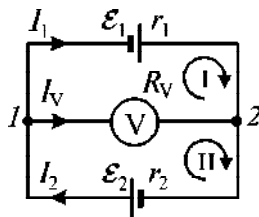


Рис. 199

6.4. Розглянемо рис. 199. Система рівнянь Кірхгофа виглядатиме так (врахуємо, що за умовою $r_1 = r_2$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$):

$$I_1 + I_V - I_2 = 0;$$

$$I_1 r_1 - I_V R_V = \mathcal{E}_1;$$

$$I_2 r_2 + I_V R_V = \mathcal{E}_2.$$

Тоді струми, які течуть через елементи,

$$I_1 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)R_V + \mathcal{E}_1 r_2}{(r_1 + r_2)R_V + r_1 r_2} \stackrel{R_V \rightarrow \infty}{=} \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2} = 0,75 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)R_V + \mathcal{E}_2 r_1}{(r_1 + r_2)R_V + r_1 r_2} \stackrel{R_V \rightarrow \infty}{=} \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2} = 0,75 \text{ А}.$$

Напруга на вольтметрі

$$U_V = I_V R_V = \frac{\mathcal{E}_2 r_1 - \mathcal{E}_1 r_2}{(r_1 + r_2)R_V + r_1 r_2} R_V \stackrel{R_V \rightarrow \infty}{=} \frac{\mathcal{E}_2 r_1 - \mathcal{E}_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0 \text{ В}.$$

6.5. 0,75 В при $R_V \rightarrow \infty$ (див. задачу 6.4).

6.6. 0 В (див. задачу 6.4).

$$6.7. \quad \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} < \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}$$

6.8. Одним з критеріїв визначення співвідношень між опорами за умови малих змін струмів, які течуть через амперметр, може бути незмінність напруги у зовнішньому колі:

$$U = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{RR_x}{R + R_x}} \cdot \frac{RR_x}{R + R_x} \rightarrow \text{const}, \text{ або } \frac{\mathcal{E}}{\frac{r}{R_x} + \frac{r}{R} + 1} \rightarrow \text{const}.$$

Звідси $\frac{r}{R_x} \ll 1$ та $\frac{r}{R} \ll 1$, або $r \ll R_x$ та $r \ll R$.

Інший критерій — незмінність повного опору кола:

$$R_{\text{пов}} = r + \frac{RR_x}{R + R_x} \rightarrow \text{const}, \text{ або } \frac{dR_{\text{пов}}}{dR_x} = \frac{R^2}{(R + R_x)^2} \rightarrow 0,$$

або $R_x \gg R$.

6.9. $I_R = 10 \text{ мА}$. **6.10.** $\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{R}{R + R_1}$.

6.11. $U_{R2} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = -3 \text{ В}$; $I_{R3} = \mathcal{E}_1 / R_3 = 1 \text{ А}$.

6.12. $R_2 = 3 \text{ Ом}$; R_1 та R_4 — довільні.

6.13. $U = \frac{\mathcal{E}lrx}{l^2r + (l-x)xR}$, де x — відстань від повзунка до кінця реостата, до яких приєднано вольтметр.

6.14. Розгляньмо коло на рис. 200. Правила Кірхгофа матимуть такий вигляд:

$$I_1 + I_2 - I = 0, \quad I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1, \quad I_2 r_2 + IR = \mathcal{E}_2.$$

Звідси струм через резистор $I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} \cdot \frac{1}{R + r_1 r_2 / (r_1 + r_2)}$.

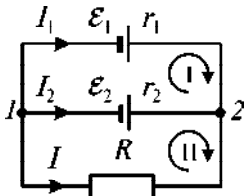


Рис. 200

Порівнявши цей вираз із законом Ома для повного кола, отримаємо

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}, \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

З аналізу випадків $\mathcal{E}_1 \gg \mathcal{E}_2$ та $\mathcal{E}_1 \ll \mathcal{E}_2$ видно, що $\mathcal{E} < \max\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$, і лише при $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Очевидно, ці міркування правильні для випадків, коли $r_1 \neq 0$ та $r_2 \neq 0$.

$$6.15. \mathcal{E} = I_3 \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}; \quad I_1 = I_3 \frac{R_2 + R_3}{R_2}; \quad I_2 = I_3 \frac{R_3}{R_2}.$$

$$6.16. I_{R1} = I_{R2} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = 26,7 \text{ мА}; \quad I_{R3} = I_{R4} = \frac{R_1 \mathcal{E}}{R_3 (R_1 + R_2)} = 4 \text{ мА}.$$

$$6.17. I_{R1} = \frac{\mathcal{E}_2 R_3 + \mathcal{E}_1 R_2}{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_2 R_3} = 40 \text{ мА};$$

$$I_{R2} = \frac{\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_2 R_3 - \mathcal{E}_1 R_1}{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_2 R_3} = 10 \text{ мА};$$

$$I_{R3} = \frac{\mathcal{E}_1 R_1 + \mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_2 R_3} = 30 \text{ мА}.$$

$$6.18. U = (r_2 \mathcal{E}_1 + r_1 \mathcal{E}_2) / (r_1 + r_2) = 1,28 \text{ В}.$$

$$6.19. I_2 = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + I_1 r_1) / r_2 = 0,5 \text{ А}; \quad I_R = I_1 + I_2 = 1,5 \text{ А};$$

$$R = (\mathcal{E}_1 - I_1 r_1) / I_R = 0,67 \text{ Ом}.$$

$$6.20. I_A = \frac{\mathcal{E}_2 R_3 - \mathcal{E}_1 (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = 0,4 \text{ А}.$$

$$6.21. I_A = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + U_2) / R_1 = -2 \text{ А}.$$

$$6.22. R_1 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) R_2 + (\mathcal{E}_1 - R_2 I) R_3}{I (R_2 + R_3)} = 20 \text{ Ом}.$$

$$6.23. I_2 = \mathcal{E}_2 / R_2 = 0,5 \text{ А}; \quad I_1 = \mathcal{E}_3 / R_1 = 0,3 \text{ А};$$

$$I_3 = I - I_1 - I_2 = 0,8 \text{ А}; \quad R_3 = \mathcal{E}_3 / I_3 = 7,5 \text{ Ом}.$$

$$6.24. I_{\mathcal{E}1} = \frac{\mathcal{E}_1 (R_2 + r_2)}{R_1 R_2 + R_1 r_2 + r_1 R_2 + r_1 r_2 + r_1 R_1} = 1,78 \text{ А};$$

$$I_{R2} = \frac{I_{\mathcal{E}1} r_1}{R_2 + r_2} = 0,45 \text{ А}; \quad I_{R1} = I_{\mathcal{E}1} - I_{R2} = 2,23 \text{ А}.$$

$$6.25. I_V = 3I_{R_2}.$$

$$6.26. I_A = 75 \text{ мА}.$$

$$6.27. \text{ а) } U_1 = \frac{\mathcal{E}R_{V1}}{R_{V1} + R_{V2}} = 120 \text{ В}, \quad U_2 = \frac{\mathcal{E}R_{V2}}{R_{V1} + R_{V2}} = 80 \text{ В};$$

$$\text{ б) } U_1 = 80 \text{ В}, \quad U_2 = 120 \text{ В}.$$

$$6.28. \mathcal{E} = \frac{I_4}{R_3 R_5} \left[R_1 (R_2 R_5 + R_3 R_5 + R_4 R_5 + R_2 R_4 + R_3 R_4) + R_3 (R_2 R_4 + R_2 R_5 + R_4 R_5) \right].$$

$$6.29. I_{R1} = 1,43 \text{ А}; \quad I_{r1} = 5,71 \text{ А}; \quad I_{R2} = 4,28 \text{ А}; \quad I_{r2} = 1,43 \text{ А}; \\ I_{R3} = 2,86 \text{ А}.$$

$$6.30. \mathcal{E} = 7,75 \text{ В}.$$

$$6.31. R_4 = \frac{U_{12}(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)}{R_2 R_3 I - U_{12}(R_2 + R_3)}.$$

6.32. Розгляньмо почергово схеми на рис. 201, а та б. Запишемо системи рівнянь Кірхгофа для обох випадків:

$$\text{ а) } I_1 + I_G - I = 0,$$

$$\text{ б) } I'_G + I'_1 - I' = 0,$$

$$I r + I r_{\text{вн}} + I_1 R_1 = \mathcal{E},$$

$$I' r + I' r_{\text{вн}} + I' R_2 + I'_1 R_1 = \mathcal{E},$$

$$I r + I r_{\text{вн}} + I_G R_2 + I_G R = \mathcal{E}.$$

$$I' r + I' r_{\text{вн}} + I' R_2 + I'_G R = \mathcal{E}.$$

Знайдемо I_G та I'_G з лівої (а) та правої (б) систем рівнянь.

Оскільки за умовою задачі $I_G = I'_G$, то

$$\frac{\mathcal{E}R_1}{(r+r_{\text{вн}})(R_1+R_2+R)+R_1(R_2+R)} = \frac{\mathcal{E}R_1}{(r+r_{\text{вн}}+R_2)(R_1+R)+R_1R_2}.$$

Звідси $r_{\text{вн}} = R - r$.

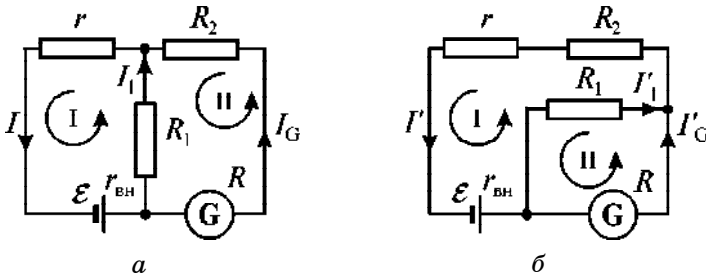


Рис. 201, а, б

6.33. Див. рис. 202.

$$6.34. I_1 = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1R_2 + rR_2 - R_2^2} = 2,63 \text{ А,}$$

$$I_2 = \frac{I_1R_1}{R_2} = 1,75 \text{ А.}$$

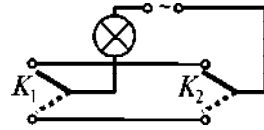


Рис. 202

$$6.35. I = \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3) + \mathcal{E}_0R_3}{RR_2 + RR_3 + R_2R_3}. \text{ Від } R_1 \text{ не залежить.}$$

$$6.36. I_1 = \frac{R_3(\varphi_1 - \varphi_2) + R_2(\varphi_1 - \varphi_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} = 0,2 \text{ А.}$$

6.37. Розглянемо схему на рис. 203.

Для вузлів C та D : $I_1 = I_3 + I$ та $I_4 = I_2 + I$.

Для гілки ACB : $(I_3 + I)R + 2I_3R = U$;

для гілки ADB : $2I_2R + (I_2 + I)R = U$;

для гілки $ADCB$: $2I_2R + 2I_3R = U$.

Розв'язавши систему трьох рівнянь, отримаємо

$I = 0,25U/R = 1 \text{ А}$. Струм тече від точки D до точки C .

6.38. Розглянемо схему на рис. 204. Опір $R_{AB} = (\varphi_A - \varphi_B)/I$.

З першого правила Кірхгофа $I = I_1 + I_2$; $I_1 = I_3 + I_5$; $I_4 = I_2 + I_5$.

З другого правила Кірхгофа:

для гілки ACB : $(I_3 + I_5)r + I_3R = \varphi_A - \varphi_B$;

для гілки ADB : $(I_2 + I_5)r + I_2R = \varphi_A - \varphi_B$;

для гілки $ACDB$: $(I_3 + I_5)r + I_5r + (I_2 + I_5)r = \varphi_A - \varphi_B$.

Розв'язавши систему цих рівнянь, отримаємо

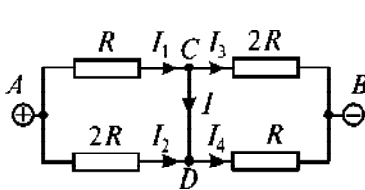


Рис. 203

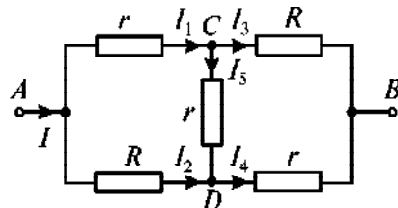


Рис. 204

$$I_2 = \frac{2(\varphi_A - \varphi_B)}{r + 3R}, \quad I_3 = \frac{2(\varphi_A - \varphi_B)}{r + 3R}, \quad I_5 = \frac{(\varphi_A - \varphi_B)(R - r)}{r(r + 3R)}.$$

$$\text{Вхідний струм } I = I_1 + I_2 = I_3 + I_5 + I_2 = \frac{(\varphi_A - \varphi_B)(3r + R)}{r(r + 3R)},$$

$$\text{а опір } R_{AB} = \frac{r(r + 3R)}{R + 3r} = 70 \text{ Ом.}$$

6.39. $U_1 = 6 \text{ В}$, $U_2 = 0 \text{ В}$, $U_3 = 4 \text{ В}$, $U_4 = 4 \text{ В}$.

6.40. Оскільки через конденсатор струм не тече, то різницю потенціалів на його пластинах можна знайти як $\varphi_A - \varphi_B$ у схемі, зображеній на рис. 205:

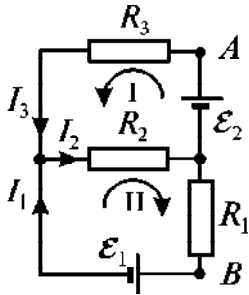


Рис. 205

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_2 + I_1 R_1.$$

Струм I_1 знайдемо з системи рівнянь Кірхгофа:

$$\begin{cases} I_2 = I_1 + I_3; \\ I_2 R_2 + I_1 R_1 = -\mathcal{E}_1; \\ I_3 R_3 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_2. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } I_1 = -\frac{\mathcal{E}_1(R_2 + R_3) + \mathcal{E}_2 R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}.$$

$$\text{Тоді } \varphi_A - \varphi_B = \frac{\mathcal{E}_2 R_3 (R_1 + R_2) - \mathcal{E}_1 R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = -1 \text{ В.}$$

7. Потужність постійного електричного струму. Закон Джоуля–Ленца

$$7.1. I = \mathcal{E}/(R + r) = 0,11 \text{ А}, \quad U = \mathcal{E}R/(R + r) = 0,99 \text{ В},$$

$$U_r = \mathcal{E}r/(R + r) = 0,11 \text{ В}, \quad \eta = R/(R + r) = 0,9.$$

$$7.2. \eta = \frac{\mathcal{E} - Ir}{\mathcal{E}} = 0,25. \quad 7.3. I = I_0 \left(1 + \frac{R_A}{R} \right) = 40 \text{ А.}$$

7.4. Опір шунта, увімкненого паралельно з амперметром,

$$R_{\text{ш}} = \frac{R_{\Lambda}}{n-1} = 0,02 \text{ Ом, де } n = \frac{I_0}{I} = 10. \text{ Ціна поділки амперметра з шунтом — 1 А.}$$

7.5. Додатковий опір, увімкнений послідовно з вольтметром, $R = R_V(n-1) = 3 \text{ кОм}$, де $n = U_0/U = 2,5$. Ціна поділки вольтметра з додатковим опором — 0,5 В.

7.6. а) $R = \frac{R_{\Lambda}}{n-1} = 0,56 \text{ Ом}$, де $n = \frac{I_0}{I} = 10$; опір вмикаємо паралельно;

$$\text{б) } R = \frac{U_0}{I} - R_{\Lambda} = 9995 \text{ Ом; опір вмикаємо послідовно.}$$

7.7. $R = U \frac{U_0 - U}{P} = 300 \text{ Ом}$, тут $U = 120 \text{ В}$;

$$l = \frac{R\pi d^2}{4\rho} = 19,2 \text{ м.}$$

7.8. Схему увімкнення зображено на рис. 206.

$$I_1 = I_2 = 2P_1/U_0 = 0,364 \text{ А};$$

$$I_3 = 2P_3/U_0 = 0,727 \text{ А.}$$

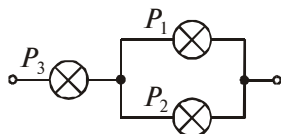


Рис. 206

7.9. За умовою $\eta = 0,99$. З іншого боку,

$$\eta = \frac{I^2 R}{\mathcal{E} I} = \frac{I R}{\mathcal{E}} = \frac{P R}{\mathcal{E}^2} = \frac{P \cdot 2\rho l}{\mathcal{E}^2 S}. \text{ Звідси } S = \frac{2Pl\rho}{\eta \mathcal{E}^2} = 7 \text{ мм}^2.$$

$$\text{7.10. а) } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0,17; \quad \text{б) } \frac{U_1}{U_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0,17.$$

Тут ρ_1 — питомий опір міді; ρ_2 — питомий опір сталі.

$$\text{7.11. а) } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 5,8; \quad \text{б) } \frac{U_1}{U_2} = 1.$$

$$7.12. r = \sqrt{R_1 R_2} = 1 \text{ Ом}, \quad \mathcal{E} = (R_1 + r)\sqrt{P/R_1} = 3,4 \text{ В.}$$

$$7.13. P_1 = \frac{1}{R_2}(\mathcal{E} - IR_3)[I(R_2 + R_3) - \mathcal{E}] = 60 \text{ Вт.}$$

$$7.14. \mathcal{E} = \sqrt{P_1 R_1} + \frac{U_3}{\eta} = 90 \text{ В.}$$

$$7.15. V = \frac{W}{c\rho(t_k - t_0)} = 28,6 \text{ м}^3. \text{ Тут } c \text{ — питома теплоємність}$$

води; ρ — густина води.

$$7.16. P = \frac{V\rho c(t_k - t_0)}{\tau} = 1,2 \text{ кВт}; \quad R = \frac{U^2}{P} = 12 \text{ Ом.}$$

$$7.17. Q = P\tau - V\rho c(t_k - t_0) = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

$$7.18. \tau = \frac{V\rho c(t_k - t_0)}{\eta I(\mathcal{E} - IR_2)} \approx 88,2 \text{ хв.}$$

$$7.19. \eta = \frac{V\rho c(t_k - t_0)}{W} = 0,8.$$

$$7.20. \Delta t = \frac{\eta\tau P}{\rho c V} = 2,98^\circ\text{C.}$$

$$7.21. N = \frac{n}{10^3 \cdot 3600} 30 \left(2IU\tau + \frac{c\rho V(t_k - t_0)}{\eta} \right) = 11 \text{ грн. } 80 \text{ коп.}$$

$$7.22. \tau = \frac{\rho VR [c(t_k - t_0) + \lambda]}{\eta U^2} \cong 50 \text{ хв.}$$

$$7.23. R = \frac{U^2 \tau}{\lambda m} = 32,69 \text{ Ом.}$$

7.24 Оскільки провідник і запобіжник з'єднані послідовно, то крізь них тече однаковий струм. Відношення теплот, які виділяються в провіднику Q_M і запобіжнику Q_{CB} :

$$\frac{Q_M}{Q_{CB}} = \frac{R_M}{R_{CB}} = \frac{\rho_M l_M S_{CB}}{\rho_{CB} l_{CB} S_M}, \text{ де } \rho_M \text{ і } \rho_{CB} \text{ — питомий опір міді та свинцю; } l_M \text{ — довжина мідного провідника; } l_{CB} \text{ — довжина свинцевого провідника. З іншого боку,}$$

$\frac{Q_M}{Q_{CB}} = \frac{\rho'_M c_M l_M S_M \Delta t_M}{\rho'_{CB} l_{CB} S_{CB} (c_{CB} (t_{пл. CB} - t_{0CB}) + \lambda_{CB})}$, де ρ'_M — густина міді; ρ'_{CB} — густина свинцю; λ_{CB} — питома теплота пароутворення свинцю. Прирівнявши ці співвідношення, отримуємо

$$\Delta t_M = \frac{\rho_{CB} \rho'_M S_{CB}^2 (c_{CB} (t_{пл. CB} - t_{0CB}) + \lambda)}{\rho'_{CB} \rho_M S_M^2 c_M} = 1,8^\circ\text{C}.$$

7.25. а) $R = \frac{U^2 \tau}{Q} = 14,4 \text{ Ом};$ б) $l = \frac{R \pi d^2}{4 \rho} = 10,3 \text{ м};$

в) $P = \frac{U^2}{R} = \frac{Q}{\tau} = 1 \text{ кВт}.$

7.26. $Q = j^2 \rho = 1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}.$

7.27. а) Функціональна залежність струму від часу має вигляд $I = I_0 (1 - \tau / \Delta \tau)$. Значення I_0 знайдемо з умови, що весь за-

ряд, який протече крізь спіраль за час $\Delta \tau$, $q = \int_0^{\Delta \tau} I(\tau) d\tau = I_0 \Delta \tau / 2$,

звідси $I_0 = 2q / \Delta \tau$. Тоді кількість теплоти

$$Q = \int_0^{\Delta \tau} I^2(\tau) R d\tau = \int_0^{\Delta \tau} \left[\frac{2q}{\Delta \tau} \left(1 - \frac{\tau}{\Delta \tau} \right) \right]^2 R d\tau = \frac{4q^2 R}{3\Delta \tau} = 20 \text{ кДж}.$$

б) Залежність струму від часу можна описати виразом

$$I = I_0 2^{-\tau / \Delta \tau}. \text{ Заряд } q = \int_0^{\infty} I(\tau) d\tau = \frac{I_0 \Delta \tau}{\ln 2}. \text{ Звідси } I_0 = \frac{q \ln 2}{\Delta \tau}.$$

Кількість теплоти

$$Q = \int_0^{\infty} I^2(\tau) R d\tau = \int_0^{\infty} \left[\frac{q \ln 2}{\Delta \tau} 2^{-\tau/\Delta \tau} \right]^2 R d\tau = \frac{q^2 R \ln 2}{2\Delta \tau} = 0,13 \text{ МДж}.$$

7.28. Струм у колі $I = \frac{\mathcal{E}}{r + R/3}$. Тоді тепла потужність, яка

виділяється в колі, $P = I^2 \frac{R}{3} = \frac{9\mathcal{E}^2}{(3r + R)^2} \frac{R}{3}$. Уззявши похідну

dP/dR і прирівнявши її до нуля, отримаємо $R = 3r$.

7.29. З рис. 207 $I = I_1 + I_2$. Тоді тепла потужність, яка розсіюється на обох резисторах,

$$P(I) = I_1^2 R_1 + (I - I_1)^2 R_2 = \left[I_1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \right]^2 (R_1 + R_2) + I^2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Очевидно, її мінімум буде за умови $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$.

7.30. $P_{\text{тепл}} = I(\mathcal{E} - U) = 0,6 \text{ Вт}$; $P_{\text{ел. сил}} = -IU = -2 \text{ Вт}$.

7.31. Навантажений двигун можна змоделювати приєднанням до нього додаткового опору R_0 (рис. 208). Тоді струм через

обмотку $I = \frac{U}{R + R_0}$, а корисна потужність $P = I^2 R_0 = \frac{U^2 R_0}{(R + R_0)^2}$.

Очевидно, максимум корисної потужності буде при $R = R_0$, і

тоді струм в обмотці $I = \frac{U}{2R}$. Максимум корисної потужності

$P_{\text{макс}} = \frac{U^2}{4R}$. Повна потужність $P_{\text{повн}} = \frac{U^2}{2R}$. Отже, ККД $\eta = 50\%$.

7.32. Якщо діаметр дротини зменшився на δ (у відсотках), то площа її поперечного перерізу зменшилась, а опір дротини збільшився у $(1 - \delta)^{-2}$ разів. Натомість тепла потужність зменшиться пропорційно до площі поверхні, крізь яку тепло переходить у навколишнє середовище (за умовою за-

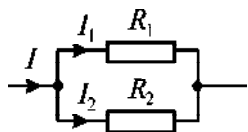


Рис. 207

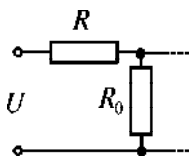


Рис. 208

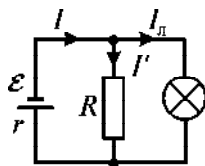


Рис. 209

дачі), тобто $P' = P(1 - \delta)$. Отже, з рівняння теплового балансу $\frac{U^2}{R}(1 - \delta)^2 = P(1 - \delta)$, або $U^2(1 - \delta) = \text{const}$. Для компенсації потужності теплових втрат напругу збільшують у $(1 + \eta)$ разів, тобто $(1 + \eta)^2(1 - \delta) = 1$, або $1 - \delta = (1 + \eta)^{-2} \cong 1 - 2\eta$, звідки $\delta = 2\eta = 2\%$.

7.33. Рівняння теплового балансу $\frac{U^2}{R} - P(t - t_0) = C \frac{dt}{d\tau}$. По-

значимо $y = t - t_0$. Тоді $\frac{dy}{d\tau} + \frac{k}{C}y = \frac{U^2}{CR}$ (1). Розв'язок рівняння

(1) шукатимемо у вигляді $y = A \exp(\alpha\tau) + B$, оскільки лише експоненційна функція подібна до своєї похідної. Тоді залежні від часу доданки в лівій частині рівняння (1) скомпенсуються. Підставимо цей розв'язок у вихідне рівняння (1):

$$A\alpha \exp(\alpha\tau) + \frac{k}{C}A \exp(\alpha\tau) + \frac{k}{C}B = \frac{U^2}{RC}.$$

Отримаємо $\alpha = -\frac{k}{C}$, $B = \frac{U^2}{Rk}$. Отже, $y = A \exp\left(-\frac{k}{C}\tau\right) + \frac{U^2}{Rk}$. Зрозумі-

міло, що $y(0) = 0$. Тоді $A = -\frac{U^2}{Rk}$, а $t = t_0 + \frac{U^2}{Rk} \left(1 - \exp\left(-\frac{k}{C}\tau\right)\right)$.

7.34. Струм джерела (рис. 209) дорівнює сумі струмів резистора і лампочки:

$$I = I' + I_{\text{л}}, \quad \text{або} \quad \frac{\mathcal{E} - U}{r} = \frac{U}{R} + I_{\text{л}}, \quad \text{а звідси} \quad I_{\text{л}} = \frac{\mathcal{E}}{r} - \frac{U(r + R)}{rR},$$

де U — напруга на лампочці. Отже, якщо побудувати пряму ($I_{л} = 5 - 1,2U$) на поданому в умові графіку, то точка перетину обох графіків (U_0, I_0) дасть робочий режим лампочки. Отже, $P = U_0 I_0 \approx 5$ Вт.

