Екзотичні статистики.
Лекція 8. Зв'язок між параметрами різних дробових статистик.
Віріальні розклади

Андрій Ровенчак

5 грудня 2020 р.

Короткий зміст

Віріальне і кластерне розвинення

Ефективний спосіб знаходження зв'язку між різними дробовими статистиками — зіставлення їх термодинамічних функцій, яке найзручніше робити на підставі ***віріального розвинення*** для рівняння стану [Khare 2005, Chap. 4].

Віріальне і кластерне розвинення

Ефективний спосіб знаходження зв'язку між різними дробовими статистиками — зіставлення їх термодинамічних функцій, яке найзручніше робити на підставі ***віріального розвинення*** для рівняння стану [Khare 2005, Chap. 4].

Оскільки еніони виникають у двовимірних задачах, саме такий випадок розглянемо докладніше.

Віріальне і кластерне розвинення

Ефективний спосіб знаходження зв'язку між різними дробовими статистиками — зіставлення їх термодинамічних функцій, яке найзручніше робити на підставі ***віріального розвинення*** для рівняння стану [Khare 2005, Chap. 4].

Оскільки еніони виникають у двовимірних задачах, саме такий випадок розглянемо докладніше.

У границі малих густин і високих температур рівняння стану двовимірної системи записують так:

$$\frac{p}{T} = \rho_2 \left[1 + b_2\,\rho_2\lambda^2 + b_3\,(\rho_2\lambda^2)^2 + \ldots\right], \tag{1}$$

де p — тиск, T — температура, $\rho_2 = N/V_2$ — двовимірна густина (концентрація), що дорівнює відношенню кількості частинок N до двовимірного аналога об'єму — площі V_2.

Віріальне і кластерне розвинення

$$\frac{p}{T} = \rho_2 \left[1 + b_2\, \rho_2 \lambda^2 + b_3\, (\rho_2 \lambda^2)^2 + \ldots\right],$$

Тут $\lambda = \left(\dfrac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{1/2}$ — ***довжина теплової хвилі де Бройля***.

Віріальне і кластерне розвинення

$$\frac{p}{T} = \rho_2 \left[1 + b_2\, \rho_2 \lambda^2 + b_3\, (\rho_2 \lambda^2)^2 + \ldots\right],$$

Тут $\lambda = \left(\dfrac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{1/2}$ — ***довжина теплової хвилі де Бройля***.

Множники b_j — це знерозмірені j-ті ***віріальні коефіцієнти***.

Віріальне і кластерне розвинення

$$\frac{p}{T} = \rho_2 \left[1 + b_2\, \rho_2 \lambda^2 + b_3\, (\rho_2 \lambda^2)^2 + \ldots\right],$$

Тут $\lambda = \left(\dfrac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{1/2}$ — ***довжина теплової хвилі де Бройля***.

Множники b_j — це знерозмірені j-ті ***віріальні коефіцієнти***.

Велику статистичну суму Ξ записують у вигляді розкладу в ряд за активністю $z = e^{\mu/T}$, який називають ***кластерним розвиненням***:

$$\frac{1}{V_2} \ln \Xi = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{B}_\ell z^\ell. \tag{2}$$

Коефіцієнти розкладу $\mathcal{B}_\ell$ — це ***кластерні інтеґрали***.

Віріальне і кластерне розвинення

Враховуючи термодинамічні співвідношення

$$\frac{p}{T} = \frac{1}{V_2} \ln \Xi(z, V_2, T) \tag{3}$$

і

$$\rho_2 = \frac{N}{V_2} = z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{V_2}\ln \Xi\right)_{V_2,T},$$

матимемо рівність:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{B}_\ell z^\ell = \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\mathcal{B}_\ell z^\ell\right)\left[1 + b_2\,\lambda^2\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\mathcal{B}_\ell z^\ell\right) + \ldots\right].$$

Віріальне і кластерне розвинення

Враховуючи термодинамічні співвідношення

$$\frac{p}{T} = \frac{1}{V_2} \ln \Xi(z, V_2, T) \tag{3}$$

і

$$\rho_2 = \frac{N}{V_2} = z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{V_2}\ln \Xi\right)_{V_2,T},$$

матимемо рівність:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{B}_\ell z^\ell = \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\mathcal{B}_\ell z^\ell\right)\left[1 + b_2\,\lambda^2\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\mathcal{B}_\ell z^\ell\right) + \ldots\right].$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z, отримаємо вирази для віріальних коефіцієнтів через кластерні інтеґрали.

