

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Механіко-математичний факультет**  
**Кафедра вищої математики**

**Затверджено**

На засіданні кафедри вищої математики  
механіко-математичного факультету  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 30 серпня 2024 р.)

Завідувач кафедри



Андрій ГАТАЛЕВИЧ

**Силабус з навчальної дисципліни**  
**«Диференціальні та інтегральні рівняння»,**  
**що викладається в межах**  
**ОПП «Комп'ютерні технології в прикладній фізиці»**  
**ОПП «Нанофізика та наноматеріали»**  
**першого (бакалаврського) рівня вищої освіти**  
**для здобувачів з спеціальності 105 Прикладна фізика**

**Львів 2024**

<b>Назва дисципліни</b>	Диференціальні та інтегральні рівняння
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	Корпус ЛНУ ім. І. Франка, м. Львів, вул. Кирила і Мефодія, 8
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Механіко-математичний факультет Кафедра вищої математики
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	Галузь знань – 10 Природничі науки Спеціальність – 105 Прикладна фізика та наноматеріали
<b>Викладачі дисципліни</b>	Гаталевич Андрій Іванович, завідувач кафедри вищої математики, д.ф.-м.н.;
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="mailto:andriy.gatalevych@lnu.edu.ua">andriy.gatalevych@lnu.edu.ua</a> Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 370. м. Львів, вул. Університетська, 1
<b>Консультації з дисципліни відбуваються</b>	Консультації в день проведення лекцій та практичних занять (за попередньою домовленістю). Можливі також он-лайн консультації через електронну пошту або он-лайн засобами Microsoft Teams, Telegram, Viber
<b>Сторінка курсу</b>	<a href="https://physics.lnu.edu.ua/course/dyferentsialni-ta-intehralni-rivniannia-105-prykladna-fyzyka-ta-nanomaterialy-op-komp-iuterni-tekhnologii-v-prykladnyi-fizytsi">https://physics.lnu.edu.ua/course/dyferentsialni-ta-intehralni-rivniannia-105-prykladna-fyzyka-ta-nanomaterialy-op-komp-iuterni-tekhnologii-v-prykladnyi-fizytsi</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Дисципліна “Диференціальні та інтегральні рівняння” є нормативною навчальною дисципліною циклу професійної і практичної підготовки з спеціальностей 105 – Прикладна фізика та наноматеріали для освітньої програми “Природничі науки”, яка викладається у 3-му семестрі в обсязі 3-х кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS)
<b>Коротка анотація дисципліну</b>	Предметом навчальної дисципліни “Диференціальні та інтегральні рівняння” є математичні поняття та методи вивчення диференціальних та інтегральних рівнянь, а також систем диференціальних рівнянь. Теоретичний матеріал ілюструється прикладами
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	Метою вивчення нормативної навчальної дисципліни “Диференціальні та інтегральні рівняння” є засвоєння студентами теоретичних основ курсу, застосування здобутих знань до розв’язування задач теоретичного та прикладного характеру, вироблення навиків математичного дослідження прикладних задач, зокрема, побудови математичних моделей фізичних процесів та їх аналізу за допомогою математичних методів, вміння користуватися математичною літературою і довідниками
<b>Література для вивчення дисципліни</b>	1. Лавренюк С.П.. Курс диференціальних рівнянь. – Львів: Видавництво науково-технічної літератури, 1997. – 215 с. 2. Головатий Ю.Д., Кирилич В.М., Лавренюк С.П. Диференціальні рівняння: навчальний посібник. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с. 3. Бугрій О.М., Н.П. Процах, Н.В. Бугрій. Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі: навчальний посібник. – Львів: Видавець І. Чижиков, 2011. – 348 с. 4. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. Київ: “Вища школа”, 1981. – 503 с. 5. Ф.І. Гудименко, А.І. Павлюк, В.О. Волкова. Збірник задач з

