Екзотичні статистики. Лекція 2. Статистика Джентіле

Андрій Ровенчак

11 вересня 2020 р.

Короткий зміст

Розподіл Джентіле

Можна постулювати певний проміжний розподіл, у якому максимальна заселеність стану буде обмежена якимось скінченним числом M — **статистика Джентіле** (Gentile, 1940). Зрозуміло, що при $M = 1$ — розподіл Фермі, а $M = \infty$ — розподіл Бозе.

Розподіл Джентіле

Можна постулювати певний проміжний розподіл, у якому максимальна заселеність стану буде обмежена якимось скінченним числом M — **статистика Джентіле** (Gentile, 1940). Зрозуміло, що при $M = 1$ — розподіл Фермі, а $M = \infty$ — розподіл Бозе.
Знайдемо функцію розподілу у формалізмі великого канонічного ансамблю. Нехай задано систему N частинок, у якій в i-му стані з енерґією ε_i перебуває n_i частинок. Повна кількість частинок

$$N = \sum_i n_i, \tag{1}$$

а повна енерґія

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i. \tag{2}$$

n_i можуть набувати значень від 0 до M.

Розподіл Джентіле

Статистична сума системи з N частинок дорівнює

$$Z_N = \sum_{\{n_i\}} \exp\left(-\frac{1}{T}\sum_i n_i\varepsilon_i\right), \tag{3}$$

де T — температура, а сукупність $\{n_i\}$ характеризує стани цілої системи N частинок. Зауважмо, що виконується умова (1).

Розподіл Джентіле

Статистична сума системи з N частинок дорівнює

$$Z_N = \sum_{\{n_i\}} \exp\left(-\frac{1}{T}\sum_i n_i\varepsilon_i\right), \tag{3}$$

де T — температура, а сукупність $\{n_i\}$ характеризує стани цілої системи N частинок. Зауважмо, що виконується умова (1).
Велика статсума записується так:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N. \tag{4}$$

де $z = e^{\mu/T}$ — активність, μ — хімічний потенціал.

Розподіл Джентіле

Статистична сума системи з N частинок дорівнює

$$Z_N = \sum_{\{n_i\}} \exp\left(-\frac{1}{T}\sum_i n_i\varepsilon_i\right), \tag{3}$$

де T — температура, а сукупність $\{n_i\}$ характеризує стани цілої системи N частинок. Зауважмо, що виконується умова (1).

Велика статсума записується так:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N. \tag{4}$$

де $z = e^{\mu/T}$ — активність, μ — хімічний потенціал.

Можна показати, що цей вираз зводиться до вигляду

$$\Xi = \prod_i \sum_{n_i} \left[z \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right)\right]^{n_i}. \tag{5}$$

Розподіл Джентіле

Знайдемо суму за n_i як суму скінченної геометричної проґресії:

$$\sum_{n_i=0}^{M}\left[z\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right)\right]^{n_i} = \frac{z^{M+1}\exp\left(-\frac{(M+1)\varepsilon_i}{T}\right)-1}{z\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right)-1.} \tag{6}$$

Отже, велика статистична сума набуде вигляду:

$$\Xi = \prod_i \frac{z^{M+1}\exp\left(-\frac{(M+1)\varepsilon_i}{T}\right)-1}{z\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right)-1.}. \tag{7}$$

Розподіл Джентіле

Звідси, враховуючи вираз для термодинамічного потенціалу

$$\Omega = -T \ln \Xi, \tag{8}$$

знаходимо кількість частинок:

$$N = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \ln z}\right)_{T,V} =$$

$$= \sum_i \left[\frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)}e^{(M+1)\varepsilon_i/T} - 1}\right]. \tag{9}$$

Отже, для чисел заповнення маємо

$$n_i = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)}e^{(M+1)\varepsilon_i/T} - 1}, \tag{10}$$

Розподіл Джентіле

Функція розподілу у статистиці Джентіле:

$$n^{\mathrm{G}}(\varepsilon) = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)}e^{(M+1)\varepsilon/T} - 1}. \qquad (11)$$