7.35. Нехай U — напруга між точками A та B . Тоді теплова потужність, яка виділяється між A та B ,

$$P = \left(\frac{UR_2R_x}{R_1(R_2 + R_x) + R_2R_x} \right)^2 R_x. \quad \text{Якщо вона не залежить від}$$

$$\text{змін } R_x, \text{ то } \frac{dP}{dR_x} = 0, \text{ тоді } R_x = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = 12 \text{ Ом.}$$

7.36. За правилами Кірхгофа отримаємо систему рівнянь:

$$I = I_1 + I_2; \quad I_1R_1 + IR = \mathcal{E}_1; \quad I_2R_2 + IR = \mathcal{E}_2.$$

Тут I_1, I_2, I — струми через резистори R_1, R_2, R , відповідно.

$$\text{Звідси } I = \frac{\mathcal{E}_1R_2 + \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2 + R_1R + R_2R}. \quad \text{Теплова потужність, яка ви-}$$

$$\text{діляється на резисторі } R, \quad P = \left(\frac{\mathcal{E}_1R_2 + \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2 + R_1R + R_2R} \right)^2 R.$$

Максимум потужності P_{\max} знайдемо з умови $\frac{dP}{dR} = 0$. Тоді

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}, \quad \text{а } P_{\max} = \frac{(\mathcal{E}_1R_2 + \mathcal{E}_2R_1)^2}{4R_1R_2(R_1 + R_2)}.$$

7.37. Коли ключ перебуває в положенні 1 , то у колі з конденсатора, резистора R_2 та джерела протікатиме струм доти, доки не зарядиться конденсатор. Напруга на зарядженому конденсаторі — \mathcal{E} , а його енергія $W = C\mathcal{E}^2/2$. Коли ключ перемкнута у положення 2 , то конденсатор розрядиться на резисторах R_1 та R_2 . Причому, оскільки вони з'єднані послідовно, теплота, яка виділиться на кожному з них, пропорційна до їхнього внеску в повний опір:

$$Q = \frac{C\mathcal{E}^2R_1}{2(R_1 + R_2)} = 60 \text{ мДж.}$$

$$7.38. \text{ а) } \Delta W = -\frac{CU^2\eta}{2(1-\eta)} = -0,15 \text{ мДж};$$

$$\text{ б) } A = \frac{CU^2\eta}{2(1-\eta)} = 0,15 \text{ мДж}.$$

$$7.39. \Delta W = -\frac{(\varepsilon - 1)CU^2}{2} = -0,5 \text{ Дж};$$

$$A = \frac{(\varepsilon - 1)CU^2}{2} = 0,5 \text{ Дж}.$$

7.40. Нехай висота конденсатора — l , а R — середній радіус його обкладок. Ємність конденсатора без води $C_0 = \frac{\varepsilon_0 2\pi R l}{d}$, а

енергія $W_0 = \frac{C_0 U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 2\pi R l U^2}{2d}$. Якщо вода піднялась на висоту h між пластинами конденсатора, то ємність новоутвореного конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 2\pi R h}{d} + \frac{\varepsilon_0 2\pi R (l - h)}{d} = \frac{\varepsilon_0 2\pi R}{d} (l + (\varepsilon - 1)h).$$

Енергія конденсатора і потенціальна енергія води

$$W = \frac{\varepsilon_0 2\pi R}{2d} (l + (\varepsilon - 1)h)U^2 + \rho g (2\pi R h d) \frac{h}{2}, \text{ де } \rho \text{ — густина води.}$$

Припустимо, що h змінилась на δh . Тоді енергія конденсатора і рідини зросте на

$$\delta W = \delta h \left(\frac{\varepsilon_0 2\pi R}{2d} (\varepsilon - 1)U^2 + \rho g 2\pi R h d \right), \text{ а батарея виконає роботу,}$$

яка дорівнює добутку напруги U на додатковий заряд, який пройде в колі: $\delta A = \delta h \frac{\varepsilon_0 2\pi R}{d} (\varepsilon - 1)U^2$.

З рівняння $\delta A = \delta W$ отримаємо $h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)U^2}{2\rho g d^2}$.

8. Струм у різних середовищах

8.1. Кількість відкладеної речовини і на катоді, і на аноді відповідає 1 Кл, оскільки за 1 с до катода не лише підходять позитивні йони з зарядом 0,5 Кл, а й відходять негативні йони з зарядом 0,5 Кл, і, відповідно, біля катода вивільняється стільки ж позитивних іонів.

$$8.2. Q = \frac{I_{\max} t}{2} = 20 \text{ Кл}; \quad m = Q \frac{1}{F} \frac{\mu}{z_{\text{Cu}}} = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ кг.}$$

$$8.3. t = \frac{mFz_{\text{Cu}}}{\mu_{\text{Cu}}I} = 7198 \text{ с} \approx 2 \text{ год.}$$

$$8.4. m_0 = kq = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

$$8.5. t = \frac{\Delta m F z_{\text{Cu}}}{\mu_{\text{Cu}} j S} = 601 \text{ с} \approx 10 \text{ хв}; \quad d = \frac{\Delta m}{\rho S} = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

$$8.6. j = \frac{mFz_{\text{Cu}}}{\mu_{\text{Cu}} S t} = 56,2 \text{ мкА/м}^2.$$

$$8.7. I' = \frac{mFz_{\text{Ag}}}{\mu_{\text{Ag}} t} = 0,94 \text{ А. На } 0,04 \text{ А менше від реального}$$

значення.

$$8.8. m_{\text{Cu}} = m_{\text{Ag}} \frac{\mu_{\text{Cu}} z_{\text{Ag}}}{\mu_{\text{Ag}} z_{\text{Cu}}} = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ кг.}$$

$$8.9. t = \frac{mFz_{\text{Al}}}{\mu_{\text{Al}} I} = 533333 \text{ с} = 148,1 \text{ год}; \quad W = UIt = 53,3 \text{ ГДж.}$$

$$8.10. W = \frac{UmFz_{\text{Ag}}}{\mu_{\text{Ag}}} = 1779 \text{ Дж.}$$

8.11. Для виділення маси m речовини під час електролізу потрібна енергія $W = UIt = \frac{UmzF}{\mu}$, звідки $U = \frac{W\mu}{mzF}$. З рівняння реакції бачимо, що для розкладання 2 моль води й отримання 4 г водню потрібна енергія $W = 5,57 \cdot 10^5$ Дж. Отже, $U = 1,46$ В.

$$\mathbf{8.12.} \quad h = \frac{\mu_{\text{Ni}} It}{\rho_{\text{Ni}} S F z_{\text{Ni}}} = 15,5 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

$$\mathbf{8.13.} \quad m = \frac{1}{F} \frac{\mu_{\text{Cu}}}{z_{\text{Cu}}} \frac{3n\mathcal{E}}{3R + nr} t \approx 4,3 \cdot 10^{-9} \text{ кг.}$$

8.14. Підіймальну силу знайдемо як різницю сили Архімеда та сили тяжіння $F_{\text{під}} = F_{\Lambda} - F_{\text{тяж}} = (\rho_{\text{пов}} - \rho_{\text{H}_2}) gV = \frac{\mu_{\text{пов}} - \mu_{\text{H}_2}}{V_{\mu}} gV$, де V_{μ} — молярний об'єм. Маса водню, яка виділиться під час електролізу за час t , $m = \frac{\mu_{\text{H}_2}}{V_{\mu}} V = \frac{It\mu_{\text{H}_2}}{Fz_{\text{H}_2}}$, звідки $V = \frac{ItV_{\mu}}{Fz_{\text{H}_2}}$. Тоді $F_{\text{під}} = \frac{\mu_{\text{пов}} - \mu_{\text{H}_2}}{Fz_{\text{H}_2}} gI$, а час наповнення кулі $t = \frac{F_{\text{під}} Fz_{\text{H}_2}}{(\mu_{\text{пов}} - \mu_{\text{H}_2}) gI}$.

8.15. Об'єм утвореного газу дорівнює сумі об'ємів водню та кисню, виділених під час електролізу: $V = V_{\text{H}_2} + V_{\text{O}_2}$.

Об'єм водню $V_{\text{H}_2} = \frac{m_{\text{H}_2}}{\rho_{\text{H}_2}} = \frac{m_{\text{H}_2}}{\mu_{\text{H}_2}} V_{\mu}$, де V_{μ} — молярний об'єм.

Аналогічно, об'єм кисню $V_{\text{O}_2} = \frac{m_{\text{O}_2}}{\mu_{\text{O}_2}} V_{\mu}$ (1).

Масу водню H_2 та кисню O_2 знайдемо з закону Фарадея:

$$m_{\text{H}_2} = \frac{\mu_{\text{H}_2} It}{Fz_{\text{H}_2}} \quad (2), \quad m_{\text{O}_2} = \frac{\mu_{\text{O}_2} It}{Fz_{\text{O}_2}} \quad (3).$$

Підставимо (2), (3) в рівняння (1), знайдемо шуканий об'єм:

$$V = \frac{It}{F} \left(\frac{1}{z_{\text{H}_2}} + \frac{1}{z_{\text{O}_2}} \right) V_{\mu} = 1,05 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

8.16. Концентрація розчинених молекул $n = \frac{m}{\mu_{\text{NaCl}}} \frac{N_{\Lambda}}{V}$. Концентрація молекул, які дисоціювали, $n' = 0,44n$. Питома електропровідність $\sigma = 0,44 \frac{mN_{\Lambda}}{\mu_{\text{NaCl}}V} e(u_+ + u_-) = 0,24 \text{ См/м}$.

8.17. Густина струму у провіднику $j = env_d$, де n — концентрація електронів; v_d — дрейфова швидкість їхнього руху. Сумарний імпульс

$$p = Nm_e v_d = nSlm_e v_d = Slm_e \frac{j}{e} = \frac{m_e Il}{e} = 4,0 \text{ нН} \cdot \text{с}.$$

8.18. Густина струму $j = env_d$, концентрація $n = \frac{\rho}{A_{\text{Cu}} m_{\text{a.o.m.}}}$, де ρ — густина міді; A_{Cu} — атомна маса міді. Електрони долають відстань l за час $t = \frac{l}{v_d} = \frac{nel}{j}$. Середня відстань, яку вони пройдуть завдяки тепловому руху,

$$\langle S \rangle = \frac{enl \langle v \rangle}{j} = \frac{e\rho l \langle v \rangle}{A_{\text{Cu}} m_{\text{a.o.m.}} j} \approx 10^7 \text{ м}, \text{ де } \langle v \rangle \text{ — середня арифметична швидкість теплового руху електрона.}$$

8.19. а) $t = \frac{enlS}{I} = 3 \text{ Мс}$, де $n = \frac{\rho}{A_{\text{Cu}} m_{\text{a.o.m.}}}$ — концентрація електронів.

б) Сила, яка діє на один електрон, $F_0 = |e\vec{E}| = |e\rho'\vec{j}|$, де ρ' — питомий опір міді. Сумарна кількість електронів — nSl . Тоді $F = enl\rho'I = 1 \text{ МН}$.

8.20. Напруженість електричного поля на поверхні пучка знайдемо з теореми Остроградського–Гаусса, оточивши ділянку потоку електронів довжиною l коаксіальною циліндричною поверхнею радіусом r :

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{eN}{\epsilon_0}, \text{ тобто } E \cdot 2\pi rl = \frac{eN}{\epsilon_0} \quad (1), \text{ де } N \text{ — кількість протонів, охоплених поверхнею. З іншого боку,}$$

$$I = jS = e \frac{N}{V} v_d S = e \frac{N}{l} v_d = e \frac{N}{l} \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad (2),$$

де S — площа поперечного перерізу пучка; v_d — дрейфова швидкість протонів; V — об'єм, який охоплює циліндрична поверхня.

$$\text{Тоді з (1) та (2) напруженість } E = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 r} \sqrt{\frac{m}{2eU}} = 16,7 \text{ кВ/м.}$$

Знайдемо напруженість електричного поля на відстані $r' < r$ від осі пучка. З теореми Остроградського–Гаусса

$$\oint_s (\vec{E} d\vec{S}) = E(r') \cdot 2\pi r' l = \frac{eN'}{\epsilon_0}.$$

$$\text{Струм } I = jS = e \frac{N'}{V'} v_d S = e \frac{N'}{S'l} v_d S = e \frac{N'}{\pi r'^2 l} v_d \pi r'^2 = e \frac{N'}{l} \sqrt{\frac{2eU}{m}} \frac{r^2}{r'^2}.$$

$$\text{Отже, з цих двох рівнянь напруженість } E(r') = \frac{I r'}{2\pi r^2 \epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eU}}.$$

Різниця потенціалів між поверхнею та віссю пучка

$$\Delta\varphi = \int_0^r E(r) dr' = \frac{I}{2\pi r^2 \epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eU}} \int_0^r r' dr' = \frac{I}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eU}} = 0,4 \text{ В.}$$

8.21. Рівняння дисоціації: $\text{HNO}_3 \rightarrow \text{H}^+ + \text{NO}_3^-$. За час t іони переносять заряд $Q = It$. Густина струмів позитивних та негативних іонів, відповідно, $j_+ = en_+ u_+ E$ та $j_- = en_- u_- E$, де n_+ і n_- — концентрації йонів; u_+ і u_- — рухливості йонів; E — напруженість електричного поля. З рівняння дисоціації видно, що концентрації позитивних і негативних іонів однакові ($n_+ = n_-$).

Отже, відношення густин $\frac{j_+}{j_-} = \frac{u_+}{u_-}$, або $\frac{I_+}{I_-} = \frac{Q_+}{Q_-} = \frac{u_+}{u_-}$. Окрім того, сумарний заряд, який переносять іони обох знаків $Q_- + Q_+ = (I_- + I_+) t = It$. Отже, $Q_+ = \frac{Itu_+}{u_- + u_+}$, $Q_- = \frac{Itu_-}{u_- + u_+}$.

$$\mathbf{8.22.} \quad j = \frac{en(u_+ + u_-)U}{d} = 0,24 \text{ мкА/м}^2; \quad \frac{j_+}{j} = \frac{u_+}{u_+ + u_-} = 1,5 \cdot 10^{-4}.$$

8.23. Струм насичення $I_{\text{н}} = n_i e d S = 0,1 \text{ мкА}$.

$$\mathbf{8.24.} \quad R = \frac{l}{enS(u_+ + u_-)} = 3,4 \cdot 10^{14} \text{ Ом.}$$

8.25. Закон Ома для невеликих струмів у газі має вигляд

$$j = qn_i(u_+ + u_-)E \quad (1).$$

З урахуванням того, що кількість пар іонів $n_i = \sqrt{\frac{n_{i.o}}{\gamma}}$, заряд іонів дорівнює заряду електронів: $q = e$, напруженість $E = \frac{U}{d}$.

З (1) отримаємо $j = q\sqrt{\frac{n_{i.o}}{\gamma}}(u_+ + u_-)\frac{U}{d}$ (2). Сила струму $I = jS$ (3),

Підставивши (2) в (3), знайдемо струм, який протече між

$$\text{електродами, } I = q\sqrt{\frac{n_{i.o}}{\gamma}}(u_+ + u_-)\frac{US}{d} = 1,0 \text{ нА.}$$

Струм насичення $I_{\text{н}} = j_{\text{н}}S = n_{i.o}edS = 0,1 \text{ мкА}$. Тому $\frac{I}{I_{\text{н}}} = 0,01$.

8.26. Аніонів пройшло $\frac{Q}{e} \cdot \frac{u_+}{u_+ + u_-}$, а катіонів — $\frac{Q}{e} \cdot \frac{u_-}{u_+ + u_-}$.

$$\mathbf{8.27.} \quad t = \frac{e^2}{2uU} = 0,8 \text{ мс.} \quad \mathbf{8.28.} \quad \sigma = qn_i(u_+ + u_-) = 0,5 \text{ нСм.}$$

$$\mathbf{8.29.} \quad n_i = \frac{Id}{eSU(u_+ + u_-)} = 1,6 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3}.$$

$$\mathbf{8.30.} \quad j_{\text{н}} = n_{i.o}ed = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ А/м}^2.$$

$$\mathbf{8.31.} \quad n_i = \frac{Id}{eSU(u_+ + u_-)} = 3,4 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}.$$

$$\mathbf{8.32.} \quad n_{i.o} = \frac{I_{\text{н}}}{eV} = 5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}.$$

$$8.33. v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$8.34. j = n_i (u_+ + u_-) eE = 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ А/м}^2.$$

$$8.35. n_{i.o} = \frac{I_H}{edS} = 1,25 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

8.36. а) За теоремою Остроградського–Гаусса у диференціальному вигляді $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Оскільки потенціал залежить лише від x , то

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi) = \frac{d}{dx} \left[-\frac{d}{dx} (\alpha \sqrt[3]{x^4}) \right] = -\frac{4}{9} \frac{\alpha}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}.$$

$$\text{Звідси } \rho(x) = -\frac{4}{9} \frac{\varepsilon_0 \alpha}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

б) Робота електричного поля з перенесення електрона витрачається на збільшення його кінетичної енергії $\frac{mv^2}{2} = e\varphi$, або

$$v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}. \text{ Тоді } j = en_i v = \rho v = \frac{4\varepsilon_0 \alpha}{9\sqrt[3]{x^2}} \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}} = \frac{4\varepsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e\alpha^3}{m}}.$$

$$8.37. n_i = \frac{Id}{eSU(u_+ + u_-)} = 2,3 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}.$$

8.38. Швидкість руху зарядів $v(t) = uE(t) = u \frac{U_0}{l} \sin \omega t$, яка є додатною при $0 \leq \omega t \leq \pi$. Отже, максимальне зміщення в одному напрямі $x_{\max} = \int_0^\pi u \frac{U_0}{d} \sin(\omega t) dt = \frac{2uU_0}{d\omega}$. При $\omega = \omega_0$ та $x_{\max} = d$

$$\text{рухливість іонів } u = \frac{\omega_0 d^2}{2U_0}.$$

$$8.39. \text{ а) } n_{i.o} = \frac{I_H}{eV} = 6 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

б) Рівняння балансу йонів $dn_i/dt = n_{i,0} - \gamma n_i^2$, де перший доданок є кількістю йонів, які утворюються під час дії йонізатора, а другий — кількість рекомбінацій йонів, яка пропорційна до n_i^2 (добуток кількостей позитивних і негативних йонів). За рівноваги $dn_i/dt = 0$. Отже, $n_i = \sqrt{n_{i,0}/\gamma} = 6 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$.

8.40. До вимкнення йонізатора $n_i = \sqrt{n_{i,0}/\gamma}$. Після вимкнення йонізатора $dn_i/dt = -\gamma n_i^2$, або $dn_i/n_i^2 = -\gamma dt$. Отже,

$$\gamma t = \frac{1}{n_i} + \text{const.} \text{ У момент вимкнення } (t=0) \text{ } n_i = n_i(0), \text{ отже,}$$

$$\gamma t = \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_i(0)}. \text{ Якщо концентрація зменшиться у } \eta \text{ разів, то}$$

$$\gamma t = \frac{\eta}{n_i(0)} - \frac{1}{n_i(0)} = \frac{\eta - 1}{n_i(0)}, \text{ або } t = \frac{\eta - 1}{\sqrt{\gamma n_{i,0}}} = 13,1 \text{ мс.}$$

8.41. Утворені між пластинами йони спричинятимуть зменшення заряду на пластинах: $\eta CU = \eta \frac{\varepsilon_0 S}{d} U = \Delta q = It = en_{i,0} S dt$.

$$\text{Звідси отримуємо } t = \frac{\varepsilon_0 \eta U}{en_{i,0} d^2} = 4,6 \text{ доби.}$$

8.42. Приріст кількості електронів, які рухаються до анода, на відстані $(x + dx)$ від катода за одиницю часу, якщо на відстані x було n , знайдемо з рівняння $dn = n \alpha dx$. Розв'язком цього диференціального рівняння є експоненціальна залежність $n(x) = n(0)e^{\alpha x}$, де $n(0)$ — кількість електронів, які щосекунди вилітають з катода (початкова умова $x = 0$). Біля анода $x = d$, тому кількість електронів $n(d) = n(0)e^{\alpha d}$, а електронний струм $I = en(d) = en(0) \exp(\alpha d)$.

8.43. В об'ємі шару площею S і товщиною dx щосекунди утворюється $n_{i,0} S dx$ електронів. Тоді, врахувавши залежність $n(x) = n(0)e^{\alpha x}$ з задачі **8.42** щосекунди кількість електронів біля пластини з більшим потенціалом визначатиме інтеграл

$$n = \int_0^d n_{i,0} \exp(\alpha x) S dx = \frac{n_{i,0} S}{\alpha} [\exp(\alpha d) - 1].$$

Густина струму біля цієї пластини

$$j = \frac{en}{S} = \frac{en_{i.o}}{\alpha} [\exp(\alpha d) - 1].$$

9. Постійне магнітне поле. Сила Ампера. Закон Біо–Савара–Лапласа

9.1. $B = \epsilon_0 \mu_0 v E \sin \alpha = 3,0$ пТл.

9.2. а) За законом Біо–Савара–Лапласа $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l} \vec{r}]}{r^3}$.

Оскільки $\angle(d\vec{l}, \vec{r}) = \pi/2$ (рис. 210), то

$$B = \int_0^B dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I}{2R} = 6,3 \text{ мкТл.}$$

б) Аналогічно до попереднього випадку

$$B = \int_0^B dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{dl \cos \theta}{R^2 + x^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{R dl}{(\sqrt{R^2 + x^2})^3} =$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2(\sqrt{R^2 + x^2})^3} = 2,3 \text{ мкТл.}$$

Напрямок вектора \vec{B} збігається з напрямом \vec{x} .

9.3. Розглянемо на провіднику елемент струму $d\vec{l}$ (рис. 211). Індукція магнітного поля, яке створює цей елемент струму в

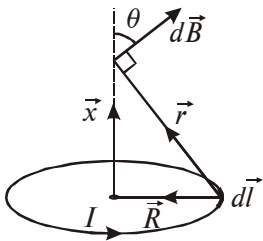


Рис. 210

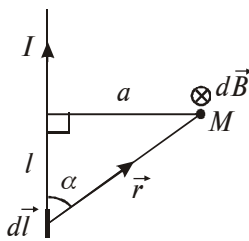


Рис. 211

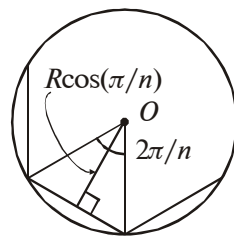


Рис. 212

точці M , $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3}$. Вектор $d\vec{B}$ напрямлений у точці M від нас до площини рисунка.

Отже, $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$, $r = \frac{a}{\sin \alpha}$, $l = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$, $dl = \frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}$. Звідки

$$B = \int_0^B dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{a d\alpha \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha a^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

Тоді $H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi a} = 0,4$ А/м.

9.4. З умови задачі бачимо, що межі інтегрування у задачі **9.3**

потрібно змінити на $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right]$, або $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$. Отже,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \alpha \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}.$$

Або $H = \frac{I}{4\pi a} = 31,8$ А/м.

9.5. З рис. 212, врахувавши розв'язок **9.4**, отримаємо

$$B = \frac{n\mu_0 I}{4\pi R \cos(\pi/n)} \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}} \sin \alpha d\alpha = -\frac{n\mu_0 I}{4\pi R \cos(\pi/n)} \cos \alpha \Big|_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}} = \frac{n\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

При $n \rightarrow \infty$ індукція $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

9.6. Шукана точка розташована на відстані 3,3 см від точки A між струмами I_1 та I_2 .

$$\mathbf{9.7.} \quad H_1 = \sqrt{\left(\frac{I_1}{2\pi AM_1} \right)^2 + \left(\frac{I_2}{2\pi(AB + AM_1)} \right)^2} = 35,6 \text{ А/м;}$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{I_1}{2\pi AM_2} \right)^2 + \left(\frac{I_2}{2\pi(AB - AM_2)} \right)^2} = 57,4 \text{ А/м.}$$

$$9.8. H_1 = \frac{I_2}{2\pi AM_1} - \frac{I_1}{2\pi BM_1} = 31,9 \text{ А/м};$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi AM_2} + \frac{I_1}{2\pi CM_2} = 63,7 \text{ А/м}.$$

9.9. Індукцію магнітного поля всередині прямокутника можемо знайти як суму індукцій полів, які створює кожна з його сторін (рис. 213):

$$B = B_{AB} + B_{BC} + B_{CD} + B_{DA}, \text{ де } B_{AB} = B_{CD}$$

та $B_{BC} = B_{DA}$. Із розв’язку задачі 9.4 отримаємо

$$B_{AB} = B_{CD} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{(d/2) \cos(\varphi/2)} \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right);$$

$$B_{BC} = B_{DA} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{(d/2) \sin(\varphi/2)} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \right).$$

$$\text{Отже, } B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8I}{d} \left(\frac{\cos(\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} + \frac{\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)} \right) = \frac{4\mu_0 I}{\pi d \sin \varphi} = 0,1 \text{ мТл}.$$

9.10. Індукцію магнітного поля в точці O знайдемо як суму індукцій полів, які створюють дуга та лінійна ділянка дротини:

$$B = B_{\text{дуги}} + B_{\text{пряма}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (2\pi - 2\varphi) + \frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos \varphi} \cdot 2 \sin \varphi =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \varphi + \operatorname{tg} \varphi) = 28 \text{ мкТл}.$$

9.11. Розіб’ємо контури в обох випадках на ділянки, як показано на рис. 214, а та 214, б, відповідно. Індукцію магнітного поля в точці O знайдемо з принципу суперпозиції.

а) $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$. Тут $B_2 = B_4 = 0$, оскільки напрям на точку O збігається з напрямом струму ($I[d\vec{l} \vec{r}] = 0$ за законом Біо–Савара–Лапласа). Отже,

$$B = B_1 + B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} (2\pi - \varphi) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\varphi}{b} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{2\pi - \varphi}{a} + \frac{\varphi}{b} \right).$$

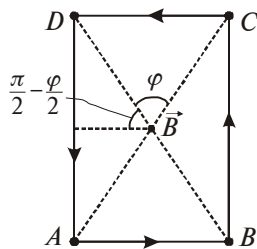


Рис. 213

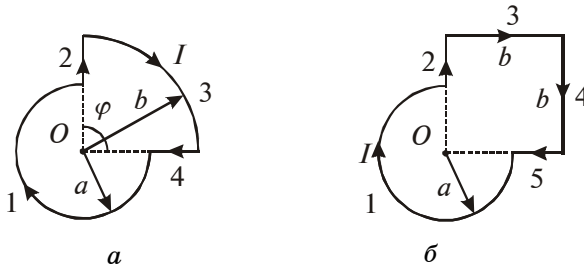


Рис. 214, а, б

б) Аналогічно $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$; тут $B_2 = B_5 = 0$. Отже,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \frac{3\pi}{2}; \quad B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cos \alpha \Big|_{\pi/2}^{3\pi/4} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$B_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cos \alpha \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Тоді, } B = B_1 + B_3 + B_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{3\pi}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{b} \right).$$

9.12. З рис. 215 бачимо, що коли розіб'ємо циліндричну поверхню труби на вузькі смужки товщиною h ($h \ll R$), то діаметрально протилежні смужки зі струмами dI та dI' створюватимуть поля на осі OO' , індукція яких однакова за значенням і протилежна за напрямом. Отже, некомпенсованим залишиться лише поле смужки, яка діаметрально протилежна до прорізу.

