Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Паночко Галина Іванівна

УДК 530.145 + 538.941

ДИСЕРТАЦІЯ
Домішкові стани багатобозонної системи на прикладі ізотопів гелію

01.04.02 — Теоретична фізика
10 Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
_____ Г. І. Паночко
(підпис)

Науковий керівник: Вакарчук Іван Олександрович,
доктор фізико-математичних наук, професор

ЛЬВІВ — 2018

Зміст

ВСТУП **15**

РОЗДІЛ 1. Огляд літератури **23**

РОЗДІЛ 2. Домішковий атом в слабковзаємодіючому бозе-газі **39**

2.1. Вступ 39
2.2. Повна енергія системи 41
2.3. Домішковий спектр та його загасання 43
2.3.1. Випадок теорії збурень Релея-Шредінґера 44
2.3.2. Випадок теорії збурень Бріллюена-Віґнера 48
2.4. Параметри спектру бозе-полярона 51
2.5. Висновки до розділу 2 59

РОЗДІЛ 3. Домішковий атом в рідкому гелії-4 **60**

3.1. Вступ 60
3.2. Варіаційний розрахунок домішкових станів 62
3.2.1. Хвильова функція домішки 64
3.2.2. Енергія основного стану системи “домішка плюс бозе–рідина” 65
3.3. Енергія занурення домішкового атома 67
3.3.1. Вихідні вирази. 69
3.3.2. Чисельні результати на прикладі домішки ^{3}He . . 69
3.4. Одночастинкова матриця густини та розподіл за імпульсами 72
3.5. Висновки до розділу 3 77

РОЗДІЛ 4. Система “домішка плюс рідкий гелій-4” в просторі з деформованою алгеброю Гейзенберга **78**

4.1. Вступ 78
4.2. Бозе–рідина в представленні деформованих колективних координат 79
4.2.1. Структура гамільтоніана 79

4.2.2. Енергетичні рівні та хвильові функції 81
4.3. Енергія основного стану 86
4.4. Термодинамічні і структурні характеристики бозе–рідини з деформацією 88
4.4.1. Структурий фактор 88
4.4.2. Кінетична енергія та розподіл за імпульсами . . . 89
4.4.3. Потенціал міжатомниї взаємодії 91
4.5. Основний стан системи “бозе–рідина плюс домішка” в представленні деформованих колективних змінних 92
4.5.1. Вихідні вирази 92
4.5.2. Поправки до енергії основного стану системи . . . 93
4.6. Обговорення результатів 96
4.6.1. Вибір параметра деформації 97
4.6.2. Енергія та ефективна маса домішки з деформацією 99
4.7. Висновки до розділу 4 104

РОЗДІЛ 5. Метод функціонального інтегрування у проблемі бозе-полярона 106
5.1. Вступ 106
5.2. Дія системи в імпульсному просторі 108
5.3. Власноенергетична частина домішкового спектра 111
5.3.1. Метод розрахунку 113
5.3.2. Найпростіше наближення 114
5.3.3. Друга апроксимація 115
5.4. Результати й обговорення 118
5.5. Висновки до розділу 5 121

ВИСНОВКИ 122

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 124

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ 146

АНОТАЦІЯ

Паночко Г. І. Домішкові стани багатобозонної системи на прикладі ізотопів гелію. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 — теоретична фізика, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

Дисертацію присвячено вивченню впливу багатобозонних систем на властивості домішкових атомів. Зокрема, в роботі досліджено статистичні та динамічні властивості окремих квазічастинок (так званих бозе-поляронів), які виникають внаслідок взаємодії домішкового атома з бозе-середовищем.

Методи, які б могли бути застосовними до знаходження спектральних характеристик бозе-полярона, стрімко розвиваються. Але точного розв'язку для бозе-полярона немає ні у випадку модельних систем, ні для домішки, що рухається в сильноскорельованій бозе-системі. Тому ми запропонували самоузгоджену схему розрахунку домішкових станів багатобозонної системи на прикладі задачі про рух домішкового атома в бозе-рідині та у розрідженому бозе-конденсаті.

Для опису властивостей домішки, що рухається в бозе-рідині, ми запропонували варіаційний розрахунок домішкових станів в сильноскорельованій системі. Постулюючи варіаційну хвильову функцію системи "домішковий атом плюс рідкий гелій-4" у представленні колективних координат в гаусовому наближенні, ми автоматично враховуємо непрямі бозонні кореляції і не беремо до уваги прямі три- та чотиричастинкові кореляції між частинками середовища. Цей підхід дозволив нам отримати в термодинамічній границі повну енергію основного стану системи, одночастинкову матрицю густини в границі низьких

температур та розподіл за імпульсами.

Дослідження домішкових станів бозе-рідини в представленні колективних координат суттєво ускладнюється, якщо брати до уваги багатобозонні кореляції між атомами рідини. Тому ми запропонували оригінальний спосіб врахування нелінійних флуктуацій між атомами бозе-середовища, деформуючи комутаційні співвідношення між узагальненими координатами та імпульсами. Параметр деформації враховує вплив три- та чотиричастинкових кореляцій на поведінку бозе-системи. В припущенні, що бозон-домішкова взаємодія є малим збуренням, яке ефективно враховує однофононні процеси непружного розсіяння домішки на колективі бозе-частинок, ми отримали параметри домішкового спектра (енергію та ефективну масу), в лінійному наближенні за параметром деформації.

Розглядаючи задачу про рух спін-поляризованих фермі-домішок малої концентрації в бозе-рідині, ми запропонували самоузгоджений розрахунок параметрів спектра бозе-полярона теоретико-польовим методом. В цьому підході уся інформація про взаємодію домішки з бозе-системою міститься у власноенергетичній частині одночастинкової мацубарівської функції Гріна ферміонів. Модифікована нами скелетна діаграмна техніка, яку ми використали для аналізу точної власноенергетичної частини, передбачає врахування перенормованої бозон-домішкової взаємодії шляхом розв'язку рівнянь для вершинної функції послідовними наближеннями. Запропонований нами явний вигляд одночастинкової функції Гріна домішкового атома, дозволив отримати аналітичні внески у власноенергетичну частину домішкової функції Гріна в першому та другому наближеннях. Що своєю чергою дало змогу уникнути трудностей з складним аналітичним і чисельним розв'язком задачі про знаходження ефективної маси домішки в бозе-рідині.

В рамках теорії збурень Брілюена-Вігнера знайдено спектральні характеристики домішкового атома, зануреного в сильно розріджений бозе-газ. Зокрема, результати для ефективної маси притягального та відштовхувального бозе-поляронів якісно відтворюють результати Т-матричного наближення. Результати щодо загасання спектра одночастинкових збуджень бозе-полярона, яке пов'язують з проблемою нестійкості полярона, визначають межі застосовності пертурбативних підходів. Причому, в результаті використаної нами наближеної схеми розрахунку параметрів домішкового спектра, загасання одночастинкових збуджень можливе лише у випадку додатніх значень енергії бозе-полярона.

Усі наші аналітичні та чисельні результати щодо спектральних характеристик бозе-полярона ми протестували на прикладі дослідження поведінки ізотопів гелію у рідкому гелії-4, адже цю систему легко зреалізувати експериментально. Зокрема, на прикладі домішки ^{3}He, що занурена в рідкий гелій-4, нами показано добру узгодженість ефективної маси з експериментальними даними та результатами розрахунків методом Монте-Карло.

Ключові слова: домішкові стани, бозе-рідина, бозе-полярон, деформовані комутаційні співвідношення, колективні координати, ефективна маса, теорія збурень, варіаційний метод, функціональні інтеграли.

ABSTRACT

Panochko G. I. Impurity states of the many bosons system on the example of the Helium isotope. — Manuscript.

A thesis for a Candidate of Sciences degree on the specialty 01.04.02 — theoretical physics, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

A thesis is devoted study of the influence of many boson systems on the properties of impurity atoms. In the work it is investigated the statistical and dynamic properties quasiparticles (so-called Bose polarons), formed as a result of the boson-impurity interaction.

Methods that can be used to find the spectral characteristics of the Bose polaron are rapidly developing. But there is no exact solution for the Bose polaron in the case of the model systems and for impurities moving a the strongly correlated Bose system. Therefore, we propose a self-consistent scheme for the calculation of impurity states of the many-boson system using as an example the problem of the motion of an impurity atom in a Bose liquid and in a rarefied Bose condensate.

We propose a variational calculation of impurity states in a strongly correlated system studing investigated of the properties the impurity atom moving in the Bose liquid as an example. With this approach we obtaine in the thermodynamic limit the ground state energy of the system, the one-particle density matrix in the low-temperature limit, and momenta distribution of the system. We chose the variational wave function of the system "impurity atom plus liquid Helium-4" in the representation of collective variables taking into account indirect boson correlations.

The study the impurity states of the Bose liquid in the representation of collective coordinates is considerably more complicated if we take into account many-boson correlations between the atoms of liquid. So, we

suggeste to describe the nonlinear fluctuations between atoms of the medium by deformation of the commutation relation for generalized coordinates and momenta. The deformation parameter take into account the influence of the four particles correlations on the behavior of the Bose system. The boson-impurity interaction describes the one-phonon scattering processes of the impurity atom on the Bose particles. Assuming then the boson-impurity interaction is a small perturbation, we obtaine the energy and the effective mass of the impurity atom in the linear approximation by the deformation parameter.

We suggeste a self-consistent calculation of the spectrum parameters of the Bose polaron on the example of the model of a very dilute spin-polarized Fermi gas interacting with the Bose medium. By means of the field-theoretical approach we have considered the impurity states in liquid ^{4}He. We found an exact diagrammatic representation of the self-energy of the impurity atom. Our skeleton-graph expansion makes it possible to take into account the boson-impurity interaction by solving of the equation for the vertex function by successive iterations. The simple ansatz for the exact Green's function of the impurity atom allowes us to obtain analytical contributions to the self-energy of the impurity Green's function in the first and second approximations. This allowes us to avoid complicated calculated the effective mass of the impurity atom.

We find the spectral characteristics of the impurity atom immersed in a very dilute Bose condensate by the method of the Brillouin-Wigner perturbations theory. In particular, our results for the effective mass of the attractive and repulsive Bose polarons reproduce the behavior of the effective mass by self-consistent T-matrix approach. Our results for the spectrum damping of the single-particles excitations of the Bose polaron determine the limits of the applicability of the perturbation theory. The

spectrum damping is associated with the problem of the Bose polaron instability. Moreover, as a result of our approximate scheme calculate the parameters of the impurity spectrum, the spectrum damping is possible only in the case of positive values the energy of the Bose polaron.

We test all analytical and numerical results for the spectral characteristics of the Bose polaron using impurities – Helium isotopes, immersed in a strongly-correlated Bose liquid as an example. In particular, the obtained value for the effective mass of the ^{3}He atom immersed in a liquid Helium-4 coincides well both with the experiments and the results of the Monte Carlo simulations. Our analytical expression for the self-energy of the impurity can be used to describe the behavior of a single atom in ultracold gases of alkali metals. Our calculations can be easily extended onto low-dimensional systems.

Key words: impurity states, Bose liquid, Bose polaron, deformed commutation relations, collective variables, effective mass, path integral, perturbation theory.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Вакарчук І. О., Паночко Г. І. Домішкові стани в багатобозонній системі // Журн. фіз. дослідж.— 2012.— Т. 16, №4.— Ст. 4601.— 8 с.

2. Vakarchuk I. O., Panochko G. I. Theory of a many-boson system with deformed Heisenberg algebra // Condens. Matter Phys.— 2015.— Vol. 18, No. 3.— Art. 33002.— 14 p.

3. Вакарчук І. О., Паночко Г. І., Пастухов В. С. Метод функціонального інтегрування у проблемі бозе-полярона // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз.— 2016.— Вип. 52.— С. 17-27.

4. Vakarchuk I. O., Panochko G. The effective mass of an impurity atom in the Bose liquid with a deformed Heisenberg algebra // Ukr. J. Phys.— 2017.— Vol. 62, No. 2.— P. 123-131.

5. Panochko G., Pastukhov V., Vakarchuk I. Behavior of the impurity atom in a weakly-interacting Bose gas // Condens. Matter Phys.— 2017.— Vol. 20, No. 1.— Art. 13604.— 11 p.

6. Panochko G., Pastukhov V., Vakarchuk I. Impurity self-energy in the strongly-correlated Bose systems // Int. J. Mod. Phys. B.— 2018.— Vol. 32, No. 5.— Art. 1850053.— 9 p.

7. Panochko G., Vakarchuk I. Density matrix of the system “Bose liquids + impurities” in the approximation of pair correlations // QFS 2010. International Symposium on Quantum Fluids and Solids. August 1-7, 2010. Grenoble, France: List of contributions.— P. 96.

8. Vakarchuk I. O., Panochko H. I. Heisenberg's deformed algebra in the theory of many-boson system // International Conference "Physics of Liquid Matter: Modern Problems", May 21-24, 2010, Kyiv, Ukraine: Abstracts.— P. 335.

9. Паночко Г. Повна матриця густини системи "бозе-рідина + домішка" в границі низьких температур // Міжнародна конференція молодих учених і аспірантів ІЕФ-2011, Ужгород, 24-27 травня 2011 р.: Програма і тези доповідей.— С. 88.

10. Vakarchuk I. O., Panochko H. I. One-particle density matrix of the system "Bose-liquid + impurity" in the limit of low temperatures // III Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", December 21-23, 2011, Kyiv, Ukraine: Program and Abstracts.— P. 63.

11. Вакарчук І. О., Паночко Г. Структурні фактори системи "бозе-рідина+домішковий атом" в наближенні парних кореляцій // 12-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 30 травня - 1 червня 2012. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 39.

12. Panochko G., Vakarchuk I. O. The 3He impurity states in 4He // International Conference on Quantum Fluids and Solids 2012, 15th-21st August 2012, Lancaster University, UK: Conference Handbook.— [P. 46]

13. Вакарчук І., Паночко Г. Повна матриця густини системи "бозе-рідина + домішка" в наближенні парних кореляцій [Різдвяні дискусії 2012, Львів, 3-4 січня 2012] // Журн. фіз. дослідж.— 2012.—

Т. 16, №1/2.— С. 1998-5.

14. Panochko G. One-particle density matrix of the “Bose-system + impurity atom“ at finite temperatures [Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 10-11 July 2012] // J. Phys. Stud.— 2012.— Vol. 16, No. 3.— 3998.— P. 4.

15. Vakarchuk I., Panochko G. The 3He impurity states in 4He // 6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 23-25 September 2013, Zielona Góra, Poland: Book of abstracts.— P. 25.

16. Vakarchuk I. O., Panochko G. The impurity states in the liquid Helium-4// Proceedings of VI International Conference “Physics of Disordered Systems”, Lviv, Ukraine, 14-16 October, 2013.— P. 36.

17. Паночко Г. Урахування три- та чотиричастинкових кореляцій у деформованому просторі Гейзенберга на прикладі рідкого 4He [Різдвяні дискусії 2014, Львів, 9-10 січня 2014] // Журн. фіз. дослідж.— 2014.— Т. 18, №1.— С. 1998-5.

18. Вакарчук І. О., Паночко Г. І. Домішка в рідкому 4He з деформованою алгеброю Гайзенберга // 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 4-5 червня 2015. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 26.

19. Vakarchuk I. O., Panochko G. I. The separation energy of the impurity atom in the liquid 4He with the deformed Heisenberg algebra // 7th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems”, May 27-30, 2016, Kyiv, Ukraine: Abstracts.— P. 43.

20. Вакарчук І. О., Паночко Г. Ефективна маса домішкового атома в розрідженому бозе-газі [Різдвяні дискусії 2017, Львів, 11-12 січня 2017] // Журн. фіз. дослідж.— 2017.— Т. 21, №1/2.— С. 1998-3.

21. Паночко Г. І. Спектр домішки в сильноскорельованій бозе-системі // 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 8-9 червня 2017. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 38.

22. Panochko G., Vakarchuk I. Self-energy of the Bose polaron // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, Zielona Góra – October 16-19 2017: Abstracts.— P. 9.

23. Panochko G., Vakarchuk I. O. The liquid helium-4 in a deformed Heisenberg space in low temperatures limit // LT27: 27th International Conference on Low Temperature Physics, August 6-13, 2014, Buenos Aires, Argentina: Abstract Book.— P. 143.

ВСТУП

Актуальність теми. Історично склалось так, що напрями досліджень багатобозонних систем розвивались поступово, і поряд з ними зростав інтерес до аналізу поведінки домішок у двокомпонентних сумішах на основі ізотопів гелію ^{3}He, ^{4}He та ^{6}He, а згодом ізотопів рубідію цезію ^{133}Cs та стронцію ^{84}Sr. Насамперед, це пов'язано з експериментальною можливістю отримувати бозе-конденсат на основі атомів ультрахолодних газів; спостерігати наявність конденсатної фракції для багатобозонних систем, що знаходяться в пастках; досліджувати виснаження бозе-конденсату рухомими домішками. А це вже є вагомим кроком у дослідженні домішкових станів в квантових рідинах, зокрема, статистичних та динамічних властивостей окремих бозе-поляронів (квазічастинок, які утворюються внаслідок взаємодії домішкового атома з бозе-середовищем), а також вивчення ефектів взаємодії багатополяронних систем.

Підходи, що дають змогу досліджувати домішкові стани у взаємодіючих бозе-системах, грунтуються на Монте-Карло симуляціях, варіаційних, ренормгрупових методах, та розрахунках, де використовується діаграмна техніка. І хоча інформація про основний стан класичного полярона є повною, причому, розв'язок в границі слабкого зв'язку отриманий Фрьоліхом, а в границі сильного – Пекаром, точного розв'язку для бозе-полярона немає ні для модельних систем, ні для домішкового атома, що рухається в такій сильно неідеальній системі, як рідкий гелій-4. Також залишається відкритим питання щодо моделювання бозон-домішкової взаємодії при довільних імпульсах домішок і навіть у довгохвильовій границі. Окрім того, до кінця не вирішеною є проблема опису багаточастинкових кореляцій у бозе-рідині.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюжетних тем Фф-55Ф «Теоретичні дослідження нових квантових систем» (2006–2008 рр., номер д/р 0106U001294), Фф-110Ф «Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберґа» (2012–2014 рр., номер д/р 0112U001275), Фф-30Ф «Класичні і квантові системи з нестандартними комутаційними співвідношеннями і статистиками» (2016 р., номер д/р 0116U001539).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є вивчення впливу бозе-середовища на поведінку домішкових атомів а також побудова самоузгодженої схеми розрахунку мікроскопічних характеристик такої багаточастинкової системи.

Основними завданнями дисертаційної роботи є дослідження домішкових станів та знаходження параметрів домішкового спектра в слабковзаємодіючому бозе-газі і у рідкому гелії-4, що є сильноскорельованою системою.

Об'єктом дослідження є багатобозонні системи з малою концентрацією домішок, зокрема, ізотопів гелію. *Предметом дослідження* є термодинамічні та структурні характеристики системи вцілому а також властивості домішкового спектра багатобозонної системи, в границі низьких температур. *Методами дослідження* виступають методи теорії збурень, колективних змінних, варіаційні та теоретико-польові підходи а також метод врахування багаточастинкових кореляцій деформуванням комутаційних співвідношень між колективними координатами та імпульсами.

У першому розділі окреслено історичні передумови та сучасний стан досліджень бозе-поляронів а також висвітлено підходи, що є за-

стосовними до вивчення домішкових станів у взаємодіючих багатобозонних середовищах.

У другому розділі вивчено поведінку домішкового атома у сильно розрідженому бозе-газі в границі низьких температур, моделюючи бозон-домішкову короткодіючим потенціалом. В рамках теорії збурень Брілюена–Вігнера знайдено енергію та ефективну масу притягального та відштовхувального бозе-поляронів в довгохвильовій границі. В границі теорії збурень Релея-Шредінгера, ми отримали імпульсну залежність одночастинкового спектра домішки та його загасання. Проаналізовано межі застосовності цих пертурбативних підходів на прикладі проблеми стабільності бозе-полярона у слабковзаємодіючому бозе-газі.

Третій розділ присвячено дослідженню властивостей домішки у сильноскорельованій багатобозонній системі в представленні колективних координат. Навіть дослідження властивостей основного стану такої моделі потребує коректного опису бозон-бозонної та бозон-домішкової взаємодій. Ми пропонуємо врахувати лише непрямі кореляцій між атомами бозе-рідини, а бозон-домішкову взаємодію ототожнити з енергією взаємодії між домішковим атомом ^{3}He та атомом середовища. На підставі цього, постулюючи стани системи пробною хвильовою функцією з варіаційним параметром, що описує вплив середовища на поведінку домішкового атома, ми знаходимо характеристики домішок – ізотопів гелію, що занурені в рідкий гелій-4.

У четвертому розділі вперше розглянуто задачу про рух домішки в бозе-рідині у просторі з деформованою алгеброю Гейзенберга. Дослідження домішкових станів бозе-рідини суттєво ускладнюється, якщо брати до уваги нелінійні флуктуації між атомами рідини. Тому ми запропонували ввести деформовані колективні змінні в якості узагальнених координат, яким відповідають деформовані узагальненні

імпульси, а прямі та непрямі багатобозонні кореляції описати деформаційним параметром. Завдяки одному з можливих способів вибору цього параметра, ми за умови слабкої бозон-домішкової взаємодії обчислили енергію розділення та ефективну масу домішкового атома ^{3}He, що рухається у рідкому гелії-4.

У п'ятому розділі розглянуто задачу про рух спін-поляризованих фермі-домішок малої концентрації в рідкому гелії-4 стандартними методами теорії поля в границі низьких температур. В теоретико-польовому підході уся інформація про взаємодію домішки з бозе-системою міститься у власноенергетичній частині одночастинкової мацубарівської функції Гріна ферміонів. Модифікована скелетна діаграмна техніка, яку ми запропонували для аналізу точної власноенергетичної частини передбачає врахування перенормованої бозон-домішкової взаємодії шляхом розв'язку рівнянь для вершинної функції послідовними наближеннями. Окрім того, запропонований нами простий анзац для одночастинкової функції Гріна в границі однієї домішки дозволяє уникнути трудностей з складним аналітичним і чисельним розв'язком задачі про знаходження ефективної маси домішки в бозе-рідині.