Розподіл Джентіле

Функція розподілу у статистиці Джентіле:

$$n^{\mathrm{G}}(\varepsilon) = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)}e^{(M+1)\varepsilon/T} - 1}. \qquad (11)$$

Легко переконатися, що граничні випадки $M = 1$ і $M = \infty$ приводять до функцій розподілу статистики Фермі–Дірака й Бозе–Айнштайна, відповідно:

$$n^{\mathrm{G}}(\varepsilon)\Big|_{M=1} = n^{\mathrm{FD}}(\varepsilon) = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} + 1}, \qquad (12)$$

$$n^{\mathrm{G}}(\varepsilon)\Big|_{M=\infty} = n^{\mathrm{BE}}(\varepsilon) = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - 1}. \qquad (13)$$

Комбінаторний підхід

Функцію розподілу у статистиці Джентіле можна отримати з комбінаторних міркувань, керуючись виразом для кількості способів розподілу частинок за всіма можливими станами

$$W = \prod_i \frac{G_i!}{p_i(0)!p_i(1)!\dots p_i(M)!}, \tag{14}$$

де повна кількість частинок в i-му стані $N_i = \sum_{j=0}^{M} jp_i(j)$, тобто $p_i(j)$ визначає в i-му стані кількість «комірок», де перебуває рівно j частинок, а $G_i = \sum_{j=0}^{M} p_i(j)$ — ваговий множник i-го стану (повна кількість «комірок»).

Комбінаторний підхід

Шукатимемо екстремум функції

$$\ln W = \ln \prod_i \frac{G_i!}{p_i(0)!p_i(1)!\dots p_i(M)!}$$

за умов

$$\delta G_i = \delta \sum_{j=0}^{M} p_i(j) = 0, \qquad \delta N = \delta \sum_i \sum_{j=0}^{M} j p_i(j) = 0,$$

$$\delta E = \delta \sum_i \sum_{j=0}^{M} \varepsilon_i j p_i(j) = 0,$$

що фіксують зокрема кількість частинок N та енерґію E.

Комбінаторний підхід

Варіація, з урахуванням формули Стірлінґа, буде

$$\delta \ln W = \sum_i \left\{ \underbrace{\delta \ln G_i!}_{=0} - \delta \ln p_i(0)! - \delta \ln p_i(1)! - \ldots - \delta \ln p_i(M)! \right\} =$$

$$= -\sum_i \delta \Big\{ p_i(0) \ln p_i(0) - p_i(0) + \ldots + p_i(M) \ln p_i(M) - p_i(M) \Big\} =$$

$$= -\sum_i \Big\{ \ln p_i(0) \delta p_i(0) + \ldots + \ln p_i(M) \delta p_i(M) \Big\}.$$

Скористаємось методом множників Лаґранжа:

$$\delta \ln W - \beta \delta E + \nu \delta N + \sum_i \gamma_i \delta G_i = 0.$$

Комбінаторний підхід

$$\delta \ln W - \beta\delta E + \nu\delta N + \sum_i \gamma_i \delta G_i = 0.$$

Розписуючи відповідні варіації, матимемо:

$$\sum_i \Big\{ -\ln p_i(0)\delta p_i(0) - \ldots - \ln p_i(M)\delta p_i(M) -$$

$$-\beta\varepsilon_i 0\delta p_i(0) - \ldots - \beta\varepsilon_i M\delta p_i(M) +$$

$$+\nu 0\delta p_i(0) + \ldots + \nu M\delta p_i(M) +$$

$$+\gamma_i\delta p_i(0) + \ldots + \gamma_i\delta p_i(M)\Big\} = 0.$$

У результаті

$$p_i(j) = e^{\gamma_i + \nu j - \beta j \varepsilon_i}.$$

Комбінаторний підхід

Множники γ_i визначаємо з умови

$$G_i = \sum_{j=0}^{M} p_i(j) = e^{\gamma_i} \sum_{j=0}^{M} e^{\nu j - \beta j \varepsilon_i} = e^{\gamma_i} \frac{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)}}.$$

Отже,

$$p_i(j) = G_i \frac{1 - e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta\varepsilon_i)}} e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)j}.$$