Віріальне і кластерне розвинення

Нескладно отримати:

$$b_2\lambda^2 = -\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2}, \tag{4}$$

$$b_3\lambda^4 = -2\frac{\mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_1^3} + 4\frac{\mathcal{B}_2^2}{\mathcal{B}_1^4}, \tag{5}$$

$$b_4\lambda^6 = -3\frac{\mathcal{B}_4}{\mathcal{B}_1^4} + 18\frac{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_1^5} - 20\frac{\mathcal{B}_2^3}{\mathcal{B}_1^6}, \tag{6}$$

$$\ldots\ .$$

Віріальне і кластерне розвинення

Нескладно отримати:

$$b_2\lambda^2 = -\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2}, \tag{4}$$

$$b_3\lambda^4 = -2\frac{\mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_1^3} + 4\frac{\mathcal{B}_2^2}{\mathcal{B}_1^4}, \tag{5}$$

$$b_4\lambda^6 = -3\frac{\mathcal{B}_4}{\mathcal{B}_1^4} + 18\frac{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_1^5} - 20\frac{\mathcal{B}_2^3}{\mathcal{B}_1^6}, \tag{6}$$

$$\ldots\,.$$

Кластерні інтеґрали можна знайти, знаючи вираз для функції розподілу (чисел заповнення) n_j:

$$\frac{N}{V_2} = \frac{1}{V_2}\sum_j G_j n_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\mathcal{B}_\ell z^\ell, \tag{7}$$

де G_j — виродження j-го енерґетичного рівня ε_j.

Приклади віріальних розвинень

Продемонструємо розрахунок кластерних інтеґралів у випадку двовимірного ідеального газу бозонів та ферміонів.

Приклади віріальних розвинень

Продемонструємо розрахунок кластерних інтеґралів у випадку двовимірного ідеального газу бозонів та ферміонів.
Замінимо підсумовування за рівнями інтеґралом з густиною станів $g(\varepsilon) = mV_2/(2\pi\hbar^2) = \mathrm{const}$:

$$\frac{N}{V_2} = \frac{1}{V_2}\sum_j G_j n_j = \frac{1}{V_2}\int\limits_0^\infty \frac{g(\varepsilon)\, d\varepsilon}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} \pm 1} = \sum_{\ell=1}^\infty \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell.$$

Приклади віріальних розвинень

Продемонструємо розрахунок кластерних інтеґралів у випадку двовимірного ідеального газу бозонів та ферміонів.
Замінимо підсумовування за рівнями інтеґралом з густиною станів $g(\varepsilon) = mV_2/(2\pi\hbar^2) = \mathrm{const}$:

$$\frac{N}{V_2} = \frac{1}{V_2}\sum_j G_j n_j = \frac{1}{V_2}\int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} \pm 1} = \sum_{\ell=1}^\infty \ell\mathcal{B}_\ell z^\ell.$$

Знерозміримо змінну інтеґрування $x = \varepsilon/T$:

$$\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty \frac{ze^{-x}\,dx}{1 \pm ze^{-x}} = \sum_{\ell=1}^\infty \ell\mathcal{B}_\ell z^\ell$$

або

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty \sum_{\ell=1}^\infty (\mp 1)^{\ell-1}\left(ze^{-x}\right)^\ell dx = \sum_{\ell=1}^\infty \ell\mathcal{B}_\ell z^\ell.$$

Приклади віріальних розвинень

Тобто $$\ell\mathcal{B}_\ell = \frac{(\mp1)^{\ell-1}}{\lambda^2}\int\limits_0^\infty e^{-\ell x}\,dx = \frac{(\mp1)^{\ell-1}}{\lambda^2}\frac{1}{\ell},$$
де верхній знак відповідає ферміонам, а нижній — бозонам.

