Екзотичні статистики. Лекція 7. Елементи теорії груп. Означення групи. Групи Лі, $SU(n)$, група кіс. Теоретико-групове зображення дробових статистик

Андрій Ровенчак

20 листопада 2020 р.

Короткий зміст

Означення та приклади груп

Множина G, для елементів якої визначена бінарна операція $*$, називається ***групою***, якщо виконуються такі властивості:

Означення та приклади груп

Множина G, для елементів якої визначена бінарна операція $*$, називається ***групою***, якщо виконуються такі властивості:

- *Замкненість:* для довільних a, b із множини G результат операції $c = a * b$ також належить множині G.

Означення та приклади груп

Множина G, для елементів якої визначена бінарна операція $*$, називається ***групою***, якщо виконуються такі властивості:

- *Замкненість:* для довільних a, b із множини G результат операції $c = a * b$ також належить множині G.
- *Асоціативність:* для довільних a, b, c із множини G виконується $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Означення та приклади груп

Множина G, для елементів якої визначена бінарна операція $*$, називається ***групою***, якщо виконуються такі властивості:

- *Замкненість:* для довільних a, b із множини G результат операції $c = a * b$ також належить множині G.
- *Асоціативність:* для довільних a, b, c із множини G виконується $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- *Існування нейтрального елемента:* у множині G існує елемент e такий, що для кожного елемента a з G виконується $a * e = e * a = a$.

Означення та приклади груп

Множина G, для елементів якої визначена бінарна операція $*$, називається ***групою***, якщо виконуються такі властивості:

- *Замкненість:* для довільних a, b із множини G результат операції $c = a * b$ також належить множині G.
- *Асоціативність:* для довільних a, b, c із множини G виконується $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- *Існування нейтрального елемента:* у множині G існує елемент e такий, що для кожного елемента a з G виконується $a * e = e * a = a$.
- *Існування оберненого елемента:* для кожного елемента a з множини G існує елемент a^{-1}, який також належить G, так що виконується $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Означення та приклади груп

Множина G, для елементів якої визначена бінарна операція $*$, називається ***групою***, якщо виконуються такі властивості:

- *Замкненість:* для довільних a, b із множини G результат операції $c = a * b$ також належить множині G.
- *Асоціативність:* для довільних a, b, c із множини G виконується $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- *Існування нейтрального елемента:* у множині G існує елемент e такий, що для кожного елемента a з G виконується $a * e = e * a = a$.
- *Існування оберненого елемента:* для кожного елемента a з множини G існує елемент a^{-1}, який також належить G, так що виконується $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Бінарна операція не мусить бути комутативною. Якщо $a * b = b * a \;\; \forall a, b \in G$, то групу називають ***комутативною*** або ***абелевою***.

Означення та приклади груп

Наприклад, множина цілих чисел $\mathbb{Z}$ з операцією додавання утворює групу, тоді як натуральні числа $\mathbb{N}$ — ні, оскільки немає можливості означити обернений (тут протилежний) і нейтральний елемент (нуль). А от цілі $\mathbb{Z}$ чи дійсні числа $\mathbb{R}$ з відніманням не є групою через неасоціативність операції.

[1] Софус Лі (Marius Sophus Lie; 1842–1899), норвезький математик.

Означення та приклади груп

Наприклад, множина цілих чисел $\mathbb{Z}$ з операцією додавання утворює групу, тоді як натуральні числа $\mathbb{N}$ — ні, оскільки немає можливості означити обернений (тут протилежний) і нейтральний елемент (нуль). А от цілі $\mathbb{Z}$ чи дійсні числа $\mathbb{R}$ з відніманням не є групою через неасоціативність операції.

Групою Лі[1] (дійсною чи комплексною) називають групу G, елементами якої є точки аналітичного многовиду (відповідно, дійсного чи комплексного), а групові операції множення $\mathrm{mul}: \; G \times G \to G$ та інверсії (взяття оберненого елемента) $\mathrm{inv}: \; G \to G$ є аналітичними відображеннями.

[1] Софус Лі (Marius Sophus Lie; 1842–1899), норвезький математик.