Вираз для чисел заповнення N_i можна знайти, розглянувши

$$N = \sum_i N_i = \sum_i \sum_{j=0}^{M} j p_i(j).$$

Комбінаторний підхід

Множники γ_i визначаємо з умови

$$G_i = \sum_{j=0}^{M} p_i(j) = e^{\gamma_i} \sum_{j=0}^{M} e^{\nu j - \beta j \varepsilon_i} = e^{\gamma_i} \frac{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)}}.$$

Отже,

$$p_i(j) = G_i \frac{1 - e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta\varepsilon_i)}} e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)j}.$$

Вираз для чисел заповнення N_i можна знайти, розглянувши

$$N = \sum_i N_i = \sum_i \sum_{j=0}^{M} j p_i(j).$$

$$N_i = G_i \frac{1 - e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta\varepsilon_i)}} \sum_{j=0}^{M} j e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)j}.$$

Комбінаторний підхід

Функція розподілу для i-го стану

$$n^{\mathrm{G}}(\varepsilon_i) = \frac{N_i}{G_i} = \frac{1 - e^{(\nu-\beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(M+1)(\nu-\beta\varepsilon_i)}} \frac{\partial}{\partial(\nu - \beta\varepsilon_i)} \sum_{j=0}^{M} e^{(\nu-\beta\varepsilon_i)j} =$$

$$= \frac{1 - e^{(\nu-\beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(M+1)(\nu-\beta\varepsilon_i)}} \frac{\partial}{\partial(\nu - \beta\varepsilon_i)} \frac{1 - e^{(M+1)(\nu-\beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(\nu-\beta\varepsilon_i)}} =$$

$$= \frac{1 - e^{(\nu-\beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(M+1)(\nu-\beta\varepsilon_i)}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{e^{(\nu-\beta\varepsilon_i)} \left[1 - e^{(M+1)(\nu-\beta\varepsilon_i)}\right]}{\left[1 - e^{(\nu-\beta\varepsilon_i)}\right]^2} - \frac{(M+1)e^{(M+1)(\nu-\beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(\nu-\beta\varepsilon_i)}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{e^{(\beta\varepsilon_i-\nu)} - 1} - \frac{(M+1)}{e^{(M+1)(\beta\varepsilon_i-\nu)} - 1}.$$

Залишилося проідентифікувати множники $\beta = 1/T$ і $e^{\nu} = z$ стандартним способом.

Ідеальний D-вим. газ у статистиці Джентіле

Розрахунок термодинамічних функцій зробимо за такою загальною схемою. З виразу для кількості частинок,

$$N = \sum_i G_i n_i = \int d\varepsilon\, g(\varepsilon) n^{\mathrm{G}}(\varepsilon), \tag{15}$$

де густина станів D-вимірного ідеального газу частинок (з квадратичним законом дисперсії) масою m в об'ємі $\mathscr{V}_D$

$$g(\varepsilon) = \frac{\mathscr{V}_D}{\Gamma(D/2)} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{D/2} \varepsilon^{D/2-1} = A\varepsilon^{D/2-1}, \tag{16}$$

визначаємо хімічний потенціал або активність як функцію змінних N і T. Цю функцію підставляємо у вираз для енерґії

$$E = \sum_i \varepsilon_i G_i n_i = \int d\varepsilon\, \varepsilon g(\varepsilon) n^{\mathrm{G}}(\varepsilon), \tag{17}$$

звідки потім можна розрахувати, наприклад, теплоємність.

Ідеальний D-вим. газ у статистиці Джентіле

Аналогічно до статистики Бозе:

$$N = \int\limits_0^\infty d\varepsilon\, g(\varepsilon) n^{\mathrm{G}}(\varepsilon) =$$

$$= A \int\limits_0^\infty d\varepsilon \left[\frac{\varepsilon^{D/2-1}}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1} - \frac{(M+1)\varepsilon^{D/2-1}}{z^{-(M+1)} e^{(M+1)\varepsilon/T} - 1} \right] =$$

$$= A T^{D/2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \left[\mathrm{Li}_{D/2}(z) - (M+1)^{1-D/2}\, \mathrm{Li}_{D/2}\left(z^{M+1}\right) \right]. \quad (18)$$