Усі чисельні розрахунки характеристик домішкового атома у бозе-середовищі проведено на прикладі ізотопів гелію, що рухаються в рідкому гелії-4, та на підставі переписування параметрів взаємодії між частинками системи через структурний фактор рідкого гелію-4, який є добре вимірюваною величиною.

Дисертаційна робота завершується **Висновками** та **Списком використаних джерел**.

Наукова новизна отриманих результатів. Вперше проаналізовано межі застосовності теорії збурень на прикладі проблеми стабільності бозе-полярона у слабковзаємодіючому бозе-газі.

В рамках варіаційного підходу вперше знайдено повний структурний фактор системи “бозе-рідина плюс домішковий атом” з урахуванням парціального внеску, що описує вплив бозе-рідини на поведінку домішки. В границі слабкої бозон-домішкової взаємодії вперше обчислено енергію домішкового атома для різних густин бозе-середовища, на прикладі домішки ^{3}He, що занурена в рідкий гелій-4 з урахуванням непрямих кореляцій між бозе-частинками.

Вперше запропоновано спосіб врахування нелінійних флуктуації між атомами бозе-рідини шляхом деформації комутаційних співвідношень для колективних координат та імпульсів. Вперше в лінійному наближенні за параметром деформації аналітично та чисельно розраховано енергію та ефективну масу домішкового атома на прикладі домішки ^{3}He в залежності від густини рідкого гелію-4.

Для власноенергетичної частини домішкового спектра використано скелетну діаграмну техніку, яка передбачає розв’язування рівнянь для вершинної функції методом послідовних наближень. На підставі цього вперше проведено самоузгоджений розрахунок ефективної маси бозе-полярона.

Практичне значення отриманих результатів. Підходи, розвинуті в дисертаційній роботі можна застосовувати до моделей, які дозволяють розгляд домішкових станів в бозе-середовищі за теорією збурень. Результати щодо параметрів спектру бозе-полярона можна використати для аналізу сучасних експериментів з холодними газами. Способи врахування багатобозонних кореляцій можуть бути корисними при вивченні домішкових станів у потенціальних пастках. Процедура врахування скелетних діаграм може бути використана для аналізу домішкового спектру низькорозмірних систем. Усі результати дисертаційної роботи можна узагальнити на випадок поведінки домі-

шкових атомів рідкісноземельних газів в сильноскорельованих бозе-середовищах.

Особистий внесок здобувача. Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи проф. І. О. Вакарчук. Усі викладені в дисертації результати автор отримала самостійно або при своїй безпосередній участі. У роботах, виконаних зі співавторами, здобувачеві належить:

- варіаційний розрахунок повної енергії системи "домішка плюс бозе-рідина" з урахуванням непрямих бозонних кореляцій у хвильовій функції бозе-рідини; знаходження повного структурного фактора системи "домішка плюс бозе-рідина"; чисельний розрахунок енергії розділення домішкового атома ^{3}He при різних густинах рідкого гелію-4; чисельні результати для одночастинкової матриці густини на прикладі ізотопів гелію; оцінка відносної кількості бозе-конденсату за наявності домішкових атомів [1].

- знаходження хвильової функції бозе-рідини з деформованими колективними координатами та імпульсами; розрахунок термодинамічних та структурних функцій бозе-рідини з деформованими колективними координатами [2].

- аналітичний розрахунок внеску у власноенергетичну частину домішкової функції Гріна у першому наближенні; чисельний розрахунок в першому наближенні ефективної маси та енергії занурення домішкового атома на прикладі ізотопів гелію в бозе-середовище методом функціонального інтегрування [3].

- знаходження енергії основного стану системи "домішковий атом плюс бозе-рідина" з урахуванням модельного параметра деформації; чисельний розрахунок енергії розділення та ефективної маси

домішкового атома при різних густинах бозе-середовища з урахуванням деформації [4].

- дослідження рівнянь для домішкового спектру та його загасання пертурбативними методами; обчислення поправки до домішкового спектра в границі теорії збурень Релея-Шредінгера; чисельний розрахунок енергії та ефективної маси притягального та відштовхувального бозе-поляронів[5].

- аналітичний розрахунок внеску у власноенергетичну частину домішкової функції Гріна в другому наближенні; аналіз рівняння для вершинної функції методом послідовних наближень; чисельний розрахунок ефективної маси та енергії занурення домішкового атома в бозе-середовище теоретико-польовим методом[6].

Результати статей, їхню інтерпретацію та застосовність використаних підходів співавтори обговорювали на паритетних засадах.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувач представляла особисто на таких конференціях та семінарах: “International Conference on Quantum Fluids and Solids” (Grenoble, France 2010) [7]; International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems” (Kyiv, 2010) [8]; Міжнародна конференція молодих учених і аспірантів ІЕФ-2011 (Ужгород, 2011) [9] ; III Young Scientists Conference “Modern Problems of Theoretical Physics” (Kyiv, 2011) [10]; 12-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, (Львів, 2012) [11]; “International Conference on Quantum Fluids and Solids” (Lancaster, UK, 2012) [12]; Різдвяні дискусії 2012 (Львів, 2012) [13]; “5th Workshop on Current Problems in Physics”, (Lviv, 2012) [14]; “6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv” (Zi-

elona Góra, Poland 2013) [15]; Proceedings of VI International Conference "Physics of Disordered Systems", (Lviv, Ukraine, 2013) [16]; Різдвяні дискусії 2014 (Львів, 2014) [17]; 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2015) [18]; 7th International Conference "Physics of Liquid Matter: Modern Problems" (Kyiv, 2016) [19]; Різдвяні дискусії 2017 (Львів, 2017) [20]; 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2017) [21]; "Workshop on Current Problems in Physics": Zielona Góra – Lviv (Zielona Góra, 2017) [22].

Подані в роботі результати неодноразово обговорювали на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету.

Публікації.

Результати дисертаційної роботи опубліковано в шести журнальних статтях [1–6], із яких 5 — у виданнях, що індексуються у Scopus [1, 2, 4–6] та сімнадцятьох тезах доповідей на конференціях [7–23].

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Вплив домішкових атомів на поведінку багаточастинкових систем є реперною задачею в теорії полярона [24–26], високотемпературних надпровідників [27]; при дослідженні систем довільної вимірності та з різним типом статистики, зокрема, спін-поляризованого водню, сумішей $^3\mathrm{He} - {}^4\mathrm{He}$ [28] та двокомпонентних розчинів $^2\mathrm{H}, \mathrm{Ne}, \mathrm{Ar}$ в надплинному гелії [29], фермі [30–32] та бозе-поляронів [33]. Важливим питанням при цьому є опис квантових станів системи "домішка плюс середовище", моделювання потенціалу взаємодії між атомами та ефективне врахування багаточастинкових кореляцій, вплив слабкої та сильної взаємодії на якісну та кількісну оцінку характеристик домішок.

Помітний поступ у дослідженні домішкових станів у квантових газах пов'язаний з можливістю експериментально отримувати бозе-конденсат шляхом охолодження розріджених газів лужних металів різними методами [34], а також спостерігати наявність конденсатної фракції для багатобозонних систем, що знаходяться в пастках [35–38]. Зокрема, у [36] розглянуто так зване явище виснаження бозе-конденсату рухомими домішками ($^+$Na, $^+$Rb, $^+$Yb) і при цьому отримано заряджені, локалізовані домішки в BEC (конденсація Бозе-Ейнштейна), а також домішки, що взаємодіють з бозе-частинками, які не є в основному стані [37]. Завдяки можливості моделювання типу та сили бозон-домішкової взаємодії та на підставі вивчення ефекту тунелювання домішок у пастках [39], виміряно енергію мобільної домішки, що занурена в BEC [40] а також експериментально оцінено час життя домішкового атома

в ультрахолодному газі ^{87}Rb в сильновзаємодіючому режимі [41]. Авторами роботи [38] в наближенні середнього поля досліджено властивості одного домішкового атома в подвійній потенціальній ямі. Близькою експериментальною реалізацією цього є оптична гратка системи багатьох бозонів плюс один домішковий атом [42]. Загалом, наявність домішок в бозе-конденсаті зумовлює ряд цікавих явищ. Одним із прикладів є утворення зв'язаних станів з двох електронів, які називають біполяроном [43–45]. Вважається, що вони беруть участь у не типових механізмах спарювання у випадку високотемпературної надпровідності. Іншим прикладом є утворення квазічастинки — бозе-полярона. Динамічні властивості таких сильно зв'язаних домішок пожвавлено вивчають у сумішах бозе-фермі газів [46, 47], в дуже розрідженому бозе-газі [48–51] і в одно- [52–56] та двовимірних бозе-газах [57], а також в системах, де рух домішки в бозе-конденсаті обмежується площиною [58].

Досліджувати природу домішкових станів на основі ізотопів гелію у надплинному ^{4}He, запропоновано ще Ландау і Померанчуком [59], адже саме рідкий гелій-4 впродовж значного часового періоду фактично був єдиною добре експериментально та теоретично вивченою квантовою рідиною. Зокрема, властивості домішкового атома ^{3}He у рідкому ^{4}He в низькотемпературній границі, з'ясовано авторами робіт [60–64]. У роботі [65] розглянуто умови стійкості бозе-суміші ^{4}He-^{6}He, а у [61] запропонована її експериментальна реалізація. Авторами роботи [66] продемонстровано часткове розмиття бозе-конденсату суміші ^{4}He-^{6}He за різних концентрацій домішок ^{6}He. Задача про вивчення властивостей ізотопів гелію у взаємодіючих бозе-системах не втрачає актуальності [67, 68], адже вона безпосередньо пов'язана з проблемою бозе-полярона. Сучасні експериментальні дослідження доводять, що

полярони можуть утворюватись не лише у діелектриках, металах, напівпровідниках, іонних кристалах, феромагнетиках а також при взаємодії рухомих домішок з рубідієвими [41], цезієвими [69], ітербієвими та стронцієвими [70] бозе-конденсатами.

Теж до задачі бозе-полярона приводить припущення щодо можливості формування зв'язаних станів ^{4}He–^{4}He у гелії-II [71]. Поряд з дослідженням властивостей ізотопів гелію у сумішах на основі надплинного гелію-4, розглянуто вплив позитивних іонів інших хімічних елементів ($^+$K, $^+$Rb, $^+$Ca, $^+$Mg, $^+$Sr) на поведінку бозе-рідини [72]. Зокрема, авторами показано, що якщо для іонів лужних металів їх рухливість зменшується зі збільшенням атомного номера, то для лужноземельних, навпаки збільшується. З мікроскопічної точки зору в роботі [73] вивчено поведінку ізотопів водню в плівках ^{4}He. Внаслідок сильної відштовхувальної взаємодії між атомами ^{4}He та ізотопами водню, та їх значно меншою масою порівняно з атомами ^{3}He, ця система не утворює сумішей, і її вважають квазідвовимірною. На підставі цього в роботі [74] проведено оцінку вимірювання часу життя дейтерію в камері, стінки якої вкриті насиченим ^{4}He, визначено хімічний потенціал, та обговорено можливість оцінки ефективної маси домішки. Окрім розгляду системи "домішковий атом плюс надплинний гелій", проводяться дослідження щодо впливу різної концентрації домішок ^{3}He на характеристики твердого ^{4}He [75–80] тощо.

Проблеми, пов'язані зі дослідженням властивостей бозе-полярона зумовлюють бурхливий розвиток методів, які б могли бути застосовними для дослідження домішкових станів у взаємодіючих бозе-системах. Серед найбільш відомих сучасних підходів в теорії бозе-полярона, які дають змогу пояснити квантові ефекти у граничному випадку слабкої та сильної бозон-домішкової взаємодій, та у проміжній області, є ті, що

грунтуються на Монте-Карло симуляціях [81–86], варіаційних [48, 87–90] і ренормгрупових [91, 92] методах та розрахунки, де використовується діаграмна техніка [49, 58, 93–95]. Перевагою комп'ютерних симуляції є можливість з високою точністю досліджувати домішкові стани у бозе-системах зі скінченним числом бозонів і з різною концентрацією домішок. Зокрема, одним з результатів роботи [82] є отримання енергії основного стану бінарної суміші з точністю до квадратичного внеску за концентрацією та оцінка допустимих значень бозон-домішкової взаємодії за яких однорідна бозе-бозе суміш залишатиметься стійкою. Цими ж авторами у [81] продемонстровано ефективність таких чисельних розрахунків на прикладі характеристик однієї домішки ^{40}K, що занурена в сильно розріджений бозе-газ ^{87}Rb. Метод Монте-Карло дозволяє точно розрахувати функції Гріна, обчислення яких зводиться до підсумовування певного класу Фейманівських незвідних діаграм, що виникають при знаходженні енергії домішки, яка занурена в бозе-конденсат [83]. Так званий метод дифузійного Монте-Карло використаний для знаходження структурних (парної функції розподілу, статичного структурного фактора) та термодинамічних функцій (кінетичної енергії, хімічного потенціалу) домішкового атома ^{3}He в надплинному ^{4}He [84]. На підставі цього методу, автори отримали чисельні значення ефективної маси домішки ^{3}He в середовищі сильно взаємодіючих бозонів, яке вважається найбільш точним до сьогодні. В поєднанні з варіаційним методом, завдяки симуляціям, проведено оцінку характеристик домішки ^{3}He [85] та іонів лужних і лужноземельних металів [86] в рідкому гелії-4.

Точного розв'язку для бозе-полярона немає ні для модельних систем, ні для домішкового атома, що рухається в такій сильно неідеальній системі, як рідкий гелій-4, попри те, що основний стан поля-

рона в границі слабкого зв'язку досліджений Фрьоліхом [25], а в границі сильного — Пекаром [24]. Оскільки першочерговими проблемами в таких задачах є способи опису багатобозонних кореляцій між частинками середовища та моделювання бозон-домішкової взаємодії, які своєю чергою ускладнюють знаходження спектральних властивостей бозе-полярона і вивчення ефектів взаємодії багатополяронних систем. Математично проблему врахування бозон-бозонної взаємодії перекидають на поняття ефективної маси атома гелію в рідині [96–99]. Але через труднощі які пов'язані з тим, бозон-домішкова взаємодія, як і взаємодія між атомами гелію, є не малою, сучасні теоретичні дослідження домішкових станів у бозе-системах базуються на розгляді слабковзаємодіючого газу твердих сфер [5, 48–50, 81, 82, 91, 94, 100, 101]. Це наближення добре пристосоване до вивчення бозе-газів малої густини, і до того ж, за такого спрощеного аналізу, величина бозон-домішкової взаємодії є прямопропорційна параметру неідеальності системи — довжині розсіяння частинки на частинці [5]. Привабливість такого опису системи "домішка плюс розріджене бозе–середовище" ще й пов'язана з експериментальним дослідженням домішкових атомів [102–104], іонів [36, 105] чи електронів [106], різних спінових станів [107] в бозе-конденсатах. Але модель з псевдопотенціалом твердих сфер не позбавленна й недоліків, зокрема, константу зв'язку, яка характеризує величину бозон-домішкової взаємодії, потрібно "регуляризувати" для збіжності остаточних виразів. Таке штучне доозначення сталої контактного відштовхування використано, до прикладу, при доведенні існування самолокалізованих домішкових станів в однорідному тривимірному бозе-конденсаті [50], при знаходженні сили опору, з якою важка домішка гальмується одно-, дво- та тривимірним газом взаємодіючих бозонів [100], знаходженні спектра домішки та його загасання [5] тощо.

Цікаво, що для одновимірних систем модель з δ-відштовхуванням, є добре визначеною і не потребує перенормування константи зв'язку. Цей факт проілюстровано в роботі [108] для дослідження основного стану системи "одновимірні бозони плюс домішка". Автори, в границі сильного відштовхування між бозе-частинками, вперше отримали домішковий внесок до енергії основного стану, і для випадку притягальної бозон-домішкової взаємодії, показали існування зв'язаних станів у системі.

В контексті розгляду конденсованих середовищ, зокрема, рідкого гелію, ще Міллер [109] в своїй праці зауважив, що домішка може самолокалізуватися у бозе-середовищі. Хвильову функцію системи автори записали з урахуванням канонічного перетворення, що ефективно мало нівелювати бозон-домішкову взаємодію, і показали, що вона співпадає з варіаційною фунцією Феймана [110]. При тому, в границі слабкого зв'язку у [109] показали, що рухома домішка ^{3}He в рідкому гелії-4 має ті ж властивості, що й домішка, яка слабо взаємодіє з слабко взаємодіючими бозонами. Більш того, автори чи не одні з перших, свої міркування щодо зростання ефективної маси домішки у бозе-середовищі ототожнили з схожою ситуацією, що виникає при русі повільного електрона в кристалі. Для модельних систем збільшення цієї маси пов'язане з константою зв'язку, що повністю визначається густиною BEC та масою частинок середовища, енергією елементарних збуджень а також величиною бозон-домішкової взаємодії [50]. Зокрема, в роботі [111] для двокомпонентного ультрахолодного бозе-газу з ненульовим спіном показано, що в довгохвильовій границі сильна відштовхувальна взаємодія між бозе-частинками підвищує чисельне значення ефективної маси частинок. Зростання ж ефективної маси домішки ^{3}He в розведеному розчині ^{3}He–^{4}He пояснюється існуванням в такій

суміші зв'язаних станів ^{3}He – ^{4}He, а у надплинному ^{4}He — сильними колективними ефектами (зокрема, парними і багаточастинковими кореляціями), що виникають внаслідок взаємодії атомів ^{3}He і ^{4}He [112]. Підтвердженням цього є експериментальні дані для ефективної маси домішки ^{3}He в розчині ^{3}He–^{4}He при $T \to 0$ з малою концентрацією домішкових атомів [113].

Інтуїтивно зрозуміло, що рух домішкового атома у взаємодіючих бозе-системах завжди буде дисипативним. При цьому енергія домішки завжди зменшуватиметься, і її спектр з часом загасатиме внаслідок народження елементариних збуджень у системі. Інтенсивність народження таких квазічастинок визначатиметься величиною бозон-домішкової взаємодії. Окрім того, якщо домішка рухається у слабковзаємодіючому бозе-газі, то випромінюватимуться фонони, але лише за умови, що швидкість домішки перевищуватиме швидкість звуку [5]. Коли ж домішка рухається в рідкому гелії-4, порогова швидкість, при якій вона вже починає народжувати елементарні збудження (ротони), є значно меншою за швидкість звуку в рідині, оскільки спектр ^{4}He має характерний ротонний мінімум. Якщо ж в бозе-системі є макроскопічне число рухомих домішок, то вони можуть за певних фізичних умов змістити спектр середовища, і в системі зможуть народжуватись як ротонні так і фононні збудження. До слова, коли "чиста" бозе-рідина починає рухатись з швидкістю, що перевищує деяке критичне значення, нарожуються боголюбівські квазічастинки, і як наслідок, рідина втрачає властивість надплинності [114]. Очевидно, що в одновимірних бозе-системах рух домішки теж гальмуватиметься, але сила опору, яку чинить середовище, пов'язана з народженням інших типів збуджень – солітонів [100]. Вважається, що в бозе-системах вони мають зміст рухомих областей підвищеної густини і їх можна спостерігати в квазіо-

дновимірних однорідних бозе-конденсатах ультрахолодних газів.

Піонерські роботи, в яких розвинута теорія бозе-полярона — домішки, що занурена в розріджений бозе-конденсат — базуються на так званій моделі Фрьоліха [88, 115, 116]. Гамільтоніан цієї моделі зазвичай використовують в квантовій теорії твердого тіла, наприклад, для опису взаємодії електрона з акустичними фононами в кристалі [117] та екситон–фонноної взаємодії [118]. У випадку дослідження домішкових станів в слабковзаємодіючих бозе-системах, в цьому гамільтоніані обмежуються боголюбівським наближенням для бозон-бозонної взаємодії, і доповнюють його врахуванням багаточастинкових процесів розсіяння домішок на бозонах, зокрема двофоннонних процесів [92]. Окрім цього, забезпечують добру визначеність параметрів моделі, пов'язуючи величину взаємодії між домішкою та бозонами з довжиною розсіяння. Так, стартуючи з узагальненого гамільтоніана Фрьоліха, досліджено основний стан домішок в квазівимірних бозе-конденсатах та вивчено реакцію такої системи на Брегівське розсіяння [51], простежено появу неергодичних внесків (внески на нульовій частоті) до спектральних густин кореляційних функцій домішки [115], проаналізовано швидкість загасання спектра фермі-домішки в дипольному бозе-конденсаті [119], знайдено кількість фононів для різних співвідношень мас між домішкою та бозонами, з урахуванням прямих процесів розсіяння [116], розраховано спектральні характеристики бозе-полярона [120], його енергію і ефективну масу ренормгруповим [91] і Монте Карло [83] методами, також досліджено вільну енергію методом функціонального інтегрування і обгрунтовано стрімкий ріст ефективної маси в границі сильного бозон-домішкового зв'язку [88]; оцінено верхню межу бозон-домішкової взаємодії, при якій відбувається виснаження рубідієвого конденсату іонами $^{+}$Ba і обговорено область застосовності гаміль-

тоніану Фрьоліха і наближення Боголюбова до опису властивостей заряджених домішок в ВЕС [121]. Таке ж "Фрьолівсько-Боголюбівське" наближення використане у [101], щоб продемонструвати ріст ефективної маси бозе-полярона і ефекти підсилення квантових флуктуацій на прикладі ізотопів ^{41}K, ^{133}Cs в ^{87}Rb та ізотопу ^{6}Li у ^{23}Na конденсатах, якщо збільшувати взаємодію між домішкою та конденсатом. Ці автори наводять дані, отримані на підставі впровадження певного класу варіаційних гаусівських функцій та результати наближення середнього поля та ренормгрупових розрахунків. Розглянута модель добре підходить до експериментальної реалізації бозе-полярона. До прикладу, в статті [104], авторам вдалось незалежно керувати як домішкою так і параметрами середовища, використовуючи незалежні оптичні пастки. Ними досліджено динаміку нейтральних домішок цезію ^{133}Cs в рубідієвому (^{87}Rb) бозе-конденсаті. А це вже є вагомим кроком у дослідженні домішкових станів в квантових рідинах, зокрема, статистичних та динамічних властивостей окремих поляронів а також вивчення ефектів взаємодії багатополяронних систем [122].