	<p>диференціальних рівнянь. К.: “Вища школа”, 1972. – 156 с.</p> <p>6. Мильо О.Я., Цаповська Ж.Я. Методичні рекомендації, приклади та завдання для самостійної роботи до вивчення розділу вищої математики “Диференціальні рівняння” для студентів факультету електроніки. – Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 54 с.</p> <p>7. Колодій І.М., Верба І.І., Барабаш Г.М. Курс лекцій з теорії диференціальних та інтегральних рівнянь.– Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2003. – 117 с.</p> <p>8. Цаповська Ж.Я. Атестований електронний курс “Диференціальні та інтегральні рівняння” у системі Moodle.</p>
<b>Обсяг курсу</b>	<p>Загальний обсяг: <b>90</b> годин.</p> <p>Аудиторних занять – <b>48</b> години, з них:</p> <p>лекції – <b>16</b> години,</p> <p>практичні заняття – <b>32</b> години.</p> <p>Самостійна робота – <b>42</b> годин.</p>
<b>Очікувані результати навчання</b>	<p style="text-align: center;"><b>Загальні компетентності (ЗК):</b></p> <p><b>ЗК 1.</b> Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.</p> <p><b>ЗК 3.</b> Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово.</p> <p><b>ЗК 7.</b> Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.</p> <p><b>ЗК 9.</b> Здатність працювати автономно.</p> <p style="text-align: center;"><b>Спеціальні компетентності (СК):</b></p> <p><b>СК 7.</b> Здатність використовувати методи і засоби теоретичного дослідження та математичного моделювання в професійній діяльності.</p> <p><b>СК 8.</b> Здатність працювати в колективах виконавців, у тому числі в міждисциплінарних проектах.</p> <p style="text-align: center;"><b>Програмні результати навчання (ПРН):</b></p> <p><b>ПРН 02.</b> Застосовувати сучасні математичні методи для побудови й аналізу математичних моделей фізичних процесів.</p> <p><b>ПРН 04.</b> Застосовувати фізичні, математичні та комп’ютерні моделі для дослідження фізичних явищ, розробки приладів і наукоємних технологій.</p> <p><b>ПРН 06.</b> Відшукувати необхідну науково-технічну інформацію в науковій літературі, електронних базах, інших джерелах, оцінювати надійність та релевантність інформації.</p> <p>Після завершення цього курсу студент буде:</p> <p><b>Знати:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• поняття та методи розв’язування звичайних диференціальних рівнянь;</li> <li>• поняття та методи розв’язування лінійних, нормальних і симетричних систем диференціальних рівнянь;</li> <li>• поняття та методи дослідження лінійних інтегральних рівнянь;</li> </ul> <p><b>Вміти:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• класифікувати диференціальні рівняння першого порядку та знати методи їх розв’язування;</li> <li>• понижувати порядок диференціальних рівнянь, коли це можливо;</li> <li>• будувати загальний розв’язок лінійного рівняння <math>n</math>-го порядку;</li> <li>• знаходити загальний розв’язок лінійних систем;</li> <li>• знаходити загальний інтеграл нормальних і симетричних систем;</li> <li>• класифікувати та досліджувати лінійні інтегральні рівняння;</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• застосовувати математичний апарат при розв'язанні інженерних та фізичних задач;</li> <li>• визначати межу можливих застосувань математичних методів.</li> </ul>
<b>Ключові слова</b>	Звичайні диференціальні рівняння, інтегральні рівняння, системи диференціальних рівнянь
<b>Формат курсу</b>	Очний Викладання здійснюється з використанням основних засад: проблемно-орієнтованого та особистісно-орієнтованого навчання; електронного навчання в системі Moodle. Викладання проводиться у вигляді: лекцій, практичних занять і консультацій.
<b>Теми</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані стосовно похідної.</li> <li>2. Теорема існування та єдності розв'язку задачі Коші для рівняння <math>y' = f(x, y)</math>.</li> <li>3. Рівняння першого порядку, нерозв'язані стосовно похідної.</li> <li>4. Рівняння вищих порядків.</li> <li>5. Лінійні рівняння <math>n</math>-го порядку.</li> <li>6. Системи диференціальних рівнянь.</li> <li>7. Лінійні інтегральні рівняння.</li> </ol>
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	Письмовий екзамен у кінці 3-го семестру
<b>Пререквізити</b>	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з <ul style="list-style-type: none"> <li>• математичного аналізу</li> </ul>
<b>Навчальні методи</b>	Лекції Практичні заняття
<b>Необхідне обладнання</b>	Комп'ютер із загально вживаним програмним забезпеченням, доступ до Internet мережі
<b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b>	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням: 50 балів в семестрі, 50 балів за екзамен. Підсумкова максимальна кількість балів в семестрі – 100.</p> <p>Протягом семестру студент повинні виконати наступні форми контролю:  <b>Колоквіум:</b> 1 – 5 балів;  <b>Контрольна робота:</b> 2 по 15 балів кожна;  <b>Перевірка виконання домашнього завдання</b> з використанням тестових завдань у системі <b>Moodle</b> – 15 балів.</p> <p><b>Екзаменаційна робота</b> містить:  <b>Теоретичну частину</b>, що оцінюється у <b>25 балів</b>:  10 тестів по 1 балу кожний;  5 завдань по 3 бали кожне, в яких потрібно сформулювати означення або теорему.  <b>Практичну частину</b>, що оцінюється у <b>25 балів</b>, і передбачає розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем, що вивчались у курсі.</p> <p><b>Академічна доброчесність.</b> Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її</p>