Тут полілогарифм або функція Бозе

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^s}. \quad (19)$$

Ідеальний D-вим. газ у статистиці Джентіле

Розписуючи множник A в рівнянні (18), отримаємо

$$\rho_D \lambda^D = \mathrm{Li}_{D/2}(z) - (M+1)^{1-D/2}\, \mathrm{Li}_{D/2}\left(z^{M+1}\right), \tag{20}$$

де введено позначення для D-вимірної густини та довжини теплової хвилі де Бройля, відповідно:

$$\rho_D = \frac{N}{\mathscr{V}_D}, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mT}}. \tag{21}$$

Тут потрібно мати на увазі, що усі результати правильні лише в термодинамічній границі, коли $N \to \infty$ і $\mathscr{V}_D \to \infty$, а густина ρ_D залишається сталою.

Ідеальний D-вим. газ у статистиці Джентіле

Розв'язком р-ня (20) буде z як функція ρ_D і T. Енерґія:

$$E = \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon g(\varepsilon) n^{\mathrm{G}}(\varepsilon) =$$

$$= A \int_0^\infty d\varepsilon \left[\frac{\varepsilon^{D/2}}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1} - \frac{(M+1)\varepsilon^{D/2}}{z^{-(M+1)} e^{(M+1)\varepsilon/T} - 1} \right] =$$

$$= AT^{D/2+1} \Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right) \left[\mathrm{Li}_{D/2+1}(z) - (M+1)^{D/2}\, \mathrm{Li}_{D/2+1}\left(z^{M+1}\right) \right].$$

Енерґія на одну частинку буде

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{2} \frac{T}{\rho_D \lambda^D} \left[\mathrm{Li}_{D/2+1}(z) - (M+1)^{-D/2}\, \mathrm{Li}_{D/2+1}\left(z^{M+1}\right) \right]. \quad (22)$$

Ідеальний D-вим. газ у статистиці Джентіле

Врахувавши означення полілогарифма, бачимо, що в границі високих температур $T \to \infty$ величина $z \to 0$ за законом

$$z = \rho_D \lambda^D \sim T^{-D/2}, \tag{23}$$

а отже, енерґія

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{2} T, \tag{24}$$

що відповідає класичній границі, як і варто було очікувати.

Ідеальний D-вим. газ у статистиці Джентіле

Врахувавши означення полілогарифма, бачимо, що в границі високих температур $T \to \infty$ величина $z \to 0$ за законом

$$z = \rho_D \lambda^D \sim T^{-D/2}, \tag{23}$$

а отже, енерґія

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{2} T, \tag{24}$$

що відповідає класичній границі, як і варто було очікувати. Також зрозуміло, що для $M > 1$ першу поправку до класичної границі визначатиме виключно «бозонний доданок»

$$\rho_D \lambda^D = \mathrm{Li}_{D/2}(z) = z + 2^{-D/2} z^2 + \dots \tag{25}$$

Отже, й термодинаміка системи зі статистикою Джентіле буде нагадувати термодинаміку бозе-системи. Зокрема, C_V прямуватиме до класичної границі $D/2$ зверху.

Границя низьких температур

Окремо звернемо увагу на низькотемпературну границю функції розподілу $n^{\mathrm{G}}(\varepsilon)$. При $T \to 0$ існує певна енерґія μ_0, така, що

$$n^{\mathrm{G}}(\varepsilon) = \begin{cases} M, & \varepsilon < \mu_0 \\ 0, & \varepsilon > \mu_0. \end{cases} \tag{26}$$

Тобто поведінка функції розподілу збігається зі «сходинкою» розподілу Фермі, хоч і з іншою (неодиничною) висотою. Енерґія ж μ_0 виконує роль аналога рівня Фермі.