Означення та приклади груп

Приклади дійсних груп Лі:

- $\mathbb{R}^n$ — евклідовий простір з операцією додавання;
- $\mathbb{R}_+^*$ — додатні дійсні числа з операцією множення;
- $GL(n,\mathbb{R})$ — загальна лінійна група: дійсні оборотні матриці розмірності $n \times n$;
- $SL(n,\mathbb{R})$ — спеціальна лінійна група: дійсні оборотні матриці розмірності $n \times n$ з визначником 1;
- $O(n,\mathbb{R})$ — ортогональна група: ортогональні дійсні матриці розмірності $n \times n$.

Означення та приклади груп

Приклади комплексних груп Лі:

- $\mathbb{C}^n$ — евклідовий простір з операцією додавання;
- $\mathbb{C}^*$ — ненульові комплексні числа з операцією множення;
- $SO(n, \mathbb{C})$ — спеціальна ортогональна група: комплексні ортогональні матриці з визначником 1;
- $U(n)$ — унітарна група: унітарні комплексні матриці розмірності $n \times n$;
- $SU(n)$ — спеціальна унітарна група: унітарні комплексні матриці розмірності $n \times n$ з визначником 1.

Означення та приклади груп

Гомоморфізмом називають відображення f групи G в групу H, яке зберігає групову операцію:

$$f: \ G \to H: \quad f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) \qquad \forall g_1, g_2 \in G,$$
$$f(e) = E,$$

де e — одиниця в G, а E — відповідно, одиниця в H.

Означення та приклади груп

Гомоморфізмом називають відображення f групи G в групу H, яке зберігає групову операцію:

$$f:\; G \to H: \quad f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) \qquad \forall g_1, g_2 \in G,$$
$$f(e) = E,$$

де e — одиниця в G, а E — відповідно, одиниця в H.
Зрозуміло також, що для обернених елементів справджується

$$f(g^{-1}) = f^{-1}(g) \qquad \forall g \in G.$$

Означення та приклади груп

Гомоморфізмом називають відображення f групи G в групу H, яке зберігає групову операцію:

$$f : \ G \to H : \quad f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) \qquad \forall g_1, g_2 \in G,$$

$$f(e) = E,$$

де e — одиниця в G, а E — відповідно, одиниця в H. Зрозуміло також, що для обернених елементів справджується

$$f(g^{-1}) = f^{-1}(g) \qquad \forall g \in G.$$

Якщо гомоморфізм є взаємнооднозначним відображенням, то його називають ***ізоморфізмом***.

Означення та приклади груп

Лінійне представлення (або просто ***представлення***) групи G в просторі V — це гомоморфізм групи G в групу $GL(V)$.
Вимірність представлення дорівнює вимірності простору V.

Означення та приклади груп

Лінійне представлення (або просто ***представлення***) групи G в просторі V — це гомоморфізм групи G в групу $GL(V)$. Вимірність представлення дорівнює вимірності простору V.

Завдяки властивості визначника $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ зрозуміло, наприклад, що відображення $f(A) = \det(A)$ задає одновимірне представлення груп $GL(n, \mathbb{R})$ в множину дійсних чисел, яка відповідає групі $GL(1, \mathbb{R})$.

Група кіс

Цікавим прикладом є так звана ***група кіс*** (англ. *braid group*), яка відіграє у двовимірному просторі ту ж роль, що й група перестановок у тривимірному.

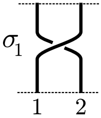
Група кіс

Цікавим прикладом є так звана ***група кіс*** (англ. *braid group*), яка відіграє у двовимірному просторі ту ж роль, що й група перестановок у тривимірному.
Її зручно проілюструвати за допомогою такого графічного зображення.

Група кіс

Цікавим прикладом є так звана ***група кіс*** (англ. *braid group*), яка відіграє у двовимірному просторі ту ж роль, що й група перестановок у тривимірному.
Її зручно проілюструвати за допомогою такого графічного зображення.