Приклади віріальних розвинень

Тобто $\quad \ell\mathcal{B}_\ell = \dfrac{(\mp 1)^{\ell-1}}{\lambda^2}\int\limits_0^\infty e^{-\ell x}\,dx = \dfrac{(\mp 1)^{\ell-1}}{\lambda^2}\dfrac{1}{\ell},$

де верхній знак відповідає ферміонам, а нижній — бозонам.

Отже, маємо перші два кластерні інтеґрали:

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \mathcal{B}_2 = \mp\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{4},$$

Приклади віріальних розвинень

Тобто $$\ell\mathcal{B}_\ell = \frac{(\mp 1)^{\ell-1}}{\lambda^2}\int\limits_0^\infty e^{-\ell x}\,dx = \frac{(\mp 1)^{\ell-1}}{\lambda^2}\frac{1}{\ell},$$
де верхній знак відповідає ферміонам, а нижній — бозонам.

Отже, маємо перші два кластерні інтеґрали:

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \mathcal{B}_2 = \mp\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{4},$$

а тому другий віріальний коефіцієнт за формулою (4) буде

$$b_2 = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2} = \pm\frac{1}{4}$$

чи наочніше

$$b_2^{\mathrm{FD}} = +\frac{1}{4}, \qquad b_2^{\mathrm{BE}} = -\frac{1}{4}. \tag{8}$$

Приклади віріальних розвинень

Тим самим способом можна показати, зокрема:

Приклади віріальних розвинень

Тим самим способом можна показати, зокрема:

у статистиці Поліхронакоса

$$
\begin{aligned}
b_j^{\mathrm{P}}(\gamma) &= \gamma^{j-1}\, b_j^{\mathrm{BE}}, &\qquad \text{якщо} \quad \gamma > 0,\\
b_j^{\mathrm{P}}(\gamma) &= |\gamma|^{j-1}\, b_j^{\mathrm{FD}}, &\qquad \text{якщо} \quad \gamma < 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Приклади віріальних розвинень

Тим самим способом можна показати, зокрема:

у статистиці Поліхронакоса

$$
\begin{aligned}
b_j^{\mathrm{P}}(\gamma) &= \gamma^{j-1}\, b_j^{\mathrm{BE}}, && \text{якщо} \quad \gamma > 0, \\
b_j^{\mathrm{P}}(\gamma) &= |\gamma|^{j-1}\, b_j^{\mathrm{FD}}, && \text{якщо} \quad \gamma < 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

у статистиці Джентіле, де максимальне заповнення рівня обмежене числом M:

$$
\begin{aligned}
b_j^{\mathrm{G}} &= b_j^{\mathrm{BE}}, \qquad \text{якщо} \quad j \le M, \\
b_{M+1}^{\mathrm{G}} &= b_{M+1}^{\mathrm{BE}} + \frac{M}{M+1}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Приклади віріальних розвинень

У статистиці Голдейна–Ву кластерні інтеґрали у випадку двовимірного ідеального газу будуть:

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \mathcal{B}_2 = -\frac{(2g-1)}{\lambda^2}\frac{1}{4}, \tag{11}$$

а другий віріальний коефіцієнт

$$b_2^{\mathrm{HW}} = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2} = \frac{(2g-1)}{4}. \tag{12}$$

Приклади віріальних розвинень

У статистиці Голдейна–Ву кластерні інтеґрали у випадку двовимірного ідеального газу будуть:

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \mathcal{B}_2 = -\frac{(2g-1)}{\lambda^2}\frac{1}{4}, \tag{11}$$

а другий віріальний коефіцієнт

$$b_2^{\mathrm{HW}} = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2} = \frac{(2g-1)}{4}. \tag{12}$$

З цього результату також можемо зробити такий висновок: коли параметр статистики $g < 1/2$, то другий віріальний коефіцієнт — від'ємний, що ефективно означає певну статистичну притягальну взаємодію, і навпаки, коли $g > 1/2$, то така статистична взаємодія буде відштовхувальною. Це узгоджується з тим, що ми знаємо про бозони та ферміони, зокрема, принцип Паулі фактично — ефективне статистичне відштовхування.