Границя низьких температур

Розрахуємо значення μ_0 для D-вимірного ідеального газу. Кількість частинок при $T = 0$

$$N = A\int_0^{\mu_0} d\varepsilon\, \varepsilon^{D/2-1} M = AM\frac{2}{D}\mu_0^{D/2}. \tag{27}$$

Отже,

$$\mu_0 = \left(\frac{D}{2}\frac{N}{AM}\right)^{2/D} = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\left[\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)\frac{\rho_D}{M}\right]^{2/D} > 0. \tag{28}$$

Це означає, що в границі $T \to 0$

$$z = e^{\mu_0/T} = \exp\left\{\left[\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)\frac{\rho_D\lambda^D}{M}\right]^{2/D}\right\} \to +\infty. \tag{29}$$

Границя низьких температур

Тут ми натрапляємо на таку математичну проблему: означення полілогарифма через ряд (19) можна застосовувати лише для $|z| \leq 1$ (нас цікавлять дійсні значення, тому просто $z \leq 1$ або еквівалентно $\mu \leq 0$). Інакше знаменник $\left(z^{-1}e^{\varepsilon/T} - 1\right)$ в підінтеґральних виразах матиме нулі. Зауважимо, однак, що сама функція розподілу не буде розбіжною, оскільки особливості від різниці двох дробів скомпенсуються. Можна показати, що в границі $(\varepsilon - \mu)/T \to 0$

$$n^{\mathrm{G}}(\varepsilon) = \frac{M}{2}. \tag{30}$$

Границя низьких температур

Замість означення (19) для полілогарифмів потрібно використовувати аналітичне продовження. Для нашого аналізу зручним буде такий асимптотичний ряд Кацури *та ін.*:

$$\mathrm{Li}_s(z) = -\frac{(\ln z)^s}{\Gamma(s+1)} + \Gamma(1-s)(-\ln z)^{s-1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{m} \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{\Gamma(s+1-2n)(2n)!} (\ln z)^{s-2n} + \mathcal{O}\left((\ln z)^{s-2m-2}\right), \qquad (31)$$

де B_n — числа Бернуллі, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, ...

Границя низьких температур

Замість означення (19) для полілогарифмів потрібно використовувати аналітичне продовження. Для нашого аналізу зручним буде такий асимптотичний ряд Кацури *та ін.*:

$$\mathrm{Li}_s(z) = -\frac{(\ln z)^s}{\Gamma(s+1)} + \Gamma(1-s)(-\ln z)^{s-1} +$$

$$+\sum_{n=1}^{m} \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{\Gamma(s+1-2n)(2n)!} (\ln z)^{s-2n} + \mathcal{O}\left((\ln z)^{s-2m-2}\right), \qquad (31)$$

де B_n — числа Бернуллі, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, ...
Використовуючи перший доданок у розкладі (31), перепишемо у границі малих температур рівняння (20) для z у такому вигляді:

$$\rho_D \lambda^D = -\frac{(\ln z)^{D/2}}{\Gamma(D/2+1)} + (M+1)^{1-D/2} \frac{\left(\ln z^{M+1}\right)^{D/2}}{\Gamma(D/2+1)} = \frac{M(\ln z)^{D/2}}{\Gamma(D/2+1)},$$

Границя низьких температур

З цього рівняння маємо

$$z = \exp\left\{\left[\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)\frac{\rho_D\lambda^D}{M}\right]^{2/D}\right\},$$

що збігається з отриманим раніше виразом (29).

Границя низьких температур

З цього рівняння маємо

$$z = \exp\left\{\left[\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)\frac{\rho_D\lambda^D}{M}\right]^{2/D}\right\},$$

що збігається з отриманим раніше виразом (29).
Для енерґії в цьому ж наближенні матимемо

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{2}\frac{T}{\rho_D\lambda^D}\left[-\frac{(\ln z)^{D/2+1}}{\Gamma(D/2+2)} + (M+1)^{-D/2}\frac{\left(\ln z^{M+1}\right)^{D/2+1}}{\Gamma(D/2+2)}\right] =$$

$$= \frac{D}{2}\frac{T}{\rho_D\lambda^D}\frac{\ln z}{D/2+1}\frac{M(\ln z)^{D/2}}{\Gamma(D/2+1)}.$$

Границя низьких температур

Остаточно після нескладних перетворень отримаємо середню енергію частинок при $T = 0$, тобто в основному стані:

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{D+2}\frac{\hbar^2}{2m}4\pi\left[\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)\frac{\rho_D}{M}\right]^{2/D}. \tag{32}$$

Границя низьких температур

Остаточно після нескладних перетворень отримаємо середню енергію частинок при $T = 0$, тобто в основному стані:

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{D+2}\frac{\hbar^2}{2m}4\pi\left[\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)\frac{\rho_D}{M}\right]^{2/D} . \tag{32}$$

Подібно до фермі-систем, ми отримали ненульове значення енергії — на відміну від системи зі статистикою Бозе. Це пояснюється характером заповнення станів, коли лише M частинок мають нульову енергію, а решта поступово заповнюють наступні стани з вищими енергіями.