Розглядатимемо набори по N впорядкованих точок, розташованих на двох прямих. Поставивши у відповідність i-тій частинці ***струну***, що з'єднує i-ті точки, зобразимо дію оператора σ_i, як показано на рис. Такий оператор відповідає перестановці частинок 1 і 2 (взагалі кажучи, у визначеному напрямку — наприклад, проти годинникової стрілки).



Дія оператора σ_1.

Група кіс

Групу кіс B_N задають $(N-1)$ ґенераторів σ_i, які задовольняють такі властивості (***співвідношення Артіна***[2]):

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \tag{1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \qquad \text{якщо} \quad |i-j| \geq 2. \tag{2}$$

[2]Еміль Артін (Emil Artin; 1898–1962), австрійський математик.

Група кіс

Групу кіс B_N задають $(N-1)$ ґенераторів σ_i, які задовольняють такі властивості (***співвідношення Артіна***[2]):

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \tag{1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \qquad \text{якщо} \quad |i-j| \geq 2. \tag{2}$$

Відповідні графічні зображення наведено на наступному слайді.

[2]Еміль Артін (Emil Artin; 1898–1962), австрійський математик.

Група кіс

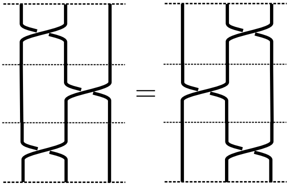


Рис.: Графічне зображення властивості $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$

Група кіс

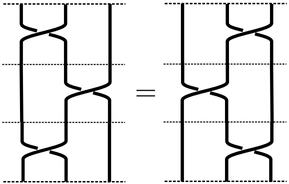


Рис.: Графічне зображення властивості $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$

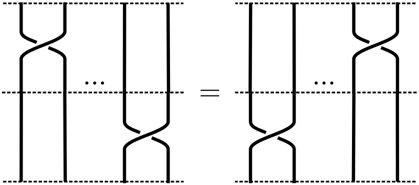


Рис.: Графічне зображення властивості $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, $|i-j| \geq 2$

Група кіс

Елементами групи B_N є добутки ґенераторів σ_i та обернених σ_i^{-1}, які відповідають перестановці у протилежному напрямку і зображаються як дзеркальне відбиття попередніх рисунків.

Група кіс

Елементами групи B_N є добутки ґенераторів σ_i та обернених σ_i^{-1}, які відповідають перестановці у протилежному напрямку і зображаються як дзеркальне відбиття попередніх рисунків.

Легко бачити, що повторна дія σ_1 не дає початкової конфіґурації — коса «заплітається», тобто $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^{-1}\sigma_1 = I$.

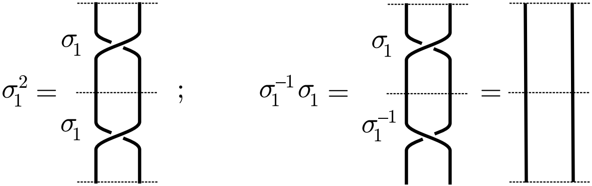


Рис.: Подвійна перестановка не зводиться до одиничної операції — дія оператора $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^{-1}\sigma_1 = I$

Група кіс

Відображення f, яке задає одновимірне представлення групи B_N, має, відповідно до (1), такі властивості:

$$f(\sigma_i)f(\sigma_{i+1})f(\sigma_i) = f(\sigma_{i+1})f(\sigma_i)f(\sigma_{i+1}),$$

$$f(\sigma_i)f(\sigma_j) = f(\sigma_j)f(\sigma_i), \qquad \text{якщо} \quad |i-j| \geq 2.$$

Це означає, що кожному ґенераторові σ_j ставиться у відповідність те саме комплексне число:

$$f(\sigma_j) = e^{i\theta},$$

де θ — довільне число з інтервалу $\theta \in [0; 2\pi)$. Для групи перестановок S_N, що є підгрупою B_N з додатковою умовою $\sigma_j^2 = 1$, маємо:

$$f(\sigma_i)^2 = e^{2i\theta} = 1, \qquad \text{звідки} \quad \theta = 0 \text{ або } \pi.$$

Група кіс

Справді, група перестановок має лише два одновимірні представлення: в першому будь-якій перестановці у відповідність ставлять число 1 (фізично це відповідає бозонам, хвильова функція яких симетрична), у другому непарним перестановкам зіставляють (-1), а парним — $(+1)$, подібно до переставних властивостей хвильових функцій ферміонів. В загальному ж випадку, коли обмеження на θ немає, група кіс відповідає еніонам.