Однак, паралельно з'явились теоретичні роботи [48, 49, 56, 94], в яких запропоновано використовувати й інші модельні гамільтоніани, аргументуючи це тим, що Фрьолівський на мікроскопічному рівні не достатньо добре описує область слабкої бозон-домішкової взаємодії [49]. Зокрема, в статті [49] отримано енергію домішки як функцію параметра довжини розсіяння в третьому порядку теорії збурень з використанням "сходинкових" діаграм (ladder diagrams), та на підставі цього оцінено ефективну масу домішки. Також авторами показано, що енергія полярона має таку ж структуру як енергія слабковзаємодіючого бозе газу, коли бозон-бозонна довжина розсіяння рівна бозон-домішковій. В роботі [48] використовуючи варіаційний метод, для ви-

падків невзаємодіючого бозе-конденсату та слабкого відштовхування між бозонами, в наближенні Боголюбова отримано енергію та ефективну масу притягального та відштовхувального полярона. Автори строго показали, що в спектрі домішки присутні дві вітки, які відповідають різним розв'язкам задачі на знаходження мінімуму енергії: притягальна, коли ферміонній домішці в парі з одним бозоном енергетично вихідно утворити двоатомний зв'язаний стан; та відштовхувальна, що загасає в часі із ростом бозон-домішкової взаємодії. В роботі [94] досліджується сильновзаємодіючий бозе-полярон з конденсатом в границі низьких температур. Ці автори, в рамках теоретико–польового підходу з використанням самоузгодженого T-матричного наближення, отримали спектральну функцію, ефективну масу, енергію притягального та відштовхувального бозе-поляронів. Авторами роботи [56] у границі сильного зв'язку досліджено самолокалізацію нейтральних домішок в одновимірному бозе-коденсаті. Зокрема, автори показують, що розв'язки для самолоколізованих домішкових станів є аналогом параметричних солітонних розв'язків. Взагалі кажучи, самолокалізовані домішкові стани формуватимуться чи то в сильно скорельованому середовищі, чи при взаємодії домішки з конденсатом через те що, між домішкою та народженими квазічастинками виникає ефективна запізнююча взаємодія, яка є завжди притягальною. І домішка фактично опиняється в потенціальній пастці квазічастинок, яку й сама створила. І якщо в моделі Фрьоліха варіаційний Фейманівський підхід передбачає стрибкоподібне формування самолокалізованих станів, то ренорм групові методи, які дозволяють вийти за межі Фрьолівського гамільтоніану, вказують на самозахоплення домішки в пастці, без фазового переходу. І щоб достеменно з'ясувати механізм самолокалізації домішки, наприклад, в роботі [123] автори пропонують експериментальну

установку, де можна змінювати масу домішок та величину ефективної притягальної взаємодії, і тим самим перевірити фізику бозе-полярона за межами моделі Фрьоліха, зокрема, у двовимірному бозе-конденсаті. Вцілому, вихід за рамки Фрьолівської моделі, передбачає врахування процесів розсіяння домішки на квазічастинках, які є вирішальними при формуванні двочастинкових зв'язаних станів. Зокрема, в роботах [120, 124], використовуючи перетворення Лі-Лоу-Пайнса, проаналізовано динаміку і спектри поглинання бозе-полярона, і показано, що в системі присутні зв'язані стани домішки з кількома боголюбівськими квазічастинками. В роботі [125] запропонований анзац для хвильової функції описує утворення зв'язаних станів, що викликані однофононними та багатофононними збудженнями у системі, в якій домішковий атом може змінювати свій стан (hyperfine states) внаслідок бозонно-домішкової взаємодії. Модельний гамільтоніан з цієї роботи можна реалізувати в оптичних гратках, вузлами якої є мінімуми потенціальної енергії системи, а середовище бозонів можуть формувати атоми лужноземельних металів, наприклад ітербій [126]. Цікаві результати отримали автори роботи [127], застосовуючи діаграмну техніку до розрахунку енергії та спектральної функції системи ^{6}Li-^{133}Cs. Ними показано, що домішка може утворювати послідовність Ефімівських зв'язаних станів з двома бозонами.

Достатньо ефективним методом дослідження сильно скорельованих бозе-систем виявився так званий метод колективних змінних, коли замість декартових координат частинок беруть нескінченну сукупність величин, що є коефіцієнтами Фур'є флуктуації густини бозонів. Уперше такий метод опису багаточастинкових систем запропонував Бом [128, 129] і був доповнений Боголюбовим і Зубарєвим, введенням вагової функції, яка відігравала роль якобіана переходу від декартових до

колективних координат [130]. Обгрунтування цього підходу було проведено в численних працях, вважаючи ангармонізми, що породженні коливанням густини бозе-рідини, оператором збурення в системі [131–141].

В представленні колективних координат динаміка окремих атомів ^{3}He в рідкому ^{4}He розглянута у [63, 142, 143] В цих роботах автори бозон-бозонну та бозон-домішкову взаємодію для порівняння описували різними потенціалами, виходячи зі структурного фактора бозе-рідини. Зокрема, в роботі [63] будуючи теорію збурень Брілюена-Вігнера на станах системи "бозе рідина плюс домішковий атом", автори обчислили енергію занурення та ефективну масу домішкового атома зі структурним фактором наведеним у [144]. А в роботі [142], де взаємодія між атомами ^{4}He та домішкою ^{3}He моделюється потенціалом Азіза, у другому порядку звичайної теорії збурень обчислено ефективну масу з експериментальним структурним фактором [145]. Цими ж авторами у [143] досліджено низькотемпературну поведінку ефективної маси домішки на основі усереднення повного статистичного оператора системи "рідина плюс домішка" за станами чистого гелію. Знаходження характеристик домішки ^{3}He в рідкому ^{4}He у [1] грунтується на варіаційному виборі хвильової функції досліджуваної системи з урахуванням хвильової функції ізольованого атома ^{3}He а також на перенормуванні взаємодії через структурний фактор [146].

Застосовність варіаційного підходу до опису домішкових станів в рідкому гелії-4 є цілком виправданим. Зокрема, завдяки певному підбору пробної хвильової функції системи, в роботі [147] одержано спекр елементарних збуджень квазічастинок слабкого розчину ^{3}He у рідкому ^{4}He, який добре узгоджується з експериментальними даними, і звернуто увагу на його неквадратичну поведінку в області хвильових ве-

кторів порядку 3Å^{-1}. Окрім цього, в роботі Слюсарєва та Стржемечного вперше отримано чисельне значення ефективної маси домішки ($M^*/M = 2.4$). Таке велике значення ефективної маси ^{3}He в ^{4}He, яка близька до сумарної маси ^{3}He і ^{4}He, тут пояснюється сильним відштовхуванням квазічастинок в ротонній області спектра. В роботі [148] з хвильовою функцією, що враховує вплив рідини на рухому домішку ^{3}He, теж оцінено ефективну масу в наближенні тричастинкових кореляцій. В роботі [71] вдалий вибір хвильової функції у вигляді добутку детермінанта Слетера (так званий варіаційний метод Джастрова-Фінберга [149]), що описує фермі систему (атоми ^{3}He), та множника, що враховує взаємодію між атомами ^{3}He і ^{4}He знайдено фермірідинну поправку до ефективної маси. А також при різних густинах ^{4}He знайдено зсув матриці розсіяння в розчинах $^3\text{He}-{}^4\text{He}$ та критичну температуру фазового переходу фермі рідини з нормального в надплинний стан з куперівським спарюванням атомів ^{3}He в розчині $^3\text{He}-{}^4\text{He}$ в границі наднизьких температур. В роботі [150] розглядається поведінка домішок ^{3}He різної концентрації в суміші ^{3}He-^{4}He. Автори, стартуючи з хвильової функції основного стану системи як і у [71], виділили "гідродинамічний" доданок у власноенергетичній частині спектра суміші, який в границі сильного розведення компоненти ^{3}He, є енергією домішки ^{3}He, що занурена в рідкий гелій-4. І самоузгоджено отримали ефективну масу ^{3}He у вигляді розкладу за степенями концентрації домішок. Для дослідження основного стану домішки в рідкому ^{4}He автори роботи [151] підібрали пробну хвильову функцію системи, і скориставшись гіперланцюговим наближенням інтегральних рівнянь в теорії рідкого стану, знайшли хімічні потенціали, об'ємні коефіцієнти, та кореляційні функції домішкових атомів. При цьому взаємодія між атомами ^{4}He та домішкою ^{3}He задається потенціалом Ленард-Джонса,

який серед модельних вважається найбільш реалістичним для опису ефективного притягання між ізотопами гелію. Доречі, в роботі [71] висунута гіпотеза щодо можливості формування парного конденсату в гелії-II, якщо взаємодію між атомами ^{4}He моделювати цим потенціалом.

З введеням деформованої алгебри Гейзенберга [152] з'явилась неординарна ідея використати деформацію комутаційних співвідношень між узагальненими координатами та імпульсами до знахождення спектра рідкого гелію-4 [153] а також до дослідження рухомих домішок у багатобозонній системі в деформованому просторі колективних координат. Завдяки деформації дужок Пуассона можна аналітично знаходити точний розв'язок задачі на власні значення гамільтоніана системи. Насамперед це стосується моделей, де виникає проблема вибору потенціалу для опису багаточастинкових взаємодій. Зокрема, з деформацією, квадратичною за імпульсами, що приводить до існування мінімальної довжини [152], розв'язана задача D-вимірного ізотропного осцилятора [154], тривимірного осцилятора в теорії Дірака [155], знайдено точний розв'язок (2+1)-вимірного рівняння Дірака в постійному магнітному полі [156], розглянуто проблему макроскопічних систем [157] та проблему двох тіл [158] в деформованому просторі. Також було розглянуто проблему квантування простору і досліджено електромагнітне поле [159, 160], явище фотоефекту [161], обчислено інтенсивності поглинання і випромінювання фотонів [162] та знайдено енергію Казимира деформованого поля [163].

Дослідження реальних бозе-систем у деформованому просторі почалось з робіт [164, 165], де бозе-частинки моделюють сукупністю гармонічних q-деформованих осциляторів. Тут автори, розглядаючи газ фононних збуджень в ^{4}He як ідеально деформований бозе-газ, отри-

мали теплоємність рідкого гелію-4 в залежності від параметра, який класифікує нееквівалентність представлення q-деформованої алгебри. В роботі [166] автори користуються представленням чотирипараметричної q-алгебри, і описуючи систему вільними f-осциляторами, моделюють потенціал та знаходять спектр. Авторами роботи [167] розглянуто двопараметричну модель бозе-газу і знайдено одно- та двочастинкову функцію розподілу бозонів. В серії робіт, узагальнюючи деформацію Кемпфа, розглянуто термодинаміку ідеальних бозе- [168], [169] та ферміе- систем [170]. В роботі [171] з деформацією квадратичною за узагальненими імпульсами, досліджено явище Бозе-Айнштайнівської конденсації релятивістського ідеального бозе-газу.

Дослідження домішкових станів теоретико-польовими методами дозволяє побудувати самоузгоджену схему розрахунку параметрів бозеполярона не лише в границі низьких температур, а й отримати нетривіальні результати при скінченних температурах. В роботі [172] розглянуто властивості домішки в двовимірному бозе-конденсаті, та показано, що спектр полярона добре визначений в області температур, які є нижче температури точки фазового переходу Березінського-Костерліца-Таулеса, також знайдено низькотемпературну асимптотику одночастинкової функції Гріна домішки в границі слабкого зв'язку. Авторами роботи [173] досліджено властивості домішки в тривимірному бозе-конденсаті поблизу температури фазового переходу. Зокрема, в границі слабкого зв'язку, енергія бозе-полярона має характерну немонотонну поведінку в околі критичної температури і спектр домішки загасає. В роботі [174], використовуючи формалізм мацубарівських функцій Гріна, отримано дві гілки спектра притягального бозеполярона, за умови сильної бозон-домішкової взаємодії. При цьому, квазічастинка з високою енергією може існувати лише в області тем-

ператур, значно нижчих за критичну. В той же час, енергія полярона є мінімальною в точці фазового переходу системи в надплинний стан, і для температур, що суттєво перевищують критичну, спектр квазічастинки стрімко загасає. Очікується, що така поведінка бозе-полярона буде експериментально підтверджена для домішкових атомів, що рухаються в ультрахолодних надплинних фермі-рідинах та у рідкому гелії-4.

РОЗДІЛ 2

ДОМІШКОВИЙ АТОМ В СЛАБКОВЗАЄМОДІЮЧОМУ БОЗЕ-ГАЗІ

2.1. Вступ

В загальному випадку систему, що складається з N безспінових частинок, які взаємодіють між собою та домішковим атомом, можна описати таким гамільтоніаном:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_I + \widehat{H}_L + \widehat{H}_{int} \tag{2.1}$$

Тут $\widehat{H}_I$ є кінетичною енергією домішки:

$$\widehat{H}_I = \frac{\widehat{\mathbf{P}}^2}{2M}, \tag{2.2}$$

де $\widehat{\mathbf{P}} = -i\hbar\partial/\partial\mathbf{r}$, а величини M, $\mathbf{r}$ позначають масу та координату домішкового атома відповідно.

Оператор $\widehat{H}_B$ є гамільтоніаном взаємодіючих бозе-частинок. Він є діагональною формою у наближенні Боголюбова і на мові операторів народження $\widehat{b}^+_{\mathbf{k}}$ та знищення $\widehat{b}_{\mathbf{k}}$ має вигляд:

$$\widehat{H}_B = E_B + \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \hbar\omega_k \widehat{b}^+_{\mathbf{k}}\widehat{b}_{\mathbf{k}}, \tag{2.3}$$

де E_B - є енергією основного стану бозе-частинок в наближенні Боголюбова, $\hbar\omega_k$ - боголюбівський спектр.

Оператор $\widehat{H}_{int}$ описує взаємодію між бозонами та домішкою, та вра-

ховує процеси розсіяння домішкового атома на бозе частинках:

$$\widehat{H}_{int} = \rho\bar{\nu}(0) + \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\sqrt{\rho}\bar{\nu}(k)\sqrt{\frac{\hbar k^2}{2m\omega_k}}\left(\widehat{b}^{+}_{-\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{kr}} + \widehat{b}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}}\right), \quad (2.4)$$

де $\rho = N/V$, m є рівноважною густиною та масою бозе-частинок відповідно. А коефіцієнти $\bar{\nu}(0)$ та $\bar{\nu}(k)$ є фур'є-образами потенціалу взаємодії між домішкою та бозе-частинками при $k = 0$ та $k \neq 0$ відповідно.

Для опису взаємодії між бозонами та домішкою ми замість реального потенціалу використовуватимемо модельний псевдопотенціал твердих сфер, що добре описує контактне відштовхування між частинками. Його фур'є-образ для усіх значень хвильових векторів є постійною величиною, і визначається довжиною s-розсіяння $\bar{a}$ домішкового атома на бозе-частинці. Тому

$$\bar{\nu}(k) = 2\pi\hbar^2\bar{a}\frac{M+m}{mM} \quad (2.5)$$

Така модельна система використовується в багатьох роботах для вивчення властивостей бозе-полярона. Бозе-полярoном прийнято називати домішку, яка рухаючись у взаємодіючому бозе-середовищі, розсіюється на атомах середовища внаслідок ефективної бозон-домішкової взаємодії, і стає квазічастинкою. Причому, знак константи зв'язку $\bar{a}$ у (2.5) вказуватиме, чи полярон є притягальним ($\bar{a} < 0$) чи відштовхувальним ($\bar{a} > 0$).

Попри використання модельних потенціалів, які потребують регуляризації, навіть в наближенні Боголюбова для багатобозонної системи,вивчення основних характеристик домішки (спектра і його загасання, енергії занурення та ефективної маси) є нетривіальною задачею.

Дослідження домішкових станів, зокрема, той факт, що домішка самолокалізується і рухаючись в середовищі бозонів має скінченний

час життя, спонукає до вивчення так званої проблеми нестійкості бозе-полярона різними методами.

Тому нашим першочерговим завданням є знаходження повної енергії системи "домішка плюс бозе-частинки" у випадку домішки, що рухається в сильнорозрідженому розрідженому бозе-газі з бозе-конденсатом (див. Розд. 2.2). Моделюючи взаємодіючий бозе–газ твердими сферами, ми акцентуємо увагу на знаходженні спектра домішки в наближенні Боголюбова. Зокрема, цікавими до обговорення є результати для загасання спектра домішкового атома, отримані в рамках теорії Брілюена–Вігнера (див. Розд. 2.3). Хоча запропонований нами підхід щодо обчислення енергії домішки не вирішує проблеми нестійкості бозе-полярона, але він дає добрі результати для ефективної маси домішкового атома (див. Розд. 2.4).

2.2. Повна енерґія системи

Для домішки з імпульсом $\hbar\mathbf{q}$, що влітає в середовище бозонів, які перебувають в основному стані $|0\rangle$ з енергією E_B, вираз для повної енергії схематично запишемо у вигляді трансцендентного рівняння:

$$E_q = E_q^{(0)} + \rho\bar{\nu}(0) - I(E_q), \tag{2.6}$$

де $E_q^{(0)}$ є нульовим наближенням до енергії основного стану системи "домішковий атом плюс взаємодіючі бозони":

$$E_q^{(0)} = \frac{\hbar^2 q^2}{2M} + E_B, \tag{2.7}$$

другий доданок у (2.6) є діагональним матричним елементом оператора збурення (2.4), що обчислюється на хвильових функціях основного стану системи $|0, \mathbf{q}\rangle$. Наступний доданок є другою поправкою до енер-

гії (2.6):

$$I(E_q) = \sum_{\substack{\mathbf{q}'\neq 0 \\ \mathbf{q}'+\mathbf{k}'\neq 0}} \sum_{\mathbf{k}'\neq 0} \frac{|\langle \mathbf{k}', \mathbf{q}'|\widehat{H}_{int}|0, \mathbf{q}\rangle|^2}{E^{(0)}_{q',k'} - E_q}. \tag{2.8}$$

Оскільки газ бозе-частинок ми вважаємо слабковзаємодіючим, то найбільш ймовірними будуть переходи, що супроводжуються народженням одного фонона. Тому проміжний стан $|\mathbf{k}', \mathbf{q}'\rangle$ визначатиметься набутим імпульсом квазічастинки–домішки $\hbar\mathbf{q}'$ та енергією першого збудженого стану середовища:

$$E^{(0)}_{q',k'} = \frac{\hbar^2 q'^2}{2M} + \hbar\omega_{k'} + E_B. \tag{2.9}$$

Для знаходження енергії E_q зручно здійснити її аналітичне продовження у комплексу площину $E_q \to E_q + i\eta$, причому $\eta \to +0$, та надалі працювати з її дійсною та уявною частинами:

$$E_q - E_B = \Delta\varepsilon_q - i\Gamma_q, \tag{2.10}$$

де величини $\Delta\varepsilon_q$ та Γ_q , визначатимуться другою поправкою (2.8) теорії збурень, дійсну і уявну частину якої можна виділити, скориставшись формулою Сохоцького. Отож,

$$\Delta\varepsilon_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2M} + \rho\bar{\nu}(0) - \mathrm{Re}\, I(\Delta\varepsilon_q), \tag{2.11}$$

$$\Gamma_q = \mathrm{Im}\, I(\Delta\varepsilon_q) \tag{2.12}$$

Домішка, рухаючись в середовищі бозонів з імпульсом $\hbar\mathbf{q}$, завжди втрачатиме енергію. Але навіть коли домішка гальмуватиметься слабковзаємодіючими бозонами, її енергія не буде рівна нулеві. Величина цієї енергії відповідає енергії занурення домішки у середовище, і її іноді називають просто енергією полярона. Якщо домішка в середовищі

зазнаватиме відштовхування, то її енергія буде іти на випромінювання фононів і $\Delta\varepsilon_q$ завжди додатня. Якщо ж взаємодія між частинками буде притягальною, то $\Delta\varepsilon_q$ може набувати довільних значень. Причому, у випадку сильної притягальної бозон–домішкової взаємодії домішка самолокалізується, і навіть можуть утворюватися полярон-бозонні зв'язані стани "домішка плюс частинки середовища". Уявна частина спектра Γ_q визначатиме швидкість втрати енергії домішкою і фактично вказуватиме на час життя квазічастинки-домішки. Тому набута енергія занурення домішки має суттєво перевищувати величину загасання спектра Γ_q. Коли ж $\Delta\varepsilon_q < \Gamma_q$ домішка, влетівши в середовище практично одразу втратить усю енергію, і зупиниться. Слід також зазначити, що у випадку $\Delta\varepsilon_q \backsimeq \Gamma_q$ рівняння (2.11) і (2.12) є системою трансцедентних рівнянь, в якій $I(\Delta\varepsilon_q \to \Delta\varepsilon_q - i\Gamma_q)$. знаходження розвязку такої системи є доволі громіздким, тому ми надалі розглядатимемо випадок $\Delta\varepsilon_q \gg \Gamma_q$, і пізніше обговоримо межі застосовності нашого підходу.