По одній смужці тече струм $I \frac{h}{2\pi R}$, де R — радіус труби. Із задачі 9.3 маємо, що на віддалі R від довгого тонкого провідника зі струмом індукція магнітного

поля $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$. Тоді для нашого випадку $B = \frac{\mu_0 h I}{4\pi^2 R^2}$.

9.13. Розіб'ємо провідник на тонкі смужки, які з осі OO' видно під кутом $d\varphi$ (рис. 216). Кожну таку смужку можна

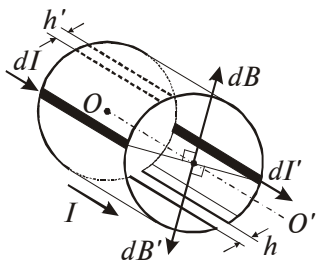


Рис. 215

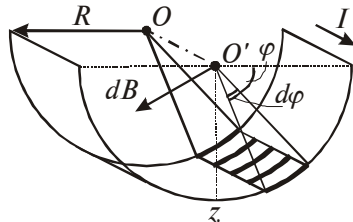


Рис. 216

вважати тонким провідником, який на осі створює поле з магнітною індукцією $dB = \frac{\mu_0}{2\pi R} I \frac{R d\varphi}{\pi R}$. З рис. 216 видно, що на всіх точках осі OO' індукція

$$B = \int_0^{\pi} dB \sin \varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 28 \text{ мкТл}.$$

9.14. $B = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l} = 2,0 \text{ мкТл}.$

9.15. а) $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{4 + \pi^2} = 30 \text{ мкТл};$

б) $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{2 + 2\pi + \pi^2} = 34 \text{ мкТл}.$

9.16. а) Запишемо закон повного струму для квадратного контуру зі стороною l , зображеного на рис. 217:

$$\oint (\vec{B} d\vec{l}) = 2Bl = \mu_0 i l.$$

Отже, індукція $B = \mu_0 i / 2$.

б) Оскільки струми течуть у різних напрямках, то між площинами $B = \mu_0 i$, а поза площинами $B = 0$.

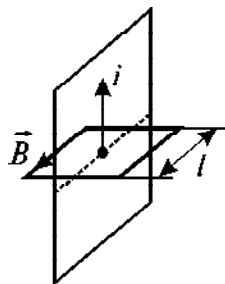


Рис. 217

9.17. Переконаємось у тому, що в обох частинах простору, які розділені провідною площиною, можлива лише вихрова складова індукції магнітного поля B відносно провідника (рис. 218). Справді, якби в довільній точці була її поздовжня складова, то це б порушувало теорему Остроградського–Гаусса. Отже, індукція магнітного поля дорівнює лише вихровій її складовій в обох півпросторах і має бути симетричною щодо провідника. У півпросторі, де розташована пряма дротина, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, де r — відстань від дротини. В іншому півпросторі $B = 0$.

9.18. Аналогічно до зачачі **9.17** розглядатимемо лише вихрову складову індукції магнітного поля у середовищі відносно осі дротини. Для контуру з центром на цій осі, який містить точку A , згідно з законом повного струму, отримаємо

$$\oint_{2\pi r \sin \vartheta} (\vec{B} d\vec{l}) = B \cdot 2\pi r \sin \vartheta = \mu_0 I \frac{2\pi r \cdot r(1 - \cos \vartheta)}{2\pi r^2},$$

де $\frac{2\pi r \cdot r(1 - \cos \vartheta)}{2\pi r^2}$ — відношення обмеженої контуром площі частини півсфери радіусом r з центром у точці O , до повної площі півсфери.

$$\text{Отже, } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}.$$

$$\mathbf{9.19.} \quad \vec{B}(r \leq R) = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j} \vec{r}], \quad \vec{B}(r \geq R) = \frac{\mu_0 R^2}{2r^2} [\vec{j} \vec{r}].$$

9.20. Розглянемо еквівалентну задачу про струм у суцільному провіднику без порожнини і протилежний струм, що протікає по провіднику, розташованому у порожнині (рис. 219). Тоді, записавши теорему про циркуляцію вектора магнітної індукції для довільної точки у порожнині, отримаємо

$$B(\vec{l}) = B(\vec{r}) - B'(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j} \vec{r}] - \frac{\mu_0}{2} [\vec{j} \vec{r}'] = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j} (\vec{r} - \vec{r}')].$$

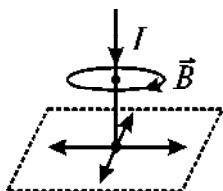


Рис. 218

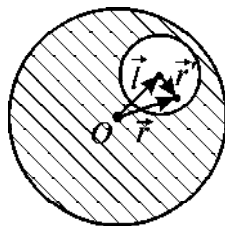


Рис. 219

Отже, $B = B(\vec{l}) = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j} \vec{l}]$. Поле в порожнині однорідне.

9.21. Виберемо контур радіусом r , перпендикулярний до напрямку руху пучка. Тоді з теореми про циркуляцію вектора магнітної індукції отримаємо

$$\oint B dr = 2\pi b r^\alpha = \int_0^r (\vec{j} d\vec{S}) = \int_0^r 2\pi\mu_0 r' j(r') dr',$$

$$\text{або } b r^\alpha = \int_0^r \mu_0 r' j(r') dr'.$$

Продиференціювавши обидві частини, маємо

$$j(r) = \frac{b}{\mu_0} (1 + \alpha) r^{\alpha-1}.$$

9.22. Поле одного витка, який розташований на відстані x від центра котушки, $B_0 = \frac{\mu_0 I R^2}{2} (R^2 + x^2)^{-3/2}$.

Якщо вибрати елемент соленоїда довжиною dx , то його поле

$$dB = \frac{\mu_0 I R^2}{2} (R^2 + x^2)^{-3/2} n dx. \text{ Тоді поле на осі соленоїда}$$

$$B = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \frac{x}{R^2 \sqrt{R^2 + x^2}} \Big|_{-l/2}^{l/2} =$$

$$= \frac{\mu_0 n l I}{2\sqrt{R^2 + (l/2)^2}} = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{1 + 4R^2/l^2}}.$$

9.23. $IN = Hl = 200 \text{ A} \cdot \text{в}; \quad U = \frac{4\rho DIN}{d^2} = 2,7 \text{ В.}$

9.24. Середня напруженість магнітного поля всередині соленоїда $H = IN/l$. Звідси $I = Hl/N$. Заряд, який протікає за період T , $q = IT$. З іншого боку, це заряд конденсатора $q = CE$.

Тоді $\frac{CE}{T} = \frac{Hl}{N}$. Частота перемикання $\nu = \frac{1}{T} = \frac{Hl}{CEN} = 100 \text{ Гц.}$

9.25. Оскільки стрічка тонка і щільно намотана одним шаром, то можемо розглядати струм, що протікає по ній, як суму поверхневих струмів: I_{\perp} — перпендикулярно до осі соленоїда, I_{\parallel} — паралельно до осі соленоїда. Зокрема

$$I_{\perp} = I \frac{\sqrt{(2\pi R)^2 - h^2}}{2\pi R} = I \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2}, \quad I_{\parallel} = I.$$

Тут I_{\parallel} треба розраховувати як величину заряду, що переноситься за одиницю часу паралельно до осі соленоїда. Тому цей струм дорівнює I , а отже, не залежить від геометрії котушки соленоїда. Струм I_{\parallel} не робить внеску в магнітне поле всередині соленоїда. Тоді поле всередині довгого соленоїда

однорідне і $B = \mu_0 n I_{\perp} = \frac{\mu_0 I_{\perp}}{h} = \frac{\mu_0 I}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2} = 0,3 \text{ мТл.}$

Струм I_{\parallel} створює магнітне поле за межами соленоїда. На відстані r від його осі за теоремою про циркуляцію вектора магнітної індукції $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$, або $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R)$.

9.26. Позначимо радіус тороїда через R . Згідно з теоремою про циркуляцію вектора магнітної індукції, магнітне поле всередині тороїда знаходимо з виразу $B_c \cdot 2\pi R = \mu_0 NI$, або $B_c = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R}$.

Індукція магнітного поля $B_{\text{ц}}$ у центрі тороїда утворена лише одним коловим струмом I з радіусом R , тобто

$$B_{\text{ц}} = \frac{\mu_0 I}{2R}. \text{ Отже, } \eta = \frac{B_{\text{с}}}{B_{\text{ц}}} = \frac{N}{\pi} \approx 800.$$

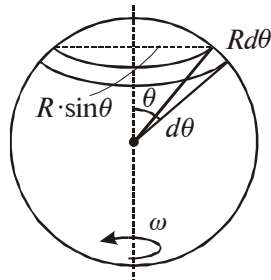


Рис. 200

9.27. Оскільки маємо непровідну сферу, то заряд розміщений по її поверхні. Розглянемо кільцевий елемент сфери, який видно з її центра під кутом $d\theta$, як показано на рис. 220. Утворений обертанням кільця струм

$$di = \frac{\omega}{2\pi} (2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta) \sigma. \text{ Магнітна індукція такого кільцевого}$$

го елемента в центрі сфери (див. 9.2)
$$dB = \frac{\mu_0 di \cdot R^2 \sin^2 \theta}{2R^3}.$$

$$\text{Отже, } B = \int_0^{\pi} dB = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 \omega \sigma R \sin^3 \theta d\theta}{2} = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} \int_0^{\pi} (\cos^2 \theta - 1) d \cos \theta,$$

$$\text{або } B = \frac{2\mu_0 \omega \sigma R}{3} = 29 \text{ пТл.}$$

9.28. а) $F_{\text{о.д}} = \frac{\mu_0 I^2}{4R} = 0,2 \text{ мН/м};$ б) $F_{\text{о.д}} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi l} = 0,13 \text{ мН/м.}$

9.29. $\frac{F_{\Lambda}}{mg} = \frac{I \mu_0 H_{\Gamma}}{S \rho g} = 1,2 \cdot 10^{-5};$ $F_{\text{о.д}} = F_{\Lambda} = I \mu_0 H_{\Gamma} = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м.}$

9.30. $A = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1} = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м.}$

9.31. На елемент витка dl (рис. 221) діє сила $BIdl$. Це спричиняє появу сили натягу T у витку. За умов рівноваги $Td\alpha = BIdl$, де $d\alpha$ — кут, під яким видно елемент витка з його центра. Силу T , яка діє на цілий виток, знаходимо з рівняння $T \cdot 2\pi = BI \cdot 2\pi R$, її має зрівноважувати міцність міді

$\sigma_m \cdot \pi \frac{d^2}{4}$, де $\sigma_m = 0,3$ ГПа — межа міцності міді. Звідси

$$B = \frac{\pi d^2 \sigma_m}{4RI} = 7,9 \text{ кТл.}$$

9.32. Запишемо умову рівноваги для механічних моментів відносно точки O (рис. 222), які утворені силою тяжіння та

силою Ампера: $2mg \frac{l}{2} \sin \vartheta + mgl \sin \vartheta = F_A l \cos \vartheta$. Звідси

$F_A = 2\rho l S g \operatorname{tg} \vartheta = IlB$, де ρ — густина міді. Отже,

$$B = \frac{2\rho g S}{I} \operatorname{tg} \vartheta = 10 \text{ мТл.}$$

9.33. а) $F_A = \frac{2\mu_0 I_0 I}{\pi(4\eta^2 - 1)} = 0,40 \text{ мкН;}$

б) $A = \frac{\mu_0 a I_0 I}{\pi} \ln\left(\frac{2\eta + 1}{2\eta - 1}\right) = 0,1 \text{ мкДж.}$

9.34. Із задачі 9.13 маємо формулу індукції магнітного поля, створеного на осі провідника з півкільцевим перерізом:

$B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$. Тоді на тонкий провідник діє сила $F = IlB$. Отже,

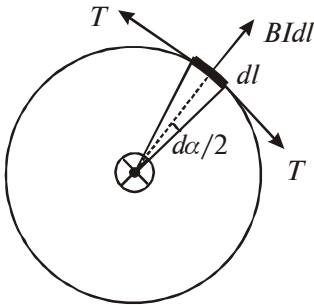


Рис. 221

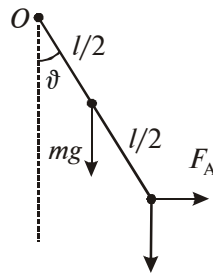


Рис. 222

сила магнітної взаємодії провідників на одиницю їхньої довжини

$$F_{\text{о.д}} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R} = 0,5 \text{ мН/м.}$$

9.35. Знайдемо силу магнітної взаємодії між тонким провідником зі струмом I_1 та елементом стрічкового провідника шириною dr , по якому протікає струм $\frac{I_2}{b} dr$ (рис. 223).

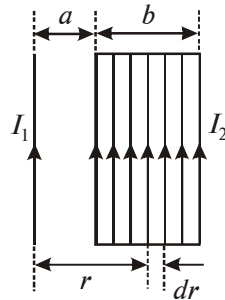


Рис. 223

На одиницю їхньої довжини ця сила

$$dF_{\text{о.д}} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \cdot \frac{I_2}{b} dr. \text{ Тоді повна сила магнітної взаємодії}$$

$$F_{\text{о.д}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a}.$$

9.36. З теореми про циркуляцію вектора магнітної індукції отримаємо $B = \mu_0 I_{\text{о.п}}$, де $I_{\text{о.п}}$ — струм на одиницю “ширини” площини (одиничний розмір беремо в площині, перпендикулярній до напрямку протікання струму). Струми повинні протікати у протилежних напрямках, щоб створювати сумарне поле B . Отже, поле однієї площини — $B/2$. Тоді сила, яка діє на одиницю поверхні кожної площини,

$$F_{\text{о.п}} = \frac{B}{2} I_{\text{о.п}} \times \text{од. довжини} \times \text{од. ширини} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

9.37. $\Delta p = \frac{1}{a} IB = 0,5 \text{ кПа.}$

9.38. Позначимо товщину стінки циліндра через t (рис. 224).

Тоді густина струму вздовж осі циліндра $j = \frac{I}{2\pi Rt}$. Індукцію магнітного поля на відстані r від осі ($R - t/2 < r < R + t/2$)

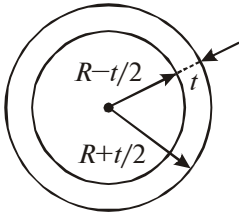


Рис. 224

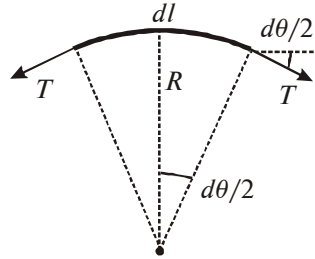


Рис. 225

знайдемо з теореми про циркуляцію вектора індукції магнітного поля:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I\pi}{2\pi Rt} \left[r^2 - \left(R - \frac{t}{2} \right)^2 \right], \text{ або}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi Rrt} \left[r^2 - \left(R - \frac{t}{2} \right)^2 \right].$$

Сила Ампера $\vec{F} = \int_V [\vec{j} \vec{B}] dV$, а тиск, який вона спричиняє,

$$p = \frac{F(r)}{2\pi RL} = \frac{1}{2\pi RL} \int_{R-\frac{t}{2}}^{R+\frac{t}{2}} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2 t^2 r} \left[r^2 - \left(R - \frac{t}{2} \right)^2 \right] \cdot 2\pi r L dr,$$

де L — висота ділянки циліндра, яку розглядаємо.

Проінтегрувавши, отримуємо $p = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} = 16 \text{ мПа}$.

9.39. Індукція магнітного поля всередині соленоїда $B = \mu_0 nI$.

На один виток довжиною l діє сила Ампера $F_1 = \frac{1}{2} BIl$. Коефіцієнт $1/2$ уведено тому, що сила F_1 створена самим соленоїдом і діє на його обмотку. Сила, яка діє на одиницю

довжини соленоїда, $F = F_1 n = \frac{1}{2} \mu_0 nI \cdot nIl = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 l$. Площа

стінок одиниці довжини соленоїда $S = l \cdot 1$ (довжина одного витка \times одиниця довжини).

$$\text{Отже, тиск } p = \frac{F}{S} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 n^2 I^2 l}{l \cdot 1} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} = 1 \text{ кПа.}$$

9.40. Аналогічно до задачі **9.39** можемо записати силу, яка діє на елемент витка довжиною dl (рис. 225):

$$dF = \frac{1}{2} \mu_0 n I \cdot I \cdot dl = \frac{1}{2} \mu_0 n I^2 dl. \text{ За умови рівноваги ця сила}$$

має дорівнювати силі натягу витка $dT = 2T \sin \frac{d\theta}{2} \approx T d\theta$.

Оскільки $dl = R d\theta$, то $dF = dT = T \frac{dl}{R} = \frac{1}{2} \mu_0 n I^2 dl$. Звідси

$$T = \frac{\mu_0 n I^2 R}{2}. \text{ Якщо } T = F_{\text{тп}}, \text{ то } I_{\text{тп}} = \sqrt{\frac{2F_{\text{тп}}}{\mu_0 n R}} = 1,4 \text{ кА.}$$

10. Магнітний момент. Магнітний потік. Магнетика

10.1. Для квадратного контуру $M_1 = \frac{IBl^2}{16} \sin \alpha = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Для колового контуру $M_2 = \frac{IBl^2}{4\pi} \sin \alpha = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$.

10.2. а) $M = BIlbN \sin(\pi/2) = 2,4 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м}$;

б) $M = BIlbN \sin(\pi/6) = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м}$.

10.3. Дротина зі струмом створює навколо себе магнітне поле з індукцією $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$. З боку поля на магнітну стрілку

діє момент сил $\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$ і $M = p_m B \sin \alpha$. Момент сил

спричинить повертання стрілки на кут $\varphi = \frac{2IM}{\pi Gr^4}$, де $r = d/2$.

Беручи до уваги, що $\sin \alpha = 1$, маємо $M = \frac{\mu_0 p_m I}{2\pi a}$. Звідси

$$\varphi = \frac{16\mu_0 p_m I l}{\pi^2 a G d^4} = 0,52 \text{ рад.}$$

10.4. На кожен виток котушки в магнітному полі діє момент сил $\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$, де \vec{p}_m — магнітний момент контуру зі струмом; $\vec{p}_m = IS\vec{n}$, де \vec{n} — одиничний вектор нормалі до площини контуру. Отже, для котушки $M = NISB = N\mu_0 ISH$. Момент

сил поверне нитку на кут $\varphi = \frac{2IM}{\pi G r^4} = \frac{32IN\mu_0 ISH}{\pi G d^4}$, звідки

$$I = \frac{\pi\varphi G d^4}{32IN\mu_0 SH} = 10^{-7} \text{ А.}$$

10.5. $A = I \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\mu_0 H \pi R^2 = 0,5 \text{ мДж.}$

10.6. $A = IBlv t = 0,2 \text{ Дж, } P = IBlv = 20 \text{ мВт.}$

10.7 а) У разі одного оберту диска робота $A = BIS$, де S — площа, яку охоплює радіус диска за один оберт, тобто площа диска. Потужність такого двигуна

$$P = A/t = BI\pi R^2 v = 23,6 \cdot 10^{-3} \text{ Вт.}$$

б) Диск обертається проти годинникової стрілки.

в) На елемент радіусом dx діє сила Ампера $dF = BIdx$ і обертальний момент $dM = x dF$, де x — відстань елемента dx від точки прикладання обертальних сил. Тоді для цілого диска обертальний момент

$$M = \int_0^R B I x dx = \frac{BIR^2}{2} = 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

10.8. Обертальний момент диска $M = BIR^2/2$ (див. задачу **10.7**).

Під час обертання $M = J_i \varepsilon$, де $J_i = mR^2/2$ — момент інерції диска; $\varepsilon = \omega/t = 2\pi v/t$ — кутове прискорення. Отже,

$$\frac{BIR^2}{2} = \frac{\pi v m R^2}{t}. \text{ Звідси } I = \frac{2\pi v m}{Bt} = 15,3 \text{ А.}$$

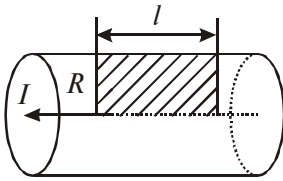


Рис. 226

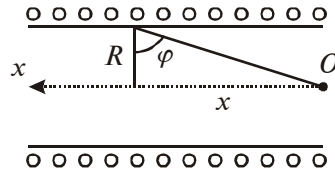


Рис. 227

10.9. $\Phi = BR^2 \pi vt = 1 \text{ Вб}$.

10.10. Нехай струм розподілений по поперечному перерізу рівномірно і його густина $j = I/\pi R^2$. За теоремою про циркуляцію $\oint B dr = \mu_0 I$ (через переріз). Тобто $2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2$, або

$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$. Магнітний потік через половину перерізу одичної довжини (заштрихована площа на рис. 226, де $l = 1 \text{ м}$)

$$\Phi_{\text{од.д}} = \int_0^R B(r) dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^R \frac{r}{R^2} dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi} = 1 \text{ мкВб/м}.$$

10.11. Поле від одного витка, який розташований на відстані x від торця соленоїда, $B_0 = \frac{\mu_0 I R^2}{2} (\sqrt{R^2 + x^2})^{-3}$. Якщо

вибрати елемент соленоїда довжиною dx , то його поле $dB = \frac{\mu_0 I R^2}{2} (\sqrt{R^2 + x^2})^{-3} n dx$. Тоді поле на торці соленоїда в точці O (рис. 227)

$$B = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{(\sqrt{R^2 + x^2})^3} = \left\{ \begin{array}{l} x = R \operatorname{tg} \varphi \\ dx = R \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{R d\varphi}{\cos^2 \varphi (R \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi})^3} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{R^2} = \frac{\mu_0 n I}{2} = \frac{B_0}{2},$$

де $B_0 = \mu_0 nI$ — індукція магнітного поля всередині нескінченно довгого соленоїда. Тоді потік вектора \vec{B} через торець соленоїда $\Phi = \frac{\mu_0 nIS}{2}$.

10.12. З теореми про циркуляцію для замкненого контуру, який є колом з середнім радіусом r кільця соленоїда (рис. 228),

$$\oint_r B dr = \mu_0 IN, \quad B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}.$$

$$\text{Тоді потік } \Phi = \int_S (\vec{B} d\vec{S}) = \int_d^{\eta d} \frac{\mu_0 IN}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 IN h}{2\pi} \ln \eta = 8 \text{ мкВб.}$$

10.13. Магнітний момент контуру зі струмом $p_M = IS$. Тоді

$$\text{для соленоїда } p_{\text{м.с.}} = NIS \text{ і } \Phi = \mu_0 I \frac{N}{l} S = \frac{\mu_0 p_{\text{м.с.}}}{l}.$$
 Звідки

$$p_{\text{м.с.}} = \frac{\Phi l}{\mu_0} = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

$$\text{10.14. } p_M = 2\pi R^3 B / \mu_0 = 0,03 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

10.15. Магнітний момент половини тора (рис. 229):

$$p_M = \int_0^{p_M} dp_{\text{м.х}} = \int_0^N I \frac{\pi D^2}{4} \sin \varphi dN = \frac{IND^2}{4} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{IND^2}{2} = 0,5 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

$$\text{10.16. а) } B = \frac{\mu_0 IN \ln(b/a)}{2(b-a)} = 7 \text{ мкТл;}$$

$$\text{б) } p_M = \pi NI(a^2 + ab + b^2)/3 = 15 \text{ мА} \cdot \text{м}^2.$$

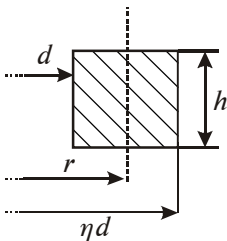


Рис. 228

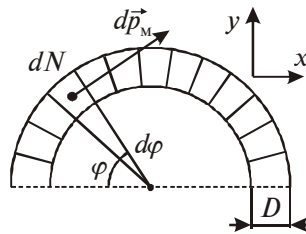


Рис. 229

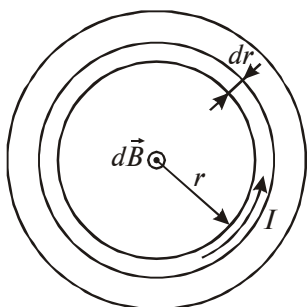


Рис. 230

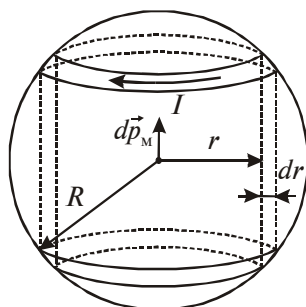


Рис. 231

10.17. а) Обертання зарядженого диска навколо своєї осі еквівалентне протіканню струму. Розглянемо кільцеподібний елемент диска (рис. 230). Струм, який протікає по ньому,

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma dS}{dt} = \frac{\sigma \omega dS}{2\pi} = \frac{\sigma \omega \cdot 2\pi r dr}{2\pi} = \sigma \omega r dr.$$

Індукція магнітного поля такого струму в центрі диска, зумовлена коловим струмом кільця радіусом r і шириною dr ,

$$dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr \cdot 2\pi r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 \sigma \omega dr}{2}. \text{ Отже, } B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}.$$

б) Аналогічно, магнітний момент кільця зі струмом

$$dp_M = \sigma \omega r dr \cdot \pi r^2, \text{ а магнітний момент усього диска}$$

$$p_M = \int_0^R \pi \sigma \omega r^3 dr = \frac{\pi \sigma \omega R^4}{4}.$$

10.18. Розглянемо циліндричний елемент усередині кулі (рис. 231). Магнітний момент, який він створює,

$$dp_M = S dI = \pi r^2 \frac{dq}{2\pi/\omega} = \frac{3\omega q r^2}{8\pi R^3} dV. \text{ Тут заряд усередині циліндричного елемента } dq = \frac{q}{4\pi R^3/3} dV, \text{ а об'єм циліндричного}$$

$$\text{елемента кулі } dV = 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} \cdot dr.$$

$$\text{Отже, } p_m = \frac{3\omega q}{2R^3} \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr = \frac{3\omega q}{2R^3} \frac{2R^5}{15} = \frac{\omega q R^2}{5}.$$

Оскільки механічний момент обертання кулі

$$M = J\omega = \frac{2}{5} m R^2 \omega \quad (J \text{ — момент інерції}), \text{ то } p_m / M = q / 2m.$$

10.19. Індукція поля прямого провідника $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Для визначення сили, яка діятиме на виток у такому полі, скористаємось формулою $\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}$.