Алґебри

Векторний простір називають ***алґеброю*** $\mathscr{A}$ над полем K (дійсних або комплексних чисел), якщо, крім додавання і множення на число, для елементів простору визначено операцію множення $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, яка є білінійною, тобто додавання й обидва множення задовольняють такі рівності:

$$a(\alpha b + \beta c) = \alpha ab + \beta ac, \qquad (\alpha b + \beta c)a = \alpha ba + \beta ca,$$

де елементи $a, b, c \in \mathscr{A}$, а числа $\alpha, \beta \in K$.

Алґебри

Векторний простір називають ***алґеброю*** $\mathscr{A}$ над полем K (дійсних або комплексних чисел), якщо, крім додавання і множення на число, для елементів простору визначено операцію множення $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, яка є білінійною, тобто додавання й обидва множення задовольняють такі рівності:

$$a(\alpha b + \beta c) = \alpha ab + \beta ac, \qquad (\alpha b + \beta c)a = \alpha ba + \beta ca,$$

де елементи $a, b, c \in \mathscr{A}$, а числа $\alpha, \beta \in K$.

Якщо множення комутативне, тобто $ab = ba$, то алґебру називають ***комутативною***. Якщо існує одиничний елемент e (***одиниця алґебри***), такий що $ae = ea = a$, то говорять про ***алґебру з одиницею***. Коли для будь-яких трьох елементів a, b, c справджується $(ab)c = a(bc)$, то алґебра — ***асоціативна***.

Алґебри

Зрозуміло, наприклад, що:

Алґебри

Зрозуміло, наприклад, що:

- множина комплексних чисел утворює асоціативну алґебру з одиницею над полем дійсних чисел, яка до того ж є комутативною.

Алґебри

Зрозуміло, наприклад, що:

- множина комплексних чисел утворює асоціативну алґебру з одиницею над полем дійсних чисел, яка до того ж є комутативною.
- комплексні квадратні матриці $n \times n$ щодо звичайного додавання і множення матриць — асоціативна некомутативна алґебра.

Алґебри

Базис алґебри $\mathscr{A}$ — це впорядкована сукупність її лінійно незалежних елементів $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$, за допомогою яких будь-який елемент $a \in \mathscr{A}$ можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

де $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ — числа з поля K, а n називають ***порядком алґебри***. Він може бути як скінченним, так і безмежним.

Алґебри

Базис алґебри $\mathscr{A}$ — це впорядкована сукупність її лінійно незалежних елементів $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$, за допомогою яких будь-який елемент $a \in \mathscr{A}$ можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

де $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ — числа з поля K, а n називають ***порядком алґебри***. Він може бути як скінченним, так і безмежним.

В асоціативних алґебрах множення базисних елементів визначає формула

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k, \tag{3}$$

де числа c_{ij}^k — ***структурні константи*** алґебри $\mathscr{A}$. Вони разом із елементами базису повністю визначають алґебру.

Алґебри

Скінченновимірний векторний простір називають ***алґеброю Лі*** $\mathfrak{g}$ над полем K (дійсних або комплексних чисел), якщо для елементів $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ задано білінійне відображення $(X, Y) \to [X, Y]$ (***дужки Лі*** або ***множення Лі***), що задовольняє такі аксіоми:

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \qquad \text{для } \alpha, \beta \in K;$$

$$[X, Y] = -[Y, X];$$

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Алґебри

Скінченновимірний векторний простір називають ***алґеброю Лі*** $\mathfrak{g}$ над полем K (дійсних або комплексних чисел), якщо для елементів $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ задано білінійне відображення $(X, Y) \to [X, Y]$ (***дужки Лі*** або ***множення Лі***), що задовольняє такі аксіоми:

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \qquad \text{для } \alpha, \beta \in K;$$

$$[X, Y] = -[Y, X];$$

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Остання рівність — це ***тотожністю Якобі***. Якщо $[X, Y] = 0$, то алґебру Лі називають комутативною.