2.3. Домішковий спектр та його загасання

Запишемо спектр домішки (2.11) в явному вигляді:

$$\Delta\varepsilon_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2M} + \rho\bar{\nu}(0) - \frac{\rho\bar{\nu}_0^2}{V}\sum_{\mathbf{k}'\neq 0}\frac{\hbar^2 k'^2}{2m}\frac{1/\hbar\omega_{k'}}{\frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + \frac{\hbar^2\mathbf{k}'\mathbf{q}}{M} + \hbar\omega_{k'} - \Delta\varepsilon_q}, \quad (2.13)$$

де спектр Боголюбова, виражається через Фур'є–образ потенціалу взаємодії між бозе-частинками $\nu(k)$:

$$\hbar\omega_{k'} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\sqrt{1 + 2\rho\nu(k)/\frac{\hbar^2 k'^2}{2m}} \quad (2.14)$$

Звернемо увагу на те, що останній доданок у (2.13) є розбіжним, оскільки ми описуємо взаємодію між бозонами та домішкою модель-

ним потенціалом. Збіжність цього внеску забезпечує перенормування константи зв'язку $\bar{\nu}(0)$ у такий спосіб [175], [176]:

$$\bar{\nu}(0) \to \bar{\nu}(0) + \frac{\bar{\nu}^2(0)}{V} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \frac{2Mm}{(m+M)\hbar^2 k^2}. \tag{2.15}$$

Зауважимо, що у випадку реального міжчастинкового потенціалу взаємодії між домішкою та бозе-системою цю збіжність забезпечуватиме фур'є-образ $\bar{\nu}(k)$, який занулюється для великих значень $\mathbf{k}$, а в довгохвильовій області є постійною величиною.

Запишемо у явному вигляді загасання спектру домішки (2.12):

$$\Gamma_q = \pi \frac{\rho \bar{\nu}^2(0)}{V} \sum_{\mathbf{k}'\neq 0} \frac{\hbar k'^2}{2m\omega_{k'}} \delta\left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + \hbar\omega_{k'} + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'\mathbf{q}}{M} - \Delta\varepsilon_q \right). \tag{2.16}$$

Інтеграл у виразі для спектра (2.16) у випадку довільної взаємодії (коли фур'є-образ є сталим і коли $\bar{\nu}(k) \neq \text{const}$) є завжди збіжним. Окрім того, у зв'язку з наявністю δ-функції у (2.16), зрозуміло, що $\Gamma_q \neq 0$ лише у випадку додатніх значень енергії домішки $\Delta\varepsilon_q > 0$.

Далі ми будемо досліджувати повну імпульсну залежність домішкового спектра і його загасання з точністю до другого порядку теорії збурень Релея-Шредінґера, а також, вивчатимемо тільки довгохвильову асимптотику цих параметрів методом теорії збурень Брілюена-Віґнера.

2.3.1. Випадок теорії збурень Релея-Шредінґера Навіть у границі звичайної теорії збурень, коли $\Delta\varepsilon_q = 0$ під знаком суми у (2.13), знаходження спектра домішки є доволі громіздким.

Обчислимо суму у (2.13) в термодинамічній границі ($V \to \infty, N \to \infty, \rho = \text{const}$), здійснивши перехід $\sum_{\mathbf{k}'} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}'$ у знерозмірених змінних:

$$k = \frac{\hbar k'}{2mc} \qquad\qquad p = \frac{\hbar q}{mc}, \tag{2.17}$$

де $c = \sqrt{\rho\nu(0)/m}$ - швидкість звуку в середовищі бозе-частинок, а p - знерозмінний імпульс домішки. Отримані інтеграли за змінною k, обчислюються в сенсі головного значення з використанням заміни $x = \sqrt{1+k^2} - k$, а кутова частина заінтегровується легко.

Запишемо результат розрахунку спектра у такій формі:

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_p = \frac{p^2}{2\gamma} + \frac{\bar{a}}{a}\frac{1+\gamma}{2\gamma}\Big(1 + \frac{\bar{a}}{a}\sqrt{\frac{\rho a^3}{\pi}}\epsilon_p(\gamma)\Big), \tag{2.18}$$

де $\gamma = M/m$, $\Delta\tilde{\varepsilon}_p = \Delta\varepsilon_p/mc^2$ знерозмірені маса та енергія відповідно. Коефіцієнт $\sqrt{\rho a^3/\pi}$ є газовим параметром, який задає силу ближнього відштовхування між бозе-частинками. Величина $\epsilon_p(\gamma)$ є поправкою до спектра (2.18). ЇЇ поведінка суттєво залежить від співвідношення мас між частинками γ, та визначатиметься імпульсом домішкового атома (див. Рис. 2.1). Зауважимо, що в границі $p \to \infty$ ведучий доданок у (2.18) є квадратичним за імпульсом. А коли $p \to 0$, поправка до спектра прямує до постійної величини. Тобто, як і повинно бути, нерухома домішка завжди матиме ненульву енергію. Наведемо явний вигляд поправки до спектра в границі теорії збурень Релея-Шредінгера, та проаналізуємо часткові випадки.

У випадку легких домішок ($\gamma < 1$), поправка до спектру:

$$\begin{aligned}\epsilon_p(\gamma) &= \frac{8}{1-\gamma}\Big[1 - \frac{1}{1-\gamma^2}\frac{1}{p}\int_0^p dp'\theta(p' - \sqrt{1-\gamma^2}) \times \\ &\times \Big(\frac{\gamma^2 - \gamma^4 + p'^2(1+\gamma^2)}{2\sqrt{1+p'^2-\gamma^2}}\ln\Big|\frac{1+\sqrt{1+p'^2-\gamma^2}}{1-\sqrt{1+p'^2-\gamma^2}}\Big| + \gamma p'\ln\Big|\frac{\gamma-p'}{\gamma+p'}\Big|\Big)\Big],\end{aligned} \tag{2.19}$$

причому, має виконуватись умова $p > \sqrt{1-\gamma^2}$.

В границі $p \to 0$ вираз (2.19):

$$\epsilon_0(\gamma) = \frac{8}{1-\gamma}\Big(1 - \frac{\gamma^2}{2\sqrt{1-\gamma^2}}\ln\Big|\frac{1+\sqrt{1-\gamma^2}}{1-\sqrt{1-\gamma^2}}\Big|\Big) \tag{2.20}$$

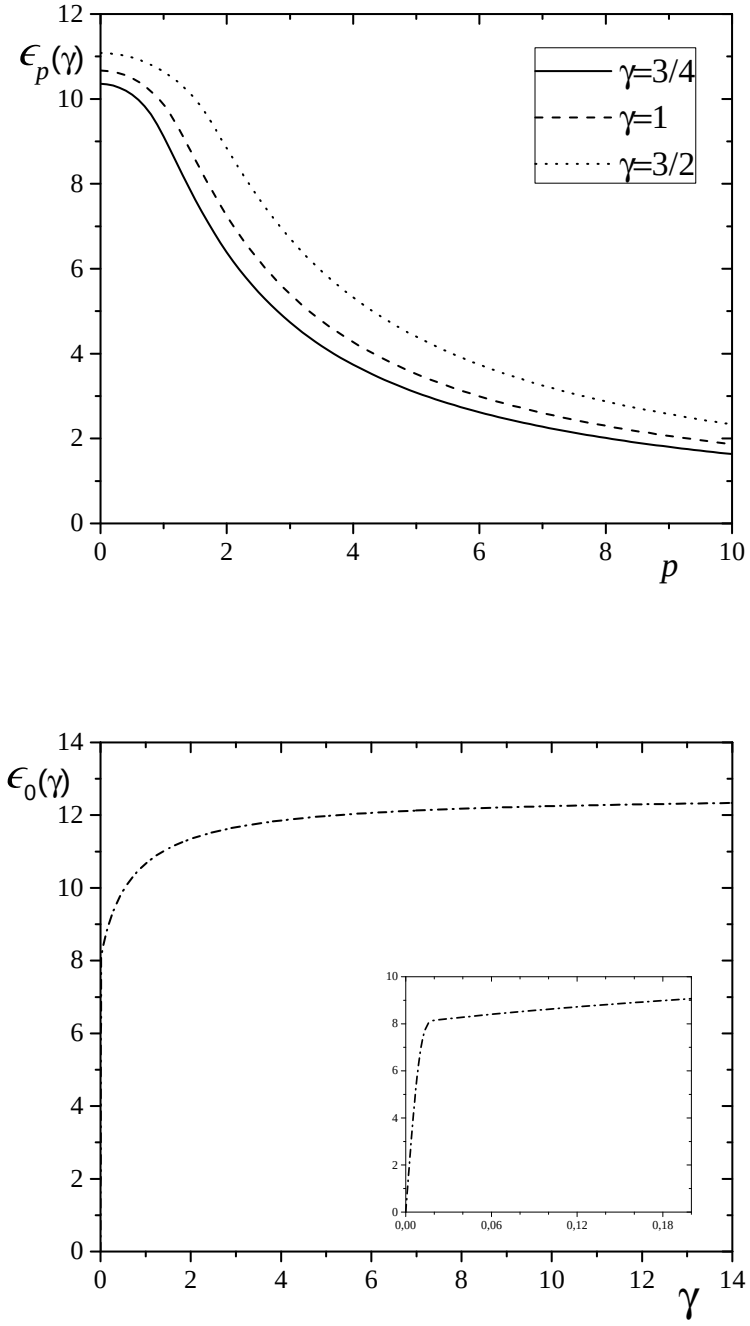

Рис. 2.1. Поправка до спектра в границі теорії збурень Релея-Шредінгера. Згори: залежність поправки від імпульсу домішки. Знизу: поправка в області малих імпульсів, в залежності від маси домішки. Суцільна, пунктирна, точкова лінії відповідають різним співвідношенням мас між домішкою та частинками середовища.

Коли $\gamma > 1$, що відповідає важким домішкам, будемо мати:

$$\epsilon_p(\gamma) = \frac{8}{1-\gamma}\Big[1 + \frac{1}{\gamma^2-1}\frac{1}{p}\int_0^p dp'\theta\left(\sqrt{\gamma^2-1}-p'\right)\times \qquad (2.21)$$

$$\times \quad \Big(\frac{\gamma^2-\gamma^4+p'^2(1+\gamma^2)}{\sqrt{\gamma^2-1-p'^2}}\arctan\sqrt{\gamma^2-1-p'^2}+$$

$$+ \quad \gamma p'\ln\Big|\frac{\gamma-p}{\gamma+p'}\Big|\Big)+\frac{1}{\gamma^2-1}\frac{1}{p}\int_0^p dp'\theta\left(p'-\sqrt{\gamma^2-1}\right)\times$$

$$\times \quad \Big(\frac{\gamma^2-\gamma^4+p'^2(1+\gamma^2)}{2\sqrt{1+p'^2-\gamma^2}}\ln\Big|\frac{1+\sqrt{1+p'^2-\gamma^2}}{1-\sqrt{1+p'^2-\gamma^2}}\Big|+$$

$$+ \quad \gamma p'\ln\Big|\frac{\gamma-p'}{\gamma+p'}\Big|\Big)+\frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2-1}}\arctan\sqrt{\gamma^2-1}\Big],$$

зрозуміло, що в границі нерухомої домішки, вираз для поправки (2.21) співпадатиме з (2.20).

Коли ж домішкою є частинка тої ж маси, що частинки середовища, тобто $\gamma=1$, то

$$\epsilon_p=\frac{4}{p}\int_0^p\Big(\frac{1+p^2}{p^2}-\frac{(1-p^2)^2}{2p^3}\ln\Big|\frac{1+p}{1-p}\Big|\Big)dp, \tag{2.22}$$

в границі $p\to 0$, для усіх часткових випадків ми отримаємо очікуваний результат у вигляді константи: $\epsilon_0=\dfrac{32}{3}$.

Далі займемось розрахунком загасання спектра (2.16). Суму за $\mathbf{k}'$ у виразі для загасання спектра, обчислюватимемо теж в термодинамічній границі, вважаючи, що $\Delta\varepsilon_q=0$. Зауважимо також, що аргумент δ–функції у (2.16) фактично вказує на закон збереження енергії у процесі народження одного фонона. А це означає, що домішка з імпульсом $\hbar\mathbf{q}$, передаватиме свою енергію бозонам доти, поки швидкість звуку в середовищі не перевищуватиме її швидкості. Такі міркування дозволять нам обчислити інтеграл (2.16) у скінченних межах.

Не вдаючись в деталі обчислень, запишемо остаточний вираз для загасання, у знерозмірених змінниих:

$$\tilde{\Gamma}_p=\sqrt{\pi\rho a^3}\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^2\frac{(1+\gamma)^2}{\gamma}\frac{1}{p}\left(k_0\sqrt{1+k_0^2}-\ln\left|k_0+\sqrt{1+k_0^2}\right|\right), \tag{2.23}$$

де

$$k_0 = \frac{1}{1-\gamma^2}\left(p - \gamma\sqrt{p^2+1-\gamma^2}\right), \qquad \tilde{\Gamma}_p = \Gamma_p/mc^2 \tag{2.24}$$

Коли домішка є частинкою такої ж маси, що й атоми середовища ($\gamma = 1$), то одержимо:

$$\tilde{\Gamma}_p = \sqrt{\pi\rho a^3}\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^2\left(\frac{p^4-1}{p^3} - 4\frac{\ln|p|}{p}\right), \tag{2.25}$$

причому, $p > 1$.

Таким чином, в границі $\Delta\varepsilon_q = 0$, наявність загасання коливань Γ_p визначатиметься лише знерозміреним імпульсом домішки p, за умови $p > \gamma$. Справді, для нерухомої домішки загасання немає. В цьому легко переконатись, обчисливши границю $\Gamma_{p\to 0}$ у (2.23). А в границі $\Gamma_{p\to\infty} \sim p$ лінійно зростає зі збільшенням швидкості домішки. Зауважимо також, що в цій границі задовільняється умова $\tilde{\Gamma}_p/\Delta\tilde{\varepsilon}_p \ll 1$.

Отже, беручи до уваги отримані нами результати, домішкові стани у сильно розведеному бозе-конденсаті завжди добре визначені, за умови $\Gamma_p/\Delta\varepsilon_p \ll 1$, в границі слабкого зв'язку $\sqrt{\rho a^3}(\bar{a}/a)^2 \ll 1$.

2.3.2. Випадок теорії збурень Бріллюена-Віґнера Для знаходження спектра, коли $\Delta\varepsilon_q \neq 0$ у (2.13) під знаком суми, розкладемо його в ряд за степенями q:

$$\Delta\varepsilon_q = \Delta\varepsilon_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{2M^*} + o(q^4), \tag{2.26}$$

де

$$\Delta\varepsilon_0 = \rho\bar{\nu}(0) - \frac{\rho\bar{\nu}^2(0)}{V}\sum_{\mathbf{k}'\neq 0}\left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2m}\frac{1/\hbar\omega_{k'}}{\frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + \hbar\omega_{k'} - \Delta\varepsilon_0} - \frac{1}{\frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}}\right) \tag{2.27}$$

є енергією занурення домішки. Причому, знак енергії $\Delta\varepsilon_0$ може бути як від'ємним так і додатнім, і визначатиметься типом взаємодії (притягальна чи відштовхувальна) між домішкою та бозонами.

Другий доданок у (2.26) є кінетичною енергією домішки з ефективною масою M^*:

$$\frac{M}{M^*} = 1 - \frac{1}{3}\frac{\rho\bar{\nu}^2(0)}{V}\frac{1}{f(\Delta\varepsilon_0)}\sum_{\mathbf{k}'\neq 0}\frac{\hbar^4 k'^4}{mM}\frac{1/\hbar\omega_{k'}}{\left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + \hbar\omega_{k'} - \Delta\varepsilon_0\right)^3} \tag{2.28}$$

де функція

$$f(\Delta\varepsilon_0) = 1 + \frac{\rho\bar{\nu}^2(0)}{V}\sum_{\mathbf{k}'\neq 0}\frac{\hbar^2 k'^2}{2m}\frac{1/\hbar\omega_{k'}}{\left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + \hbar\omega_{k'} - \Delta\varepsilon_0\right)^2}. \tag{2.29}$$

Значення ефективної маси домішки повністю визначатиметься виразом (2.28), тому спершу ми повинні обчислити енергію занурення домішки $\Delta\varepsilon_0$, а опісля її ефективну масу.

Інтеграли у формулах (2.27–2.29) можна обчислити аналітично, в сенсі головного значення, як запропоновано вище (див. Розд. 2.3.1). Виконавши прості, але тим не менш громіздкі розрахунки, запишемо рівняння для знаходження енергії занурення домішки:

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{\bar{a}}{a}\frac{1+\gamma}{2\gamma}\left(1 + \frac{\bar{a}}{a}\sqrt{\frac{\rho a^3}{\pi}}\epsilon_0(\gamma, \Delta\tilde{\varepsilon}_0)\right), \tag{2.30}$$

де $\epsilon_0(\gamma, \Delta\tilde{\varepsilon}_0)$ — поправка до енергії бозе-полярона:

$$\epsilon_0(\gamma, \Delta\tilde{\varepsilon}_0) = \frac{8}{1-\gamma}\times \tag{2.31}$$

$$\left[1 + \left(\frac{\gamma^2}{1-\gamma} + \frac{\gamma\Delta\tilde{\varepsilon}_0}{2}\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)\mathcal{I}_1(\gamma, \Delta\tilde{\varepsilon}_0) - \left(\frac{\gamma^2}{1-\gamma} + \frac{\gamma\Delta\tilde{\varepsilon}_0}{2}\right)\mathcal{I}_2(\gamma, \Delta\tilde{\varepsilon}_0)\right];$$

тут величини $\mathcal{I}_{1,2}(\gamma, \Delta\tilde{\varepsilon}_0)$ є табличними інтегралами:

$$\mathcal{I}_1(\gamma, \Delta\tilde{\varepsilon}_0) = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x^2 - x_-^2)(x^2 - x_+^2)}; \mathcal{I}_2(\gamma, \Delta\tilde{\varepsilon}_0) = \int_{-1}^{1}\frac{x^2 dx}{(x^2 - x_-^2)(x^2 - x_+^2)},$$

де

$$x_\pm = \frac{1}{1-\gamma}\left(1 + \gamma\Delta\tilde{\varepsilon}_0 \pm \sqrt{\left(1 + \gamma\Delta\tilde{\varepsilon}_0\right)^2 + \gamma^2 - 1}\right).$$

причому, результат інтегрування залежить від співвідношення між параметрами γ і $\Delta\tilde{\varepsilon}_0$.

Незважаючи на результат звичайної теорії збурень, де загасання спектра в границі $p \to 0$ завжди рівне нулеві, в нас існуватиме ненульовий розв'язок рівняння (2.30) для загасання спектра Γ_0, якщо використати підхід теорії збурень Брілюена–Вігнера. Як правило, ненульове значення загасання пов'язують з проблемою нестійкості бозе-полярона, досліджуючи наближено поведінку такої домішки в околі $\Gamma_0 \simeq \Delta\varepsilon_0$ [48, 94]. В нашому підході таке трактування є фізично не правильним, а величина $\Gamma_0/\Delta\varepsilon_0$ визначає тільки межі застосовності довільної схеми апроксимації.