	<p>незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p><b>Відвідання занять</b> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та здачі колоквиумів, передбачених курсом.</p> <p><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p><b>Політика виставлення балів.</b> Враховуються бали, набрані при виконанні контрольних робіт та здачі колоквиуму. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін. Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>
<p><b>Питання до заліку чи екзамену</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Поняття диференціального рівняння та його розв'язку. Класифікація диференціальних рівнянь.</li> <li>2. Задачі, що призводять до складання ДР.</li> <li>3. Диференціальні рівняння першого порядку, що інтегруються в квадратурах. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.</li> <li>4. Диференціальні рівняння першого порядку, що зводяться до диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними: однорідні, узагальнено однорідні, рівняння вигляду <math>y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)</math>.</li> <li>5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.</li> <li>6. Диференціальні рівняння першого порядку, що зводяться до лінійних. Рівняння Бернуллі.</li> <li>7. Диференціальні рівняння в повних диференціалах.</li> <li>8. Інтегруючий множник.</li> <li>9. Геометрична інтерпретація розв'язку ДР 1-ого порядку.</li> <li>10. Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку.</li> <li>11. Поняття про особливі точки диференціального рівняння.</li> <li>12. ДР не розв'язані стосовно похідної. Загальна схема методу введення параметра.</li> <li>13. Рівняння Лагранжа і Клеро.</li> <li>14. ДР вищих порядків. Задача Коші для диференціального рівняння <math>n</math>-го порядку: теорема існування та єдиності її розв'язку.</li> <li>15. Диференціальні рівняння <math>n</math>-го порядку, що допускають пониження порядку.</li> <li>16. Лінійні диференціальні рівняння <math>n</math>-го порядку зі змінними коефіцієнтами.</li> <li>17. Однорідні лінійні диференціальні рівняння <math>n</math>-го порядку зі змінними коефіцієнтами.</li> <li>18. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння <math>n</math>-го порядку зі змінними коефіцієнтами.</li> <li>19. Метод варіації сталих для лінійних диференціальних рівнянь <math>n</math>-го порядку зі змінними коефіцієнтами.</li> </ol>

	<ol style="list-style-type: none"> <li>20. Лінійні однорідні диференціальні рівняння <math>n</math>-го порядку зі сталими коефіцієнтами.</li> <li>21. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння <math>n</math>-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів.</li> <li>22. Рівняння Ейлера.</li> <li>23. Системи звичайних ДР: основні поняття та властивості розв'язків. Задача Коші для систем звичайних ДР.</li> <li>24. Поняття першого інтеграла для нормальної системи ДР.</li> <li>25. Зведення диференціального рівняння <math>n</math>-го порядку до нормальної системи диференціальних рівнянь і обернена задача.</li> <li>26. Системи лінійних ДР зі змінними коефіцієнтами. Основні поняття теорії лінійних систем. Існування та єдність розв'язку задачі Коші.</li> <li>27. Структура загального розв'язку лінійної однорідної системи.</li> <li>28. Формула Остроградського-Ліквіля.</li> <li>29. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи. Метод варіації сталих.</li> <li>30. Системи лінійних однорідних ДР зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера.</li> <li>31. Системи лінійних неоднорідних ДР зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації сталих. Метод невизначених коефіцієнтів.</li> <li>32. Лінійні інтегральні рівняння: основні означення і поняття. Класифікація інтегральних рівнянь.</li> <li>33. Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь.</li> <li>34. Рівняння Вольтерри. Рівняння Вольтерри з виродженим ядром.</li> <li>35. Рівняння Фредгольма. Рівняння Фредгольма з виродженим ядром.</li> <li>36. Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма.</li> <li>37. Метод послідовних наближень для рівняння Вольтера.</li> </ol>
<b>Опитування</b>	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