Алґебри

Подібно до асоціативних алґебр (3), структурні константи визначають співвідношення між елементами базису $\{X_1, \ldots, X_n\}$:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} X_k. \tag{4}$$

Алґебри

Подібно до асоціативних алґебр (3), структурні константи визначають співвідношення між елементами базису $\{X_1, \ldots, X_n\}$:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k. \tag{4}$$

З антисиметричності операції $[X, Y] = -[Y, X]$ випливають умови:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \qquad c_{jj}^k = 0.$$

Алґебри

Подібно до асоціативних алґебр (3), структурні константи визначають співвідношення між елементами базису $\{X_1, \ldots, X_n\}$:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k. \tag{4}$$

З антисиметричності операції $[X, Y] = -[Y, X]$ випливають умови:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \qquad c_{jj}^k = 0.$$

Звичайний комутатор $[X, Y] = XY - YX$ є прикладом множення Лі. Увівши його в асоціативну алґебру, можемо перетворити її на алґебру Лі. Однак треба зауважити, що операція множення Лі не обмежується лише цим випадком.

Алґебри

Наприклад, добре відомо, що тотожність Якобі задовольняють ***класичні дужки Пуассона***:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

де f і g є функціями канонічних координат $q_1, \ldots, q_n$ та імпульсів $p_1, \ldots, p_n$.

Алґебри

Наприклад, добре відомо, що тотожність Якобі задовольняють ***класичні дужки Пуассона***:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

де f і g є функціями канонічних координат $q_1, \ldots, q_n$ та імпульсів $p_1, \ldots, p_n$.

Кожній групі Лі G можна зіставити за певним правилом алґебру Лі $\mathfrak{g}$. Якщо йдеться про матричні групи, то множення Лі буде комутатором матриць. Зазвичай такі алґебри позначають відповідними малими літерами, причому часто — ґотичними.

Алґебри

Наприклад:

- алґеброю Лі групи $GL(n, \mathbb{C})$ буде $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ — комплексні матриці $n \times n$;

Алґебри

Наприклад:

- алґеброю Лі групи $GL(n, \mathbb{C})$ буде $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ — комплексні матриці $n \times n$;
- алґеброю Лі групи $SL(n, \mathbb{C})$ буде $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ — комплексні матриці $n \times n$ з нульовим слідом;

Алґебри

Наприклад:

- алґеброю Лі групи $GL(n, \mathbb{C})$ буде $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ — комплексні матриці $n \times n$;
- алґеброю Лі групи $SL(n, \mathbb{C})$ буде $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ — комплексні матриці $n \times n$ з нульовим слідом;
- алґеброю Лі групи $U(n)$ буде $\mathfrak{u}(n)$ — антиермітові комплексні матриці $n \times n$;

Алґебри

Наприклад:

- алґеброю Лі групи $GL(n,\mathbb{C})$ буде $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ — комплексні матриці $n \times n$;
- алґеброю Лі групи $SL(n,\mathbb{C})$ буде $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ — комплексні матриці $n \times n$ з нульовим слідом;
- алґеброю Лі групи $U(n)$ буде $\mathfrak{u}(n)$ — антиермітові комплексні матриці $n \times n$;
- алґеброю Лі групи $SU(n)$ буде $\mathfrak{su}(n)$ — антиермітові комплексні матриці $n \times n$ з нульовим слідом.