Тож оцінимо загасання спектра (2.16) в границі нерухомої домішки з енергією занурення $\Delta\varepsilon_0$. Провівши не складні обчислення, в знерозмірених змінних одержимо для усіх значень γ:

$$\tilde{\Gamma}_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho a^3}{\pi}}\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^2 \frac{(1+\gamma)^2}{\gamma}\frac{k_0^{3/2}}{\gamma(1+2k_0)+2\sqrt{k_0(1+k_0)}}, \qquad (2.32)$$

де

$$k_0 = \frac{\gamma}{2(1-\gamma^2)}\left(\gamma + \Delta\tilde{\varepsilon}_0 - \sqrt{(\gamma+\Delta\tilde{\varepsilon}_0)^2 + \Delta\tilde{\varepsilon}_0^2(\gamma^2-1)}\right); \quad \tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_0/mc^2.$$

Зрозуміло, що бозе-полярон залишатиметься стабільним в границі слабкого зв'язку, але, без сумніву, найбільш цікавою є область сильної бозон-домішкової взаємодії, де застосування теорії збурень Брілюена–Вігнера може дати деякі нетривіальні результати. Зокрема, в цій границі загасання має кореневу поведінку з енергії полярона:

$$\tilde{\Gamma}_0 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho a^3}{\pi}}\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{1+\gamma}{\gamma}}\sqrt{\Delta\tilde{\varepsilon}_0}, \qquad \Delta\tilde{\varepsilon}_0 \gg 1. \qquad (2.33)$$

2.4. Параметри спектру бозе-полярона

Спершу обговоримо поведінку енергії полярона та коефіцієнта загасання у формі відношення $\Gamma_0/\Delta\varepsilon_0$, що наведенні на Рис. (2.2) — (2.5). Притягальний полярон може мати як додатні так і від'ємні значення енергії занурення (див. Рис. 2.2 та Рис. 2.3, згори). Енергія відштовхувального полярона може набувати лише додатніх значень (див. Рис. 2.4 та Рис. 2.5, згори). У випадку притягальної взаємодії між домішкою та бозе-частинками (коли $\bar{a} < 0$), важчі домішки залишатимуть потенціальну яму, сформовану середовищем бозонів (див. точкова лінія на Рис. 2.2 та Рис. 2.3, згори). Адже за рахунок навіть слабкої притягальної контактної взаємодії між бозонами, енергія занурення домішки стає від'ємною і за модулем зменшується зі збільшенням її маси. Якщо б ми для опису міжчастинкової взаємодії обрали більш реалістичний потенціал, то важчі домішки б навпаки, заглиблювалися в яму. У випадку як слабкого так і сильного відштовхування між домішкою та бозе-частинками, енергія занурення росте майже лінійно зі збільшенням параметра $\bar{a}/a$ (див. Рис. 2.4 та Рис. 2.5, згори). Спектр домішкового атома загасатиме у випадку сильного притягання (див. Рис. 2.2 та Рис. 2.3, знизу), лише коли енергія домішки є додатньою. У випадку ж відштовхувальної взаємодії між домішкою і багатобозонною системою, спектр завжди загасатиме (див. Рис. 2.4 та Рис. 2.5, знизу). Отже, як видно з цих рисунків, загасання спектра зростатиме зі збільшенням сили взаємодії. У випадку $\rho a^3 = 5 \times 10^{-4}$ наші розрахунки вказують на те, що притягальний полярон є добре визначеним для значень $\bar{a}/a < 15 \div 16$ (див. Рис. 2.2 та Рис. 2.3, знизу), в той час, швидкість загасання спектра відштовхувального полярона стає величиною того ж порядку, що й енергія занурення для значень

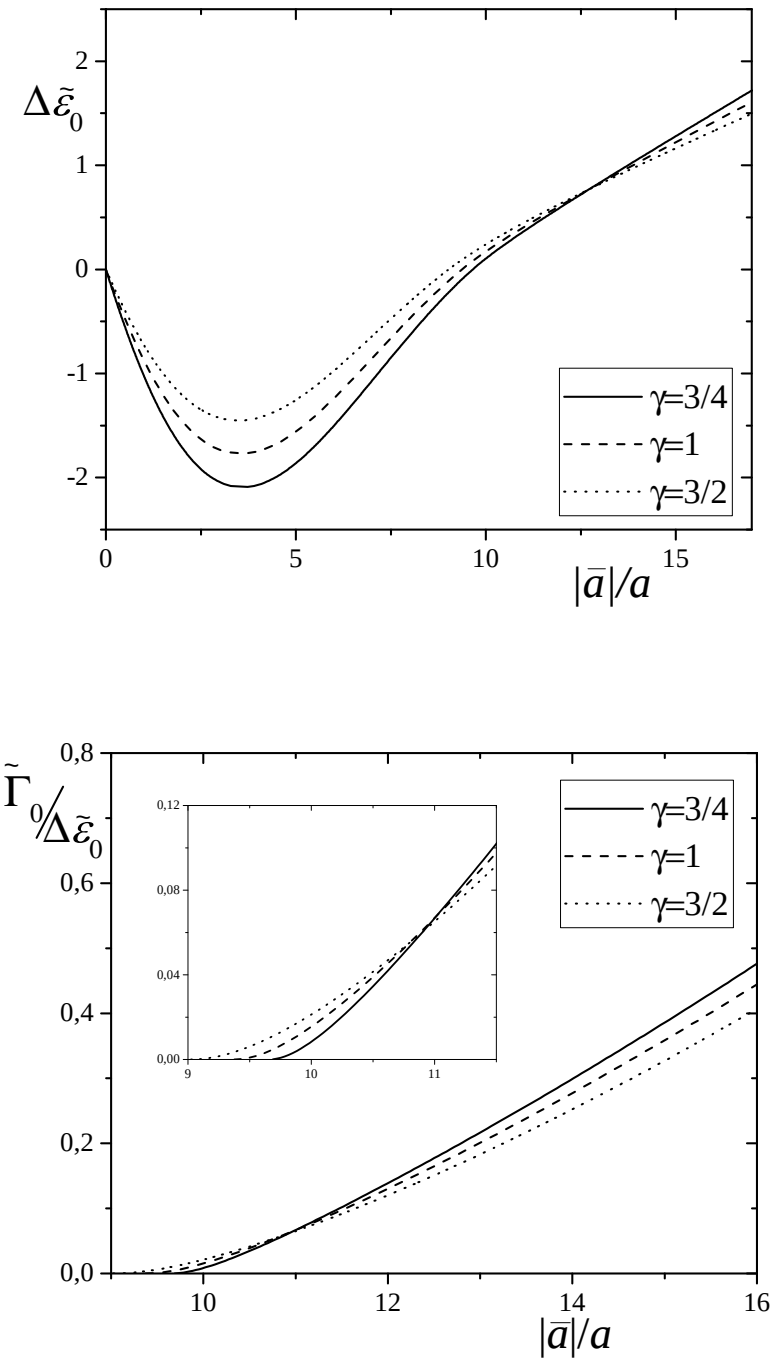

Рис. 2.2. Притягальний полярон ($\rho a^3 = 5 \times 10^{-4}$). Згори: енергія занурення домішкового атома; знизу: відношення загасання спектра до енергії занурення домішки. Суцільна, пунктирна, точкова лінії відповідають різним співвідношенням мас між домішкою та частинками середовища.

$\bar{a}/a \simeq 20$ (див. Рис. 2.4 та Рис. 2.5, знизу). Коли газовий параметр рівний $\rho a^3 = 3 \times 10^{-2}$, застосовність нашого підходу обмежується значенням взаємодії $\bar{a}/a < 5 \div 6$ для притягального, і значенням $\bar{a}/a < 8 \div 10$ для відштовхувального бозе-поляронів.

Виходячи з такого аналізу спектра домішки, розрахунок ефективної маси ми будемо проводити в області $\Delta\varepsilon_q > \Gamma_q$. ЇЇ обчислення зводиться до розрахунку вже раніше розглянутих інтегралів. Зокрема, якщо продиференціювати за параметром $\Delta\varepsilon_q$ вираз для енергії занурення (2.27), одержимо внесок (2.29) у ефективну масу. Інтеграл з кубічним множником у виразі для ефективної маси (2.28) є добре збіжним в усій області хвильових векторів, і не складно обчислюється диференціюванням за параметром γ^{-1}.

Запишемо явний вигляд ефективної маси в знерозмірених змінних:

$$\frac{M}{M^*} = 1 \; - \; \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\rho a^3}{\pi}}\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^2 \frac{(1+\gamma)^2}{\gamma^3} \frac{\partial^2 \mathcal{I}_2(\gamma, \Delta\tilde{\varepsilon}_0)}{\partial(\gamma^{-1})^2} \Big/ \Big/ \left(1 + 4\sqrt{\frac{\rho a^3}{\pi}}\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^2 \frac{(1+\gamma)^2}{\gamma} \frac{\partial \mathcal{I}_1(\gamma, \Delta\tilde{\varepsilon}_0)}{\partial \Delta\tilde{\varepsilon}_0}\right). \tag{2.34}$$

Зобразимо графічно поведінку ефективної маси на (Рис. 2.6), та (Рис. 2.7)

Збільшення притягальної (Рис. 2.6, та Рис. 2.7, ліворуч) і відштовхувальної (Рис. 2.6, та Рис. 2.7, праворуч) взаємодій між домішкою та бозе-частинками приводить до зростання ефективної маси бозе-полярона до певного критичного значення взаємодії. У випадку дуже сильної взаємодії, ефективна маса притягального та відштовхувального поляронів поступово зменшується.

Зауважимо, що енергію занурення та ефективну масу на усіх графіках ми наводимо вперше чергу для домішок інертних газів, що занурені в сильно розріджений бозе-газ.

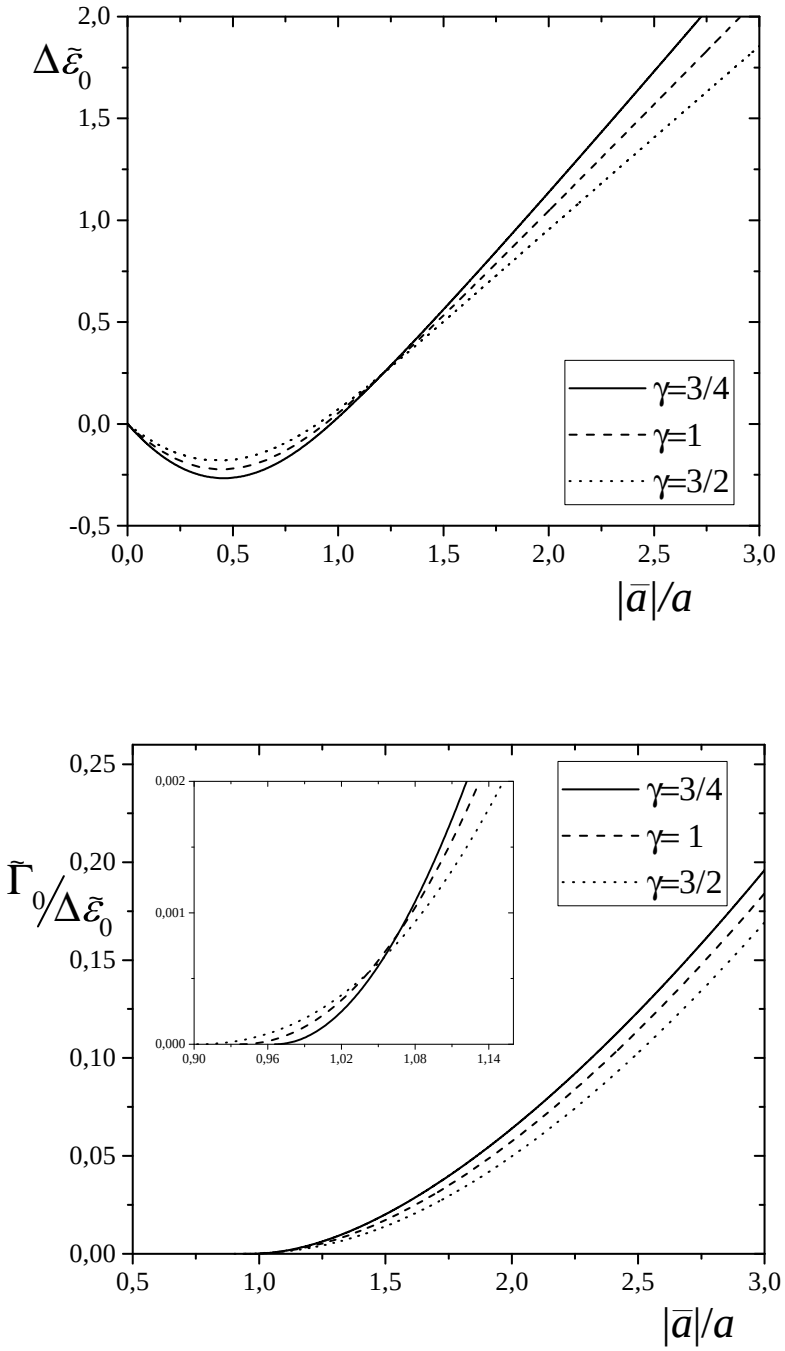

Рис. 2.3. Притягальний полярон ($\rho a^3 = 3 \times 10^{-2}$). Згори: енергія занурення домішкового атома; знизу: відношення загасання спектра до енергії занурення домішки. Суцільна, пунктирна, точкова лінії відповідають різним співвідношенням мас між домішкою та частинками середовища.

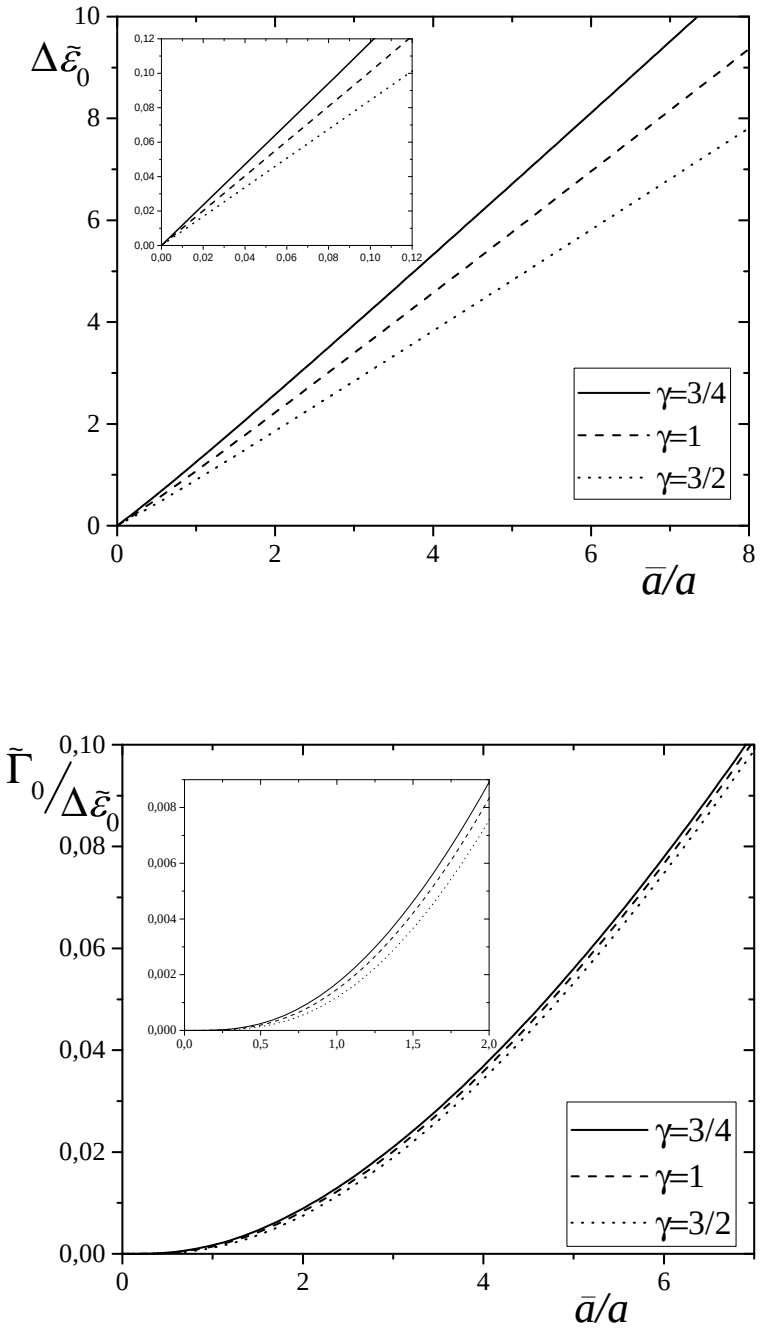

Рис. 2.4. Відштовхувальний полярон ($\rho a^3 = 5 \times 10^{-4}$). Згори: енергія занурення домішкового атома; знизу: відношення загасання спектра до енергії занурення домішки. Суцільна, пунктирна, точкова лінії відповідають різним співвідношенням мас між домішкою та частинками середовища.

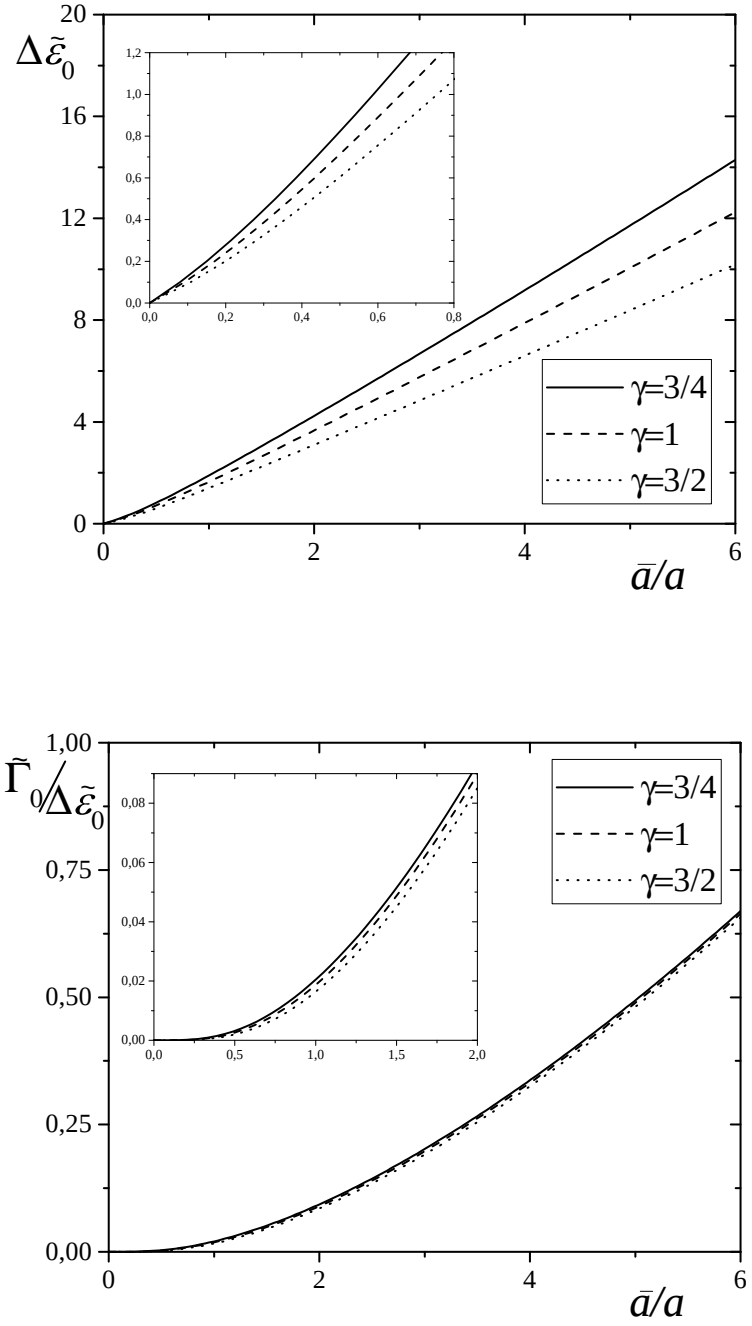

Рис. 2.5. Відштовхувальний полярон ($\rho a^3 = 3 \times 10^{-2}$). Згори – енергія занурення домішкового атома; знизу – відношення загасання спектра до енергії занурення домішки. Суцільна, пунктирна, точкова лінії відповідають різним співвідношенням мас між домішкою та частинками середовища.

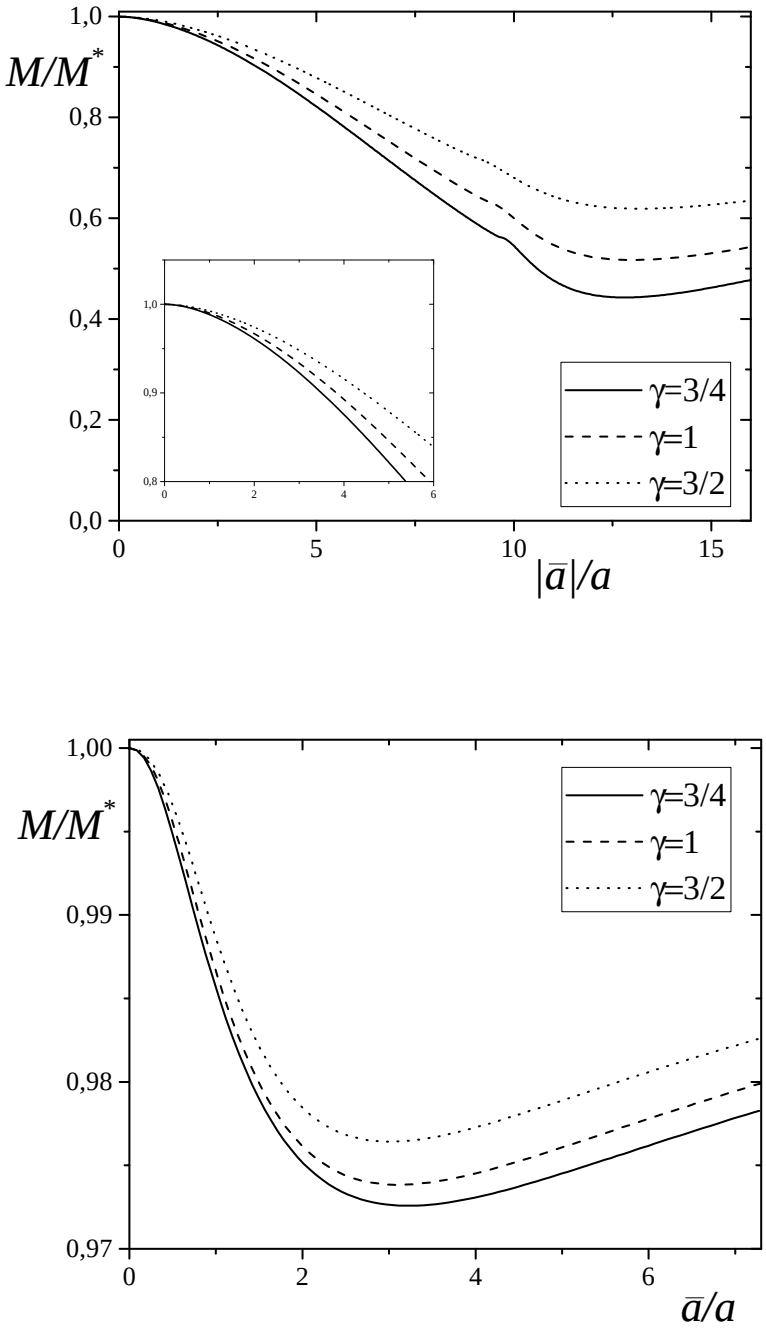

Рис. 2.6. Ефективна маса домішкового атома ($\rho a^3 = 5 \times 10^{-4}$). Згори — притягальний полярон, знизу — відштовхувальний полярон. Суцільна, пунктирна, точкова лінії відповідають різним співвідношенням мас між домішкою та частинками середовища.