а) Якщо вектор \vec{p}_m напрямлений паралельно до провідника, то $\frac{\partial \vec{B}}{\partial n} = 0$, отже, $F = 0$;

б) $\vec{p}_m \parallel \vec{r} \parallel \vec{n}$, отже, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial n} = \frac{d}{dr} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, а $F = -\frac{\mu_0 I p_m}{2\pi r^2}$, тобто $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{B}$;

в) $\vec{n} \parallel \vec{B}$, тоді $\frac{\partial \vec{B}}{\partial n} = -\frac{d}{dr} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, отже, $F = \frac{\mu_0 I p_m}{2\pi r^2}$, $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{r}$.

10.20. На рис. 232 схематично зображені коловий виток і котушка з магнітним моментом \vec{p}_m . Сила, з якою виток діє

на котушку, $F = p_m \frac{\partial B}{\partial x}$. Індукція магнітного поля витка (див. задачу 9.2)

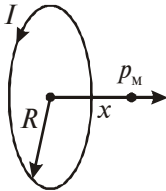


Рис. 232

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left(\sqrt{R^2 + x^2} \right)^3}.$$

$$\text{Тоді } F = \frac{3\mu_0 I R^2 x p_m}{2 \left(\sqrt{R^2 + x^2} \right)^5}.$$

$$10.21. F = \frac{3\mu_0 p_{1m} p_{2m}}{2\pi l^4} = 9 \text{ нН (розгляньте перебування однієї}$$

котушки у полі другої).

10.22. Із задачі 10.20 при $x = R$ магнітна індукція

$$B \approx \frac{\mu_0 I' R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0 I'}{2R}, \quad \text{звідси } I' = \frac{2BR}{\mu_0} \approx 5 \text{ А.}$$

$$10.23. B' = B\sqrt{\mu^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}.$$

$$10.24. \text{ а) } \oint (\vec{H} d\vec{S}) = \oint \left(\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{S} \right) = -\oint (\vec{J} d\vec{S}), \quad \text{оскільки}$$

$\oint (\vec{B} d\vec{S}) = 0$; \vec{J} не дорівнює нулю лише у ділянці інтегрування, яка відповідає магнетика. З граничних умов нормальна і тангенціальна складові полів

$$B'_n = B \cos \vartheta, \quad H'_n = \frac{1}{\mu\mu_0} B \cos \vartheta, \quad B'_\tau = \mu B \sin \vartheta, \quad H'_\tau = \frac{1}{\mu_0} B \sin \vartheta.$$

$$\text{Тоді } J_n = \frac{B \cos \vartheta}{\mu_0} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right), \quad J_\tau = \frac{\mu - 1}{\mu_0} B \sin \vartheta.$$

$$\text{Отже, } \oint (\vec{H} d\vec{S}) = -\oint (\vec{J} d\vec{S}) = -\oint (J_n dS) = \frac{\pi R^2 B \cos \vartheta}{\mu_0} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right).$$

$$\text{б) } \oint_{\Gamma} (\vec{B} d\vec{r}) = (B'_\tau - B_\tau) l = (1 - \mu) B l \sin \vartheta.$$

10.25. З теореми про циркуляцію вектора \vec{H} для контуру

$$\text{радіусом } r \text{ матимемо } H \cdot 2\pi r = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}, \quad \text{або } H = \frac{I r}{2\pi R^2},$$

де r — відстань від осі дротини; R — радіус дротини. Намагніченість

$$J = \chi H = \frac{\chi I r}{2\pi R^2}. \quad \text{Об'ємний молекулярний струм}$$

$$I'_{\text{об}} = \oint_{r=R} (\vec{J} d\vec{r}) = \int_0^{2\pi R} \frac{\chi I}{2\pi R} dl = \chi I.$$

10.26. а) $J(r) = \frac{aB_0r^2}{\mu_0}$; б) $j'(r) = \frac{2aB_0r}{\mu_0}$.

10.27. Якісні графіки можемо побудувати, аналізуючи співвідношення $\oint(\vec{H}d\vec{l}) = I$. Якщо вісь x спрямуємо вздовж осі соленоїда, а точка O слугуватиме за 0 , то $\mu=1$ ($x < 0$) та $\mu > 1$ ($x > 0$), а графіки відобразатимуть такі формули:

$$J(x < 0) = 0;$$

$$B(x < 0) = \mu_0 H(x < 0);$$

$H(x \gg 0) = H(x \ll 0) = nI$, де n — кількість витків на одиницю довжини соленоїда;

$$B(x \gg 0) = \mu\mu_0 nI, \quad B(x \ll 0) = \mu_0 nI;$$

$B(x)$ є неперервною функцією, тоді як $H(x)$ має розрив.

Результат у вигляді графіків зображено на рис. 233.

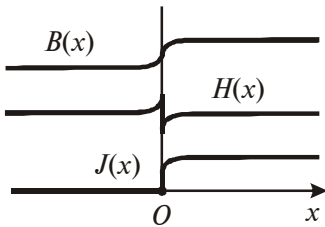


Рис. 233

10.28. З теореми про циркуляцію для вектора \vec{H} запишемо $H_1\pi r + H_2\pi r = I$. Оскільки $\mu_1\mu_0 H_1 = \mu_2\mu_0 H_2 = B_1 = B_2 = B$, то
$$B = \frac{\mu_0\mu_1\mu_2 I}{(\mu_1 + \mu_2)\pi r}.$$

10.29. Якщо нема магнетика під час протікання деякого струму I , то індукція магнітного поля на осі контуру дорівнює B_0 . Розглянемо випадок, коли середовище 1 є вакуумом і містить контур зі струмом I , а середовище 2 є магнетиком з проникністю μ . Систему координат виберемо так, що межею між середовищами слугуватиме площина $z = 0$, а контур розміщено в площині $z = l$. Ефект появи магнетика можна описати через відображення контуру з середовища 1 у середовищі 2. Тобто достатньо розглянути сумарне поле від двох контурів зі струмами I (у вакуумі) та I' (у магнетикі).

З іншого боку, сумарну індукцію в середовищі 2 можна записати як поле контуру з середовища 1 з деяким іншим значенням струму I'' (гранична умова першого випадку при $l = 0$). Граничні умови $B_{1n} = B_{2n}$ та $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ для обох варіантів дадуть $I + I' = I''$ та $I - I' = \frac{I''}{\mu}$. Тоді $I'' = \frac{2\mu}{\mu + 1} I$. Тобто $\vec{B} = \frac{2\mu}{1 + \mu} \vec{B}_0$. Очевидно, для довільної точки простору індукцію магнітного поля можна записати як добуток \vec{B}_0 на множник, пов'язаний з координатами цієї точки. Тоді й для загального випадку отримане співвідношення має бути правильним.

10.30. З умови відомо, що для однорідно намагніченої кулі

$$\vec{H}' = -\frac{\vec{J}}{3}, \text{ тому } \frac{B'}{\mu_0} - J = -\frac{J}{3}, \text{ а магнітна індукція кулі } \vec{B}' = \frac{2\mu_0 \vec{J}}{3}.$$

Розглянемо однорідно намагнічену кулю в магнітному полі з індукцією \vec{B}_0 . Тоді всередині кулі індукція та напруженість

$$\text{магнітного поля, відповідно, } \vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{2\mu_0 \vec{J}}{3}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \frac{\vec{J}}{3}.$$

Отже, $\vec{B} + 2\mu_0 \vec{H} = 3\vec{B}_0$, а врахувавши, що $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$, отримаємо

$$\vec{B} = \frac{3\vec{B}_0 \mu}{2 + \mu}.$$

10.31. $H_{\kappa} = NI/l = 6 \text{ кА/м}$.

10.32. Скористаємось теоремою про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля $\oint (\vec{H} d\vec{l}) = 0$. Нехтуючи розсіянням на краях прорізу, отримаємо

$$H(\pi d - b) + \frac{B_{\text{np}}}{\mu_0} b = 0 \quad (\text{рис. 234}).$$

$$\text{Отже, } H = -\frac{B_{\text{np}}}{\mu_0} \cdot \frac{b}{\pi d - b} \approx -\frac{B_{\text{np}} b}{\mu_0 \pi d},$$

або $|H| \approx 0,1 \text{ кА/м}$.

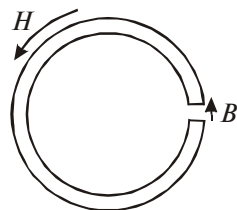


Рис. 234

10.33. З графіка на рис. 107 (в умові задачі) отримуємо залежність намагніченості від напруженості поля всередині магніту:

$$J(H) = \frac{J_3}{H_k} H + J_3. \text{ Аналогічно до } \mathbf{10.32}, \oint (\vec{H} d\vec{l}) = 0,$$

$$\text{або } H(2\pi a - b) + \frac{B_{\text{пр}}}{\mu_0} b = 0. \text{ Однак } H = \frac{B}{\mu_0} - J = \frac{B}{\mu_0} - \frac{J_3}{H_k} H - J_3,$$

звідки $H = \left(\frac{B}{\mu_0} - J_3 \right) / \left(1 + \frac{J_3}{H_k} \right)$, тут B — індукція всередині магніту. З граничних умов на межі прорізу маємо $B = B_{\text{пр}}$. Тоді

$$\left(\frac{B_{\text{пр}}}{\mu_0} - J_3 \right) (2\pi a - b) + \frac{B_{\text{пр}}}{\mu_0} b \left(1 + \frac{J_3}{H_k} \right) = 0;$$

$$\frac{B_{\text{пр}}}{\mu_0} \left[(2\pi a - b) + b \left(1 + \frac{J_3}{H_k} \right) \right] = J_3 (2\pi a - b);$$

$$\frac{B_{\text{пр}}}{\mu_0} \left[2\pi a + b \frac{J_3}{H_k} \right] = J_3 (2\pi a - b).$$

$$\text{При } b \ll 2\pi a \text{ отримуємо } B_{\text{пр}} \approx \frac{\mu_0 J_3}{1 + \frac{b J_3}{2\pi a H_k}} = 1 \text{ Тл.}$$

$$\mathbf{10.34.} \text{ При } b \ll R \text{ проникність } \mu \approx \frac{2\pi R B}{\mu_0 N I - b B} = 3,7 \cdot 10^3.$$

$$\mathbf{10.35.} \text{ Потрібно будувати графік на підставі виразу } \mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

Очевидно, що це буде різка пікоподібна функція в межах 0,04 – 0,06 кА/м. Максимум буде в околі $H = 0,05$ кА/м, $\mu_{\text{max}} \approx 10^4$.

10.36. З теореми про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля $H \cdot \pi d + \frac{B}{\mu_0} b \approx NI$, тому

$$B \approx \frac{\mu_0 N I}{b} - \frac{\mu_0 \pi d}{b} H = 1,51 - 0,986 H \text{ (кА/м)}.$$

Окрім того між B та H є залежність, показана на рис. 108 (в умові задачі). Шукані B та H мають задовольняти обидва рівняння. Розв'язавши цю систему рівнянь графічно, отримаємо

$$H = 0,25 \text{ кА/м}, \quad B \approx 1,25 \text{ Тл}, \quad \text{а} \quad \mu = \frac{B}{\mu_0 H} \approx 4 \cdot 10^3.$$

10.37. Нехай вісь z — напрямлена вздовж осі котушки. Тоді з формули $F = p_m \frac{\partial B_z}{\partial z}$ визначимо силу, з якою котушка діє на весь стрижень:

$$F = \int \left(J_z \frac{dB_z}{dz} \right) dV = \frac{\chi}{\mu\mu_0} \int \left(B_z \frac{dB_z}{dz} \right) S dz = \frac{\chi}{\mu\mu_0} \int S B_z dB_z = \frac{\chi S B^2}{2\mu\mu_0}.$$

Для парамагнетика $\mu = \chi + 1 \approx 1$, отже, $F \approx \frac{\chi S B^2}{2\mu_0}$.

10.38. а) Сила притягання $F = p_m \frac{dB}{dx} = \chi H V \frac{dB}{dx} = \frac{\chi B V}{\mu\mu_0} \frac{dB}{dx}$ (вісь x напрямлена вертикально). Оскільки кулька парамагнітна, то

$$F(x) = \frac{\chi V}{2\mu\mu_0} \frac{dB^2}{dx} \approx -4ax \frac{\chi V B_0^2}{2\mu_0} \exp(-2ax^2).$$

Продиференціювавши за x і прирівнявши результат до нуля, отримаємо висоту $x_{\max} = 1/\sqrt{4a}$.

$$\text{б) } \chi = \frac{\mu_0 F_{\max}}{V B_0^2} \sqrt{\frac{e}{a}} = 3,6 \cdot 10^{-4}.$$

10.39. $A \approx \frac{\chi V B^2}{2\mu_0}$ (див. задачу **10.37**).

10.40. $F_{\text{о.п}} = \frac{1}{2} \mu_0 \chi n^2 I^2$ і напрямлена вгору (див. рис. 110 в умові задачі).

11. Рух заряджених частинок в електричному та магнітному полях

11.1. На електрон діє прискорювальна сила з боку електричного поля: $m \frac{dv}{dt} = F = eE = \frac{eU}{l} = \frac{eat}{l}$. Звідси

$$v = \int_0^v dv = \int_0^{t_{\text{п}}} \frac{eat}{ml} dt = \frac{eat_{\text{п}}^2}{2ml}, \text{ де } t_{\text{п}} \text{ — повний час руху електрона.}$$

Оскільки нас цікавить швидкість у момент, коли електрон перебуває біля протилежної пластини, то

$$l = \int_0^l dl = \int_0^{t_{\text{п}}} \frac{eat^2}{2ml} dt = \frac{eat_{\text{п}}^3}{6ml}, \text{ звідки } t_{\text{п}} = \sqrt[3]{\frac{6ml^2}{ea}}. \text{ Отже,}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{9ael}{2m}} = 16 \text{ км/с.}$$

$$\mathbf{11.2.} \quad \operatorname{tg} \alpha = al^2 \sqrt{\frac{m}{32eU^3}}.$$

$$\mathbf{11.3.} \quad x = 2E_0/a.$$

11.4. Повна енергія W електрона, який рухається в напрямі

осі x з релятивістською швидкістю v , $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, де $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$;

m_0 — маса спокою електрона. При $x = 0$ та $v = 0$ повна енергія $W = m_0 c^2$. Кінетична енергія, якої електрон набуває в електричному полі з напруженістю E , долаючи шлях x , дорівнює eEx . Вона також є різницею між повною енергією W та енергією маси спокою електрона $m_0 c^2$.

$$\text{Тоді } eEx = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2, \text{ звідки } \beta = \frac{\sqrt{(m_0 c^2 + eEx)^2 - (m_0 c^2)^2}}{m_0 c^2 + eEx}.$$

$$\text{Оскільки } \beta = \frac{v}{c} = \frac{dx}{cdt}, \text{ то } dt = \frac{dx}{c\beta} = \frac{(m_0 c^2 + eEx) dx}{c \sqrt{(m_0 c^2 + eEx)^2 - (m_0 c^2)^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } t &= \int_0^t dt = \int_0^x \frac{(m_0 c^2 + eEx) dx}{c \sqrt{(m_0 c^2 + eEx)^2 - (m_0 c^2)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{(m_0 c^2 + eEx)^2 - (m_0 c^2)^2}}{ceE}. \end{aligned}$$

Врахуємо, що за умовою задачі $eEx = m_0 c^2$, і знайдемо шуканий час:

$$t = \frac{\sqrt{(m_0 c^2 + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4}}{ceE} = \frac{\sqrt{3} m_0 c}{eE} \approx 3 \text{ нс.}$$

$$11.5. \quad \text{tg} \vartheta = \frac{eEt}{mv_0} \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}.$$

$$11.6. \quad \frac{F_m}{F_{\text{ел}}} = \mu_0 \varepsilon_0 v^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 10^{-6}.$$

$$11.7. \quad F = e \sqrt{\frac{2eU}{m}} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = 4,1 \cdot 10^{-17} \text{ Н.}$$

$$11.8. \quad R = \sqrt{\frac{2Um}{eB^2}} = 90 \text{ мкм}; \quad T = \frac{2\pi m}{eB} = 30 \text{ пс};$$

$$L = \frac{2mU}{B} = 1,5 \cdot 10^{-27} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$

$$11.9. \quad a_{\tau} = 0; \quad a_n = \frac{eBv}{m} = 7 \cdot 10^{15} \text{ м/с}^2.$$

$$11.10. \quad W = \frac{e^2 B^2 R^2}{2m} = 1,4 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 8,8 \cdot 10^4 \text{ еВ.}$$

$$11.11. \frac{T_1}{T_2} = \frac{2m_p}{m_\alpha} = \frac{1}{2}.$$

$$11.12. \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{e d^2 B^2}{2mU}} = 30^\circ.$$

$$11.13. \text{ а) } v = \frac{eRB}{m_p} = 96 \text{ км/с, } T = \frac{2\pi m_p}{eB} = 6,5 \text{ нс};$$

$$\text{ б) } v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{eRB}\right)^2}} = 0,51 \text{ км/с, } T = \frac{2\pi m_0}{eB \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 4,1 \text{ нс}.$$

$$11.14. W_k = \eta mc^2. \text{ Відповідно, } 5,1 \text{ кеВ та } 9,4 \text{ МеВ.}$$

$$11.15. \text{ а) } a_n = 0; \quad |a_\tau| = \frac{eE}{m} = 1,76 \cdot 10^{14} \text{ м/с}^2;$$

$$a = |a_\tau| = 1,76 \cdot 10^{14} \text{ м/с}^2.$$

$$\text{ б) } |a_n| = \frac{e}{m} \sqrt{E^2 + v^2 \mu_0^2 H^2} = 2,5 \cdot 10^{14} \text{ м/с}^2;$$

$$a_\tau = 0; \quad a = |a_n| = 2,5 \cdot 10^{14} \text{ м/с}^2.$$

$$11.16. v = \frac{E}{B} = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с; } R = \frac{mv}{eB} = 2,27 \text{ см.}$$

$$11.17. R = \frac{\sin \alpha}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}} = 1 \text{ см; } h = 2\pi R \operatorname{ctg} \alpha = 11 \text{ см.}$$

$$11.18. R = \frac{El}{Bv} = 5 \text{ мм; } h = \frac{2\pi mv}{eB} = 37 \text{ мм.}$$

11.19. а) Рівняння руху заряду у проекції на кожен з осей мають такий вигляд:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -qBv_z, \quad m \frac{dv_y}{dt} = qE, \quad m \frac{dv_z}{dt} = qBv_x.$$

З першого та третього рівняння маємо

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\frac{q^2B^2}{m^2}v_x, \quad \frac{d^2v_z}{dt^2} = -\frac{q^2B^2}{m^2}v_z.$$

Розв'язком таких рівнянь є

$$v_x = v'_x \cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_{0x}\right), \quad v_y = \frac{qEt}{m} + v_{0y}, \quad v_z = v'_z \cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_{0z}\right).$$

З початкових умов ($t = 0, v_y = 0$) отримаємо $v_{0y} = 0$. При $t = 0, v_x = v_0, v_z = 0$, отже, амплітудне значення $v'_x = v_0$, а початкова фаза $\varphi_{0x} = 0$. У площині xz відбуватиметься рух по колу, тому можемо записати, що $v'_z = v_0, \varphi_{0z} = -\frac{\pi}{2}$. Тоді оскільки при $t = 0$ маємо $x = y = z = 0$, то

$$x = \frac{mv_0}{qB} \sin \frac{qBt}{m}, \quad y = \frac{qEt^2}{2m}, \quad z = \frac{mv_0}{qB} \left(1 - \cos \frac{qBt}{m}\right).$$

З отриманих рівнянь руху бачимо, що при $t_n = \frac{2\pi n m}{qB}$,

$$x = z = 0. \quad \text{Тоді } y_n = \frac{2\pi^2 m E n^2}{qB^2}.$$

$$\text{б) } \alpha = \arctg \frac{v_{xz}}{v_y} = \arctg \frac{mv_0}{qEt_n} = \arctg \frac{v_0 B}{2\pi E n}.$$

$$11.20. \quad h = \frac{2\pi l \cos \alpha}{\mu_0 I N} \sqrt{\frac{2mU}{e}} = 0,04 \text{ м.}$$

11.21. Оскільки пучок слабо сфокусований, то деякі частинки, потрапляючи в соленоїд, матимуть швидкість \vec{v}_0 , напрям вектора якої утворює кут α з віссю соленоїда. Для слабо сфокусованого пучка кут α є дуже малим, тоді $v_0 \cos \alpha \approx v_0$, і для двох різних значень індукції магнітного поля можемо

записати, що кількість кроків спіралеподібної траєкторії не-сфокусованих частинок відрізняється на одиницю:

$$\frac{l}{v_0} \approx n \cdot \frac{2\pi m}{qB_1} = (n+1) \cdot \frac{2\pi m}{qB_2}. \text{ Якщо прикласти поле } B = B_2 - B_1,$$

то відстань l стане кроком спіралеподібної траєкторії руху частинок, тобто $\frac{l}{v_0} \approx \frac{2\pi m}{q(B_2 - B_1)}$, або врахувавши, що

$$\frac{mv_0^2}{2} = q\Delta\phi, \text{ одержимо } l \cdot \sqrt{\frac{m}{2q\Delta\phi}} \approx \frac{2\pi m}{q(B_2 - B_1)}.$$

$$\text{Отже, } \frac{q}{m} = \frac{8\pi^2\Delta\phi}{l^2(B_2 - B_1)^2}.$$

11.22. Нехай вісь z спрямовано уздовж осі соленоїда. Тоді проекції швидкості руху електрона на кожную з осей x та y отримаємо аналогічно до задачі **11.19**, зокрема,

$$v_x = v \sin \alpha \cos \frac{eBt}{m}, \quad v_y = v \sin \alpha \sin \frac{eBt}{m}, \quad v_z = v \cos \alpha.$$

Оскільки за умовою при $t = 0$ координати $x = y = z = 0$, то рівняння для них будуть такими:

$$x = \frac{vm \sin \alpha}{eB} \sin \frac{eBt}{m}, \quad y = \frac{vm \sin \alpha}{eB} \left(\cos \frac{eBt}{m} - 1 \right), \quad z = vt \cos \alpha.$$

Після потрапляння електрона на екран $z = l$, $t = \frac{l}{v \cos \alpha}$, а

шукану відстань знаходимо з умови

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2 \frac{2v^2 m^2 \sin^2 \alpha}{e^2 B^2} \left(1 - \cos \frac{eBl}{mv \cos \alpha} \right). \text{ Тобто}$$

$$r = \frac{2vm \sin \alpha}{eB} \left| \sin \frac{eBl}{2mv \cos \alpha} \right|.$$

$$\mathbf{11.23.} \quad n = \frac{IB}{eaU_x} = 8,1 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}; \quad v = \frac{U_x}{bB} = 0,31 \text{ мм/с.}$$

$$11.24. U_x = \frac{IBM_{\text{Al}}}{ea\rho N_A} = 2,72 \text{ мкВ}, \text{ де } \rho \text{ — густина алюмінію};$$

M_{Al} — його молярна маса; N_A — число Авогадро.

$$11.25. u = \frac{aU_x}{\rho IB} = 0,65 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}.$$

11.26. Дрейфова швидкість електронів $v = \frac{j}{en} = \frac{I}{\pi enR^2}$. Із теореми про циркуляцію індукція магнітного поля на відстані r від осі

$$B(r) \cdot 2\pi r = 2\pi r^2 \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}, \text{ звідки } B(r) = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}.$$

Сили, які діють на рухомий заряд з боку магнітного (спричиненого струмом) і електричного (спричиненого перерозподілом заряду) полів, $F_{\text{ел}} = eE(r) = e \frac{d\varphi(r)}{dr} = F_{\text{м}} = evB(r)$. Отже, шукана різниця потенціалів

$$\Delta\varphi = \int_0^R vB(r)dr = \int_0^R \frac{I}{\pi enR^2} \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 enR^2} = 2 \text{ пВ}.$$

$$11.27. n = \frac{jB}{eE} = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

11.28. Виберемо систему координат так, що вісь z збігається з віссю циліндричного провідника, а початкова швидкість v_0 електрона має напрям уздовж осі x . Тоді в точці вильоту електрона з поверхні провідника індукція $B = B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ (при $y = 0, B_x = B_z = 0$). Очевидно, частинка рухатиметься лише у площині xz . Рівняння руху частинки

$$m \frac{dv_x}{dt} = -ev_z B_y, \quad m \frac{dv_z}{dt} = ev_x B_y.$$

Перемножимо перше рівняння на v_x та друге — на v_z і додамо їх, отримаємо $v_x \frac{dv_x}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} = 0$. Тоді з умови $v_x^2 + v_z^2 = v_0^2$ мати-

memo $v_x \frac{dv_x}{dx} = -\frac{e}{m} \sqrt{v_0^2 - v_x^2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$, або $-\frac{v_x dv_x}{\sqrt{v_0^2 - v_x^2}} = \frac{\mu_0 e I}{2\pi m} \frac{dx}{x}$. Про-

інтегруємо це рівняння, маємо $\sqrt{v_0^2 - v_x^2} \Big|_{v_0}^0 = \frac{\mu_0 e I}{2\pi m} \ln x \Big|_R^{x_{\max}}$, звідки

$$v_0 = \frac{\mu_0 e I}{2\pi m} \ln \frac{x_{\max}}{R}, \quad \text{або} \quad r_{\max} = x_{\max} = R \exp \frac{2\pi m v_0}{\mu_0 e I}.$$

11.29. Залежність електричного поля E від радіуса r знайдемо за теоремою Остроградського–Гаусса. Для потенціалу

$\varphi(r)$ між обкладками маємо $\frac{\varphi(r)}{\ln(r/a)} = \text{const} = \frac{\Delta\varphi}{\ln(b/a)}$, тобто

$E = -\frac{\Delta\varphi}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}$. Для дугової траєкторії всередині конденса-

тора $m \frac{v^2}{r} = qE$, або $mv^2 = \frac{q\Delta\varphi}{\ln(b/a)}$. Для траєкторії у магніт-

ному полі $m \frac{v^2}{r} = qvB$. Отже, з останніх двох рівнянь визна-

чаємо $v = \frac{\Delta\varphi}{rB \ln(b/a)}$ та $\frac{q}{m} = \frac{\Delta\varphi}{r^2 B^2 \ln(b/a)}$.