Алґебри

Елементи X групи G пов'язані з базисом $u_1, \ldots, u_n$ алґебри $\mathfrak{g}$ через параметри $\theta_1, \ldots, \theta_n$ ***експоненційним відображенням***:

$$X(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j u_j\right), \quad \text{де} \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \tag{5}$$

Алґебри

Елементи X групи G пов'язані з базисом $u_1, \ldots, u_n$ алґебри $\mathfrak{g}$ через параметри $\theta_1, \ldots, \theta_n$ ***експоненційним відображенням***:

$$X(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j u_j\right), \quad \text{де} \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \qquad (5)$$

Розгляньмо трохи докладніше алґебру $\mathfrak{su}(2)$, яка відіграє важливу роль у різних галузях фізики. Її базис можна подати у вигляді $u_1 = i\sigma_1, u_2 = i\sigma_2, u_3 = i\sigma_3$, де ***матриці Паулі***

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Алґебри

Елементи X групи G пов'язані з базисом $u_1, \ldots, u_n$ алґебри $\mathfrak{g}$ через параметри $\theta_1, \ldots, \theta_n$ ***експоненційним відображенням***:

$$X(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j u_j\right), \quad \text{де} \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \qquad (5)$$

Розгляньмо трохи докладніше алґебру $\mathfrak{su}(2)$, яка відіграє важливу роль у різних галузях фізики. Її базис можна подати у вигляді $u_1 = i\sigma_1, u_2 = i\sigma_2, u_3 = i\sigma_3$, де ***матриці Паулі***

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пригадуючи співвідношення про $\det e^A = e^{\mathrm{Sp}\, A}$, бачимо, що відображення (5) справді переводить безшпурові матриці алґебри $\mathfrak{su}(2)$ в матриці з одиничним визначником, які утворюють групу $SU(2)$.

Алґебри

Зауважмо, що у фізиці часто записують експоненційне відображення з додатковою уявною одиницею, зокрема в цьому випадку як $X = \exp(i\boldsymbol{\theta\sigma})$.

Алґебри

Зауважмо, що у фізиці часто записують експоненційне відображення з додатковою уявною одиницею, зокрема в цьому випадку як $X = \exp(i\theta\boldsymbol{\sigma})$.

З урахуванням комутаційних співвідношень для σ_j отримаємо:

$$[u_1, u_2] = -2u_3, \qquad [u_2, u_3] = -2u_1, \qquad [u_3, u_1] = -2u_2. \tag{6}$$

Алґебри

Зауважмо, що у фізиці часто записують експоненційне відображення з додатковою уявною одиницею, зокрема в цьому випадку як $X = \exp(i\boldsymbol{\theta\sigma})$.

З урахуванням комутаційних співвідношень для σ_j отримаємо:

$$[u_1, u_2] = -2u_3, \qquad [u_2, u_3] = -2u_1, \qquad [u_3, u_1] = -2u_2. \tag{6}$$

За допомогою операторів, що з точністю до розмірного множника $\hbar$ збігаються з моментом імпульсу, $J^{\pm} = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$, $J_z = \sigma_3/2$, можемо переписати:

$$[J^+, J^-] = J_z, \qquad [J_z, J^+] = J^+, \qquad [J_z, J^-] = -J^-, \tag{7}$$

що можна розглядати як ще одне представлення алґебри $\mathfrak{su}(2)$.

Алґебри

Визначимо ще q-деформовану алґебру $\mathfrak{su}_q(2)$ і групу $SU_q(2)$, пов'язану з нею через базисні елементи E^+, E^-, F, для яких

$$[E^+, E^-] = \frac{q^F - q^{-F}}{q - q^{-1}}, \quad [F, E^+] = E^+, \quad [F, E^-] = -E^-.$$

Алґебри

Визначимо ще q-деформовану алґебру $\mathfrak{su}_q(2)$ і групу $SU_q(2)$, пов'язану з нею через базисні елементи E^+, E^-, F, для яких

$$[E^+, E^-] = \frac{q^F - q^{-F}}{q - q^{-1}}, \quad [F, E^+] = E^+, \quad [F, E^-] = -E^-.$$

У першому комутаторі — один зі способів уведення q-чисел, тому можемо записати $[E^+, E^-] = [F]_q$. Тоді ці співвідношення нагадуватимуть (7) і збігатимуться з ними у границі $q \to 1$.