Віріальне розвинення для еніонів

Описаний у попередньому підрозділі метод не можна застосувати до еніонів, оскільки для них не є відомим функціональний вигляд чисел заповнення.

Віріальне розвинення для еніонів

Описаний у попередньому підрозділі метод не можна застосувати до еніонів, оскільки для них не є відомим функціональний вигляд чисел заповнення.

Тому ми підійдемо до проблеми трохи з іншого боку, врахувавши розв'язок квантовомеханічної задачі двох еніонів.

Віріальне розвинення для еніонів

Описаний у попередньому підрозділі метод не можна застосувати до еніонів, оскільки для них не є відомим функціональний вигляд чисел заповнення.

Тому ми підійдемо до проблеми трохи з іншого боку, врахувавши розв'язок квантовомеханічної задачі двох еніонів.

Велику статистичну суму можна подати у вигляді ряду за степенями активності, коефіцієнтами якого будуть статистичні суми Z_N системи N частинок:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N, \qquad Z_0 \equiv 1,$$

Віріальне розвинення для еніонів

Перші члени кластерного розвинення будуть

$$\frac{1}{V_2}\ln \Xi = \frac{1}{V_2}\ln\left(1 + z\,Z_1 + z^2\,Z_2 + z^3\,Z_3 + \ldots\right) =$$

$$= \mathcal{B}_1\,z + \mathcal{B}_2\,z^2 + \mathcal{B}_3\,z^3 + \ldots\,.$$

Віріальне розвинення для еніонів

Перші члени кластерного розвинення будуть

$$\frac{1}{V_2}\ln\Xi = \frac{1}{V_2}\ln\left(1 + z\,Z_1 + z^2\,Z_2 + z^3\,Z_3 + \ldots\right) =$$

$$= \mathcal{B}_1\,z + \mathcal{B}_2\,z^2 + \mathcal{B}_3\,z^3 + \ldots\,.$$

Ураховуючи розклад логарифма в ряд, матимемо:

$$\frac{1}{V_2}\left[z\,Z_1 + z^2\left(Z_2 - \frac{Z_1^2}{2}\right) + \ldots\right] = \mathcal{B}_1\,z + \mathcal{B}_2\,z^2 + \ldots\,,$$

Віріальне розвинення для еніонів

Перші члени кластерного розвинення будуть

$$\frac{1}{V_2}\ln \Xi = \frac{1}{V_2}\ln\left(1 + z\,Z_1 + z^2\,Z_2 + z^3\,Z_3 + \ldots\right) =$$

$$= \mathcal{B}_1\,z + \mathcal{B}_2\,z^2 + \mathcal{B}_3\,z^3 + \ldots\,.$$

Ураховуючи розклад логарифма в ряд, матимемо:

$$\frac{1}{V_2}\left[z\,Z_1 + z^2\left(Z_2 - \frac{Z_1^2}{2}\right) + \ldots\right] = \mathcal{B}_1\,z + \mathcal{B}_2\,z^2 + \ldots\,,$$

звідки

$$\mathcal{B}_1 = \frac{Z_1}{V_2}, \qquad \mathcal{B}_2 = \frac{2Z_2 - Z_1^2}{2\,V_2},$$

і другий віріальний коефіцієнт еніонів

$$b_2 = -\frac{V_2}{\lambda^2}\frac{(2Z_2 - Z_1^2)}{2Z_1^2}. \tag{13}$$

Віріальне розвинення для еніонів

Помістивши систему в зовнішній осциляторний потенціал із частотою ω, gісля низки перетворень [Khare 2005] отримаємо остаточно другий віріальний коефіцієнт ідеального еніонного газу

$$b_2^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2). \qquad (14)$$

Віріальне розвинення для еніонів

Помістивши систему в зовнішній осциляторний потенціал із частотою ω, після низки перетворень [Khare 2005] отримаємо остаточно другий віріальний коефіцієнт ідеального еніонного газу

$$b_2^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2). \tag{14}$$

У цьому виразі зникла залежність від частоти гармонічного потенціалу, що відігравав роль реґуляризатора.