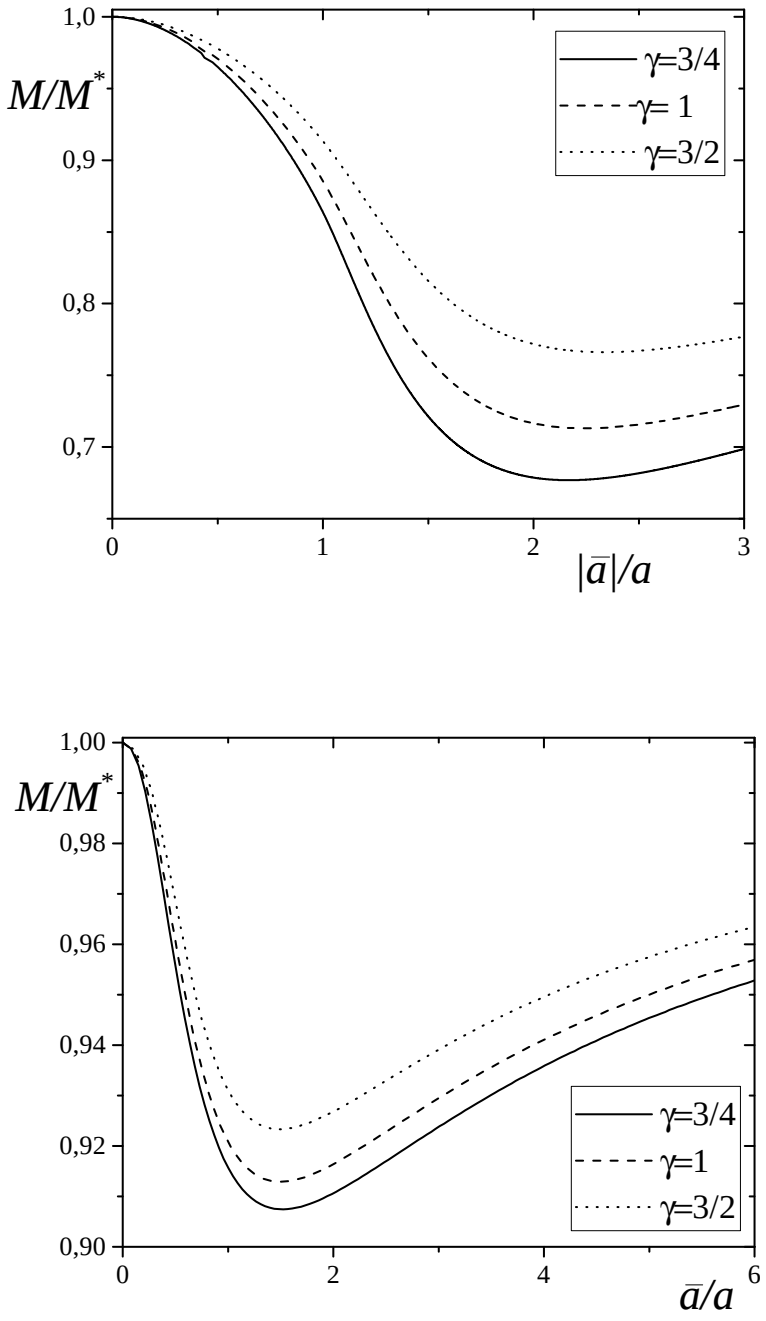

Рис. 2.7. Ефективна маса домішкового атома ($\rho a^3 = 3 \times 10^{-2}$). Згори — притягальний полярон, знизу — відштовхувальний полярон. Суцільна, пунктирна, точкова лінії відповідають різним співвідношенням мас між домішкою та частинками середовища.

2.5. Висновки до розділу 2

В цьому розділі ми проаналізували властивості домішкового спектра притягального та відштовхувального поляронів в розрідженому бозе-газі з бозе-конденсатом. Зокрема, для домішки, що рухається в бозе-газі зі слабким короткодіючим відштовхуванням, ми отримали повну імпульсну залежність енергії та загасання домішкового спектра, скориставшись теорією збурень Релея-Шредінгера. Нами показано, що спектр загасатиме лише у випадку додатніх значень енергії бозе-полярона, а в границі звичайної теорії збурень — залежатиме від швидкості домішкового атома. Отримані нами характеристики бозе-полярона у другому порядку теорії збурень Брілюена-Вігнера якісно відтворюють результати більш складного T-матричного підходу [94]та варіаційних розрахунків [48].

РОЗДІЛ 3

ДОМІШКОВИЙ АТОМ В РІДКОМУ ГЕЛІЇ-4

3.1. Вступ

Той факт, що рідкий гелій-4 є сильноскорельованою багатобозонною системою, і стає надплинним в області низьких температур, дещо ускладнює вивчення домішкових станів в такій системі. Зрозуміло, що гамільтоніан системи "домішка плюс бозе-рідина", яка рухається в бозе-рідині, не залежно від представлення, міститиме кінетичну енергію домішкового атома, гамільтоніан багатобозонної системи та враховуватиме бозон-домішкову взаємодію (2.1). Але постає питання щодо вибору потенціалу, який би повністю враховував взаємодію між бозе-частинками, та коректно описував бозон-домішкову взаємодію. І навіть для того, щоб розв'язати найпростішу на перший погляд задачу про повну енергію основного стану системи "домішка плюс бозе-рідина", потрібно використовувати наближенні методи.

Насамперед, для опису багаточастинкової системи "домішковий атом плюс рідкий гелій-4", доцільно працювати в зображенні колективних координат:

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}, \tag{3.1}$$

які з фізичної точки зору є коефіцієнтами Фур'є флуктуації густини бозе-частинок. Тут $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$ — декартові координати бозе-частинок.

На основі цього представлення побудована мікроскопічна теорія бозе-рідини в так званому наближенні хаотичних фаз, та у post-RPA наближенні, коли враховуються три- і чотиричастинкові кореляції між бозе-частинками [177, 178].

Отже, розглянемо домішковий атом масою M з координатою $\mathbf{r}$, що разом з бозе-частинками масою m кожна, рухається в об'ємі V. Для початку обмежимось лише потенціалом попарної взаємодії між бозе-частинками, та враховуватимемо лише прямі процеси розсіяння на флуктуаціях густини (як і у Розд. 2). Виходячи з цього, запишемо гамільтоніан бозе-рідини $\hat{H}_{\mathrm{B}}$ та енергію взаємодії домішки з атомами рідини $\hat{H}_{int}$, на мові колективних змінних:

$$\hat{H}_{\mathrm{B}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + \frac{N(N-1)}{2V}\nu(0) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0} \rho\nu(k)(\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}} - 1); \tag{3.2}$$

$$\hat{H}_{int} = \rho\bar{\nu}(0) + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0} \rho\bar{\nu}(k)\rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}, \tag{3.3}$$

тут $\hat{\mathbf{p}}_j = -i\hbar\nabla_j$ — оператор імпульсу j-ї бозе-частинки, а величини $\nu(k)$, $\bar{\nu}(k)$ є фур'є-образами потенціалів міжбозонної $\Phi(R)$ та бозон-домішкової $V(R)$ попарних взаємодій відповідно:

$$\nu(k) = \int \Phi(R) e^{i\mathbf{kR}} d\mathbf{R}, \qquad \bar{\nu}(k) = \int V(R) e^{i\mathbf{kR}} d\mathbf{R}, \tag{3.4}$$

причому, коефіцієнт $\nu(k)$, коли $k = 0$, виражається через швидкість звуку в рідкому гелії-4 (при $T = 0\,\mathrm{K}$ $c = 238.2\,\mathrm{м/с}$, за рівноважної густини $\rho_0 = 0.0218\ \mathrm{Å}^{-3}$).

Стартуючи з такої моделі, дослідимо домішкові стани системи "бозе-рідина плюс домішковий атом" варіаційним методом. Постулюючи стани такої системи хвильовою функцією в зображенні колективних координат (3.1), та виразивши фур'є-образ потенціалу взаємодії між бозе-частинками і домішкою через статичний структурний фактор чистої

бозе-рідини, у термодинамічній границі можна отримати енергію домішки (див. Розд. 3.3), розподіл за імпульсами частинок системи (див. Розд. 3.4). Також такий підхід дає змогу відтворити енергію основного стану отриманою стандартною теорією збурень як чистої бозе-рідини [179], так і розчину ^{3}He$-^4$He в лінійному наближенні за концентрацією домішок ^{3}He. Зауважимо, що даний метод не передбачає оцінки ефективної маси домішки, тому будемо розглядати лише основний стан системи "'бозе-рідина плюс домішка".

3.2. Варіаційний розрахунок домішкових станів

Виберемо хвильову функцію основного стану системи "бозе-рідина плюс домішка" у вигляді добутку хвильової функції основного стану бозонів на фактор, що враховує наявність домішки в рідині:

$$\Psi(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N,\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{C}}\psi_{\mathrm{B}}(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)e^{U}, \tag{3.5}$$

тут стала C забезпечує умову нормування хвильової функції на одиницю:

$$C = \int d\mathbf{r}_1\ldots d\mathbf{r}_N \int d\mathbf{r}\,|\Psi(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N,\mathbf{r})|^2. \tag{3.6}$$

Невідому варіаційну функцію U оберемо так, щоб вона відтворювала структуру оператора взаємодії (3.3):

$$U = \frac{1}{2\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\lambda_i(k)\rho_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}}, \tag{3.7}$$

вона є дійсною додатною функцією й залежить від варіаційного параметра $\lambda_i(k)$, який ми знайдемо з умови мінімуму енергії. Варіаційну хвильову функцію основного стану бозонів $\psi_{\mathrm{B}}(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)$ знайдено в

[179] у наближенні парних кореляцій:

$$\psi_{\mathrm{B}}(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)=\frac{1}{\sqrt{C_{\mathrm{B}}}}\exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\lambda(k)\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}}\right], \tag{3.8}$$

C_{B} — стала нормування хвильової функції рідини, а коефіцієнт $\lambda(k)$ обчислено у [179] у так званому наближенні "однієї суми за хвильовим вектором":

$$\lambda(k)=\alpha_k-1+\frac{1}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\,\mathbf{k}_2\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0}}\sum\left(1-\frac{1}{\alpha_{k_1}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{k_2}}\right)\left[\frac{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}{k^2\alpha_k}+\left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)\right],$$

тут через α_k позначено боголюбівський фактор:

$$\alpha_k=\sqrt{1+2\rho\nu(k)\Big/\frac{\hbar^2k^2}{2m}} \tag{3.9}$$

Скориставшись зв'язком боголюбівського фактора зі структурним фактором, який означається як середньоквадратична флуктуація в RPA-наближенні $\alpha_k=1/S(k)$, запишемо:

$$\lambda(k)=\frac{1}{S(k)}-1+\frac{1}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\,\mathbf{k}_2\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0}}\sum\left(1-S(k_1)\right)\left(1-S(k_2)\right). \tag{3.10}$$

Енергію бозе-рідини разом з домішковим атомом, шукатимемо шляхом усереднення за хвильовою функцією досліджуваної системи:

$$E=\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}_1\ldots d\mathbf{r}_N\Psi^*(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N,\mathbf{r})\hat{H}\Psi(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N,\mathbf{r}), \tag{3.11}$$

тут оператор $\hat{H}$ є сумою доданків (3.2), (3.3) та кінетичної енергії домішки (2.2). Енергію основного стану системи, тобто власне значення гамільтоніана $\hat{H}$, знаходитимемо в наближенні двох сум за хвильовим вектором — це корелюватиме з другим порядком стаціонарної теорії збурень (де збуренням є потенціальна енергія взаємодії домішки з атомами рідини)[180].

3.2.1. Хвильова функція домішки Знайдемо хвильову функцію (3.5), з точністю до сталої нормування, згідно з означенням:

$$C = \int d\mathbf{r}_1, \ldots, d\mathbf{r}_N \int d\mathbf{r}\, |\psi_{\mathrm{B}}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)|^2 e^{2U}, \tag{3.12}$$

розглядаємо цей вираз, як середнє за основним станом бозе-рідини:

$$C = \langle e^{2U} \rangle_{\mathrm{B}}; \tag{3.13}$$

тут ламані дужки означають таке усереднення:

$$\langle (\ldots) \rangle_{\mathrm{B}} = \int d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_N (\ldots) \psi_{\mathrm{B}}^2, \tag{3.14}$$

де ψ_{B} нормована на одиницю. Для обчислення середнього у виразі для сталої нормування ми скористаємось розкладом за незвідними середніми:

$$\int d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_N |\psi_{\mathrm{B}}|^2 e^{2U} = \exp\left[\sum_{n\geq 1} \frac{M_n}{n!}\right], \tag{3.15}$$

обмежимось урахуванням лише перших кількох кумулянтів, оскільки працюємо в наближенні однієї суми за хвильовим вектором:

$$M_1 = \langle 2U \rangle_{\mathrm{B}}, M_2 = \langle (2U)^2 \rangle_{\mathrm{B}} - \langle 2U \rangle_{\mathrm{B}}, \tag{3.16}$$

коли ми усереднюємо за станами рідини, то середнє $\langle 2U \rangle_{\mathrm{B}} = 0$, тому третій і четвертий кумулянт запишемо так:

$$M_3 = \langle (2U)^3 \rangle_{\mathrm{B}}, M_4 = \langle (2U)^4 \rangle_{\mathrm{B}} - 3\langle (2U)^2 \rangle_{\mathrm{B}}^2, \ldots \tag{3.17}$$

зауважимо, що ці кумулянти містять "домішкові" внески порядку двох сум. Тому:

$$\begin{aligned} C &= V^N \exp\left[\frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \lambda_i^2(k) S(k) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{6N^2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}} \sum_{\mathbf{k}_2\neq 0} \sum_{\mathbf{k}_3\neq 0} \lambda_i(k_1)\lambda_i(k_2)\lambda_i(k_3) S_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) + \right. \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$+ \quad \frac{1}{8N^2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 \neq 0 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0}} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \lambda_i^2(k_1)\lambda_i^2(k_2)(\langle \rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_2}\rangle_{\mathrm{B}} - S(k_1)S(k_2)) \Bigg] ,$$

тут $S(k) = \langle \rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}}\rangle_{\mathrm{B}}$ — рідинний парний структурний фактор, який екпериментально вимірюють у дослідах із розсіяння нейтронів чи рентґенівських променів. Саме цю величину, а не потенціал міжчастинкової взаємодії, ми візьмемо як вихідну інформацію для проведення чисельних розрахунків. Також ми скористались тим, що середнє $\langle \rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{k}_2}\rho_{\mathbf{k}_3}\rangle_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\sqrt{N}} S_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ є тричастинковим структурним фактором. Зауважимо, що останній доданок у (3.18) з урахуванням розщеплення $\langle \rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_2}\rangle_{\mathrm{B}} = \langle \rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rangle_{\mathrm{B}}\langle \rho_{\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_2}\rangle_{\mathrm{B}}$ дорівнюватиме нулеві.

3.2.2. Енерґія основного стану системи "домішка плюс бозе–рідина" Середнє значення енерґії основного стану нашої системи згідно означення (3.11), з урахуванням виразу для хвильової функції (3.5) після нескладних перетворень можна записати так:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\hbar^2}{4m}\sum_{j=1}^{N}\langle \nabla_j^2 U\rangle - \frac{\hbar^2}{4m}\sum_{j=1}^{N}\langle \nabla_j^2 \ln\psi_{\mathrm{B}}\rangle \\ &+ \frac{N(N-1)}{2V}\nu(0) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\rho\nu(k)(\langle \rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}}\rangle - 1) \\ &- \frac{\hbar^2}{4M}\langle \nabla^2 U\rangle + \frac{N}{V}\bar{\nu}(0) + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\rho\bar{\nu}(k)\langle \rho_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}}\rangle, \end{aligned} \tag{3.19}$$

тут середні означають усереднення за повною хвильовою функцією (3.5). Підставивши явний вигляд функції U, з (3.15), матимемо:

$$E = E_0 + \rho\bar{\nu}(0) + \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\varepsilon_k\left[-\lambda(k) + 2\rho\nu(k)/\varepsilon_k\right](\langle \rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}}\rangle - S(k)) +$$

$$+ \quad \frac{1}{4\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \varepsilon_k \left[\lambda_i(k) \left(1 + \frac{m}{M} \right) + 4\rho\bar{\nu}(k)/\varepsilon_k \right] \langle \rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \rangle, \tag{3.20}$$

де $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m$ — вільночастинковий спектр бозе-частинок. А також введено позначення E_0 для енергії основного стану бозе-рідини, яка в нульовому наближенні збігається з енергією:

$$E_{\mathrm{B}} = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 - \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \varepsilon_k (\alpha_k - 1)^2 + \Delta E_0, \tag{3.21}$$

де перші два доданки відповідають наближенню Боголюбова, а поправка вперше знайдена у [130]:

$$\Delta E_0 = \frac{1}{8N} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\ \mathbf{k}_2\neq 0\ \mathbf{k}_3\neq 0 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}} \sum \sum \varepsilon_{k_1} \left(1 - \frac{1}{\alpha_{k_1}} \right) \left(1 - \frac{1}{\alpha_{k_2}} \right) \left(1 - \frac{1}{\alpha_{k_3}} \right). \tag{3.22}$$

Запишемо повні середні $\langle \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} \rangle, \langle \rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \rangle$, що входять у вираз для енергії основного стану (3.20), через варіаційні похідні від сталої нормування (3.12):

$$\langle \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} \rangle = \frac{\delta^2 C}{\delta\lambda_i(k)\delta\lambda_i(-k)}, \qquad \langle \rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \rangle = \sqrt{N}\frac{\delta \ln C}{\delta\lambda_i(k)} \tag{3.23}$$

Обчисливши їх, отримаємо:

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} \rangle \;&=\; S(k) + \frac{1}{N}\lambda_i^2(k) S^2(k) + \\ &+\; \frac{1}{N^2}\lambda_i(k) S(k) \sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\ \mathbf{k}_2\neq 0 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0}} \sum \lambda_i(k_1)\lambda_i(k_2) S_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}); \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \langle \rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \rangle \;&=\; \frac{1}{N}\lambda_i(k) S(k) + \\ &+\; \frac{1}{2N^2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\ \mathbf{k}_2\neq 0 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0}} \sum \lambda_i(k_1)\lambda_i(k_2) S_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Підставивши одержані повні середні у вираз (3.20), матимемо енергію основного стану системи, залежну від варіаційного параметра, який

шукатимемо з умови мінімуму енерґії:

$$\frac{\delta E}{\delta \lambda_i(k)} = 0. \tag{3.26}$$

У результаті розв'язку цього рівняння отримаємо:

$$\lambda_i(k) = -\frac{2\rho\bar{\nu}(k)/\varepsilon_k}{1 + m/M + S(k)[2\rho\nu(k)/\varepsilon_k - \lambda(k)]}, \tag{3.27}$$

а сама енерґія основного стану системи "рідина плюс домішковий атом" у наближенні двох сум за хвильовим вектором, з урахуванням цього виразу, буде такою:

$$\begin{aligned} E &= E_0 - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\varepsilon_k \frac{(2\rho\bar{\nu}(k)/\varepsilon_k)^2 S(k)}{1 + m/M + S(k)[2\rho\nu(k)/\varepsilon_k - \lambda(k)]} + \\ &+ \frac{N}{V}\bar{\nu}(0) - \frac{1}{8N^2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\,\mathbf{k}_2\neq 0\,\mathbf{k}_3\neq 0 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}}\sum\sum\lambda_i(k_1)\lambda_i(k_2)\lambda_i(k_3)S_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Таким чином, використання кумулянтного розкладу (див. Розд. 3.2.1) дозволило нам без громіздких викладок, обчислити енергію (3.11) а також рідинний корелятор і парціальний внесок (3.23), які входять у структурний фактор системи "домішка плюс бозе-рідина". Причому, бозонний корелятор "густина-густина" можна переписати для сильно розведеної суміші ^{4}He-^{3}He в лінійному наближенні за концентрацією домішок ^{3}He через структурний фактор бозе-системи $S(k)$. Він своєю чергою для рідкого гелію-4 є виміряною величиною з високою точністю.

3.3. Енерґія занурення домішкового атома

Замінимо домішковий атом частинкою того ж сорту, що й частинки рідини, тоді енерґію системи $N+1$ бозе-частинок розкладемо в ряд за

N і одержимо так звану енергію заміщення системи:

$$\Delta E = E_i - \left(\frac{\partial E_0}{\partial N}\right)_T, \tag{3.29}$$

де величина E_i є енергією занурення домішки в бозе-рідину, яка в нашому підході є різницею повної енергії (3.28) та енергії чистої рідини E_{B}. Часткова похідна при низьких температурах збігається з хімічним потенціалом бозе-рідини.

В експериментальних роботах зазвичай вимірюють енергію розділення B – енергію, яка потрібна для видалення домішкового атома з двокомпонентної суміші. У праці [63] для системи $(N-1)$ бозе-частинок та одного домішкового атома означено як різницю повної енергії цієї системи, порахованої теорією збурень Бріллюена–Віґнера, та енергії бозе-рідини з розрахунком на одну частинку за сталої густини. При рівноважній густині $\rho_0 = 0.0218$ Å^{-3} її значення для однієї домішки ^{3}He дорівнює $B^{\mathrm{exp}} = 2.76$ K в розчині $^3\mathrm{He} - {}^4\mathrm{He}$ [63].