Алґебри

Визначимо ще q-деформовану алґебру $\mathfrak{su}_q(2)$ і групу $SU_q(2)$, пов'язану з нею через базисні елементи E^+, E^-, F, для яких

$$[E^+, E^-] = \frac{q^F - q^{-F}}{q - q^{-1}}, \quad [F, E^+] = E^+, \quad [F, E^-] = -E^-.$$

У першому комутаторі — один зі способів уведення q-чисел, тому можемо записати $[E^+, E^-] = [F]_q$. Тоді ці співвідношення нагадуватимуть (7) і збігатимуться з ними у границі $q \to 1$.

Можна пов'язати алґебри типу $\mathfrak{su}_q(2)$ та q-осциляторні алґебри, які ми розглядали раніше.

Алґебри

Визначимо ще q-деформовану алґебру $\mathfrak{su}_q(2)$ і групу $SU_q(2)$, пов'язану з нею через базисні елементи E^+, E^-, F, для яких

$$[E^+, E^-] = \frac{q^F - q^{-F}}{q - q^{-1}}, \quad [F, E^+] = E^+, \quad [F, E^-] = -E^-.$$

У першому комутаторі — один зі способів уведення q-чисел, тому можемо записати $[E^+, E^-] = [F]_q$. Тоді ці співвідношення нагадуватимуть (7) і збігатимуться з ними у границі $q \to 1$.

Можна пов'язати алґебри типу $\mathfrak{su}_q(2)$ та q-осциляторні алґебри, які ми розглядали раніше. Варто зазначити, що у випадку q-деформованих аналогів алґебри Лі, яким відповідають q-мутатори $[A, B]_q = AB - qBA$, розглядають також таку ***квантову тотожність Якобі***

$$[X, [Y, Z]_{q_1}]_{q_2} + [Z, [X, Y]_{q_1 q_2}] + q_2[Y, [Z, X]_{q_1}]_{q_2^{-1}} = 0.$$

Завдання для лабораторної роботи

- Перевірте, чи утворюють вказані множини групу відносно заданої бінарної операції. Якщо так, то вкажіть нейтральний елемент e і правило отримання оберненого елемента.

1. $a, b \in \mathbb{R}_+ : \quad a * b = a^b.$
2. $a, b \in \mathbb{Q}, \quad a = \dfrac{p_a}{q_a}, \ b = \dfrac{p_b}{q_b}, \quad p_a, p_b \in \mathbb{Z}, \ q_a, q_b \in \mathbb{N}$
   (тобто a, b — раціональні числа) : $\quad a * b = \dfrac{p_a + p_b}{q_a + q_b}.$
3. $a, b \in \mathbb{R} : \quad a * b = \min(a, b) \equiv \begin{cases} a, & \text{якщо } a \leqslant b \\ b, & \text{якщо } a > b \end{cases}.$

Завдання для лабораторної роботи

- Покажіть, що верхні трикутні матриці виду

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{де} \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

утворюють групу щодо операції матричного множення (це приклад так званої неперервної ***групи Гайзенберґа***). Задайте правило отримання оберненого елемента.

Завдання для лабораторної роботи

- Покажіть, що верхні трикутні матриці виду

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{де} \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

  утворюють групу щодо операції матричного множення (це приклад так званої неперервної ***групи Гайзенберґа***). Задайте правило отримання оберненого елемента.

- Доведіть такі співвідношення для операторів групи кіс:

  (a) $\sigma_i^\gamma \sigma_j^\delta = \sigma_j^\delta \sigma_i^\gamma$, якщо $|i - j| \geq 2$ і $\gamma, \delta \in \{-1; 1\}$;

  (b) $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} = \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2$.

Завдання для лабораторної роботи

- ***Кватерніони*** — це об'єкти виду $q = a_0 + \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3$, де a_0, a_1, a_2, a_3 — дійсні числа, а ***уявні (кватерніонні) одиниці*** задовольняють співвідношення:

  $$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1.$$

  Покажіть, що алґебра кватерніонів є асоціативною, але некомутативною.
- Доведіть, що векторний простір $\mathbb{R}^3$ над полем дійсних чисел із векторним добутком утворює алґебру Лі.

Дякую за увагу!