Віріальне розвинення для еніонів

Помістивши систему в зовнішній осциляторний потенціал із частотою ω, gісля низки перетворень [Khare 2005] отримаємо остаточно другий віріальний коефіцієнт ідеального еніонного газу

$$b_2^{\text{anyon}}(\alpha) = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2). \tag{14}$$

У цьому виразі зникла залежність від частоти гармонічного потенціалу, що відігравав роль реґуляризатора.
Важливо також, що $\alpha = 1$ дає правильну ферміонну границю $b_2(1) = +1/4$.

Віріальне розвинення для еніонів

Помістивши систему в зовнішній осциляторний потенціал із частотою ω, після низки перетворень [Khare 2005] отримаємо остаточно другий віріальний коефіцієнт ідеального еніонного газу

$$b_2^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2). \tag{14}$$

У цьому виразі зникла залежність від частоти гармонічного потенціалу, що відігравав роль реґуляризатора.
Важливо також, що $\alpha = 1$ дає правильну ферміонну границю $b_2(1) = +1/4$.
Крім того, подібно до статистики Голдейна–Ву, другий віріальний коефіцієнт є від'ємним, коли $0 \le \alpha < 1/\sqrt{2}$ (що відповідає ефективній притягальній статистичній взаємодії), і додатним, коли $1/\sqrt{2} < \alpha \le 1$ (тоді статистична взаємодія — відштовхувальна).

Віріальне розвинення для еніонів

Точні результати для вищих віріальних коефіцієнтів отримати не вдається, оскільки відповідні квантові задачі $N \geq 3$ еніонів не мають аналітичних розв'язків.

Віріальне розвинення для еніонів

Точні результати для вищих віріальних коефіцієнтів отримати не вдається, оскільки відповідні квантові задачі $N \geq 3$ еніонів не мають аналітичних розв'язків.

Для третього віріального коефіцієнта встановлено таке точне співвідношення симетрії:

$$b_3^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = b_3^{\mathrm{anyon}}(1-\alpha),$$

Віріальне розвинення для еніонів

Точні результати для вищих віріальних коефіцієнтів отримати не вдається, оскільки відповідні квантові задачі $N \geq 3$ еніонів не мають аналітичних розв'язків.

Для третього віріального коефіцієнта встановлено таке точне співвідношення симетрії:

$$b_3^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = b_3^{\mathrm{anyon}}(1-\alpha),$$

а також такий ряд [Mashkevich et al.1996]:

$$b_3^{\mathrm{anyon}} = \frac{1}{36} + \frac{\sin^2\alpha}{12\pi^2} + c_3 \sin^4 \pi\alpha,$$
$$c_3 = -(1.652 \pm 0.012) \times 10^{-5}.$$

Встановлення відповідності між статистиками

За допомогою розрахованих виразів для віріальних коефіцієнтів можна встановити наближені відповідності між різними дробовими статистиками.

Встановлення відповідності між статистиками

За допомогою розрахованих виразів для віріальних коефіцієнтів можна встановити наближені відповідності між різними дробовими статистиками.

Це потрібно розуміти в сенсі того, наскільки вдається узгодити рівняння стану, — а отже, й опис термодинаміки, — в різних моделях статистик.

Встановлення відповідності між статистиками

За допомогою розрахованих виразів для віріальних коефіцієнтів можна встановити наближені відповідності між різними дробовими статистиками.

Це потрібно розуміти в сенсі того, наскільки вдається узгодити рівняння стану, — а отже, й опис термодинаміки, — в різних моделях статистик.