Мовою наших позначень зв'язок між енергіями розділення та занурення такий:

$$-B = \Delta E + E_0/N. \tag{3.30}$$

Використовуючи вирази для енергій системи, можна отримати рівняння стану системи. Для чистої бозе-рідини воно є відомим, а почисливши похідну від енергії заміщення навіть в наближенні парних кореляцій (наближення однієї суми за хвильовим вектором), матимемо зміну тиску при наявності в системі домішки. Власне, саме з тим тиском пов'язаний коефіцієнт, який дає змогу оцінити ефективну зміну об'єму в системі "бозе-рідина плюс домішка", коли замінити один атом ^{4}He домішковим атомом при сталій температурі, тобто

$$\alpha = -\frac{V}{mc^2}\left(\frac{\partial \Delta E}{\partial V}\right)_T. \tag{3.31}$$

Зауважимо, що означений у такий спосіб коефіцієнт α збігається з коефіцієнтом α у праці [84] і після перетворень збігається з формулою, яку запропонував Бейм [60]:

$$\alpha = \frac{\rho}{mc^2}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \rho}\right)_T - 1. \tag{3.32}$$

3.3.1. Вихідні вирази. Для подальшого аналізу вище згаданих характеристик домішки, запишемо в явному вигляді енергію занурення:

$$E_i = \rho\bar{\nu}(0) - \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\varepsilon_k \frac{(\rho\bar{\nu}(k)/\varepsilon_k)^2}{\alpha_k(\alpha_k + m/M)} + \frac{1}{N^2}\left(1+\frac{m}{M}\right)\times \tag{3.33}$$

$$\times \sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{k}_3\neq 0}\varepsilon_{k_1}\frac{\rho\bar{\nu}(k_1)/\varepsilon_{k_1}}{\alpha_{k_1}+m/M}\frac{\rho\bar{\nu}(k_2)/\varepsilon_{k_2}}{\alpha_{k_2}+m/M}\frac{\rho\bar{\nu}(k_3)/\varepsilon_{k_3}}{\alpha_{k_3}+m/M}S_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3),$$

енергію заміщення в наближенні парних кореляцій:

$$\Delta E = -\frac{1}{4N}\left(1-\frac{m}{M}\right)\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\varepsilon_k\frac{(2\rho\bar{\nu}(k)/\varepsilon_k)^2}{\alpha_k(\alpha_k+1)}\frac{1}{\alpha_k+m/M} \tag{3.34}$$

а також, ефективну зміну об'єму в системі:

$$mc^2\alpha = E_i - mc^2 + \frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\varepsilon_k\left(\alpha_k - \frac{1}{\alpha_k}\right)^3\frac{2\alpha_k+m/M}{(\alpha_k+m/M)^2}. \tag{3.35}$$

Тут ми скористались тим, що варіаційний параметр, з урахуванням нульового наближення для коефіцієнта $\lambda(k) = \alpha_k - 1$ має вигляд:

$$\lambda_i(k) = -\frac{2\rho\bar{\nu}(k)/\varepsilon_k}{\alpha_k + m/M} \tag{3.36}$$

3.3.2. Чисельні результати на прикладі домішки ^{3}He Для чисельної оцінки енергії занурення запишемо фур'є-образ потенціалу взаємодії між бозе-рідиною та домішкою $\bar{\nu}(k)$ через боголюбівський фактор α_k чи через парний структурний фактор чистої бозе-рідини. Тобто приймемо, що фур'є-образи бозон-бозонної та бозон-домішкової

взаємодій співпадають:

$$\bar{\nu}(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{4m\rho}\left(\frac{1}{S^2(k)} - 1\right) \tag{3.37}$$

Таке припущення буде правдивим для елементів, у яких повністю заповнена s-оболонка (насамперед, це інертні гази). Для іншого типу домішок не завжди можна забезпечити рівність цих коефіцієнтів, оскільки не для всіх потенціалів взаємодії існує фур'є-образ (для взаємодії типу Ленарда-Джонса його потрібно доозначувати). Коефіцієнт Фур'є взаємодії $\bar{\nu}(0)$ при $k \to 0$ виразимо через швидкість першого звуку в рідкому ^{4}He , як у випадку виключення фур'є-образу потенціалу взаємодії між бозе-частинками $\nu(0)$, використовуючи співвідношення:

$$mc^2 = N\frac{\partial^2 E_0}{\partial N^2}, \tag{3.38}$$

після обчислення похідної, беручи до уваги лише нульове наближення для енергії чистої рідини (3.21), отримаємо зв'язок між швидкістю звуку та фур'є-образом потенціалу взаємодії $\bar{\nu}(0)$:

$$\bar{\nu}(0) = \frac{mc^2}{\rho} + \frac{1}{16\pi^2\rho^2}\int_0^\infty k^2\varepsilon_k S(k)\left(S(k) - \frac{1}{S(k)}\right)^2 dk. \tag{3.39}$$

Зрозуміло, що для густин, не рівних рівноважній густині ρ_0 рідкого гелію, а відповідно й іншого значення швидкості звуку, фур'є-образ $\bar{\nu}(0)$ є мікроскопічним параметром і має залишатися сталим. Не змінюватиметься також коефіцієт $\bar{\nu}(k)$ залежно від густини бозе-рідини.

При чисельних розрахунках енергії занурення для густин не рівних рівноважній густині ρ_0 рідкого гелію, доцільно перенормувати боголюбівський фактор у виразі для енергії заміщення (3.34). Ця процедура полягає в його перерахунку через експериментально вимірюваний структурний фактор $S_{\text{exp}}(k)$ у дослідах з розсіяння нейтронів при нормальній густині ρ_0 гелію-4 [146]. Отже:

$$\alpha_k^2 = 1 + \frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{1}{S_{\text{exp}}^2(k)} - 1\right). \tag{3.40}$$

Оскільки ми працюємо в наближенні парних кореляцій, то структурний фактор при інших густинах дорівнює:

$$\frac{1}{S^2(k)} = 1 + \frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{1}{S^2_{\exp}(k)} - 1\right). \tag{3.41}$$

Отже, у термодинамічній границі ($N \to \infty, V \to \infty$; $\rho = \text{const}$) при переході від підсумовування до інтеґрування за всіма хвильовими векторами $\sum_{\mathbf{k}\neq 0}(\ldots) \to V/(2\pi)^3 \int(\ldots)d\mathbf{k}$ енергію занурення запишемо так:

$$E_i = \rho\bar{\nu}(0) - \frac{1}{8\pi^2\rho}\int_0^\infty k^2\varepsilon_k \frac{(1-S^2(k))^2}{S^3(k)(1/S(k)+m/M)}\,dk + \Delta E_i, \tag{3.42}$$

тут ΔE_i — поправка до енергії занурення порядку двох сум за хвильовим вектором. Для її обчислення потрібно скористатися конволюційним наближенням для структурного фактора, коли тричастинковий структурний фактор розщеплюють на парні структурні фактори бозе-рідини: $S(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = S(k_1)S(k_2)S(k_3)$. Узагалі кажучи, така факторизація нівелює вплив три- та чотиричастинкових кореляцій, але ми в розрахунках ураховуємо лише парні кореляції. Тому надалі не братимемо його до уваги. Зауважимо, що у формулі (3.42) структурний фактор беремо з (3.40).

Аналогічно в термодинамічній границі можна записати енергію заміщення:

$$\begin{aligned}\Delta E &= -\frac{1}{8\pi^2\rho}\left(1-\frac{m}{M}\right)\int_0^\infty k^2\varepsilon_k S(k)\left[1/S(k)-1\right]^2 \\ &\times \frac{1/S(k)+1}{1/S(k)+m/M}\,dk.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Числові значення для енергій розділення та енергій (3.42), (3.43) наведено в Табл. 3.1. Ефективну зміну об'єму α (3.35) в термодинамічній

Таблиця 3.1. Чисельні результати для енергій у випадку домішки ^{3}He.

ρ, Å^{-3}	E_{B}/N, K	E_i, K	ΔE, K	B, K	B[63], K
0.0218	−5.21	8.70	3.19	2.02	1.39
0.0226	−5.30	9.66	3.25	2.05	1.15
0.0234	−5.39	10.71	3.30	2.09	0.88
0.0242	−5.44	11.77	3.35	2.09	0.51
0.0250	−5.46	12.82	3.41	2.05	0.13
0.0258	−5.45	13.88	3.47	1.98	−0.36

границі можна записати через спостережувані величини, скориставшись (3.40), (3.42). Цей параметр обчислено дифузійним Монте-Карло методом у [84]: $\alpha = 0.284(10)$ для однієї домішки ^{3}He за рівноважної густини рідкого гелію-4. Такий результат цілком відтворює експериментальне значення ефективного зміну об'єму $\alpha_{exp} = 0.284$, що наведений у тій же роботі. Наш підхід дає завищене значення параметра $\alpha = 0.50$ для однієї домішки ^{3}He. Це насамперед пов'язано з вибором хвильової функції домішки у вигляді (3.5), необхідністю перенормування боголюбівського фактора (3.40), а також із нехтуванням прямих три- та чотиричастинкових бозонних кореляцій вже на рівні вибору хвильової функції.

3.4. Одночастинкова матриця густини та розподіл за імпульсами

Знайдемо одночастинкову матрицю густини системи згідно з означення

$$F_1(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = V \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \Psi^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{r}), \quad (3.44)$$

Врахувавши явний вигляд хвильової функції, розрахуємо інтеґрал (3.44), усереднюючи за станами бозе-рідини:

$$F_1(R) = \exp\Big[\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\lambda_i^2(k)S(k)(\cos\mathbf{kR}-1) + \frac{1}{8N^2}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\,\mathbf{k}_2\neq 0\,\mathbf{k}_3\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}}\sum\sum\lambda_i(k_1)\lambda_i(k_2)\lambda_i(k_3)S_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)(\cos\mathbf{k}_1\mathbf{R}-1)\Big], \tag{3.45}$$

тут $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$.

Якщо припустити, що взаємодія між атомами рідини є такою ж, що й між бозе-частинками, тобто $\bar{\nu}(k)=\nu(k)$, і покласти, що їхні маси рівні ($M=m$), то обчислена одночастинкова матриця густини збігається з одночастинковою матрицею багатобозонної системи, отриманою в роботі [175] у наближенні парних кореляцій.

Зауважимо, що $F_1(0)=1$, а коли ж у виразі для матриці густини спрямувати $R\to\infty$, то

$$F_1(\infty) = \exp\Big[-\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\lambda_i^2(k)S(k) - \frac{1}{8N^2}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\,\mathbf{k}_2\neq 0\,\mathbf{k}_3\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}}\sum\sum\lambda_i(k_1)\lambda_i(k_2)\lambda_i(k_3)S_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)\Big]. \tag{3.46}$$

Якщо домішковий атом — це частинка такої ж маси, що й частинки бозе-рідини, то розклад у ряд експоненти в лінійному наближенні формально збігається з кількістю бозе-конденсату в слабконеідеальному бозе-газі:

$$F_1(\infty)=1-\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\frac{(1-\alpha_k)^2}{\alpha_k}.$$

Такий вираз можна отримати, обчисливши варіаційну похідну за вільночастинковим спектром домішки $\hbar^2k^2/2M$ від вільної енерґії системи,

яка при абсолютному нулі температури збігається з енерґією основного стану системи “бозе-рідина плюс домішка” (3.28). На Рис. **??** зображено поведінку функції $F_1(R)$.

Для знаходження густини ймовірності того, що домішковий атом має імпульс $\hbar\mathbf{q}$, запишемо фур’є-образ одночастинкової матриці густини:

$$\omega_{\mathbf{q}} = \int e^{i\mathbf{qR}} F_1(R) d\mathbf{R}, \tag{3.47}$$

забезпечимо збіжність цього інтеґрала, додавши та віднявши значення одночастинкової матриці на безмежності:

$$\omega_{\mathbf{q}} = \int e^{i\mathbf{qR}} [F_1(R) - F_1(\infty)] d\mathbf{R} + (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}) F_1(\infty), \tag{3.48}$$

тоді перший доданок — це густина ймовірності того, що домішковий атом має хвильовий вектор $\mathbf{q} \neq 0$. Підсумування за всіма хвильовими векторами $\mathbf{q}$ дає повну ймовірність знайти частинку в просторі хвильових векторів:

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} = 1. \tag{3.49}$$

Підставимо сюди розподіл $\omega_{\mathbf{q}}$ і запишімо ймовірність знайти домішковий атом із імпульсом, відмінним від нуля:

$$p = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \int e^{i\mathbf{qR}} [F_1(R) - F_1(\infty)] \, d\mathbf{R}, \tag{3.50}$$

а тоді величину $F_1(\infty)$ трактуватимемо як імовірность того, що домішковий атом має імпульс, рівний нулеві. Для знаходження ймовірності того, що частинка є в стані спокою, обчислімо її значення (3.46), виходячи з тих міркувань, що й при розрахункові енерґії занурення. Зобразимо графічно (див. Рис. 3.4) залежність імовірності

знайти домішковий атом з нульовим імпульсом для різних співвідношень між масами домішкових атомів. Для важких домішок відношення $m(^4\mathrm{He})/M \simeq 0.01$ і величина $F_1(\infty)$ є суттєво малими. Якщо домішка — це атом ^{4}He (відношення мас дорівнює одиниці), то це є своєрідною перевіркою для значення відносної кількості бозе-конденсату чистого гелію $F_1(\infty) = 0.26$ [181].

Чисельно оцінімо розподіл за імпульсами для різних значень мас домішкового атома. Для початку у виразі (3.50) перейдемо від підсумовування за хвильовим вектором $\mathbf{q}$ до інтеґрування та спростімо його:

$$p = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty q\, dq \int_0^\infty R \sin qR [F_1(R) - F_1(\infty)]\, dR. \qquad (3.51)$$

Чисельні результати для ймовірності знайти домішковий атом з не нульовим імпульсом є такими: $p = 0.74$ (для домішки ^{4}He); $p = 0.69$ (для домішки ^{3}He); $p = 0.80$ (для домішки ^{6}He).

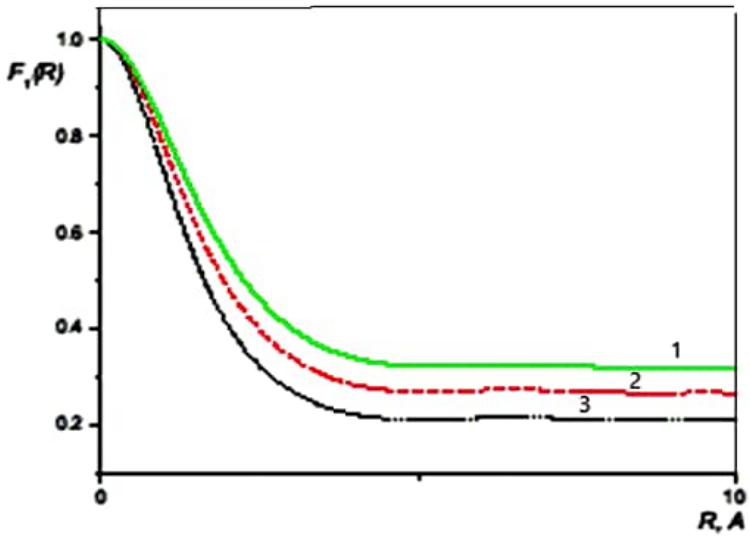

Рис. 3.1. Одночастинкова матриця густини системи “бозе-рідина плюс домішковий атом”. Лінії 1, 2, 3 — відповідають наявності домішкового атома ^{4}He, ^{6}He та ^{3}He у рідкому гелії-4 відповідно.

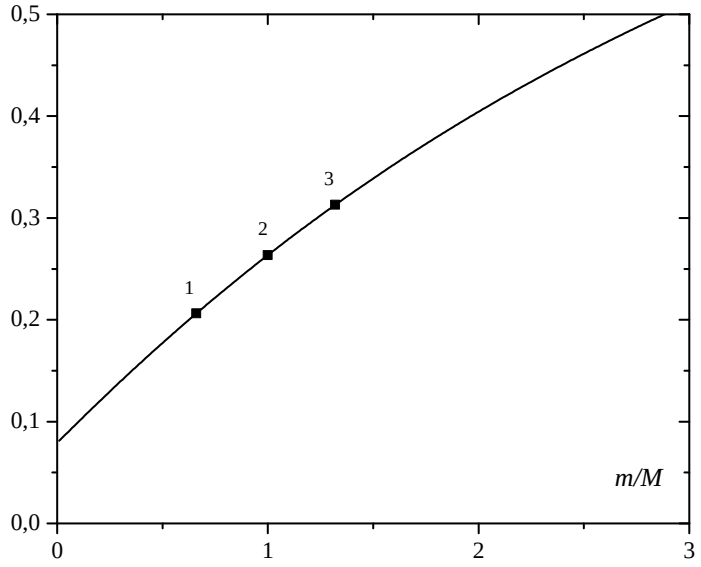

Рис. 3.2. Імовірність знайти домішковий атом з нульовим імпульсом. Точки: 1. — ^{6}He, $F_1(\infty) = 0.21$; 2. — ^{4}He, $F_1(\infty) = 0.26$; 3. — ^{3}He, $F_1(\infty) = 0.31$.

3.5. Висновки до розділу 3

В цьому розділі ми дослідили основний стан моделі “бозе-рідина плюс домішковий атом” варіаційним методом. Обираючи пробну хвильову функцію системи у вигляді добутку хвильової функції бозе-рідини в наближенні парних кореляцій та внеску, що враховує бозон-домішкову взаємодію в тому ж наближенні. За допомогою цього підходу ми знайшли одночастинкову матрицю густини системи, усереднюючи за станами бозе-рідини. Її фур’є-образ дає змогу знайти розподіл за імпульсами в системі. А також на прикладі домішки ^{3}He нами обчислено залежність енергії розділення як функцію густини бозе-рідини.

РОЗДІЛ 4

СИСТЕМА “ДОМІШКА ПЛЮС РІДКИЙ ГЕЛІЙ-4” В ПРОСТОРІ З ДЕФОРМОВАНОЮ АЛГЕБРОЮ ГЕЙЗЕНБЕРГА

4.1. Вступ

Принципово інший підхід до дослідження багатобозонних систем виник після того, як запровадили до розгляду так звані квантові постори з мінімальною довжиною. Виявляється, що найпростішу деформацію, яка є квадратичною за узагальненими імпульсами [152], можна поширити на довільний простір узагальнених змінних. А також, можна узагальнити деформовану алгебру на довільну деформаційну функцію координат та імпульсів, що приводить до існування мінімальної довжини [182]. Виявилось, що деформація дужок Пуассона дає змогу ефективніше знайти наближенні розв’язки рівняння Шредінгера для основного стану бозе-системи [153]. В цій роботі вперше запропоновано враховувати нелінійні флуктуації у рідкому гелії-4, з деформацією, що є квадратичною за імпульсами.

В цьому розділі ми пропонуємо вийти за межі наближення парних кореляцій, і всі труднощі, пов’язані з урахуванням ангармонічних коливань між атомами рідини, врахувати введенням деформованої алгебри Гейзенберга (див. Розд. 4.2). Для цієї алгебри ми обираємо де-

формовані узагальненні координати та відповідні їм узагальненні імпульси, так, щоб комутатор між цими величинами був квадратичною функцією узагальнених координат з деяким деформаційним параметром (4.4). І припускаємо, що така функція деформації враховує усі ангармонізми, породженні сильною взаємодією між атомами рідини. Вважаючи взаємодію між домішкою та бозе-частинками незначною, ми розвиваємо теорію збурень. Поправки до енергії основного стану системи "рідина плюс домішковий атом" ми розраховуємо з точністю до однієї суми за хвильовим вектором (див. Розд. 4.5). Зауважимо, що хвильова функція основного стану системи в цьому підході є застосовною не лише до оцінки енергії занурення домішки в рідину, а й до обчислення ефективної маси. Невід'ємною складовою цього розділу є проблема фіксації параметра деформації (див. Розд. 4.6), який ми пропонуємо пов'язати зі спостережуваними величинами, зокрема структурним фактором [183] та спектром елементарних збуджень рідкого гелію-4.

4.2. Бозе–рідина в представленні деформованих колективних координат

4.2.1. Структура гамільтоніана В загальному випадку, гамільтоніан системи N бозе-частинок складається з оператора кінетичної енергії та окрім попарної взаємодії між бозе-частинками, враховує тричастинкову та вищі взаємодії в потенціальній енергії:

$$\widehat{H}_B = \sum_{j=1}^{N} \frac{\widehat{\mathbf{p}}_j{}^2}{2m} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) + \sum_{1\leqslant i<j<l\leqslant N} \Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j) + \ldots, \quad (4.1)$$

В представленні колективних координат (3.1), гамільтоніан (4.1) з урахуванням попарної взаємодії між частинками, вже не є квадратичною

формою за цими змінними [130, 184]:

$$\widehat{H}_B = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\Big(-\frac{\partial^2}{\partial\rho_{\mathbf{k}}\partial\rho_{-\mathbf{k}}} + \frac{1}{4}\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}} - \frac{1}{2}\Big) + \tag{4.2}$$

$$+ \frac{N(N-1)}{2V}\nu(0) + \frac{N}{2V}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\nu(k)(\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}} - 1) + \Delta\widehat{H},$$

адже містить доданок зі своєрідним ангармонізмом лінійним за $\rho_{\mathbf{k}}$ і квадратичним за $\partial/\partial\rho_{\mathbf{k}}$ та внесок, що враховує нелінійні флуктуації між бозе-частинками:

$$\Delta\widehat{H} = \sum_{\substack{\mathbf{k}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{k}'\neq 0}}\sum_{\mathbf{k}'\neq 0} \frac{\hbar^2(\mathbf{k}\mathbf{k}')}{2m\sqrt{N}}\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}\frac{\partial^2}{\partial\rho_{\mathbf{k}}\partial\rho_{\mathbf{k}'}} + \tag{4.3}$$

$$+ \sum_{n\geq 3}\frac{(-1)^n}{4n(n-1)(\sqrt{N})^{n-2}}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_n=0}}\cdots\sum_{\mathbf{k}_n\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}(k_1^2+\ldots+k_n^2)\rho_{\mathbf{k_1}}\ldots\rho_{\mathbf{k_n}},$$

З огляду на те, що колективні координати згідно означення (3.1), є комплексними величинами $\rho_{\mathbf{k}} = \rho_{\mathbf{k},c} - i\rho_{\mathbf{k},s}$ (де введено позначення $\rho_{\mathbf{k},c} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\cos\mathbf{k}\mathbf{r}_j$ та $\rho_{\mathbf{k},s} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\sin\mathbf{k}\mathbf{r}_j$), то лінійно незалежними змінними у (4.2) є величини $\rho_{\mathbf{k}}$ лише з підпростору можливих значень хвильового вектора $\mathbf{k}$.