11.30. Із задачі 11.19 рівняння руху йонів виглядають так:

$$x = \frac{v_0 m}{qB} \sin \frac{qBt}{m}, \quad y = \frac{qE}{2m} t^2, \quad z = \frac{v_0 m}{qB} \left(1 - \cos \frac{qBt}{m} \right).$$

Екран розташований на відстані $x = l$. Очевидно, що йони

залишатимуть слід на екрані за умови $\left| \frac{qBl}{v_0 m} \right| \leq 1$. Тоді

$\frac{qBl}{v_0 m} = \sin \frac{qBt}{m}$, або $t = \frac{m}{qB} \arcsin \frac{qBl}{v_0 m}$. Відповідно,

$y = \frac{Em}{2qB^2} \arcsin^2 \frac{qBl}{v_0 m}$, або $\frac{qBl}{v_0 m} = \sin \sqrt{\frac{2qB^2 y}{Em}}$. Звідки рівняння

сліду йонів на екрані матиме такий вигляд:

$$z = 2 \frac{v_0 m}{qB} \sin^2 \frac{qBt}{2m} = 2 \frac{l}{\sin(qBt/m)} \sin^2 \frac{qBt}{2m} = l \operatorname{tg} \frac{qBt}{2m} =$$

$$= l \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{qBl}{mv_0} \right) = l \operatorname{tg} \sqrt{\frac{qB^2 y}{2mE}}. \text{ При } z \ll l \text{ маємо}$$

$\operatorname{arctg}^2 \frac{z}{l} \approx \frac{z^2}{l^2}$, тоді $y \approx \frac{2mE}{ql^2 B^2} z^2$, отже, це рівняння параболи.

11.31. $F = \frac{mEI}{qB} = 20 \text{ мкН.}$ **11.32.** $\frac{q}{m} = \frac{2E\Delta x}{a(a+2b)B^2}.$

11.33. а) Рівняння руху частинки $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q(\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]).$

Векторний добуток $[\vec{v} \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \vec{i} B v_y - \vec{j} B v_x$, отже,

рівняння руху у проєкціях на осі $\frac{dv_x}{dt} = \frac{qBv_y}{m}$,

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{qE}{m} - \frac{qBv_x}{m}, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0. \text{ З останнього рівняння і почат-$$

кових умов ($v_z = 0$ та $z = 0$) випливає, що рух відбувається лише в площині xy , а вирази для швидкостей

$$v_y = \frac{m dv_x}{Bq dt}, \quad \frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{q^2 B^2}{m^2} \left(\frac{E}{B} - v_x \right). \text{ Розв'язком другого з них}$$

є рівняння гармонічних коливань: $v_x = \frac{E}{B} + v'_x \sin \left(\frac{qBt}{m} + \varphi_x \right)$,

де v'_x — амплітудне значення швидкості вздовж осі x , а φ_x —

початкова фаза. З початкових умов ($t = 0$, $v_x = 0$) маємо

$$v'_x = \frac{E}{B}, \quad \varphi_x = -\frac{\pi}{2}. \quad \text{Отже, } v_x = \frac{E}{B} \left(1 + \cos \left(\frac{qBt}{m} \right) \right).$$

$$v_x = \frac{E}{B} - \frac{mdv_y}{Bqdt}, \quad \frac{d^2v_y}{dt^2} = -\frac{q^2B^2}{m^2}v_y, \quad v_y = \frac{E}{B} \sin \frac{qBt}{m}.$$

Проінтегрувавши ці диференціальні рівняння для швидкостей і врахувавши, що при $t = 0$ частинка перебувала в стані спокою в

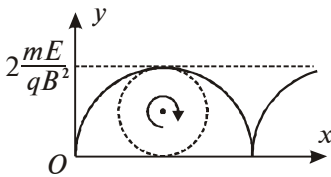


Рис. 235

початку координат, отримаємо

$$x(t) = \frac{E}{B}t - \frac{mE}{qB^2} \sin \frac{qB}{m}t,$$

$$y(t) = \frac{mE}{qB^2} \left(1 - \cos \frac{qB}{m}t \right).$$

Траєкторією є циклоїда (рис. 235).

Рух частинки є рухом точки на

ободі круга радіусом $\frac{mE}{qB^2}$, який

котиться без проковзування уздовж осі x так, що його центр переміщується зі швидкістю $v = \frac{E}{B}$.

б) Обидві компоненти швидкості (v_x , v_y) дорівнюють нулю за умови $\frac{qBt}{m} = 2\pi n$, де n — ціле число. З умови додавання

$$\text{швидкостей } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{E}{B} \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{qBt}{m} \right)} = 2 \frac{E}{B} \sin \frac{qBt}{2m}.$$

Оскільки величина $\frac{qBt}{m} \in [0, 2\pi]$, то синус у рівнянні є додатним. Відстань між двома точками, де швидкість частинки дорівнює нулю, знайдемо інтегруванням виразу:

$$L = \int_0^{\frac{2\pi m}{qB}} vt = 2 \frac{E}{B} \int_0^{\frac{2\pi m}{qB}} \sin \frac{qBt}{2m} t = -\frac{4mE}{qB^2} \cos \frac{qBt}{2m} \Big|_0^{\frac{2\pi m}{qB}} = \frac{8mE}{qB^2}.$$

$$\text{в) } \langle v_x \rangle = \left\langle \frac{E}{B} \left(1 - \cos \frac{qBt}{m} \right) \right\rangle = \frac{E}{B}.$$

11.34. Виберемо систему координат так, що струм I протікає вздовж осі z , уважатимемо також, що після покидання катода рух електрона відбувається лише в площині xz . Тоді проекції індукції магнітного поля, яке створює нитка роз-

жарювання зі струмом I , $B_x = 0$, $B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$, $B_z = 0$. Вираз

для напруженості електричного поля у довільній точці площини xz між катодом і анодом знайдемо з теореми Остроградського–Гауса, використавши також формулу для ємності циліндричного конденсатора (див. розділ 4). Складові напруженості електричного поля за таких умов

$E_x = -\frac{U}{x \ln(a/b)}$, $E_y = 0$, $E_z = 0$. Тоді рівняння руху елект-

рона для трьох осей виглядатимуть так:

$$m \frac{dv_x}{dt} = \frac{eU}{x \ln(a/b)} + e \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v_z \quad (1), \quad m \frac{dv_y}{dt} = 0 \quad (2),$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -e \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v_x = -\frac{e\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{dt} \ln x \quad (3).$$

У рівнянні (3) враховано, що заряд електрона негативний. Оскільки на поверхні катода електрон не має початкової швидкості, то з рівняння (2) одержимо $v_y = 0$. Проінтегруємо третє рівняння з межами інтегрування від b до x , отримаємо

$$m v_z = -e \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x}{b}. \text{ Після досягнення анода кінетичну енергію } W_k,$$

якої електрон набуває в електричному полі, долаючи віддаль від b до x , знаходитимемо з такого виразу:

$$\begin{aligned} m v_x \frac{dv_x}{dt} &= \left[\frac{eU}{\ln(a/b)} - \frac{e^2}{m} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \ln \frac{x}{b} \right] \frac{v_x}{x} = \\ &= \left[\frac{eU}{\ln(a/b)} - \frac{e^2}{m} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \ln \frac{x}{b} \right] \frac{d}{dt} \ln \frac{x}{b}. \end{aligned}$$

Опустимо похідну за часом в обох частинах рівняння та проінтегруємо їх, одержимо

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \int_b^x \left[\frac{eU}{\ln(a/b)} - \frac{e^2}{m} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \ln \frac{x}{b} \right] \frac{d}{dt} \ln \frac{x}{b} dx$$

$$= \frac{eU \ln(x/b)}{\ln(a/b)} - \frac{e^2}{2m} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x}{b} \right)^2.$$

За умовою задачі $W_k = 0$ для $x = a$, тому найменша різниця потенціалів $U_{\min} = \frac{e}{8m} \left(\frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{a}{b} \right)^2$.

11.35. Виберемо систему координат так, що вісь z спрямована вздовж нитки розжарювання. Тоді $B_x = B_y = 0$; $B_z = B$. Якщо врахувати знак заряду електрона, то рівняння руху для трьох осей (аналогічно до задачі **11.34**) виглядатимуть так:

$$m \frac{dv_x}{dt} = \frac{eUx}{r \ln(b/a)} - eBv_y, \quad m \frac{dv_y}{dt} = \frac{eUy}{r \ln(b/a)} + eBv_x, \quad m \frac{dv_z}{dt} = 0,$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. З останнього рівняння $z = 0$. Отже, рух відбувається в площині xy . Домножимо перше рівняння на v_x , а друге — на v_y і додамо

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{eU}{\ln(b/a)} \frac{xv_x + yv_y}{r^2}, \quad \text{або} \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{eU \ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

Отже, при $r = b$ швидкість електрона $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Якщо ж домножимо перше рівняння на v_y , а друге — на v_x і віднімемо,

то $m \frac{d}{dt} (xv_y - yv_x) = eB(xv_x + yv_y)$. Проінтегрувавши, отримаємо

$$(xv_y - yv_x) = \frac{eB}{2m} \int_a^r dr^2 = \frac{eB}{2m} (r^2 - a^2) \stackrel{r>a}{>} 0. \quad \text{При } r = b, \quad xv_y - yv_x \leq bv,$$

отже, $bv \geq \frac{eB}{2m} (b^2 - a^2)$. Тоді, підставивши вираз для швидкості v , матимемо $B \leq \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mU}{e}}$.

11.36. Запишемо аналогічно до задачі **11.33** рівняння руху та розв'яжемо їх, отримаємо

$$x(t) = \frac{qE_{\max}}{2m\omega^2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t), \quad y(t) = \frac{qE_{\max}}{2m\omega} t \sin \omega t.$$

Траєкторія має вигляд розкручуваної спіралі.

$$11.37. \quad U \geq \frac{2\pi^2 v^2 m r \Delta r}{e} = 0,1 \text{ МВ.}$$

$$11.38. \quad \text{а) } W_{\kappa} = \frac{(erB)^2}{2m} = 12 \text{ МеВ; } \text{б) } v_{\min} = \frac{1}{\pi r} \sqrt{\frac{W_{\kappa}}{2m}} = 20 \text{ МГц.}$$

11.39. Для останньої n -ї орбіти $\frac{2\pi r_n}{v_n} = nT_0 = \frac{n}{v}$. Уважаючи, що для цієї орбіти $v_n \approx c$, запишемо енергію як добуток швидкості на імпульс, отримаємо $W \approx cp = cBer_n$. Отже, для набуття енергії W прискорювальний проміжок мікротрона електрон має пройти $n = \frac{2\pi v W}{eBc^2} = 9$ разів.

11.40. Із бетатронної умови

$$B(r_0) = \frac{1}{2} \langle B \rangle = \frac{1}{2} \int_0^r \frac{B \cdot 2\pi r dr}{\pi r_0^2} = \frac{1}{r_0^2} \int_0^r Br dr. \quad \text{Звідси шукаємо } r_0:$$

$$B_0 - ar_0^2 = \frac{1}{r_0^2} \int_0^r (B_0 - ar^2) r dr = \frac{1}{2} \left(B_0 - \frac{1}{2} ar_0^2 \right), \quad \text{або } r_0 = \sqrt{\frac{2B_0}{3a}}.$$

12. Електромагнітна індукція. Індуктивність

$$12.1. \quad \Phi = B\pi l^2 = 0,157 \text{ Вб.}$$

12.2. $\Phi = \mu_0 HS \cos(2\pi\nu t + \alpha_0)$, де α_0 — початкова фаза коливань;

$$\Phi_{\max} = \mu_0 HS = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

$$12.3. \mathcal{E}_i = \mu_0 H_B v l = 0,165 \text{ В.} \quad 12.4. v = \frac{U}{B \pi l^2} = 6,4 \text{ с}^{-1}.$$

$$12.5. \mathcal{E} = B \pi R^2 \nu = 7,85 \text{ мВ.} \quad 12.6. \mathcal{E}_{\max} = B S \omega \sin \alpha = 0,09 \text{ В.}$$

$$12.7. \mathcal{E}_{\text{cp}} = \frac{\mu_0 N I_0 S}{l t} = 18 \text{ мВ.} \quad 12.8. \mathcal{E}_i(t) = \frac{\pi \omega R^2 B}{2} \sin(\omega t).$$

$$12.9. \text{ а) } \mathcal{E}_i(y) = 2 B v \sqrt{y/k}; \quad \text{ б) } \mathcal{E}_i(y) = B y \sqrt{8a/k}.$$

$$12.10. \text{ а) } \Delta \varphi = \frac{m \omega^2 R^2}{2e} = 3,0 \text{ нВ, де } m, e \text{ — маса та заряд електрона.}$$

б) Оскільки $m \omega \ll e B$, то можна знехтувати доцентровим прискоренням і брати до уваги лише рівновагу електричної і магнітної сил. Тоді $\Delta \varphi = \frac{1}{2} \omega R^2 B = 20 \text{ мВ.}$

$$12.11. \mathcal{E}_i(r) = \frac{\mu_0 l v I}{2 \pi r}. \quad 12.12. \mathcal{E}_i(x) = \frac{\mu_0 a^2 v I}{2 \pi x (a + x)}.$$

$$12.13. v = \frac{m g R \sin \alpha}{B^2 l^2}. \quad 12.14. B = \frac{q R}{2 N S} = 0,5 \text{ Тл.}$$

12.15. Позначимо початкове та кінцеве положення рамки як 1 та 2. Тоді заряд, який пройде рамкою під час її повороту,

$$q = \int_1^2 I(t) dt = \int_1^2 \frac{\mathcal{E}_i(t)}{R} dt = -\frac{1}{R} \int_1^2 \frac{d\Phi(t)}{dt} dt = -\frac{1}{R} (\Phi_2 - \Phi_1).$$

Далі визначимо потоки магнітної індукції для двох положень рамки, враховуючи, що на відстані r від провідника зі струмом елементарний потік через площу adr $\frac{\mu_0 I a}{2 \pi r} dr$. Також врахуємо, що знаки потоків Φ_1 та Φ_2 будуть протилежними. Отже, шуканий заряд

$$q = -\frac{1}{R} (\Phi_2 - \Phi_1) = -\frac{1}{R} \frac{\mu_0 a I}{2 \pi} \left(\int_b^{b+a} \frac{-dr}{r} - \int_{b-a}^b \frac{dr}{r} \right) = \frac{\mu_0 a I}{2 \pi R} \ln \frac{b+a}{b-a}.$$

12.16. а) Індукційний струм знаходимо, використовуючи закон Ома та закон електромагнітної індукції. Оскільки на відстані r від провідника швидкість зміни магнітного потоку через елементарну площу $r dr$ дорівнюватиме $vB(r)dr$, то матимемо

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{1}{R} \int_a^b vB(r)dr = \frac{v}{R} \int_a^b \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi R} \ln \frac{b}{a}.$$

б) Для забезпечення сталої швидкості потрібно зовнішньою силою F зрівноважити силу Ампера F_A , яка діє на стрижень. Оскільки на елемент стрижня довжиною dr діятиме сила $I_i B(r)dr$, то

$$F = F_A = \int_a^b I_i B(r)dr = \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi R} \ln \frac{b}{a} \int_a^b \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} dr = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{v}{R} \ln^2 \frac{b}{a}.$$

12.17. а) Стрижень гальмуватиме сила Ампера $-m \frac{dv}{dt} = -F_A$:

$$F_A = I_i Bl = \frac{\mathcal{E}_i}{R} Bl = -\frac{Bl}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B^2 l}{R} \frac{dS}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{R} \frac{dv}{dt}.$$

Отже, $m \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{R} v$. А пройдена відстань

$$a = \int_0^t v dt = -\frac{mR}{B^2 l^2} \int_{v_0}^0 dv = \frac{v_0 m R}{B^2 l^2}.$$

$$\text{б) } Q = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

$$\text{12.18. } I_0 = \frac{\omega B_0 (a - b)}{4R_{0,d}} = 0,5 \text{ А.}$$

12.19. Виберемо на спіралі кільце радіусом r , товщиною dr , яке охоплює dN витків. Тоді $d\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} dN = -\pi r^2 B_0 \omega \cos \omega t dN$.

Враховавши, що $dN = \frac{N}{a} dr$, отримаємо

$$\mathcal{E}_1(t) = -\pi B_0 \omega \frac{N}{a} \cos \omega t \int_0^a r^2 dr = -\pi \omega N B_0 \frac{a^2}{3} \cos \omega t.$$

Отже, амплітудне значення ЕРС індукції $\mathcal{E}_{10} = \frac{1}{3} \pi a^2 \omega N B_0$.

$$12.20. \mathcal{E}_1 = B_0 N S \omega \cos 2\omega t.$$

$$12.21. I = \frac{\mu_0 n S d i}{4\rho} = 2 \text{ мА}, \text{ де } \rho \text{ — питомий опір міді.}$$

$$12.22. L = \mu_0 \frac{R^2 S^2}{4\pi \rho^2 l} = 54,5 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

$$12.23. N = \frac{4dL}{\mu_0 \pi D^2} = 380. \quad 12.24. Q = \frac{a^2 \tau^3}{3R}.$$

12.25. Індуктивність соленоїда $L = \mu_0 n^2 V = \mu_0 n^2 \pi r^2 l_c$, де r — радіус соленоїда. Отже, кількість витків на одиницю довжини

$$n = \sqrt{\frac{L}{\mu_0 \pi l_c}} \frac{1}{r}, \text{ а шукана довжина дроту}$$

$$l = n l_c \cdot 2\pi r = \sqrt{\frac{4\pi l_c L}{\mu_0}} \approx 100 \text{ м.}$$

12.26. Із задачі 12.25 довжина дротини $l = \sqrt{4\pi l_c L / \mu_0}$, де l_c — довжина соленоїда. Опір обмотки $R = \rho l / S$, де S — площа поперечного перерізу дротини; ρ — питомий опір міді. Маса

дротини $m = \rho' S l$, де ρ' — густина міді. Отже, $l = \frac{RS}{\rho} = \frac{Rm}{\rho \rho' l}$,

або $l = \sqrt{\frac{Rm}{\rho \rho'}}$. Прирівняємо перший і останній вирази для визначення довжини l дротини й визначимо індуктивність соленоїда $L = \frac{\mu_0 m R}{4\pi l_c \rho \rho'}$.

12.27. Нехай по кабелю протікає струм I . Виберемо коловий контур радіусом r навколо осі циліндрів так, що він розташований між циліндрами, а його центр — на їхній осі. Циркуляція вектора напруженості магнітного поля вздовж цього кола $H_r \cdot 2\pi r = I$, або $H_r = \frac{I}{2\pi r}$. Відповідно, $B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Потік вектора магнітної індукції через одиничну довжину $l_{\text{о.д}}$ кабелю між циліндрами

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} B_r l_{\text{о.д}} dr = \frac{\mu_0 I l_{\text{о.д}}}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\mu_0 I l_{\text{о.д}}}{2\pi} \ln \eta.$$

Відповідно, індуктивність одиниці довжини кабелю

$$L_{\text{о.д}} = \frac{\Phi}{I l_{\text{о.д}}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \eta = 0,26 \text{ мкГн/м.}$$

12.28. Нехай через тороїдальну котушку протікає струм I . Для колового контуру радіусом r усередині тороїда запишемо теорему про циркуляцію вектора індукції магнітного поля:

$$\oint (\vec{B} d\vec{r}) = B \cdot 2\pi r = \mu\mu_0 N I. \text{ Звідси } B = \frac{\mu\mu_0 N I}{2\pi r}.$$

Тоді потік вектора індукції магнітного поля крізь поперечний переріз тороїдального соленоїда

$$\Phi = N\Phi_1 = N \int_b^{b+a} \frac{\mu\mu_0 N I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu\mu_0 a N^2 I}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b} = L I. \text{ Звідки}$$

$$L = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} a N^2 \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right).$$

12.29. Нехай по стрічці протікає струм I . Нехтуючи крайовими ефектами і врахувавши розв'язок задачі **9.16**, отримаємо величину індукції магнітного поля між стрічками

$$B = \mu_0 \frac{I}{b}. \text{ Тоді потік вектора індукції магнітного поля через}$$

переріз міжстрічкового проміжку $\Phi = \mu_0 \frac{I}{b} h l_{\text{о.д}}$, де $l_{\text{о.д}}$ — одиниця довжини лінії. А індуктивність одиниці довжини стрічкової лінії

$$L_{\text{о.д}} = \frac{\Phi}{I l_{\text{о.д}}} = \frac{\mu_0 h}{b} = 25 \text{ нГн/м.}$$

12.30. З міркувань симетрії поза межами двопровідної лінії потоки індукції магнітного поля матимуть протилежні напрями і скомпенсуються. Тому розглянемо лише потік через частину площини між провідниками. Нехай a — радіус провідників, b — відстань між ними. Індукція магнітного поля на відстані r від одного з провідників та, відповідно, на відстані $b - r$ від іншого провідника $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b - r} \right)$. Магнітний потік через площу, обмежену провідниками довжиною l ,

$\Phi = l \int_a^{b-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b - r} \right) dr$. Тоді потік через площу, обмежену провідниками одиничної довжини,

$$\Phi_{\text{о.д}} = \frac{\Phi}{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{b-a}{a} - \ln \frac{a}{b-a} \right) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{b-a}{a} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \eta.$$

Відповідно, індуктивність одиниці довжини двопровідної лінії

$$L_{\text{о.д}} = \frac{\Phi_{\text{о.д}}}{I} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \eta.$$

12.31. $I = \frac{\pi a^2 B}{L} = 15 \text{ А.}$ **12.32.** а) $I = \frac{\pi a^2 B}{L}$; б) $A = \frac{\pi^2 a^4 B^2}{2L}$.

12.33. У замкненому надпровідному соленоїді під час його розтягу (стиску) магнітний потік є незмінним, тобто

$\Phi = LI = \text{const}$ (1). Індуктивність соленоїда $L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$, де S — поперечний переріз соленоїда; l — довжина соленоїда; N — кількість витків. Тоді умова (1) виконується після розтягу, якщо $\frac{I}{l} = \text{const}$. Звідси $\frac{I}{l} = \frac{I_0}{l_0}$, або $I = I_0 \frac{l}{l_0} = I_0(1 + \eta) = 2 \text{ А.}$

12.34. Нехай внутрішній соленоїд має n_1 витків на одиницю довжини, тоді потік індукції магнітного поля в його середині $\Phi_1 = B_1 S = \mu\mu_0 n_1 I S$, де I — деякий пробний струм через соленоїди. Тоді взаємна індуктивність соленоїдів на одиницю

$$\text{їхньої довжини } L_{12 \text{ о.д}} = \frac{n_2 \Phi_1}{I} = \mu\mu_0 n_1 n_2 S.$$

12.35. На відстані r від дротини індукція магнітного поля

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ де } I \text{ — деякий пробний струм через дротину. Тоді}$$

$$\text{потік через рамку } \Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_l^{l+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{l} \right).$$

$$\text{А взаємна індуктивність } L_{12} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{l} \right).$$

$$\mathbf{12.36.} \quad L_{12} = \frac{\mu_0 \mu h N}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

$$\mathbf{12.37.} \quad \text{а) } L_{12} \approx \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}; \quad \text{б) } \Phi_{21} = \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{2b}.$$

12.38. Індукція магнітного поля кільця, магнітний момент

$$\text{якого } \vec{p}_m = I \pi a^2 \vec{n}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{p}_m \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right). \text{ Оскільки } \vec{p}_m \perp \vec{r}, \text{ то}$$

$$B = \frac{\mu_0 a^2 I}{4r^3}.$$

12.39. Зміна потоку індукції магнітного поля через котушку

$$-N \frac{d\Phi}{dt} \text{ за час } dt \text{ зумовлює виникнення індукційного струму}$$

$$-\frac{N}{R} \frac{d\Phi}{dt}. \text{ Заряд, який пройде під час переміщення магніту з}$$

$$\text{центра кільця до нескінченності, } q = -\frac{N}{R} \Delta\Phi = -\frac{N}{R} (\Phi - \Phi_0).$$

Врахувавши розв'язок задачі **12.38**, отримаємо

$$\Phi_0 = \int_0^{\Phi_0} \left(-\frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3} \right) 2\pi r dr = -\int_0^a \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3} 2\pi r dr = -\frac{\mu_0 p_m}{2} \int_0^a \frac{dr}{r^2} = \frac{\mu_0 p_m}{2a}.$$

$$\text{Отже, } p_m = \frac{2aRq}{\mu_0 N}.$$

12.40. Індукція магнітного поля одного витка в центрі іншого

$$B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(\sqrt{l^2 + a^2})^3}, \quad \text{при } l \gg a \quad B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2l^3}.$$

$$\text{Її потік через другий виток } \Phi \approx \frac{\mu_0 \pi a^4 I}{2l^3}.$$

$$\text{Тоді взаємна індуктивність витків } L_{12} \approx \frac{\mu_0 \pi a^4}{2l^3}.$$

13. Енергія магнітного поля.

Рівняння Максвелла

$$13.1. \quad IN = \sqrt{\frac{2w_m l^2}{\mu_0}} = 334 \text{ А} \cdot \text{В}. \quad 13.2. \quad I = \sqrt{\frac{2lSw_m}{L}} = 1 \text{ А}.$$

13.3. Зв'язок магнітного потоку та струму у торі має вигляд $\Phi = LI$. Енергію магнітного поля всередині тороїда знайдемо з потужності джерела, яка витрачена на зростання струму до величини $I = 2 \text{ А}$:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^I E(t)I(t) dt = \int_0^{\Phi} N \frac{d\Phi(t)}{dt} I(t) dt = LN \int_0^I IdI = \frac{1}{2} LNI^2 = \\ &= \frac{1}{2} NI\Phi = 0,5 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

13.4. З теореми про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля $H \cdot 2\pi b = NI$, або $H = \frac{NI}{2\pi b}$. Маючи H , знайдемо B з графіка $B(H)$. Отже, накопичена в осерді повна енергія $W = BH\pi^2 a^2 b = \text{Дж}$.