В ідеальному двовимірному газі зі статистикою Поліхронакоса

$$b_2^{\mathrm{P}}(\gamma) = -\frac{\gamma}{4}.$$

Встановлення відповідності між статистиками

За допомогою розрахованих виразів для віріальних коефіцієнтів можна встановити наближені відповідності між різними дробовими статистиками.

Це потрібно розуміти в сенсі того, наскільки вдається узгодити рівняння стану, — а отже, й опис термодинаміки, — в різних моделях статистик.

В ідеальному двовимірному газі зі статистикою Поліхронакоса

$$b_2^{\mathrm{P}}(\gamma) = -\frac{\gamma}{4}.$$

Розв'язуючи рівняння $b_2^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = b_2^{\mathrm{P}}(\gamma)$, отримаємо такий зв'язок між параметрами γ й α:

$$\gamma = 1 - 4\alpha + 2\alpha^2.$$

Встановлення відповідності між статистиками

Аналогічно, в ідеальному 2D газі зі статистикою Голдейна–Ву

$$b_2^{\mathrm{HW}}(g) = \frac{2g-1}{4}.$$

Встановлення відповідності між статистиками

Аналогічно, в ідеальному 2D газі зі статистикою Голдейна–Ву

$$b_2^{\mathrm{HW}}(g) = \frac{2g-1}{4}.$$

Розв'язуючи рівняння $b_2^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = b_2^{\mathrm{HW}}(g)$, матимемо зв'язок:

$$g = 2\alpha - \alpha^2.$$

Встановлення відповідності між статистиками

Аналогічно, в ідеальному 2D газі зі статистикою Голдейна–Ву

$$b_2^{\mathrm{HW}}(g) = \frac{2g-1}{4}.$$

Розв'язуючи рівняння $b_2^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = b_2^{\mathrm{HW}}(g)$, матимемо зв'язок:

$$g = 2\alpha - \alpha^2.$$

У статистиці Джентіле, де нетривіальні узагальнення відповідають $M \geq 2$, другий віріальний коефіцієнт збігається з бозонним:

$$b_2^{\mathrm{G}} = b_2^{\mathrm{BE}} = -\frac{1}{4},$$

Встановлення відповідності між статистиками

Аналогічно, в ідеальному 2D газі зі статистикою Голдейна–Ву

$$b_2^{\mathrm{HW}}(g) = \frac{2g-1}{4}.$$

Розв'язуючи рівняння $b_2^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = b_2^{\mathrm{HW}}(g)$, матимемо зв'язок:

$$g = 2\alpha - \alpha^2.$$

У статистиці Джентіле, де нетривіальні узагальнення відповідають $M \geq 2$, другий віріальний коефіцієнт збігається з бозонним:

$$b_2^{\mathrm{G}} = b_2^{\mathrm{BE}} = -\frac{1}{4},$$

тому така дробова статистика взагалі не може описувати еніони, оскільки розв'язок рівняння $b_2^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = b_2^{\mathrm{G}}(M)$ існує лише в бозонній границі $\alpha = 0$.

Встановлення відповідності між статистиками

Статистики ж Поліхронакоса й Голдейна–Ву дають лише наближену відповідність: можна легко переконатися, що третій віріальний коефіцієнт у них відрізнятиметься від еніонного.

Встановлення відповідності між статистиками

Статистики ж Поліхронакоса й Голдейна–Ву дають лише наближену відповідність: можна легко переконатися, що третій віріальний коефіцієнт у них відрізнятиметься від еніонного.

Одним зі способів просунутися в цьому питанні трохи далі є застосування моделей дробових статистик з більшою кількістю параметрів. Так, уже двопараметричні модифікації статистики дозволяють описати еніони з точністю до третього віріального коефіцієнта, що фактично відповідає межі сучасних експериментальних вимірювань.

Встановлення відповідності між статистиками

Статистики ж Поліхронакоса й Голдейна–Ву дають лише наближену відповідність: можна легко переконатися, що третій віріальний коефіцієнт у них відрізнятиметься від еніонного.