## Схема курсу

Тиж.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності (заняття)	Література. Ресурси в інтернеті	Завдання, год.	Термін виконання
<b>Лекції</b>					
1	<b>Лекція 1.</b> Основні поняття та об'єкти теорії диференціальних рівнянь. ДР 1-ого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні ДР і звідні до них.	лек.	[1-4, 6, 8]	2	1 тиждень
2	<b>Лекція 2.</b> Лінійні ДР 1-ого порядку, рівняння в повних диференціалах і звідні до них. Геометрична інтерпретація розв'язку ДР 1-ого порядку. Задача Коші для ДР 1-ого порядку: існування та єдність розв'язку.	лек.	[1-4, 6, 8]	2	3 тиждень
3	<b>Лекція 3.</b> ДР не розв'язані стосовно похідної. Загальна схема методу введення параметра. Рівняння Лагранжа і Клеро. Особливі розв'язки.	лек.	[1-4, 6, 8]	2	5 тиждень
4	<b>Лекція 4.</b> ДР вищих порядків. Задача Коші для диференціального рівняння $n$ -ого порядку: теорема існування та єдності її розв'язку. Диференціальні рівняння $n$ -ого порядку, що допускають пониження порядку.	лек.	[1-4, 6, 8]	2	7 тиждень
5	<b>Лекція 5.</b> Лінійні диференціальні рівняння $n$ -ого порядку зі змінними коефіцієнтами. Метод варіації сталих.	лек.	[1-4, 6, 8]	2	9 тиждень

6	<b>Лекція 6.</b> Лінійні диференціальні рівняння $n$ -ого порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів. Рівняння Ейлера.	лек.	[1-4, 6, 8]	2	11 тиждень
7	<b>Проведення колоквиуму</b>		Система Moodle		
8	<b>Лекція 7.</b> Нормальні системи ДР: основні поняття та властивості розв'язків. Системи лінійних ДР.	лек.	[1-4, 8]	2	13 тиждень
9	<b>Лекція 8.</b> Лінійні інтегральні рівняння. Класифікація. Рівняння Фредгольма та Вольтерра. Рівняння Фредгольма та Вольтерра з виродженим ядром. Метод послідовних наближень для рівнянь Фредгольма та Вольтерра. Альтернатива Фредгольма	лек.	[1-4, 7, 8]	2	15 тиждень
<b>Практичні заняття</b>					
1	<b>Заняття 1.</b> Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Фізичні задачі на складанні ДР.	практ.	[5, 6, 8] Система Moodle	2	1 тиждень
2	<b>Заняття 2.</b> Однорідні ДР.	практ.	[5, 6, 8] Система Moodle	2	2 тиждень
3	<b>Заняття 3.</b> Диференціальні рівняння, звідні до однорідних.		[5, 6, 8] Система Moodle		3 тиждень
4	<b>Заняття 4.</b> Лінійні ДР 1-ого порядку та звідні до них.	практ.	[5, 6, 8] Система Moodle	2	4 тиждень
5	<b>Заняття 5.</b> Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник.	практ.	[5, 6, 8] Система Moodle	2	5 тиждень



6	<b>Заняття 6.</b> ДР не розв'язані стосовно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро.	практ.	[5, 6, 8] Система <b>Moodle</b>	2	6 тиждень
7	<b>Заняття 7.</b> <i>Контрольна робота № 1</i>	практ.		2	7 тиждень
8	<b>Заняття 8.</b> ДР вищих порядків, що допускають пониження порядку.	практ.	[5, 6, 8] Система <b>Moodle</b>	2	8 тиждень
9	<b>Заняття 9.</b> Лінійні однорідні ДР вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. Лінійні неоднорідні ДР вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації сталих.	практ.	[5, 6, 8] Система <b>Moodle</b>	2	9 тиждень
10	<b>Заняття 10.</b> Лінійні неоднорідні ДР вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів.	практ.	[5, 6, 8] Система <b>Moodle</b>	2	10 тиждень
11	<b>Заняття 11.</b> Лінійні неоднорідні ДР вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.	практ.	[5, 6, 8] Система <b>Moodle</b>	2	11 тиждень
12	<b>Заняття 12.</b> Лінійні неоднорідні ДР вищих порядків зі змінними коефіцієнтами. Рівняння Ейлера.	практ.	[5, 6, 8] Система <b>Moodle</b>	2	12 тиждень
13	<b>Заняття 13.</b> Нелінійні системи ДР.	практ.	[5, 8] Система <b>Moodle</b>	2	13 тиждень
14	<b>Заняття 14.</b> Системи лінійних однорідних ДР зі сталими коефіцієнтами.		[5, 8] Система <b>Moodle</b>		14 тиждень
15	<b>Заняття 15.</b> Системи нелінійних ДР зі сталими коефіцієнтами..	практ.	[5, 8] Система <b>Moodle</b>	2	15 тиждень
16	<b>Заняття 16.</b> <i>Контрольна робота № 2</i>	практ.		2	16 тиждень