13.5. З теореми про циркуляцію $\oint(\vec{H}d\vec{r}) = NI$, отже, $H\pi d + \frac{B}{\mu_0}b = NI$, ($d \gg b$). Зв'язок індукції та напруженості $B = \mu\mu_0 H$, отже, $H = \frac{NI}{\pi d + \mu b}$. Індукція є неперервною на

переході з магнетика у середовище і навпаки, тому

$$B = \mu\mu_0 \frac{NI}{\pi d + \mu b} \text{ і в магнетика, і в прорізі.}$$

$$\text{а) } \frac{W_{\text{пр}}}{W_{\text{магн}}} = \left(\frac{B^2}{2\mu_0} S b \right) / \left(\frac{B^2}{2\mu\mu_0} S \pi d \right) = \frac{\mu b}{\pi d} \approx 3.$$

$$\text{б) Магнітний потік } N \int_S (\vec{B} d\vec{S}) = N \mu\mu_0 \frac{NI}{\pi d + \mu b} S.$$

$$\text{Отже, } L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{\pi d + \mu b}.$$

$$\text{Повна енергія } W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} (\pi d + \mu b) S = \frac{1}{2} \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{\pi d + \mu b} I^2 = \frac{1}{2} L I^2.$$

$$\text{Отже, } L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{\pi d + \mu b}.$$

В обох випадках вираз для індуктивності однаковий, $L = 0,15$ Гн. Однак у розрахунку потоку ми не враховували магнітного поля в прорізі, оскільки воно не зв'язане з обмоткою. Проте в разі розрахунку енергії воно враховане.

13.6. Обертання циліндра навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω еквівалентне протіканню через відрізок одиничної довжини поверхневого струму $i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$ (тут q_i — заряд

одиниці довжини циліндра). Напрямок цього струму є перпендикулярним до площини рис. 236 у точці P . Такий елемент поверхневого струму створює в довільній точці Q магнітне поле, індукція якого $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i[\vec{e}\vec{r}]}{r^3} dS$, де \vec{e} — одиничний вектор, паралельний до напрямку струму. Величина $[\vec{e}\vec{r}] = r$, оскільки \vec{r} перпендикулярний до \vec{e} . Радіальні компоненти $d\vec{B}_R$ компенсують

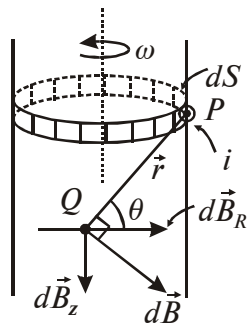


Рис. 236

одна одну з міркувань циліндричної симетрії. Отже,

$$B = \int_0^B d\vec{B}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{idS}{r^2} \cos \theta. \text{ Оскільки } \frac{dS \cos \theta}{r^2} \text{ — елемент ті-$$

лесного кута, то $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{4\pi} d\Omega = \mu_0 i$. Енергія магнітного поля на одиницю довжини циліндра

$$W_{\text{о.д}} = w_{\text{м}} S_{\text{п}} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 \lambda^2 \omega^2}{4\pi^2} \pi a^2 = \frac{\mu_0 a^2 \lambda^2 \omega^2}{8\pi}, \text{ де } S_{\text{п}} \text{ — площа попереч-$$

ного перерізу циліндра.

$$13.7. E = \frac{B}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ В/м.}$$

13.8. Напруженість електричного поля на осі кільця радіусом a на відстані l від його центра $E_l = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + l^2} \right)^{-3}$. Для

визначення індукції B_l магнітного поля в тій же точці візьмемо до уваги, що кільце обертається, отже, струм, зумовлений перенесенням заряду, $I = q \frac{\omega}{2\pi}$. Тоді $B_l = \frac{\mu_0 a^2 I}{2} \left(\sqrt{a^2 + l^2} \right)^{-3}$.

Звідси шукане відношення об'ємних густин енергій

$$\frac{w_{\text{м}}}{w_{\text{е}}} = \frac{B^2}{\epsilon_0 \mu_0 E^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 \mu_0 a^2 I}{2ql} \right)^2 = \epsilon_0 \mu_0 a^2 \omega^2 = 1,1 \cdot 10^{-15}.$$

13.9. Повна об'ємна густина енергії магнітного поля в пара- або діаманетику

$$w_{\text{м}} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{B} \vec{H}) dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{B} \cdot \vec{B} dV - \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{B} dV.$$

Перший доданок — об'ємна густина енергії магнітного поля у вакуумі, а другий виражає втрату енергії (виконану роботу), яка йде на намагнічення елемента об'єму. Відповідно,

$$A = (\vec{J} \vec{B})/2.$$

13.10. Енергія магнітного поля, яке створюють обидва контури в просторі, $W_{12} = \frac{1}{2\mu} \int_V |\vec{B}_1 + \vec{B}_2|^2 dV$. Очевидно, ця енергія є сумою енергій полів, які створюють контури окремо, та енергії взаємодії цих контурів: $W_{12} = W_1 + W_2 + W_{вз}$.

Звідси $W_{вз} = W_{12} - W_1 - W_2$, або

$$W_{вз} = \frac{1}{2\mu} \int_V |\vec{B}_1 + \vec{B}_2|^2 dV - \frac{1}{2\mu} \int_V |\vec{B}_1|^2 dV - \frac{1}{2\mu} \int_V |\vec{B}_2|^2 dV = \frac{1}{\mu} \int_V (\vec{B}_1 \vec{B}_2) dV.$$

13.11. Оскільки $a \ll b$, то можемо розглядати контур радіусом a як диполь з моментом $p_m = I_1 \pi a^2$, розміщений у магнітному полі $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2b}$, яке створює контур радіусом b (рис. 237).

Напрямок вектора дипольного моменту перпендикулярний до площини цього контуру й утворює кут ϑ з напрямком вектора індукції. Тоді енергія взаємодії двох

контурів $W_{вз} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2b} \pi a^2 \cos \vartheta$. Знак

енергії взаємодії визначений взаємними напрямками струмів.

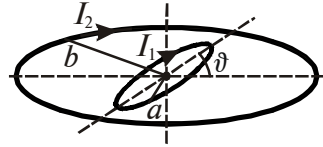


Рис. 237

13.12. а) Нехай внутрішній сфері надано заряду Q . Тоді завдяки слабо провідному середовищу між сферами заряд проходить у радіальному напрямі. Рівняння неперервності

для струму провідності $-\frac{dQ}{dt} = j_{пр} \cdot 4\pi r^2$. Звідси густина струму провідності $\vec{j}_{пр} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dQ}{dt} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$. З іншого боку,

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) = -\vec{j}_{пр}.$$

б) Напруженість електричного поля між сферами в довільній точці з радіусом-вектором \vec{r} $\vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

За законом Ома $\vec{j}_{\text{пр}} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\rho r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$. Тоді густина струму

зміщення $\vec{j}_{\text{зм}} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\rho r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$. А струм зміщення, відповідно,

$$I_{\text{зм}} = \oint_S (\vec{j}_{\text{зм}} d\vec{S}) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\rho} \int_S \frac{dS \cos\theta}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\rho} \int d\Omega = -\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon\rho}.$$

Знак “-” означає, що напрям струму зміщення протилежний до напрямку струму провідності.

13.13. $\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 d\vec{E}}{dt}$; $\vec{j}_{\text{зм.макс}} \approx 8,35 \cdot 10^{-7} \text{ А/м}^2$.

13.14. У нерелятивістському випадку $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r}$;

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi} \left[-\frac{1}{r^3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - \frac{3\vec{r}}{r^4} \frac{\partial r}{\partial t} \right] = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{-\vec{v}}{r^3} - \frac{3\vec{r}v}{r^4} \right],$$

де $\vec{v} = -\frac{d\vec{r}}{dt}$ — швидкість заряду (знак “-” означає протилежний напрям “руху” досліджуваної точки щодо рухомого заряду):

а) оскільки $\frac{\partial r}{\partial t} = -v$ та $v \frac{\vec{r}}{r} = \vec{v}$, то $\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{q\vec{v}}{2\pi r^3}$;

б) оскільки $\vec{r} \perp \vec{v}$, то $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$ і $\vec{j}_{\text{зм}} = -\frac{q\vec{v}}{4\pi r^3}$.

13.15. У середині соленоїда (за законом електромагнітної індукції Фарадея) $E \cdot 2\pi r = \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2$, або $E = \beta r t$. Звідси

$$j_{\text{зм}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \beta r.$$

Зовні соленоїда $E \cdot 2\pi r = \frac{\partial B}{\partial t} \pi R^2$, або $E = \frac{\beta R^2 t}{r}$. Отже,

$$j_{\text{зм}} = \frac{\varepsilon_0 \beta R^2}{r}.$$

13.16. $\varepsilon = \frac{2Hd\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta E r^2} \approx 7,2$.

13.17. $\frac{W_{\text{магн. макс}}}{W_{\text{ел. макс}}} = \frac{\mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \omega^2 a^2}{8}$.

13.18. Згідно з законом повного струму, отримаємо

$$H \cdot 2\pi r = \sigma E_{\max} \cos \omega t \cdot \pi r^2 + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d(E_{\max} \sin \omega t)}{dt} \cdot \pi r^2;$$

$$H(r) = \frac{r\sigma E_{\max}}{2} \left(\cos \omega t - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \omega}{\sigma} \sin \omega t \right).$$

Зведемо цей розв'язок до гармонічного вигляду, використавши метод Ібн-Юніса:

$$\cos \omega t - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \omega}{\sigma} \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \omega t \cos \varphi - A \sin \omega t \sin \varphi.$$

$$\text{Звідси } A = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 \varepsilon_0^2 \omega^2}{\sigma^2}}, \text{ а } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \omega}{\sigma};$$

$$H(r) = \frac{r\sigma E_{\max}}{2} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 \varepsilon_0^2 \omega^2}{\sigma^2}} \cos \left(\omega t + \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0 \omega}{\sigma} \right) \right).$$

13.19. Нехтуючи крайовими ефектами, аналогічно до розв'язку задачі **13.12**, маємо $\vec{j}_{\text{пр}} = -\vec{j}_{\text{пр}}$. Тоді сумарний струм усередині конденсатора $\vec{j} = \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{зм}} = \mathbf{0}$, отже, магнітного поля нема.

$$\mathbf{13.20.} \quad E_{\max} = \frac{I_{\max}}{\varepsilon_0 \omega S} \approx 706 \text{ В/м.}$$

$$\mathbf{13.21.} \quad \text{Якщо } \vec{B} = \vec{B}(t), \text{ то } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \mathbf{0}.$$

Це можливо лише:

а) за наявності електричного поля, оскільки $\operatorname{rot} \vec{E} \neq \mathbf{0}$.

б) за наявності неоднорідного електричного поля, оскільки для однорідного просторові похідні дорівнюють нулю.

13.22. Візьмемо дивергенцію від обох частин рівняння

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \text{ Оскільки дивергенція від ротора завжди до-}$$

рівнює нулю, то отримаємо $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, тому що $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$.

13.23. Візьмемо дивергенцію від обох частин першого рівняння. Оскільки дивергенція від ротора завжди дорівнює нулю, то $-\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0$. Отже, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, що справді не суперечить другому рівнянню.

13.24. Магнітне поле, яке обертається, можна записати у вигляді $B_x = B_0 \cos \omega t$, $B_y = B_0 \sin \omega t$, $B_z = B_0$. Тоді $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$.

Або у відповідних проекціях:

$$-(\operatorname{rot} \vec{E})_x = -\omega B_0 \sin \omega t = -\omega B_y;$$

$$-(\operatorname{rot} \vec{E})_y = \omega B_0 \cos \omega t = \omega B_x;$$

$$-(\operatorname{rot} \vec{E})_z = 0.$$

Тобто $\operatorname{rot} \vec{E} = -[\vec{\omega} \vec{B}]$, де $\vec{\omega} = \vec{k} \omega$, а \vec{k} — орт осі z .

13.25. Розглянемо заряд q , який рухається зі швидкістю \vec{v} у системі відліку K . На нього діє сила $\vec{F} = q[\vec{v} \vec{B}]$. У системі відліку K' , яка рухається з нерелятивістською швидкістю \vec{v} відносно K , заряд перебуває у стані спокою. Це означає, що в системі K' має бути електричне поле \vec{E}' , яке діє на заряд із силою $\vec{F}' = q\vec{E}' = \vec{F} = q[\vec{v} \vec{B}]$. Отже, $\vec{E}' = [\vec{v} \vec{B}]$.

13.26. $\sigma = \varepsilon_0 v B = 0,4 \text{ пКл/м}^2$.

13.27. Встановимо систему координат так, що $\vec{\omega} \uparrow \uparrow \vec{B}$ спрямовані вздовж осі z , і виберемо \vec{r} як полярний радіус-вектор довільної точки (відстань від цієї точки до осі циліндра). Лінійна швидкість цієї точки $\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]$. Рівнодійна сил, які діють з боку електричного та магнітного полів на заряд q , що перебуває у цій точці, дорівнює нулю. Тобто $q\vec{E} + q[\vec{v} \vec{B}] = 0$, та $\vec{E} = -[[\vec{\omega} \vec{r}] \vec{B}] = -(\vec{\omega} \vec{B}) \vec{r}$. Тоді об'ємна густина цього заряду $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = -2\varepsilon_0 (\vec{\omega} \vec{B}) = -80 \text{ пКл/м}^3$.

Оскільки циліндр загалом електрично нейтральний, то бічна поверхня циліндра набуває позитивного заряду з поверхневою густиною σ , яку знайдемо з умови $\sigma S_{\text{бінн}} = -\rho V$:

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0(\vec{\omega}\vec{B})V}{S_{\text{бiчн}}} = \varepsilon_0 a(\vec{\omega}\vec{B}) = 2 \text{ пКл/М}^2.$$

13.28. У системі відліку K' , яка пов'язана із зарядом q ,

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}\vec{B}] = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad \vec{B}' \cong \vec{B} - \frac{[\vec{v}\vec{E}]}{c^2} = 0 \text{ (оскільки в системі}$$

K' заряд нерухомий). Тут \vec{v} — швидкість системи K' відносно системи K , у якій заряд рухається зі швидкістю \vec{v} .
Тоді з другого рівняння

$$\vec{B} \cong \frac{[\vec{v}\vec{E}]}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{[\vec{v}\vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}.$$

13.29. Припустимо, що в системі відліку K є лише електричне поле. Тоді в системі K' за нерелятивістських швидкостей ($v \ll c$) напруженість електричного поля $\vec{E}' = \vec{E}$, індукція магнітного

поля $\vec{B}' = -\frac{[\vec{v}\vec{E}]}{c^2}$, отже, існують обидва поля, причому $\vec{E}' \perp \vec{B}'$.

13.30. У системі K' : $\vec{B}' = -\frac{[\vec{v}\vec{E}]}{c^2} = \frac{a[\vec{r}\vec{v}]}{c^2 r^2}$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

13.31. У нерелятивістському випадку ($v \ll c$) $\beta^2 \rightarrow 0$. Отже,

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} \cong \vec{E}_{\perp} + [\vec{v}\vec{B}], \quad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} \cong \vec{B}_{\perp} - \frac{[\vec{v}\vec{E}]}{c^2}.$$

Додамо відповідні рівняння, отримаємо

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}\vec{B}], \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{[\vec{v}\vec{E}]}{c^2}.$$

13.32. Виберемо систему координат так, щоб напрям \vec{E} збігався з віссю z , тобто $\vec{E} = (0, 0, E)$. Система відліку K' рухається зі швидкістю $\vec{v} = (v \sin \alpha, 0, v \cos \alpha)$ у площині xz . Тоді в системі K'

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\parallel} = 0, \quad \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{-[\vec{v}\vec{E}]/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Напрямок \vec{v} можна вказати вектором $\vec{e} = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$. Тоді перпендикулярний до нього вектор у площині xz має вигляд $\vec{f} = (-\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$.

Визначимо вектори \vec{E}' та \vec{B}' :

а) у базисі (\vec{e}, \vec{f}) напруженість електричного поля виразимо як

$$\vec{E} = E \cos \alpha \vec{e} + E \sin \alpha \vec{f}, \text{ тому } E_{\parallel}' = E \cos \alpha \text{ і } E_{\perp}' = \frac{E \sin \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\text{отже, } E' = E \sqrt{\frac{1 - \beta^2 \cos^2 \alpha}{1 - \beta^2}} = 9 \text{ кВ/м, } \alpha' = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 51^\circ;$$

$$\text{б) } B_{\parallel}' = 0, \quad \vec{B}_{\perp}' = \frac{[\vec{v}\vec{E}]/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad B' = \frac{\beta E \sin \alpha}{c\sqrt{1 - \beta^2}} = 14 \text{ мкТл.}$$

13.33. Виберемо систему координати так, що вектор \vec{B} паралельний до осі z . Тоді швидкість $\vec{v} = (v \sin \alpha, 0, v \cos \alpha)$ у площині xz . У системі K'

$$\vec{E}_{\parallel}' = \vec{E}_{\parallel} = 0, \quad \vec{E}_{\perp}' = \frac{[\vec{v}\vec{B}]/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vec{B}_{\parallel}' = \vec{B}', \quad \vec{B}_{\perp}' = \frac{\vec{B}_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

$$E' = \frac{\beta B \sin \alpha}{c\sqrt{1 - \beta^2}} = 1,4 \text{ нВ/м, } B' = B \sqrt{\frac{1 - \beta^2 \cos^2 \alpha}{1 - \beta^2}} = 0,9 \text{ Тл,}$$

$$\alpha' = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 51^\circ.$$

13.34. а) У K' -системі відліку маємо

$$\begin{aligned} (\vec{E}' \vec{B}') &= (\vec{E}'_{\parallel} \vec{B}'_{\parallel}) + (\vec{E}'_{\perp} \vec{B}'_{\perp}) = (\vec{E}_{\parallel} \vec{B}_{\parallel}) + \frac{(\vec{E}_{\perp} + [\vec{v}\vec{B}]) \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{[\vec{v}\vec{E}]}{c^2} \right)}{1 - \beta^2} = \\ &= (\vec{E}_{\parallel} \vec{B}_{\parallel}) + \frac{(\vec{E}_{\perp} \vec{B}_{\perp}) - [\vec{v}\vec{B}] \frac{[\vec{v}\vec{E}]}{c^2}}{1 - \beta^2} = (\vec{E}_{\parallel} \vec{B}_{\parallel}) + \frac{(\vec{E}_{\perp} \vec{B}_{\perp}) - [\vec{v}\vec{B}_{\perp}] \frac{[\vec{v}\vec{E}_{\perp}]}{c^2}}{1 - \beta^2} = \end{aligned}$$

$= (\vec{E}_{\parallel} \vec{B}_{\parallel}) + (\vec{E}_{\perp} \vec{B}_{\perp}) \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = (\vec{E} \vec{B})$, оскільки скалярний добуток двох векторних добутоків $[\vec{A} \vec{B}][\vec{C} \vec{D}] = (\vec{A} \vec{C})(\vec{B} \vec{D}) - (\vec{A} \vec{D})(\vec{B} \vec{C})$;

$$\begin{aligned} \text{б) } E'^2 - c^2 B'^2 &= E_{\parallel}'^2 - c^2 B_{\parallel}'^2 + E_{\perp}'^2 - c^2 B_{\perp}'^2 = \\ &= E_{\parallel}^2 - c^2 B_{\parallel}^2 + \frac{1}{1 - \beta^2} \left[(\vec{E}_{\perp} + [\vec{v} \vec{B}])^2 - c^2 \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{[\vec{v} \vec{E}]}{c^2} \right)^2 \right] = \\ &= E_{\parallel}^2 - c^2 B_{\parallel}^2 + \frac{1}{1 - \beta^2} \left[E_{\perp}^2 - c^2 B_{\perp}^2 + [\vec{v} \vec{B}_{\perp}]^2 - \frac{[\vec{v} \vec{E}_{\perp}]^2}{c^2} \right] = \\ &= E_{\parallel}^2 - c^2 B_{\parallel}^2 + \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} [E_{\perp}^2 - c^2 B_{\perp}^2] = E^2 - c^2 B^2. \end{aligned}$$

В останній формулі враховано, що коли \vec{A} і \vec{B} взаємно перпендикулярні, то $[\vec{A} \vec{B}]^2 = A^2 B^2$.

13.35. Оскільки поля перпендикулярні, то $(\vec{E} \vec{B}) = 0$,

а $E^2 - c^2 B^2 = -1,6 \cdot 10^9 \text{ В}^2/\text{м}^2 < 0$, тому $E' = 0$.

Тоді $B' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 B^2 - E^2} \approx 0,15 \text{ мТл}$.

13.36. Розглянемо заряд q , який рухається у додатному напрямі відносно осі x K -системи відліку. Перейдемо до K' -системи, у початку координат якої заряд перебуває в стані спокою (осі x та x' обох систем збігаються, осі y та y' — паралельні). У K' -системі поле заряду матиме вигляд

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \quad \vec{E}'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3}, \quad \vec{E}'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{r'^3}.$$

Повернемось до K -системи. У момент, коли заряд q проходить через початок координат цієї системи, проекції x та y вектора \vec{r} пов'язані з проекціями x' та y' вектора \vec{r}' співвідношеннями $x = r \cos \vartheta = x' \sqrt{1 - \beta^2}$; $y = r \sin \vartheta = y'$.

На підставі цього $r'^2 = r^2 \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta}{1 - \beta^2}$.

Застосуємо формули перетворення полів у разі переходу з K' -системи до K -системи, отримаємо $E_x = E'_x$, $E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

$$\text{Тоді } \vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}.$$

$$13.37. E = \sqrt[4]{S^2 \frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}.$$

$$13.38. S = EH = \frac{I}{2\pi r v \epsilon_0} \cdot \frac{I}{2\pi r} = \frac{I^2}{4\pi^2 r^2 v \epsilon_0}.$$

Вектор \vec{S} напрямлений за струмом.

$$13.39. S = EH = \frac{q^2 v \sin \varphi}{16\pi^2 \epsilon_0 r^4}.$$

Тут φ — кут між напрямом руху частинки і радіусом-вектором \vec{r} . *Вказівка: скористайтесь формулами перетворень полів у разі переходу до K' -системи, у якій заряд перебуває в спокої.*

$$13.40. E = \frac{p\sqrt{3\cos^2 \varphi + 1}}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad H = \frac{pv \sin(2\varphi)}{4\pi r^3};$$

$$S = \frac{p^2 v \sin(2\varphi) \sqrt{3\cos^2 \varphi + 1}}{16\pi^2 \epsilon_0 r^6}.$$

Тут φ — кут між віссю диполя і напрямом на точку спостереження, а дипольний момент $p = ql$.

14. RC- та RL-кола. Змінний струм у RLC-колах

14.1. З другого правила Кірхгофа для такого контуру отримаємо $IR + U_c = U_0$, де U_c — напруга на конденсаторі; I — струм у колі, $I = C \frac{dU_c}{dt}$. Отже, $\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c}{RC} = \frac{U_0}{RC}$.

Розділимо змінні $\frac{dU_c}{U_0 - U_c} = \frac{dt}{RC}$ і проінтегруємо

$$\int_0^{0,9U_0} \frac{dU_c}{U_0 - U_c} = \int_0^{t_0} \frac{dt}{RC}. \text{ Отримаємо } -\ln \frac{U_0 - 0,9U_0}{U_0} = \frac{t_0}{RC}.$$

Звідки $t_0 = -RC \ln \left(1 - \frac{0,9U_0}{U_0} \right) = 0,6$ мкс.

14.2. Змодельуємо діелектричну прокладку опором R . Тоді різниця потенціалів на пластинах конденсатора дорівнюватиме напрузі на цьому опорі: $U_c = IR = RC \frac{dU_c}{dt}$. Отже,

$$\ln U_c(t) = -\frac{t}{RC} + \text{const}, \text{ де const знайдемо з умови, що при } t = 0$$

напруга $U(t) = U_0$, тобто $\text{const} = \ln U_0$. Тоді $U(t) = U_0 \exp \left(-\frac{t}{RC} \right)$.

Оскільки заряд на пластинах конденсатора пропорційний до напруги, то $q(t) = q_0 \exp \left(-\frac{t}{RC} \right)$. Отже, якщо за час t_0 заряд зменшиться вдвічі, то $t_0 = RC \ln 2$. З урахуванням $C = \epsilon \epsilon_0 S/d$, $R = \rho d/S$ питомий опір діелектричної прокладки

$$\rho = \frac{t_0}{\epsilon \epsilon_0 \ln 2} = 1,4 \cdot 10^{13} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

14.3. Нехай у початковий момент $t_0 = 0$, коли $q_0 = C\mathcal{E}$, швидко змінюють ємність конденсатора. Тоді для довільного моменту часу $t > 0$: $\frac{\eta q}{C} - IR = \mathcal{E}$, де I — струм, який протікає у колі, $I = -dq/dt$ (знак “-” означає, що заряд зменшується).