Границя низьких температур

Остаточно після нескладних перетворень отримаємо середню енергію частинок при $T = 0$, тобто в основному стані:

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{D+2}\frac{\hbar^2}{2m}4\pi\left[\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)\frac{\rho_D}{M}\right]^{2/D}. \tag{32}$$

Подібно до фермі-систем, ми отримали ненульове значення енергії — на відміну від системи зі статистикою Бозе. Це пояснюється характером заповнення станів, коли лише M частинок мають нульову енергію, а решта поступово заповнюють наступні стани з вищими енергіями.

Можна показати, що у границі малих температур теплоємність лінійно залежатиме від T. Відповідний вираз буде таким:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{D}{3}\frac{\pi^2}{M+1}\frac{1}{\ln z} == \frac{D}{3}\frac{\pi^2}{M+1}\left(\frac{M}{\Gamma(D/2+1)}\frac{1}{\rho_D}\right)^{2/D}\frac{mT}{2\pi\hbar^2}.$$

Термодинамічні функції

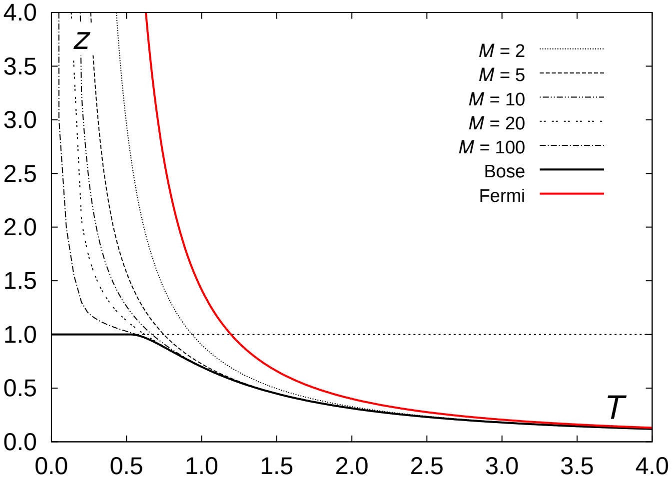

Рис.: Активність z тривимірного ідеального газу зі статистикою Джентіле порівняно з результатами для статистик Бозе і Фермі.

Термодинамічні функції

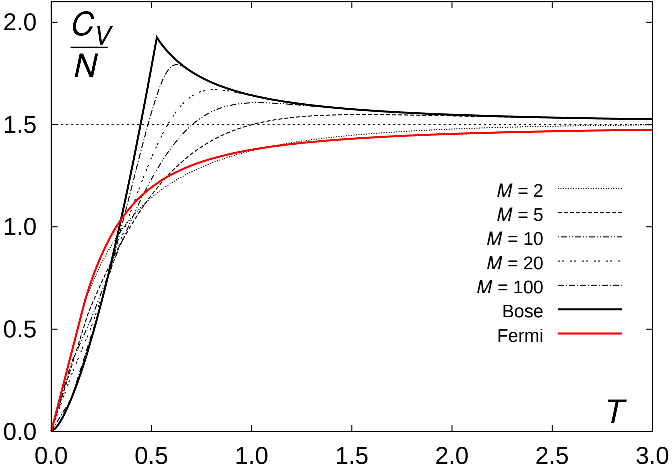

Рис.: Питома теплоємність тривимірного ідеального газу зі статистикою Джентіле порівняно зі статистиками Бозе і Фермі.

Великі значення максимального заповнення станів

Окремої уваги потребує випадок, коли максимальне заповнення M стану є великим (макроскопічним) числом. За постановкою задачі зрозуміло, що в системі N частинок прямування $M \to N$ відповідає границі статистики Бозе. Однак, це твердження не можна приймати беззастережно.