Одним зі способів просунутися в цьому питанні трохи далі є застосування моделей дробових статистик з більшою кількістю параметрів. Так, уже двопараметричні модифікації статистики дозволяють описати еніони з точністю до третього віріального коефіцієнта, що фактично відповідає межі сучасних експериментальних вимірювань.

Наприклад, неадитивним (NA) статистикам Поліхронакоса і Голдейна–Ву відповідатимуть такі функції розподілу:

$$n_j^{\mathrm{NAP}} = \frac{1}{z^{-1}e_q^{\varepsilon_j/T} - \gamma}, \qquad n_j^{\mathrm{NAHW}} = \frac{1}{w\left(z^{-1}e_q^{\varepsilon_j/T}\right) + g}.$$

Встановлення відповідності між статистиками

Нескладно показати, що в ***неадитивній статистиці Голдейна–Ву*** (NAHW) кластерні інтеґрали

$$\mathcal{B}_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad \mathcal{B}_2\lambda^2 = -\frac{(2g-1)}{2(1+q)}, \quad \mathcal{B}_3\lambda^2 = \frac{(3g-2)(3g-1)}{6(2+q)}, \ \ldots$$

Встановлення відповідності між статистиками

Нескладно показати, що в ***неадитивній статистиці Голдейна–Ву*** (NAHW) кластерні інтеґрали

$$\mathcal{B}_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad \mathcal{B}_2\lambda^2 = -\frac{(2g-1)}{2(1+q)}, \quad \mathcal{B}_3\lambda^2 = \frac{(3g-2)(3g-1)}{6(2+q)}, \quad \ldots$$

а другий і третій віріальні коефіцієнти дорівнюють

$$\begin{aligned} b_2^{\mathrm{NAHW}} &= \frac{2g-1}{2}\frac{q^2}{1+q}, \\ b_3^{\mathrm{NAHW}} &= q^4\left[\frac{(2g-1)^2}{(1+q)^2} - \frac{(3g-2)(3g-1)}{3q(2+q)}\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Встановлення відповідності між статистиками

Нескладно показати, що в ***неадитивній статистиці Голдейна–Ву*** (NAHW) кластерні інтеґрали

$$\mathcal{B}_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad \mathcal{B}_2\lambda^2 = -\frac{(2g-1)}{2(1+q)}, \quad \mathcal{B}_3\lambda^2 = \frac{(3g-2)(3g-1)}{6(2+q)}, \ \ldots$$

а другий і третій віріальні коефіцієнти дорівнюють

$$\begin{aligned} b_2^{\mathrm{NAHW}} &= \frac{2g-1}{2}\frac{q^2}{1+q}, \\ b_3^{\mathrm{NAHW}} &= q^4\left[\frac{(2g-1)^2}{(1+q)^2} - \frac{(3g-2)(3g-1)}{3q(2+q)}\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Прирівнюючи другий і третій віріальні коефіцієнти у двопараметричних статистиках до $b_2^{\mathrm{anyon}}(\alpha)$ і $b_3^{\mathrm{anyon}}(\alpha)$, відповідно, знайдемо зв'язок їх параметрів з еніонним параметром α.

Завдання для лабораторної роботи

- Знайдіть віріальне розвинення для двовимірного газу ферміонів і бозонів з точністю до третього віріального коефіцієнта.
- Порівняйте поведінку термодинамічних функцій (енерґії, теплоємності, хімічного потенціалу) та аналога рівня Фермі у статистиках Джентіле, Поліхронакоса і Голдейна–Ву. У границі низьких і високих температур це можна зробити аналітично, а проміжні значення потребуватимуть чисельних розрахунків.
- Визначте, за яких значень еніонного параметра α існують розв'язки рівнянь $b_2^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = b_2^{\mathrm{NAP}}(\gamma, q)$; $b_3^{\mathrm{anyon}}(\alpha) = b_3^{\mathrm{NAP}}(\gamma, q)$ у неадитивній статистиці Поліхронакоса.

Дякую за увагу!