Отже $\frac{dq}{dt} + \frac{\eta q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Розділимо змінні $\frac{dq}{C\mathcal{E} - \eta q} = \frac{dt}{RC}$ і проін-

тегруємо $\int_{q_0}^q \frac{dq}{C\mathcal{E} - \eta q} = \int_0^t \frac{dt}{RC}$.

$$\text{Звідси } q(t) = C\mathcal{E} \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \exp\left(-\frac{\eta t}{RC}\right) + \frac{1}{\eta} \right).$$

$$\text{Отже, } I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}(\eta - 1)}{R} \exp\left(-\frac{\eta t}{RC}\right).$$

14.4. Нехай заряд на пластинах конденсатора $+q$ та $-q$, відповідно (рис. 238). Тоді між пластинами різниця потенціалів $\varphi = q/C$. Запишемо правила Кірхгофа для цієї схеми:

$$\text{для вузла: } I = I_1 + I_2, \text{ де } I_2 = dq/dt;$$

$$\text{для контуру 13461: } \frac{q}{C} + \left(I_1 + \frac{dq}{dt} \right) R = \mathcal{E};$$

$$\text{для 23452: } I_1 R = \frac{q}{C}.$$

$$\text{Отже, } \frac{q}{C} + \left(\frac{q}{RC} + \frac{dq}{dt} \right) R = \mathcal{E}, \text{ або } R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} - 2 \frac{q}{C}.$$

$$\text{Тоді } \frac{dq}{C\mathcal{E} - 2q} = \frac{dt}{RC}; \int_0^q \frac{dq}{C\mathcal{E} - 2q} = \int_0^t \frac{dt}{RC}; -\frac{1}{2} \ln \frac{C\mathcal{E} - 2q}{C\mathcal{E}} = \frac{t}{RC}.$$

$$\text{Звідси } U = \frac{q}{C} = \frac{1}{2} \mathcal{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) \right).$$

14.5. а) Розглянемо тонкий сферичний шар з внутрішнім радіусом r та зовнішнім $r + dr$. Лінії струму будуть перпендикулярними до поверхонь цього шару і його опір

$$R = \int_0^R dR = \int_a^b \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \text{ Ємність сферичного конденсатора } C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon ab}{b-a}.$$

Заряд $q = CU$, де U — напруга між

обкладками конденсатора. Тоді $U = -\frac{dq}{dt} R$, оскільки конденсатор розряджається;

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} = -\frac{dt}{\rho\epsilon\epsilon_0}, \quad \int_0^q \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{\rho\epsilon\epsilon_0}.$$

$$\text{Звідси } q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{\rho\epsilon\epsilon_0}\right).$$

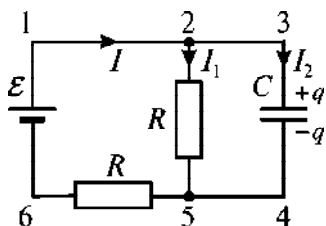


Рис. 238

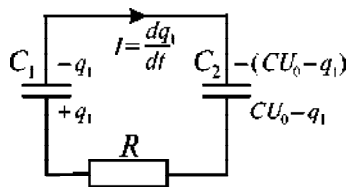


Рис. 239

б) Оскільки весь заряд розподіляється по діелектричному шару, то в теплоту перейде вся початкова енергія конденсатора:

$$Q = W_0 = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{q_0^2(b-a)}{8\pi\epsilon_0\epsilon ab}.$$

14.6. Використаємо хід розв'язку задачі 14.5:

$$\text{а) } \Delta q = q_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t_0}{RC}\right) \right) = 0,18 \text{ мКл};$$

$$\text{б) } Q = \frac{q_0^2}{2C} - \frac{q_0^2}{2C} \left[\exp\left(-\frac{t_0}{RC}\right) \right]^2 = \frac{q_0^2}{2C} \left(1 - \exp\left(-\frac{2t_0}{RC}\right) \right) = 82 \text{ мДж}.$$

14.7. а) Нехай на схемі (рис. 239) заряджений конденсатор — C_1 , а незаряджений — C_2 . Тоді друге правило Кірхгофа для такого контуру матиме вигляд

$$U_{C_1}(t) + I(t)R + U_{C_2}(t) = 0, \text{ або } \frac{q_1(t)}{C} + I(t)R + \frac{q_2(t)}{C} = 0.$$

Сумарний заряд на конденсаторах має бути сталим:

$$q_1(t) - q_2(t) = q_0 = CU_0, \text{ отже, } q_2(t) = q_1(t) - CU_0.$$

$$\text{Тоді } \frac{q_1(t)}{C} + I(t)R + \frac{q_1(t) - CU_0}{C} = 0, \text{ або } \frac{2q_1(t)}{C} + R \frac{dq_1(t)}{dt} - U_0 = 0;$$

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dq_1}{CU_0 - 2q_1}, \text{ звідси } q_1(t) = \frac{CU_0}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) \right).$$

$$\text{Отже, } I(t) = \frac{dq_1(t)}{dt} = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right).$$

б) Повна кількість теплоти, яка виділиться на опорі,

$$Q = \int_0^{\infty} I^2(t) R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) \right)^2 R dt = \frac{1}{4} C U_0^2.$$

14.8. Із другого правила Кірхгофа для такого контуру отримаємо

$$IR + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}. \text{ Далі проінтегруємо } \int_0^I \frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \int_0^t \frac{dt}{L},$$

$$\ln \frac{\mathcal{E} - IR}{\mathcal{E}} = -\frac{Rt}{L}, \text{ отримаємо } I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right).$$

За дуже великий проміжок часу встановиться максимальний струм

$$I(\infty) = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}. \text{ Звідси}$$

$$t_0 = -\frac{L}{R} \ln(1 - \eta) = 1,5 \text{ с.}$$

14.9. $\tau = \frac{L}{R}$, $R = \rho \frac{l_d}{S}$, де ρ — питомий опір; l_d — довжина дроту соленоїда; S — площа поперечного перерізу дроту;

$$m = \rho' l_d S, \text{ де } \rho' \text{ — густина матеріалу дроту. Отже, } R = \frac{\rho \rho' l_d^2}{m}.$$

$$\text{Із задачі 12.27 } l_d = \sqrt{\frac{4\pi L l_c}{\mu_0}}, \text{ тоді } \tau = \frac{\mu_0 m}{4\pi \rho \rho' l_c} = 0,7 \text{ мс.}$$

14.10. У початковий момент часу $t_0 = 0$ напруга спадає лише на активному опорі, струм у колі $I_0 = \mathcal{E}/R$, магнітний потік через котушку $\Phi_0 = LI_0$. Після стрибкоподібної зміни індуктивності магнітний потік починає змінюватись і виникає

$$\text{ЕРС індукції: } \mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI). \text{ Сумарна ЕРС визначає}$$

$$\text{струм у колі: } \mathcal{E}_1 + \mathcal{E} = IR, \text{ або } \mathcal{E} - \frac{d}{dt}(LI) = IR. \text{ Розглянемо}$$

$$\text{це рівняння у момент перемикання, коли } \frac{d\Phi}{dt} = 0:$$

$\frac{1}{dt} \left(\frac{LI'_0}{\eta} - LI_0 \right) = I_0 R - \mathcal{E} = 0$, де I'_0 — струм за значення індуктивності L/η . Отже, $I'_0 = \eta I_0$, тобто стрибкоподібне зменшення індуктивності веде до стрибкоподібної зміни струму.

При $t > 0$: $L(t) = \text{const} = \frac{L}{\eta}$, тому $\mathcal{E} - \frac{L}{\eta} \frac{dI}{dt} = IR$.

Звідси $\frac{dI}{IR - \mathcal{E}} = -\frac{\eta dt}{L}$ і $\int_{I_0}^I \frac{dI}{IR - \mathcal{E}} = -\int_0^t \frac{\eta dt}{L}$.

Отже, $I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 + (\eta - 1) \exp\left(-\frac{\eta R}{L} t\right) \right)$.

14.11. Аналогічно до задачі 14.4 (див. рис. 240),

$L \frac{dI_L}{dt} = \mathcal{E} - IR$; $L \frac{dI_L}{dt} = R(I - I_L)$.

Звідси $2L \frac{dI_L}{dt} = \mathcal{E} - RI_L$. Отже,

$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{2L} t\right) \right)$.

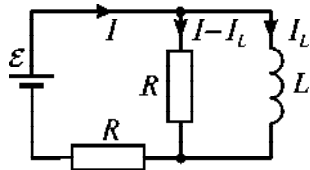


Рис. 240

14.12. Після розтягу соленоїда магнітний потік є незмінним, тобто $\Phi = LI = \text{const}$. Тоді (див. задачу 12.33) $\frac{I}{l} = \text{const}$, де l — довжина соленоїда. Оскільки $\frac{I}{l} = \frac{I_0}{l_0}$, то $\frac{l}{l_0} = \frac{I}{I_0} \approx 1,11$.

14.13. За струму $I(t) = \alpha t$ в одному з контурів створений ним змінний потік магнітного поля пронизує інший контур, зумовлюючи виникнення у ньому індукційної ЕРС:

$\mathcal{E}_{12} = L_{12} \frac{dI_1}{dt} = L_{12} \alpha$. Тоді з урахуванням ЕРС самоіндукції друге

правило Кірхгофа для другого контуру дає таке рівняння:

$L_2 \frac{dI_2}{dt} + RI_2 = L_{12} \alpha$. Розв'язком рівняння буде

$I_2(t) = \frac{\alpha L_{12}}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L_2} t\right) \right)$.

14.14. У початковий момент через котушку і резистор течуть струми $I_{L0} = \frac{\mathcal{E}}{R}$ та $I_{R0} = \frac{\mathcal{E}}{R_0}$, відповідно. У момент, коли ключ розімкнули, через резистор R_0 струм починає текти у зворотному напрямі (струм через котушку не може змінюватись стрибкоподібно). Тоді отримаємо рівняння

$$L \frac{dI_L}{dt} + (R + R_0)I_L = 0, \text{ розв'язком якого буде}$$

$$I_L(t) = I_{L0} \exp\left(-\frac{R + R_0}{L} t\right).$$

Кількість теплоти, яка виділиться на котушці,

$$Q = \int_0^{\infty} I_L^2(t) R dt = I_{L0}^2 R \int_0^{\infty} \exp\left(-2\frac{R + R_0}{L} t\right) dt = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R(R + R_0)} = 3 \text{ мкДж}.$$

$$\mathbf{14.15.} \quad R = \frac{2\pi\nu\mu_0 N^2 S}{l \operatorname{tg} \varphi} = 4,1 \text{ Ом}.$$

$$\mathbf{14.16.} \quad \nu = \frac{\rho_{\text{міди}} l^2}{\mu_0 N^2 D} \sqrt{\frac{3}{\pi S^3}} = 265 \text{ Гц}.$$

$$\mathbf{14.17.} \quad I = \frac{2\pi\nu C_1 C_2 U}{C_1 + C_2} = 4,6 \text{ мА}; \quad U_1 = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2} = 73,3 \text{ В};$$

$$U_2 = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2} = 146,6 \text{ В}.$$

$$\mathbf{14.18.} \quad \frac{R}{Z} = \frac{\rho_{\text{міди}} l}{\sqrt{(\rho_{\text{міди}} l)^2 + (\pi\nu\mu_0 N r S)^2}} = 0,73;$$

$$\frac{X_L}{Z} = \frac{\pi\nu\mu_0 N r S}{\sqrt{(\rho_{\text{міди}} l)^2 + (\pi\nu\mu_0 N r S)^2}} = 0,68.$$

$$14.19. \frac{U_C}{U} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\nu RC)^2 + 1}} = 0,727;$$

$$\frac{U_R}{U} = \frac{2\pi\nu RC}{\sqrt{(2\pi\nu RC)^2 + 1}} = 0,685.$$

$$14.20. C = \frac{I}{2\pi\nu\sqrt{U^2 - U_{\pi}^2}} = 3,74 \text{ мкФ.}$$

$$14.21. L = \frac{\sqrt{U^4 \cos^2 \varphi - P^2 R^2}}{2\pi\nu P} = 52 \text{ мГн.}$$

$$14.22. \text{ а) } Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{\omega RC};$$

$$\text{ б) } Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}, \quad \text{tg } \varphi = -\omega RC;$$

$$\text{ в) } Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R};$$

$$\text{ г) } Z = \frac{\omega RL}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{R}{\omega L};$$

$$\text{ д) } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

$$14.23. \text{ а) } Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C^2}} = 4,38 \text{ кОм};$$

$$\text{ б) } Z = \frac{R}{\sqrt{4\pi^2\nu^2 C^2 R^2 + 1}} = 2,18 \text{ кОм.}$$

$$14.24. I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L - 1/(2\pi\nu C))^2}} = 1,34 \text{ А};$$

$$U_C = \frac{I}{2\pi\nu C} = 121 \text{ В}; \quad U_R = IR = 134 \text{ В}; \quad U_L = 2\pi\nu LI = 295 \text{ В}.$$

$$14.25. R = 2\pi\nu L \operatorname{tg} \varphi = 12,3 \text{ Ом}.$$

14.26. Якщо R та L увімкнені паралельно, то

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}, \text{ де } Z \text{ — повний опір кола,}$$

а різниця фаз між струмом та напругою

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L}. \quad (1)$$

Оскільки $\omega = 2\pi\nu$, то для повного опору кола отримаємо

$$Z = \frac{2\pi\nu RL}{\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}}. \quad (2)$$

За законом Ома для змінного струму

$$I = \frac{U}{Z}. \quad (3)$$

Підставимо в (3) вираз (2) та знайдемо силу струму:

$$I = \frac{U \sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}}{2\pi\nu RL}. \quad (4)$$

Потужність змінного струму

$$P = IU \cos \varphi. \quad (5)$$

З урахуванням (4) отримаємо

$$P = \frac{U^2 \sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}}{2\pi\nu RL} \cos \varphi. \quad (6)$$

Комбінуючи (1), (2) та (6), одержимо

$$R = \frac{U^2 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1}}{2P} = 40 \text{ Ом}, \quad L = \frac{U^2 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1}}{4\pi\nu P \operatorname{tg} \varphi} = 74 \text{ мГн}.$$

14.27. Використаємо векторну діаграму і запишемо вираз для напруги:

$$U = \sqrt{(U_L - U_C)^2 + U_R^2} = \sqrt{(3U_R - 2U_R)^2 - 4U_R^2} = \sqrt{2}U_R.$$

Отже, $U_R = \frac{U}{\sqrt{2}} = 155,56 \text{ В.}$

14.28. $\varphi = \arctg \sqrt{\left(\frac{U_0}{RI_0}\right)^2 - 1} = 60^\circ.$

14.29. Вихідна напруга $U'(t)$ є сумою постійної U_0 та змінної $U'_{3M}(t)$ складових: $U'(t) = U_0 + U'_{3M}(t)$ (рис. 241). Постійна складова напруги U_0 внеску у струм не робить, а струм $I(t)$ від змінної складової

$$I(t) = \frac{U'_{3M}(t)}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{U'_{3M}(t)}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}.$$

Тоді змінна складова напруги на конденсаторі

$$U'_{3M}(t) = I(t)X_C = \frac{U_{3M}(t) \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{U_{3M}(t)}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} =$$

$$= \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t + \varphi). \text{ Тут враховано також різницю фаз}$$

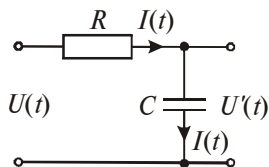


Рис. 241

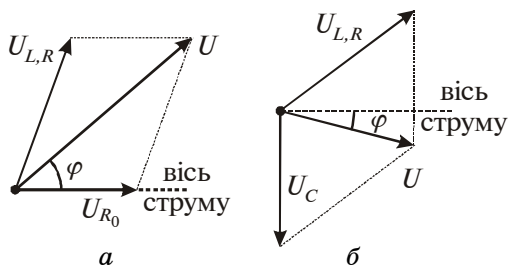


Рис. 242, а, б

між струмом і напругою: $\varphi = \arctg\left(-\frac{1}{\omega RC}\right)$. Отже, вихідна

$$\text{напруга } U'(t) = U_0 + \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t + \varphi).$$

З умови $\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \eta$ знаходимо, що $RC = \sqrt{\frac{\eta^2 - 1}{\omega^2}} = 22 \text{ мс}$.

14.30. Див. рис. 242.

$$\text{14.31. а) } I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = 4,5 \text{ А};$$

$$\text{б) } \varphi = \arctg\left(\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) = -60^\circ;$$

$$\text{в) } U_C = \frac{I_0}{\omega C} = 650 \text{ В}, \quad U_L = I_0 \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 500 \text{ В}.$$

$$\text{14.32. а) } U_C = \frac{1}{\omega C} \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}.$$

Напруга U_C буде максимальною в разі мінімального знаменника:

$$\frac{d}{d\omega} \left[\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2 \right] = 2\omega R^2 C^2 + 2(\omega^2 LC - 1) \cdot 2\omega LC = 0.$$

$$\text{Отже, } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

$$\text{б) } U_L = \omega L \frac{U_0}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2}};$$

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2 \right] = -\frac{2R^2}{\omega^3 L^2} + 2\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) \frac{2}{\omega^3 LC} = 0.$$

$$\text{Отже, } \omega = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}}.$$

$$14.33. U_L = I_0 \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{U_0 \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - (\omega C)^{-1})^2}} \text{ буде макси-}$$

мальна за умови $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Звідси $C = \frac{1}{\omega^2 L} = 28 \text{ мкФ}$.

$$\text{Тоді } U_L = U_0 \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}} = 540 \text{ В, а } U_C = \frac{U_0}{\omega C R} = \frac{U_0 \omega L}{R} = 510 \text{ В.}$$

14.34. Еквівалентну схему конденсатора зі слабко провідним середовищем між обкладками зобразимо як паралельне з'єднання ідеального конденсатора та резистора (рис. 243). Тоді

$$I'(t) = \frac{U(t)}{R}, \quad I(t) - I'(t) = C \frac{dU}{dt}.$$

$$\text{Отже, } I(t) = \frac{U_0}{R} \cos \omega t - \omega C U_0 \sin \omega t.$$

Порівняємо останню формулу з

виразом $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) = I_0 \cos \omega t \cos \varphi - I_0 \sin \omega t \sin \varphi.$$

$$\text{Як бачимо, } I_0 \cos \varphi = \frac{U_0}{R}, \quad I_0 \sin \varphi = \omega C U_0.$$

Повний опір слабко провідного конденсатора дорівнює

$R / \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$. Тоді струм у підвідних провідниках

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \sqrt{1 + (\omega RC)^2} \cos(\omega t + \arctg(\omega RC)).$$

14.35. Для постійного струму споживана потужність

$$P_{\text{пост}} = \frac{U_0^2}{R}. \text{ Для змінного струму } P_{\text{зм}} = \frac{U_0^2}{R^2 + \omega^2 L^2} R = \frac{P_{\text{пост}}}{\eta}.$$

$$\text{Звідси } (\eta - 1)R^2 = \omega^2 L^2. \text{ Отже, } \nu = \frac{R\sqrt{\eta - 1}}{2\pi L} = 2 \text{ кГц.}$$

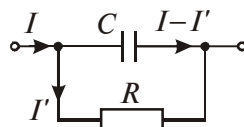


Рис. 243

14.36. Імпеданс $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$. Звідси знайдемо активний

опір $R = \sqrt{Z^2 - X_L^2}$. З векторної діаграми $\cos \varphi = \frac{\sqrt{Z^2 - X_L^2}}{Z}$.

Отже, $\varphi = \arccos \sqrt{1 - \frac{X_L^2}{Z^2}} \approx 37^\circ$. Теплова потужність

$$P = UI \cos \varphi = \frac{U^2}{Z^2} \sqrt{Z^2 - X_L^2} = 160 \text{ Вт.}$$

14.37. Теплова потужність $P = \frac{U^2(R+r)}{(R+r)^2 + \omega^2 L^2}$. Її значення

буде максимальним, коли $\frac{dP}{dR} = 0$. Тоді

$(R+r)^2 + \omega^2 L^2 - 2(R+r) = 0$, або $R = \omega L - r = 200$ Ом. Отже,

$$P_{\max} = \frac{U^2}{2\omega L} = 114 \text{ Вт.}$$

14.38. Напряга на резисторі та котушці індуктивності, відпо-

відно: $U_R = \frac{UR}{\sqrt{(R+R_L)^2 + X_L^2}}$ та $U_L = \frac{U\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R+R_L)^2 + X_L^2}}$. Запишемо

перше рівняння у вигляді $(R+R_L)^2 + X_L^2 = (UR/U_R)^2$. Підста-
вимо його в друге й отримаємо $R_L^2 + X_L^2 = (U_L R/U_R)^2$. Почленно
відніmemo два останні рівняння, одержимо

$$R^2 + 2RR_L = \frac{R^2}{U_R^2} (U^2 - U_L^2), \text{ або } R_L = \frac{R}{2U_R^2} (U^2 - U_L^2 - U_R^2).$$

Тоді теплова потужність на котушці

$$P_L = \frac{U^2 R_L}{(R+R_L)^2 + X_L^2} = \frac{U_R^2 R_L}{R^2} = \frac{U^2 - U_L^2 - U_R^2}{2R} = 30 \text{ Вт.}$$

14.39. Струми через резистор та котушку індуктивності

$$I_R = \frac{U}{R} \text{ та } I_L = \frac{U}{\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}.$$

$$\text{Повний струм у мережі } I = \frac{U\sqrt{(R+R_L)^2 + X_L^2}}{R\sqrt{R_L^2 + X_L^2}} = \frac{U}{Z}.$$

$$\text{Теплова потужність на котушці } P_L = I_L^2 R_L = \frac{U^2 R_L}{R_L^2 + X_L^2}.$$

Величину $\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2}$ знайдемо зі співвідношення

$$\frac{I^2}{I_R^2} = \frac{R^2 + 2RR_L + R_L^2 + X_L^2}{R_L^2 + X_L^2} = \frac{I_L^2}{I_R^2} + \frac{2RR_L}{R_L^2 + X_L^2} + 1.$$

$$\text{Звідси } \frac{I^2 - I_L^2 - I_R^2}{I_R^2} = \frac{2RR_L}{R_L^2 + X_L^2}.$$

$$\text{Отже, } P_L = \frac{(I^2 - I_L^2 - I_R^2)R}{2} = 2,5 \text{ Вт}.$$

14.40. Див. рис. 244.

14.41. Нехай вхідна напруга $U(t) = U_0 \sin \omega t$. Вхідний струм буде сумою струмів через конденсатор та через котушку:

$$I(t) = I_C(t) + I_L(t), \text{ причому } I_C(t) = C \frac{dU_C}{dt} = \omega C U_0 \cos \omega t, \text{ а}$$

$$I_L(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right) \text{ (це видно з задачі 14.22 (в)).}$$

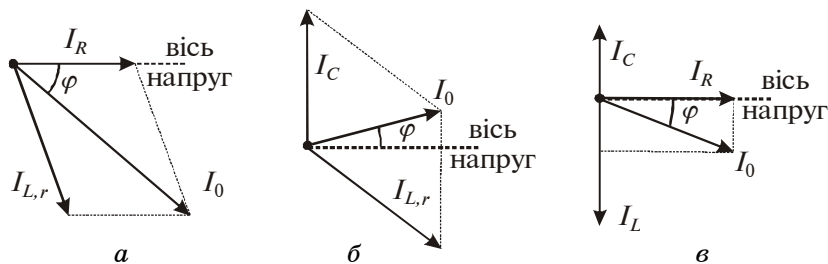


Рис. 244, а, б, в

Вхідний струм шукатимемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 I(t) &= I_0 \sin(\omega t + \varphi) = I_0 \sin \omega t \cos \varphi + I_0 \cos \omega t \sin \varphi = \\
 &= \omega C U_0 \cos \omega t + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \omega t \cdot \cos \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{\omega L}{R} \right) \right) + \\
 &+ \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \omega t \cdot \sin \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{R}{\omega L} \right) \right) = \\
 &= \omega C U_0 \cos \omega t + \frac{U_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t - \frac{U_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t.
 \end{aligned}$$

Отже, $I_0 \cos \varphi = \frac{U_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2}$ та $I_0 \sin \varphi = \omega C U_0 - \frac{U_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$.

Звідси $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L}{R}$.

14.42. Візьмемо із задачі **14.41** рівняння $I_0 \cos \varphi = \frac{U_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2}$

та $I_0 \sin \varphi = \omega C U_0 - \frac{U_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$, отримаємо

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{U_0}{I_0} = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\sqrt{R^2 + [\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L]^2}} = \\
 &= \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.
 \end{aligned}$$

15. Електромагнітні коливання та хвилі. Випромінювання

15.1. $\lambda \in [2\pi c \sqrt{LC_1}; 2\pi c \sqrt{LC_2}] = [700; 1946]$ м.

15.2. $\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 S L} \approx 6$.

15.3. $U(t) = \frac{q}{C} \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$, $I(t) = -\frac{q}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$. Відповідно, напруги $U(T/8) = 70,7$ В, $U(T/4) = 0$, $U(T/2) = -100$ В, а сили струму $I(T/8) = -11,1$ мА, $I(T/4) = -15,7$ мА, $I(T/2) = 0$.

15.4. Енергія електричного поля

$$W_{\text{ел}}(t) = \frac{CU^2(t)}{2} = \frac{q^2}{2C} \cos^2 \frac{t}{\sqrt{LC}}, \text{ відповідно, магнітного}$$

$$W_{\text{магн}}(t) = \frac{LI^2(t)}{2} = \frac{q^2}{2C} \sin^2 \frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

Повна енергія електромагнітного поля не залежить від часу і

$$W = W_{\text{ел}} + W_{\text{магн}} = \frac{q^2}{2C} = 125 \text{ мкДж}.$$

Енергії електричного та магнітного полів у різні моменти часу:

$$W_{\text{ел}}(T/8) = 62,5 \text{ мкДж}, \quad W_{\text{магн}}(T/8) = 62,5 \text{ мкДж};$$

$$W_{\text{ел}}(T/4) = 0, \quad W_{\text{магн}}(T/4) = 125 \text{ мкДж};$$

$$W_{\text{ел}}(T/2) = 125 \text{ мкДж}, \quad W_{\text{магн}}(T/2) = 0.$$

15.5. Із заданої в умові залежності напруги від часу

$U = 50 \cos(10^4 \pi t)$ отримаємо значення $\omega = 10^4 \pi$. Оскільки $\omega = 2\pi/T$, то $T = 0,2$ мс. З формули Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ знай-

демо індуктивність: $L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = 10,13$ мГн. Часова залеж-

ність сили струму в колі має вигляд:

$$I(t) = C \frac{dU}{dT} = -CU_0 \omega \sin \omega t. \text{ Підставимо в неї числові зна-}$$

чення, отримаємо $I(t) = -0,157 \sin(10^4 \pi t)$. Довжина хвилі $\lambda = cT = 60$ км.

$$**15.6.** T = \frac{2\pi}{\omega} = 5 \text{ мс}, \quad C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = 0,63 \text{ мкФ}.$$

Максимальні енергії полів $W_{\text{ел}} = W_{\text{магн}} = \frac{LI_{\text{max}}^2}{2} = 0,2$ мДж.

$$15.7. T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = 8 \text{ мс}, \quad \delta = \frac{RT}{2L} = 0,7.$$

Залежність напруги від часу

$$U(t) = \frac{q}{C} \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 80 \exp(-87t) \cos(250\pi t).$$

Відповідно, напруга $U(T/2) = -56,5 \text{ В}$; $U(T) = 40 \text{ В}$;
 $U(3T/2) = -28 \text{ В}$; $U(2T) = 20 \text{ В}$.

15.8. Припустимо, що опір R достатньо малий, тоді період електромагнітних коливань у контурі $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Різниця потенціалів $U(t)$ на конденсаторі змінюється за експоненціальним законом $U(t) = U_0 \exp(-\beta t) = U_0 \exp(-\delta t/T)$, оскільки логарифмічний декремент загасання $\delta = \beta T$. Визначимо величину δ , враховуючи, що різниця потенціалів на обкладках конденсатора за час t_0 зменшується у 3 рази, тобто $U_0/U = 3$.

Тоді $\delta = \frac{T}{t_0} \ln \frac{U_0}{U} = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{t_0} \ln 3 = 0,22$. Оскільки коефіцієнт

загасання $\beta = \frac{R}{2L}$, то опір контуру $R = \frac{2\delta L}{T} = \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} = 11,1 \text{ Ом}$.

За розрахунками $\frac{R^2}{4L^2} \approx 10^6 \text{ с}^{-2} \ll \frac{1}{LC} \approx 10^9 \text{ с}^{-2}$, тобто початкове припущення правильне.

15.9. Логарифмічний декремент загасання $\delta = \beta T$. Уважатимемо, що $T = 2\pi\sqrt{LC}$, тоді

$\delta = \frac{R}{2L} \cdot 2\pi\sqrt{LC} = \rho \frac{l_d}{S_d} \cdot \frac{\pi}{L} \sqrt{LC} = \rho \frac{l_d}{S_d} \cdot \pi \sqrt{\frac{C}{L}}$. Тут l_d — довжина дроту котушки; S_d — площа поперечного перерізу дроту; $l_d = N\pi D$, де $N = l/d$ — кількість витків котушки; D — її діаметр; $S_d = \frac{\pi d^2}{4}$. Підставимо ці дві формули у вираз для δ ,

матимемо $\delta = \rho \frac{4N\pi D}{\pi d^2} \cdot \pi \sqrt{\frac{C}{L}} = \rho \frac{4\pi D l}{d^3} \sqrt{\frac{C}{L}}$.