Великі значення максимального заповнення станів

Окремої уваги потребує випадок, коли максимальне заповнення M стану є великим (макроскопічним) числом. За постановкою задачі зрозуміло, що в системі N частинок прямування $M \to N$ відповідає границі статистики Бозе. Однак, це твердження не можна приймати беззастережно.

Розгляньмо кількість частинок в основному стані $\varepsilon = 0$:

$$N_0 = \frac{1}{z^{-1} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)} - 1} = M + \frac{1}{1-z} - \frac{(M+1)}{1 - z^{(M+1)}}. \tag{33}$$

Якщо $z < 1$ (як у випадку бозонів), то границя великих $M \to N$ з урахуванням того, що $N \to \infty$, дає відомий у статистиці Бозе вираз для кількості частинок у бозе-конденсаті:

$$N_0^{\text{Bose}} = \frac{z}{1-z}. \tag{34}$$

Великі значення M

Але за низьких температур z може набувати як завгодно великих значень. Тобто в такій ситуації

$$N_0 = M + \frac{1}{1-z} \simeq M, \tag{35}$$

оскільки у статистиці Джентіле в основному стані не може перебувати більше, ніж M частинок.

Великі значення M

Але за низьких температур z може набувати як завгодно великих значень. Тобто в такій ситуації

$$N_0 = M + \frac{1}{1-z} \simeq M, \tag{35}$$

оскільки у статистиці Джентіле в основному стані не може перебувати більше, ніж M частинок.
Якщо ж M макроскопічне,

$$M \sim \eta N, \qquad \text{де} \quad \eta \lesssim 1, \tag{36}$$

то внеском від основного стану не можна нехтувати в розрахунках термодинамічних функцій. А це означає, що відповідний доданок потрібно виписувати явно у виразі для кількості частинок, якщо розмірність простору $D > 2$, коли густина станів

$$g(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Великі значення M

Отже, для густини матимемо:

$$\frac{N}{\mathscr{V}_D} = \frac{1}{\lambda^D}\left[\mathrm{Li}_{D/2}(z) - (M+1)^{1-D/2}\,\mathrm{Li}_{D/2}\left(z^{M+1}\right)\right] + \frac{N_0}{\mathscr{V}_D}$$

або

$$\rho_D\lambda^D\left(1-\frac{N_0}{N}\right) = \mathrm{Li}_{D/2}(z) - (M+1)^{1-D/2}\,\mathrm{Li}_{D/2}\left(z^{M+1}\right). \qquad (37)$$

Великі значення M

Отже, для густини матимемо:

$$\frac{N}{\mathscr{V}_D} = \frac{1}{\lambda^D}\left[\mathrm{Li}_{D/2}(z) - (M+1)^{1-D/2}\,\mathrm{Li}_{D/2}\left(z^{M+1}\right)\right] + \frac{N_0}{\mathscr{V}_D}$$

або

$$\rho_D \lambda^D \left(1 - \frac{N_0}{N}\right) = \mathrm{Li}_{D/2}(z) - (M+1)^{1-D/2}\,\mathrm{Li}_{D/2}\left(z^{M+1}\right). \qquad (37)$$

Для макроскопічних значень максимального заповнення станів у границі малих температур (великих z) вплив множника

$$1 - \frac{N_0}{N} \simeq 1 - \eta$$

стає особливо відчутним і приводить до відповідного зменшення термодинамічних величин порівняно з результатами, отриманими без урахування внеску основного стану.

Завдання для лабораторної роботи

1. Покажіть, як виконати перехід від виразу (4) до (7), застосовуючи інтеґральну формулу Коші.
2. Цікавим граничним випадком розподілу Джентіле є $\frac{\varepsilon-\mu}{T} \to 0$. Покажіть, що в цій границі функція

$$n^{\mathrm{G}}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(\varepsilon-\mu)/T} - 1}$$

   дорівнює

$$n^{\mathrm{G}}(\varepsilon) = \frac{M}{2}.$$

3. Визначте поведінку теплоємності ідеального газу зі статистикою Джентіле у границі $T \to 0$.

Дякую за увагу!