Індуктивність котушки (соленоїда) $L = \mu_0 n^2 V = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} V$, де $V = l S_k$ — об'єм котушки; $n = N/l = 1/d$ — кількість витків на одиницю довжини котушки; $S_k = \pi D^2/4$ — площа поперечного перерізу котушки. Отже, $L = \mu_0 \frac{l}{d^2} \cdot \frac{\pi D^2}{4}$. Підставимо цей вираз у формулу для логарифмічного декременту загасання, одержимо $\delta = \rho \frac{4\pi D l}{d^3} \sqrt{\frac{4d^2 C}{\mu_0 l \pi D^2}} = \frac{8\rho}{d^2} \sqrt{\frac{\pi L C}{\mu_0}} = 1,8 \cdot 10^{-4}$.

15.10. Відносна втрата енергії

$\frac{W_0 - W}{W_0} = \frac{U_0^2 - U^2}{U_0^2} = 1 - \frac{U^2}{U_0^2} = 0,99$. Отже, відношення значень

напруг $U^2/U_0^2 = 0,01$, а $U_0^2/U^2 = 100$, або $U_0/U = 10 = \exp(\beta t)$.

З урахуванням $\beta = \delta/T$ отримаємо $t = \frac{2\pi\sqrt{LC} \ln 10}{\delta} = 6,8$ мс.

15.11. а) $T = 2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)} = 0,7$ мс;

б) $I_0 = U\sqrt{(C_1 + C_2)/L} = 8$ А.

15.12. Сумарна ємність $C_{\text{сум}} = C/2$. Тоді циклічна частота коливань у контурі $\omega = \sqrt{LC_{\text{сум}}} = \sqrt{2/(LC)}$. Часова залежність

напруг на конденсаторах $U(t) = \frac{U_0}{2}(1 \pm \cos \omega t)$, де знак “+” — для лівого конденсатора, знак “-” — для правого.

15.13. $U_c(t) = I_0\sqrt{L/C} e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$, де $\text{tg } \varphi = \omega/\beta$.

У початковий момент часу $t = 0$ напруга на конденсаторі

$$U_c(0) = I_0\sqrt{\frac{L}{C}\left(1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}\right)}.$$

$$15.14. n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1} = 16. \quad 15.15. t \approx \frac{Q}{2\pi\nu} \ln n = 1,0 \text{ мс.}$$

15.16. Швидкість зміни заряду dq/dt на обкладках конденсатора визначена різницею струму I , який протікає через котушку, та протилежного за напрямом струму $I' = U/R$, який унаслідок втрат протікає між обкладками конденсатора через середовище зі скінченним опором R .

$$\text{Отже, } \frac{dq}{dt} = I - I', \text{ або } \frac{dq}{dt} = I - \frac{U}{R} = I - \frac{q}{RC} \quad (1).$$

Оскільки напруга на котушці $U = -L \frac{dI}{dt}$ (2), то знайдемо

струм I з рівняння (1) і підставимо в (2). Одержимо

$$\frac{q}{C} = -L \frac{d}{dt} \left(\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} \right), \quad \text{або} \quad \frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{L}{RC} \frac{dq}{dt}.$$

Отже, диференціальне рівняння загасальних коливань має такий вигляд: $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$. Порівнявши його з відомим диференціальним рівнянням загасальних коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{бачимо, що коефіцієнт загасання}$$

$$\beta = 1/(2RC), \quad \text{а } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad \text{Тому}$$

а) частота загасальних коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}},$$

б) добротність контуру

$$Q = \frac{\omega}{2\beta} = RC \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}.$$

$$15.17. \langle P \rangle = R \langle I^2 \rangle = RI_0^2/2 = 22,5 \text{ мВт.}$$

$$15.18. \text{ а) } \omega_p = \sqrt{\omega_1 \omega_2}; \quad \text{ б) } Q = \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 (n^2 - 1)}{(\omega_1 - \omega_2)^2} - \frac{1}{4}}.$$

15.19. За малого загасання добротність $Q \approx \omega_0/2\beta$. Виберемо величину $I(\omega)$ на “висоті”, в $\sqrt{2}$ разів меншій від амплітуди струму в резонансі та використаємо закон Ома для змінного струму для коливального контуру LC з активним опором R

котушки. Імпеданс контура $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$. Тому

умова для частоти ω , за якої амплітуда струму I_0 у $\sqrt{2}$ разів менша від амплітуди у випадку резонансу, виглядатиме так:

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{RI_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Оскільки частота власних коливань контуру $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$, а коефіцієнт загасання $\beta = R/2L$, то

з останньої рівності отримаємо $\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} = \pm \frac{R}{L} = \pm 2\beta$. Тому

$$\Delta\omega = 2\beta. \quad \text{Отже, } Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

15.20. Зменшена в $n = 2$ рази потужність

$P = \frac{I_{\text{эф}}^2}{2} R = \left(\frac{I_{\text{эф}}}{\sqrt{2}}\right)^2 R$. З попередньої задачі бачимо, що на ви-

соті, у $\sqrt{2}$ разів меншій від амплітуди струму у випадку резонансу, ширина резонансної кривої $\Delta\omega = \omega_0/Q$. Змінити частоту потрібно на половину ширини резонансної кривої:

$$\Delta\omega_{0,5} = \frac{\Delta\omega}{2}. \quad \text{Тоді } \frac{\Delta\omega_{0,5}}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} = 0,5\%.$$

$$15.21. \Delta\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - 1\right) \frac{c}{v} = -50 \text{ м}. \quad 15.22. \frac{j}{j_{\text{зм}}} = \frac{\sigma}{2\pi v \epsilon_0 \epsilon} = 2.$$

15.23. $\vec{H}(t) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [\vec{k} \vec{E}_0] \cos(ckt)$, де c — швидкість хвилі у вакуумі.

15.24. З рівняння для поширення плоскої електромагнітної хвилі $\frac{\partial \vec{E}}{\partial r} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ знайдемо \vec{H} :

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{[\vec{k}\vec{E}_0]}{\mu_0} \sin(\omega t - (\vec{k}\vec{r})), \quad \text{або} \quad \vec{H} = \frac{[\vec{k}\vec{E}_0]}{\omega\mu_0} \cos(\omega t - (\vec{k}\vec{r})).$$

$$\text{Тоді } \vec{S} = [\vec{E}\vec{H}] = \frac{\vec{E}_0^2}{\omega\mu_0} \vec{k} \cos^2(\omega t - (\vec{k}\vec{r})), \quad \text{або} \quad \langle \vec{S} \rangle = \frac{\vec{E}_0^2}{2\omega\mu_0} \vec{k}.$$

$$15.25. \text{ а) } \langle j_{\text{зм}} \rangle = 4\varepsilon_0 \nu E_0 = 0,18 \text{ мА/м}^2;$$

$$\text{б) } \langle S \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} c E_0^2 = 3,3 \text{ мкВт/м}^2.$$

15.26. З рівнянь Максвелла для умов задачі $\text{div } \vec{E} = 0$, отже $E_{x0} = 0$, тому вектор \vec{E}_0 перебуває в площині $y-z$. Також

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} = -[\nabla \vec{E}_0 \cos kx] \cos \omega t = [\vec{k}\vec{E}_0] \sin kx \cos \omega t.$$

$$\text{Тоді } \vec{B} = \frac{[\vec{k}\vec{E}_0]}{\omega} \sin kx \sin \omega t = \vec{B}_0 \sin kx \sin \omega t, \quad \text{де } |\vec{B}_0| = \frac{E_0}{c} \text{ і } \vec{B}_0 \perp \vec{E}_0$$

у площині $y-z$. При $t = 0$, $\vec{B} = 0$, $E = E_0 \cos kx$; при $t = T/4$, $\vec{E} = 0$.

Складова індукції магнітного поля $B(x, t) = B_0 \sin kx \sin \omega t$.

15.27. Амплітудне значення електричної енергії всередині

конденсатора $W_{\text{ел}} = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 U_0^2}{2d}$, де d — відстань між пластинами; U_0 — амплітудне значення прикладеної синусоїдальної напруги. Тоді електричне поле всередині конденсатора

$$E = \frac{U_0}{d} \sin \omega t \quad (\text{виберемо початок відліку так, що } U(t=0) = 0).$$

Змінне електричне поле породжує струм зміщення, густина

якого $j_{\text{зм}} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega \frac{U_0}{d} \cos \omega t$. Струм зміщення породжує

змінне магнітне поле, яке знайдемо з теореми про циркуляцію, вибравши коловий контур радіусом r :

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \pi r^2 j_{\text{зм}}, \quad \text{отже, } B(r) = \frac{\mu_0 r \varepsilon_0 \omega}{2d} U_0 \cos \omega t.$$

Енергія магнітного поля

$$\begin{aligned}
 W_{\text{магн}} &= \int_{V_{\text{конд}}} \frac{B^2(r)}{2\mu_0} dV = \frac{\mu_0 \varepsilon_0^2 \omega^2}{8d^2} U_0^2 \cos^2 \omega t \cdot \int_0^R r^2 d \cdot 2\pi r dr = \\
 &= \frac{\mu_0 \pi \varepsilon_0^2 \omega^2 R^4}{16d} U_0^2 \cos^2 \omega t.
 \end{aligned}$$

Отже, відношення амплітудних значень магнітної та електричної енергій $\frac{W_{\text{магн}}}{W_{\text{ел}}} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 R^2}{8} = 5,0 \cdot 10^{-15}$.

$$15.28. \frac{W_{\text{магн}}}{W_{\text{ел}}} = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 R^2 = 5,0 \cdot 10^{-15}.$$

15.29. Нехай радіус провідника r , а його питомий опір ρ . Тоді згідно закону Ома густина струму провідності

$$j_{\text{пр}} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{E}{\rho}, \text{ звідки } E = \frac{I\rho}{\pi r^2}.$$

З теореми про циркуляцію напруженості магнітного поля

$$H \cdot 2\pi r = I, \text{ отже, } H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Тоді крізь бокову поверхню довжиною l потік вектора Умова-Пойтінга $\Phi_S = EH \cdot 2\pi r l = \frac{\rho I^2 l}{\pi r^2}$, але величина $\frac{\rho l}{\pi r^2} = R$,

отже, $\Phi_S = I^2 R$.

15.30. Усередині соленоїда індукція магнітного поля $B = \mu_0 n I$, отже, зміна енергії магнітного поля з часом

$$\frac{dW_{\text{магн}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \cdot \pi R^2 l \right) = \mu_0 n^2 \pi R^2 l I \frac{dI}{dt},$$

де R — радіус соленоїда; l — довжина. Із закону електромагнітної індукції для вихрового електричного поля E можна записати:

$$E \cdot 2\pi r = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \mu_0 n \frac{dI}{dt}.$$

Отже, $E = \frac{r\mu_0 n}{2} \frac{dI}{dt}$, а на поверхні соленоїда $E = \frac{R\mu_0 n}{2} \frac{dI}{dt}$.

Напруженість магнітного поля $H = B/\mu_0 = nI$. Отже, вектор

$$\text{Умова-Пойнтінга } S = EH = \frac{1}{2} \mu_0 n R \frac{dI}{dt} n I = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 R I \frac{dI}{dt},$$

а швидкість зростання магнітної енергії

$dW_{\text{магн}}/dt = EH \cdot 2\pi R l$. Бачимо, що ця швидкість справді пропорційна до потоку вектора Умова-Пойнтінга через бокову поверхню площею $2\pi R l$.

15.31. Оскільки $\varphi_2 > \varphi_1$, то лінії електричного поля будуть напрямлені від провідника 2 до провідника 1. Тоді лінії напруженості магнітного поля будуть “виходити” з площини рисунка (див. рис. 139). Оскільки вектор Умова-Пойнтінга $\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]$, то він напрямлений праворуч, а генератор струму розташований ліворуч.

15.32. Позначимо r_1 — радіус жили кабеля, r_2 — радіус оболонки. Для частини провідника, де відстань r від осі така, що $r_1 < r < r_2$, запишемо $E = \frac{U}{r \ln(r_2/r_1)}$ (див. 11.29) та $H = \frac{I}{2\pi r}$ (з

теореми про циркуляцію). Як бачимо, потік \vec{S} через переріз кабелю уздовж його осі не дорівнює нулю для ділянки між провідниками. Тоді $\Phi_S = \int_{r_1}^{r_2} \frac{IU}{2\pi r^2 \ln(r_2/r_1)} 2\pi r dr = IU$.

$$\mathbf{15.33.} \text{ Потужність випромінювання диполя } P = \frac{2k}{3c^3} \left(\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right).$$

Сумарний дипольний момент $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = \sum_i \frac{q_i}{m_i} m_i \vec{r}_i$, де питомий заряд $\frac{q_i}{m_i} = \text{const}$. Для замкненої системи $\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) = 0$, отже, $P = 0$.

$$\mathbf{15.34.} \langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} = 5 \cdot 10^{-15} \text{ Вт.}$$

$$\mathbf{15.35.} \frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{e}{m} F_{\text{ел}} = \frac{e}{m} \frac{k e q}{r^2}, \text{ отже, } P = \frac{2k^3}{3c^3} \left(\frac{e^2 q}{m r^2} \right)^2.$$

$$15.36. \frac{\Delta W}{W_0} = \frac{e^3 B}{3\varepsilon_0 c^3 m^2} = 2 \cdot 10^{-18}.$$

$$15.37. W(t) = W_0 e^{-\alpha t}, \text{ де } \alpha = \frac{e^4 B^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3 m^3}.$$

Проміжок часу $t_0 = \frac{1}{\alpha} = 2,5 \text{ с}$ — для електрона; $1,6 \cdot 10^{10} \text{ с}$ — для протона.

15.38. Оскільки енергія електричного поля для точкового диполя зменшується з відстанню як $1/r^2$, то, за аналогією, можемо записати, що $S_0(r) \sim \frac{1}{r^2}$. Для довільного напрямку $S(r, \theta) \sim S_0(r) \sin^2 \theta$. Тоді середня потужність випромінювання диполя $P_0 = S_0 \cdot 4\pi r^2 \langle \sin^2 \theta \rangle = S_0 \cdot 4\pi r^2 \frac{2}{3} = \frac{8\pi}{3} S_0 r^2$.

15.39. Із задачі 15.38 $S_0 = \frac{3P_0}{8\pi r^2}$. З іншого боку, S_0 — це потік густини електромагнітної енергії за одиницю часу, тому середня об'ємна густина енергії електромагнітного поля

$$w_0 = \frac{S_0 \cdot dS' \cdot dt}{dS' \cdot cdt} = \frac{3P_0}{8\pi r^2 c}, \text{ де } dS' \text{ і } cdt \text{ — відповідно, переріз}$$

і довжина деякої елементарної частини простору, у якій шукаємо w_0 .

15.40. Для електричного диполя, який обертається навколо осі, $p_x = p \cos \Omega t$, $p_y = p \sin \Omega t$. Відповідно, потужність випромінювання диполя $P = \frac{2kp^2\Omega^4}{3c^3}$.

ДОДАТКИ

1. Фундаментальні фізичні сталі

Стала	Позна-чення	Числове значення
Швидкість світла у вакуумі	c	$299\,792\,458\text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$
Гравітаційна стала	G	$6,6743 \cdot 10^{-11}\text{ Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{кг}^{-2}$
Елементарний заряд	e	$1,6022 \cdot 10^{-19}\text{ Кл}$
Електрична стала	ϵ_0	$8,8542 \cdot 10^{-12}\text{ Ф}\cdot\text{м}^{-1}$
Магнітна стала	μ_0	$1,2566 \cdot 10^{-6}\text{ Гн}\cdot\text{м}^{-1}$
Маса спокою електрона	m_e	$9,1094 \cdot 10^{-31}\text{ кг}$
Маса спокою протона	m_p	$1,6726 \cdot 10^{-27}\text{ кг}$
Маса спокою нейтрона	m_n	$1,6749 \cdot 10^{-27}\text{ кг}$
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$1,6605 \cdot 10^{-27}\text{ кг}$
Маса спокою α -частинки	m_α	$6,6447 \cdot 10^{-27}\text{ кг}$
Об'єм одного моля газу за нормальних умов (1 атм, $T_0 = 273,16\text{ К}$)	V_μ	$22,414 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3\cdot\text{моль}^{-1}$
Число Авогадро	N_A	$6,0221 \cdot 10^{23}\text{ моль}^{-1}$
Стала Больцмана	k	$1,3807 \cdot 10^{-23}\text{ Дж}\cdot\text{К}^{-1}$
Універсальна газова стала	R	$8,3145\text{ Дж}\cdot\text{моль}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}$
Стала Рідберга	R_∞	$10\,973\,732\text{ м}^{-1}$
Стала Фарадея	F	$96\,485,34\text{ Кл}\cdot\text{моль}^{-1}$
Стала Планка	h	$6,6261 \cdot 10^{-34}\text{ Дж}\cdot\text{с}$
Ядерний магнетон	μ_α	$5,0508 \cdot 10^{-27}\text{ Дж}\cdot\text{Тл}^{-1}$

2. Густина речовин

Тверді тіла	кг/м ³	Рідини	кг/м ³
Алмаз	3500	Бензол	880
Алюміній	2700	Вода	1000
Вольфрам	19100	Гліцерин	1260
Графіт	1600	Касторова олія	900
Залізо (сталь)	7800	Нафта	800
Золото	19300	Ртуть	13600
Кадмій	8650	Спирт	790
Кобальт	8900	Важка вода	1100
Лід	916	Ефір	720
Мідь	8900	Гази	
Молібден	10200	(за нормальних умов)	кг/м ³
Натрій	970		
Нікель	8900	Азот	1,25
Олово	7400	Аміак	0,77
Платина	21500	Водень	0,09
Корок	200	Повітря	1,293
Свинець	11300	Кисень	1,43
Срібло	10500	Метан	0,72
Титан	4500	Вуглекислий газ	1,98
Уран	19000	Хлор	3,21
Фарфор	2300		
Цинк	7000		

3. Діелектричні проникності

Діелектрик	ϵ	Діелектрик	ϵ
Вода	81	Поліетилен	2,3
Повітря	1,00058	Слюда	7,5
Віск	7,8	Спирт	26
Нафта	2,0	Скло	6,0
Парафін	2,0	Фарфор	6,0
Плексиглас	3,5	Ебоніт	2,7

4. Питомі опори. Температурні коефіцієнти

Провідники	Питомий опір (при 20 °С) ρ , нОм·м	Температурний коефіцієнт α , К ⁻¹	Ізолятори	Питомий опір (при 20 °С) ρ , Ом·м
Алюміній	25	4,5	Папір	10 ¹⁰
Вольфрам	50	4,8	Парафін	10 ¹⁵
Залізо (сталь)	98	6,5	Слюда	10 ¹³
Золото	20	4,0	Фарфор	10 ¹³
Мідь	17	4,3	Шелак	10 ¹⁴
Свинець	190	4,2	Ебоніт	10 ¹⁴
Срібло	16	4,1	Бурштин	10 ¹⁷
Ніхром	1100	...		

5. Рухливість йонів, (м²/(В·с))

	Додатні йони		Від'ємні йони	
у газах				
Азот	1,27·10 ⁻⁴		1,81·10 ⁻⁴	
Водень	5,4·10 ⁻⁴		7,4·10 ⁻⁴	
Повітря	1,4·10 ⁻⁴		1,9·10 ⁻⁴	
Кисень	1,3·10 ⁻⁴		1,8·10 ⁻⁴	
Оксид вуглецю	1,0·10 ⁻⁴		1,1·10 ⁻⁴	
у водних розчинах				
H ⁺	3,26·10 ⁻⁷	ОН ⁻	1,8·10 ⁻⁷	
Na ⁺	0,45·10 ⁻⁷	Cl ⁻	0,68·10 ⁻⁷	
K ⁺	0,67·10 ⁻⁷	Br ⁻	0,7·10 ⁻⁷	

6. Магнітні сприйнятливості пара- та діамагнетиків

Парамагнетики	χ , 10 ⁻⁶	Діамагнетики	χ , 10 ⁻⁶
Азот	0,013	Водень	-0,063
Повітря	0,38	Бензол	-7,5
Кисень	1,9	Вода	-9,0
Ебоніт	14	Мідь	-10,3
Алюміній	23	Скло	-12,6
Вольфрам	176	Кам'яна сіль	-12,6
Платина	360	Кварц	-15,1
Рідкий кисень	3400	Вісмут	-176

період	VIII													
ряд	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII						
1	(H)						1 H 1,0079	2 He 4,00260	Порядковий номер 24 Cr Символ Cr 51,996 атомна маса					
2	3 Li 6,941	4 Be 9,01218	5 B 10,81	6 C 12,011	7 N 14,0067	8 O 15,9994	9 F 18,998403	10 Ne 20,179	18 Ar 39,948	26 Fe 55,847	27 Co 58,9332	28 Ni 58,71		
3	11 Na 22,98977	12 Mg 24,305	13 Al 26,98154	14 Si 28,086	15 P 30,07376	16 S 32,06	17 Cl 35,453	18 Ar 39,948	26 Fe 55,847	27 Co 58,9332	28 Ni 58,71			
4	19 K 39,0983	20 Ca 40,08	21 Sc 44,9559	22 Ti 47,90	23 V 50,9415	24 Cr 51,996	25 Mn 54,9380	36 Kr 83,80	36 Kr 83,80	44 Ru 101,07	45 Rh 102,9055	46 Pd 106,4		
5	29 Cu 63,546	30 Zn 65,38	31 Ga 69,735	32 Ge 72,59	33 As 74,9216	34 Se 78,96	35 Br 79,904	53 I 126,9045	53 I 126,9045	77 Ir 192,22	78 Pt 195,09			
	37 Rb 85,467	38 Sr 87,62	39 Y 88,9059	40 Zr 91,22	41 Nb 92,9064	42 Mo 95,94	43 Tc 98,9062	54 Xe 131,30	54 Xe 131,30					
	47 Ag 107,868	48 Cd 112,41	49 In 114,82	50 Sn 118,69	51 Sb 121,75	52 Te 127,60	53 I 126,9045							
6	55 Cs 132,9054	56 Ba 137,33	57 La* 138,9055	72 Hf 178,49	73 Ta 180,947	74 W 183,85	75 Re 186,207	76 Os 190,2	76 Os 190,2					
	79 Au 196,9665	80 Hg 200,59	81 Tl 204,37	82 Pb 207,2	83 Bi 208,9804	84 Po [209]	85 At [209]	86 Rn [222]	86 Rn [222]					
7	87 Fr [223]	88 Ra 226,0254	89 Ac* [227]	104 Db [261]	105 JI [260]	106 Rf [263]	107 Bh [262]	108 Hn [265]	108 Hn [265]	109 Mt [266]	110 Uun [266]			
8	58 Ce 140,12	60 Nd 144,24	61 Pm [145]	62 Sm 150,4	63 Eu 151,96	64 Gd 157,25	65 Tb 158,9254	66 Dy 162,50	68 Er 167,26	69 Tm 168,9342	70 Yb 173,04	71 Lu 174,967		
9	90 Th 232,0381	91 Pa 231,0359	92 U 238,0289	93 Np 237,0482	94 Pu [244]	95 Am [243]	96 Cm [247]	97 Bk [247]	98 Cf [251]	99 Es [254]	100 Fm [257]	101 Md [258]	102 No [259]	103 Lr [260]

У квадратних дужках подано масове число найстабільнішого ізотопу даного елемента

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики : учеб. пособ. / В. С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1985. – 464 с.
2. Иродов Игорь Евгеньевич. Задачи по общей физике : учеб. пособ. / И. Е. Иродов. – М. : Наука, 1988. – 416 с.
3. Стрелков С. П. Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 1 / С. П. Стрелков, И. А. Эльцин, И. А. Яковлев. – М. : Наука, 1964. – 312 с.
4. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум / А. А. Остроухов, В. Л. Стрижевський, М. Г. Цвелих, Ю. П. Яценко. – К. : Радянська школа, 1966. – 508 с.
5. Иродов И. Е. Основные законы электромагнетизма : учеб. пособ. для студентов вузов / И. Е. Иродов. – [2-е изд., стереотип.] – М. : Высш. шк., 1991. – 288 с.
6. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Высш. шк., 1988. – 527 с.
7. Загальний курс фізики. Збірник задач : навч. посіб. / [І. П. Гаркуша, І. Т. Горбачук, В. П. Курінний та ін.] ; за ред. І. П. Гаркуші. – К. : Техніка, 2003. – 560 с.
8. Физика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей высших учебных заведений (включая сельскохозяйственные вузы) / под ред. А. Г. Чертова – М. : Высш. шк., 1976. – 160 с.
9. Все решения к “Сборнику задач по общему курсу физики” В. С. Волькенштейн. В 2 кн. Кн. 2. – М. : Олимп ; Фирма “Издательство АСТ”, 1999. – 592 с.

-
10. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Кн. III. Электричество и магнетизм / [С. П. Стрелков, Д. В. Сивухин, С. Э. Хайкин и др.] ; под ред. И. А. Яковлева. – [5-е изд., стер.] – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 232 с.
 11. Singh Abham Kumar. Solutions to I. E. Irodov's Problems in General Physics. In 2 Vol. Vol. 1 / A. K. Singh. – [second edition]. – New Dehli : S. K. Jain for CBS Publishers and Distributors, Reprint, 2005. – 432 p.
 12. Oman R. How To Solve Physics Problems and Make The Grade / R. Oman, D. Oman. – McGraw-Hill, 1984. – 364 p.

Навчальне видання

ШОПА Ярослав Іванович
ЛЕСІВЦІВ Віталій Миколайович
ДЕМКІВ Тарас Михайлович

ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

ЗБІРНИК ЗАДАЧ ІЗ РОЗВ'ЯЗКАМИ

Навчальний посібник

Рекомендовано

Міністерством освіти і науки України

Редактор *Мирослава Мартиняк*
Технічний редактор *Світлана Сеник*
Коректор *Галина Матіїв*
Комп'ютерне верстання *Наталія Гладка*

Формат 60x90/16. Умовн. друк. арк. 16,7. Тираж 300 прим. Зам.
Львівський національний університет імені Івана Франка.
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007.

Видруковано з готових діапозитивів у книжковій друкарні “Коло”
(Свідоцтво серії ДК № 498 від 20.06.2001 року)
82100, Львівська обл., м. Дрогобич, вул Бориславська, 8