Дослідження бозе-рідини з урахуванням вищих взаємодій у (4.1) в зображенні колективних координат є складною задачею з погляду аналітики та чисельних обчислень. Щоб провести усі розрахунки без громіздких викладок для опису властивостей багатобозонної системи, скористаємося тим фактом, що комутаційні співвідношення між координатою та спряженим імпульсом можна доозначувати з точністю до деякої функції [152]. Таким чином, якщо у гамільтоніані (4.2) змінну $\rho_{\mathbf{k},\mu}$ вважати узагальненою координатою $\widehat{Q}_{\mathbf{k},\mu}$, а похідну $-i\hbar\partial/\partial\rho_{\mathbf{k},\mu}$ оператором узагальненого імпульсу $\widehat{P}_{\mathbf{k},\mu}$, то внесок $\Delta\widehat{H}$ ефективно мо-

жна врахувати, деформуючи комутаційні співвідношення між узагальненими координатами та імпульсами:

$$\begin{aligned} [\widehat{Q}_{\mathbf{k},\mu}, \widehat{P}_{\mathbf{k}',\mu'}] &= i\hbar(1+\beta_k \widehat{Q}^2_{\mathbf{k}',\mu'})\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\mu,\mu'}, \\ [\widehat{Q}_{\mathbf{k},\mu}, \widehat{Q}_{\mathbf{k}',\mu'}] &= 0, \qquad [\widehat{P}_{\mathbf{k},\mu}, \widehat{P}_{\mathbf{k}',\mu'}] = 0, \quad \mu = (c,s), \end{aligned} \tag{4.4}$$

де β_k — знерозмірений параметр деформації, що залежить від модуля хвильового вектора.

З урахуванням сказаного, бозе-рідину можна трактувати як сукупність невзаємодіючих гармонічних осциляторів, що коливаються з фіксованою частотою ω_k:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_B &= \sum_{\mu=c,s} {\sum_{\mathbf{k}\neq 0}}' \Big(\frac{\widehat{P}^2_{\mathbf{k},\mu}}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2 \widehat{Q}^2_{\mathbf{k},\mu}}{2} \Big) + \frac{N(N-1)}{2V}\nu(0) \\ &- \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \Big(\frac{\hbar^2 k^2}{4m} + \frac{N}{2V}\nu(k) \Big), \end{aligned} \tag{4.5}$$

а внесок від ангармонічності цих коливань ми пропонуємо описати деформацією алгебри Гейзенберга (4.4). У виразі (4.5) введено такі позначення: $m_k = \dfrac{2m}{k^2}$, $\omega_k = \dfrac{\hbar k^2}{2m}\alpha_k$, α_k — боголюбівський фактор.

Зауважимо, що оператор $\widehat{P}_{\mathbf{k},\mu}$ має розмірність дії $\hbar$, в той час як $\widehat{Q}_{\mathbf{k},\mu}$ розмірності немає. Штрих біля значка суми у означає (4.5) підсумовування за хвильовим вектором $\mathbf{k}$ з півпростору усіх можливих значень $\mathbf{k}$. Отже, замінивши багатомодовий гамільтоніан бозе-рідини в $\rho_{\mathbf{k}}$–представленні з переплутуванням мод, на адитивну суму одномодових, ми припускаємо, що модельний гамільтоніан (4.5), з умовою (4.4), добре описує властивості багатобозонної системи при вдалому підборі параметра деформації. Причому, для рідкого гелію-4 цей параметр, може набувати лише від'ємних значень.

4.2.2. Енергетичні рівні та хвильові функції Спершу розглянемо випадок додатнього параметра деформації. Хвильові функції і енер-

гетичничні рівні гамільтоніана (4.5) можна отримати, розв'язавши стаціонарне рівняння Шредінґера для гармонічного осцилятора в деформованому просторі, попередньо перейшовши до канонічно-спряжених операторів $\widehat{x}_{\mathbf{k},\mu}$, $\widehat{p}_{\mathbf{k},\mu}$ зі стандартною алгеброю Гайзенберга:

$$\widehat{P}_{\mathbf{k},\mu} = \widehat{p}_{\mathbf{k},\mu}, \quad \widehat{Q}_{\mathbf{k},\mu} = \frac{\tan \widehat{x}_{\mathbf{k},\mu}\sqrt{\beta_k}}{\sqrt{\beta_k}}, \tag{4.6}$$

$$\widehat{x}_{\mathbf{k},\mu}\widehat{p}_{\mathbf{k},\mu} - \widehat{p}_{\mathbf{k},\mu}\widehat{x}_{\mathbf{k},\mu} = i\hbar\,. \tag{4.7}$$

Таким чином, гамільтоніан системи через нові оператори координати та імпульсу виглядає так:

$$\begin{aligned}\widehat{H}_B &= \sum_{\mu=c,s}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}{}' \Big[\frac{\widehat{p}^{\,2}_{\mathbf{k},\mu}}{2m_k} + \frac{m_k\omega_k^2}{2}\frac{\tan^2 \widehat{x}_{\mathbf{k},\mu}\sqrt{\beta_k}}{\beta_k}\Big] + \\ &+ \frac{N(N-1)}{2V}\nu(0) - \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\Big(\frac{\hbar^2k^2}{4m} + \frac{N}{2V}\nu(k)\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Власні функції і власні значення цього оператора відомі (див. наприклад [184]), і в наших позначеннях рівні енергії досліджуваної бозерідини

$$E_{\ldots,n_{\mathbf{k},c},\ldots;\ldots,n_{\mathbf{k},s},\ldots} = \frac{N(N-1)}{2V}\nu(0) - \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left(\frac{\hbar^2k^2}{4m} + \frac{N}{2V}\nu(k)\right) + \tag{4.9}$$

$$+ \sum_{\mu=c,s}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}{}'\frac{\hbar^2k^2}{2m}\alpha_k\left[\left(n_{\mathbf{k},\mu}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\beta_k}{2\alpha_k}\right)^2} + \frac{\beta_k}{2\alpha_k}\left(n_{\mathbf{k},\mu}^2 + n_{\mathbf{k},\mu} + \frac{1}{2}\right)\right],$$

де квантові числа $n_{\mathbf{k},\mu} = 0, 1, 2, \ldots$, $\mu = c, s$. Зауважимо, що у випадку додатнього параметра деформації, енергетичнй спектр є необмеженим.

Хвильові функції в координатному зображенні $\widehat{x}_{\mathbf{k},\mu} = x_{\mathbf{k},\mu}$, $\widehat{p}_{\mathbf{k},\mu} = -i\hbar\partial/\partial x_{\mathbf{k},\mu}$:

$$\psi_{\ldots,n_{\mathbf{k},c},\ldots;\ldots,n_{\mathbf{k},s},\ldots}(\ldots,\, x_{\mathbf{k},\mu},\, \ldots) = \prod_{\mathbf{k}\neq 0}{}'\prod_{\mu=c,s}\psi_{n_{\mathbf{k},\mu}}(x_{\mathbf{k},\mu})\,, \tag{4.10}$$

зокрема, хвильова функція основного стану ($n_{\mathbf{k},\mu}=0$) :

$$\psi_0(x)=\beta_k^{1/4}\sqrt{\frac{\Gamma(\zeta+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\zeta+1/2)}}\cos^{\zeta}x$$

а для $n_{\mathbf{k},\mu}\geq 1$

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= \beta^{1/4}\sqrt{\frac{\Gamma(\zeta+n+1)\Gamma(n+2\zeta)}{n!\Gamma(1/2)\Gamma(\zeta+n+1/2)\Gamma(2\zeta+2n)}}\times \\ &\times \left(-\frac{d}{dx}+\zeta\tan x\right)\cdots\left(-\frac{d}{dx}+(\zeta+n-1)\tan x\right)\cos^{\zeta+n}x\,,\end{aligned} \tag{4.11}$$

де

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{1}{2}+\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sqrt{1+\left(\frac{\beta_k}{2\alpha_k}\right)^2}, \\ x &= x_{\mathbf{k},\mu}\sqrt{\beta_k},\quad n=n_{\mathbf{k},\mu}\,.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Хвильові функції є ортонормованими (4.11):

$$\int\limits_{-\pi/(2\sqrt{\beta_k})}^{\pi/(2\sqrt{\beta_k})}\psi_{n'}(x_{\mathbf{k},\mu})\psi_n(x_{\mathbf{k},\mu})\,dx_{\mathbf{k},\mu}=\delta_{n',n}\,. \tag{4.13}$$

Для запису хвильової функції першого збудженого стану покладемо квантове число $n_{\mathbf{q},c}=1$, а усі решта квантові числа дорівнюють нулеві, $n_{\mathbf{k},\mu}=0$, якщо $\mathbf{k}\neq\mathbf{q}$, $\mu\neq c$. Або нехай $n_{\mathbf{q},s}=1$, а $n_{\mathbf{k},\mu}=0$, якщо $\mathbf{k}\neq\mathbf{q}$, $\mu\neq s$. Тоді одержимо:

$$\psi_1(x)=\beta_k^{1/4}\sqrt{\frac{2\Gamma(\zeta+2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\zeta+1/2)}}\cos^{\zeta}x\,\sin x. \tag{4.14}$$

Звертаємо увагу, що власні значення енергії є квадратичними за квантовими числами $n_{\mathbf{k},\mu}$ як і в теорії ангармонічного осцилятора розрахованими з точністю до величин $\sim\hbar^2$ [184, 185].

Пишучи розв'язок відповідного рівняння Шредінгера для гамільтоніану (4.8), ми вважали, що $\beta_k>0$. Але насправді, параметр деформації може набувати і від'ємних значень. При цьому для фіксованої

моди матимемо:

$$[\widehat{Q}_{\mathbf{k},\mu}, \widehat{P}_{\mathbf{k},\mu}] = i\hbar(1 - |\beta_k|\widehat{Q}^2_{\mathbf{k},\mu}), \tag{4.15}$$

і будемо вимагати щоб

$$\left(1 - |\beta_k| \left\langle \widehat{Q}^2_{\mathbf{k},\mu} \right\rangle\right) > 0, \tag{4.16}$$

де ламані дужки $\langle(...)\rangle$ означають середнє:

$$\langle(...)\rangle = \int \psi_0(x_{\mathbf{k},\mu})(...)\psi_0^*(x_{\mathbf{k},\mu})dx_{\mathbf{k},\mu}. \tag{4.17}$$

Така, на перший погляд, дивна алгебра, приводить до того, що мінімізуючи співвідношення невизначеності Гайзенберга, отримаємо мінімальний імпульс рівний нулеві. Розглянемо цей випадок детальніше. Зрозуміло, що нові канонічно-спряжені змінні (4.6) та структура гамільтоніану (4.8), з точністю до замін $\beta_k \to |\beta_k|$, $\tan \widehat{x}_{\mathbf{k},\mu}\sqrt{\beta_k} \to \tanh \widehat{x}_{\mathbf{k},\mu}\sqrt{|\beta_k|}$, будуть такими ж. Скориставшись методом факторизації запишемо хвильові функції зміненого гамільтоніану для фіксованої (k,μ) моди:

$$\psi_0(x) = |\beta_k|^{1/4}\sqrt{\frac{\Gamma(\zeta + 1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\zeta)}}\frac{1}{\cosh^{\zeta} x}, \tag{4.18}$$

для $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= |\beta_k|^{1/4}\sqrt{\frac{\Gamma(\zeta - n + 1/2)\Gamma(2\zeta - 2n + 1)}{n!\Gamma(1/2)\Gamma(\zeta - n)\Gamma(2\zeta - n + 1)}} \times \\ &\times \left(-\frac{d}{dx} + \zeta \tanh x\right) \cdots \left(-\frac{d}{dx} + (\zeta - n + 1)\tanh x\right) \cosh^{-\zeta+n} x \end{aligned} \tag{4.19}$$

де

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{1}{2} + \frac{\alpha_k}{|\beta_k|}\sqrt{1 + \left(\frac{|\beta_k|}{2\alpha_k}\right)^2}, \\ x &= x_{\mathbf{k},\mu}\sqrt{|\beta_k|}, \quad n = n_{\mathbf{k},\mu}\,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Зазначимо, що у випадку алгебри (4.15) на хвильові функції потрібно накладати додаткову умову: $n < \zeta$, спектр є обмежений. Як тільки $\zeta \geq n$, спектр стає неперервним.

Хвильові функції для від'ємних значень β_k теж нормуються на одиницю, коли $n = n'$, але межі інтегрування безмежні:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x_{\mathbf{k},\mu})\psi_n(x_{\mathbf{k},\mu})\, dx_{\mathbf{k},\mu} = 1\,. \tag{4.21}$$

Зміниться і хвильова функція першого збудженого рівня, при $n = 1$, матимемо:

$$\psi_1(x) = |\beta_k|^{1/4}\sqrt{\frac{2\Gamma(\zeta+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\zeta-1)}}\frac{\sinh x}{\cosh^{\zeta} x}\,.$$

Якщо деформація відсутня, причому не суттєво, який ми випадок розглядаємо, отримаємо енергетичні рівні бозе-рідини в головному наближенні.

Коли ж у виразах для хвильових функцій (4.11) та (4.19) спрямувати $\beta_k \to 0$, тоді $\zeta \to \infty$, і ми матимемо:

$$\cos^{\zeta} x \underset{\beta_k\to 0}{=} \Big(1 - \frac{x^2_{\mathbf{k},\mu}\beta_k}{2} + \cdots\Big)^{\alpha_k/\beta_k} \underset{\beta_k\to 0}{=} e^{-x^2_{\mathbf{k},\mu}\alpha_k/2}\,,$$

$$\cosh^{-\zeta} x \underset{|\beta_k|\to 0}{=} \Big(1 + \frac{x^2_{\mathbf{k},\mu}|\beta_k|}{2} + \cdots\Big)^{-\alpha_k/|\beta_k|} \underset{|\beta_k|\to 0}{=} e^{-x^2_{\mathbf{k},\mu}\alpha_k/2}\,,$$

а з врахуванням асимптотичного виразу для Гамма-функції $\Gamma(\zeta+a) \sim \sqrt{2\pi}e^{-\zeta}\zeta^{(\zeta+a-1/2)}$, при $\zeta \to \infty$, отримаємо, як і повинно бути, хвильові функції гармонічного осцилятора:

$$\psi_{n_{\mathbf{k},\mu}}(x_{\mathbf{k},\mu}) = \Big(\frac{\alpha_k}{\pi}\Big)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k},\mu}!2^{n_{\mathbf{k},\mu}}}}\Big(-\frac{d}{d\eta} + \eta\Big)^{n_{\mathbf{k},\mu}} e^{-\eta^2/2}\,, \tag{4.22}$$

тут $\eta = x_{\mathbf{k},\mu}\sqrt{\alpha_k}, \quad \alpha_k = m_k\omega_k/\hbar.$

На завершення цього розділу, знайдемо вираз для енергетичного рівня, коли в системі є одне елементарне збудження з хвильовим вектором $\mathbf{q}$. З виразу (4.9) знаходимо:

$$E_{\ldots,0,n_{\mathbf{q},c}=1,0,\ldots;\ldots,0,\ldots} = E_{\ldots,0,\ldots;\ldots,0,n_{\mathbf{q},s}=1,0,\ldots;\ldots,0,\ldots} = E_0 + E_q\,,$$

де спектр елементарних збуджень

$$E_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\alpha_q \left[\sqrt{1+\left(\frac{\beta_q}{2\alpha_q}\right)^2} + \frac{\beta_q}{\alpha_q}\right]. \tag{4.23}$$

Як бачимо, при відсутності деформації цей вираз переходить у спектр елементарних збуджень Боголюбова [186]:

$$E_q^B = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\alpha_q\,. \tag{4.24}$$

Вираз (4.23) є точним розв'язком рівняння Шредінгера з гамільтоніаном (4.8). Зрозуміло, що ми не отримаємо тут такого явища як загасання спектру елементарних збуджень, оскільки в гамільтоніані (4.8) немає членів, які описують розсіяння елементарних збуджень та їх розпад. Розвал елементарних збуджень на два є причиною того, що в рідкому ^{4}He спектр має точку закінчення при $k \simeq 3.6$ Å^{-1} [187].

4.3. Енергія основного стану

Якщо в (4.9) усі квантові числа рівні нулеві, $n_{\mathbf{k},\mu} = 0$, то отримаємо енергію основного стану E_0, яку після елементарних перетворень записуємо так:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{N(N-1)}{2V}\nu(0) - \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\frac{\hbar^2 k^2}{8m}(\alpha_k - 1)^2 + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\frac{\hbar^2 k^2}{4m}\alpha_k\left(\sqrt{1+\left(\frac{\beta_k}{2\alpha_k}\right)^2} + \frac{\beta_k}{2\alpha_k} - 1\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Тут перші два доданки відтворюють енергію основного стану в наближенні Боголюбова [186], а останній доданок, що враховує ангармонізми завжди дає від'ємний внесок, якщо параметр деформації $\beta_k < 0$. Таке пониження енергії основного стану для рідкого ^{4}He дає і пряме врахування ангармонічного оператора $\Delta\widehat{H}$ в гамільтоніані (4.2) за теорією збурень [140, 141].

Виразимо коефіцієнт Фур'є взаємодії $\nu(0)$ при $k \to 0$ через швидкість першого звуку c в рідкому ^{4}He, скориставшись термодинамічним співвідношенням (3.38). В припущенні, що параметр деформації слабо залежить від густини бозе-рідини, диференціюємо енергію (4.25) і отримуємо:

$$mc^2 = \frac{N}{V}\nu(0) - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\frac{\hbar^2k^2}{4m}\frac{(\alpha_k^2-1)^2}{\alpha_k^3}\frac{1}{(1+(\beta_k/2\alpha_k)^2)^{3/2}}, \qquad (4.26)$$

це рівняння дозволяє переписати енергію основного стану в термодинамічній границі так:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{Nmc^2}{2} - \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\frac{\hbar^2k^2}{2m}(\alpha_k-1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\frac{\hbar^2k^2}{2m}\alpha_k\Big(\sqrt{1+\Big(\frac{\beta_k}{2\alpha_k}\Big)^2}+\frac{\beta_k}{2\alpha_k}-1\Big) + \\ &+ \frac{1}{16}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\frac{\hbar^2k^2}{2m}\frac{1}{\alpha_k}\Big(\alpha_k-\frac{1}{\alpha_k}\Big)^2\left[1+\Big(\frac{\beta_k}{2\alpha_k}\Big)^2\right]^{-3/2}. \end{aligned} \qquad (4.27)$$

Найкращим "випробуванням" виразу (4.27), як й інших отриманих тут виразів, є їх застосування до моделей, що мають точний розв'язок або до моделей, які допускають розгляд за теорією збурень. Головним питанням при таких порівняльних дослідженнях є очевидно, фіксація параметра деформації β_k.

4.4. Термодинамічні і структурні характеристики бозе–рідини з деформацією

4.4.1. Структурий фактор За означенням рідинний структурний фактор дорівнює середній квадратичній флюктуації густини частинок:

$$S(k) = \langle |\rho_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \, . \tag{4.28}$$

Врахуємо, що колективні змінні є узагальненими координатами $\widehat{Q}_{\mathbf{k},\mu}$, і середнє (4.28) на хвильових функціях основного стану бозе-рідини в деформованому просторі (4.11) або (4.19) обчислюється не складно. При цьому зауважимо, що структурний фактор $S(k)$ є аналітичною функцією параметра деформації β_k. В цьому можна переконатись, спершу порахувавши $S(k)$ для додатніх значень параметра деформації на хвильових функціях (4.11):

$$S(k) = \sum_{\mu=c,s} \langle \widehat{Q}^2_{\mathbf{k},\mu} \rangle = \frac{1}{\beta_k} \sum_{\mu=c,s} \int\limits_{-\pi/(2\sqrt{\beta_k})}^{\pi/(2\sqrt{\beta_k})} \psi_0^2(x_{\mathbf{k},\mu}) \tan^2 \sqrt{\beta_k} x_{\mathbf{k},\mu} dx_{\mathbf{k},\mu} \tag{4.29}$$

а опісля, у випадку $\beta_k \to -|\beta_k|$, на хвильових функціях (4.19):

$$S(k) \;\; = \;\; \sum_{\mu=c,s} \frac{1}{|\beta_k|} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^2(x_{\mathbf{k},\mu}) \tanh^2 \sqrt{|\beta_k|} x_{\mathbf{k},\mu} dx_{\mathbf{k},\mu} \tag{4.30}$$

В результаті інтегрування, отримаємо тотожні вирази:

$$S(k) = \frac{1}{\alpha_k \sqrt{1 + (\beta_k / 2\alpha_k)^2}} \tag{4.31}$$

Коли β_k рівне нулеві, з цього виразу повертаємося до результату Боголюбова-Зубарєва [130]: $S(k) = 1/\alpha_k$. Окрім того, для від'ємних значень параметра деформації, умова (4.16) набуває такого вигляду:

$$\frac{|\beta_k| S(k)}{2} < 1 \tag{4.32}$$

Структурний фактор можна обчислити і іншим способом, записуючи його через варіаційну похідну за величиною $\nu(k)$ від вільної енергії системи, яка при температурі абсолютного нуля дорівнює енергії основного стану E_0:

$$S(k) - 1 = \frac{2V}{N} \frac{\delta E_0}{\delta \nu(k)} .$$

Використовуючи для E_0 знайдений вище вираз (4.25), після простих обчислень знову приходимо до результату (4.31).

На закінчення цього пункту, перепишемо вираз для спектра елементарних збуджень рідкого гелію-4 (4.24) через структурний фактор (4.31):

$$E_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2mS(q)} + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \beta_q . \tag{4.33}$$

З формули (4.33) зрозуміло, що потрібно обирати параметр деформації від'ємним. Адже експериментально виміряний спектр елементариних збуджень лежить суттєво нижче за теоретично розрахований в наближені парних кореляцій.

4.4.2. Кінетична енергія та розподіл за імпульсами Обчислимо середнє значення кінетичної енергії $\langle K \rangle$ як середнє оператора (4.8), взятого при $\nu(k) = 0$:

$$\langle K \rangle = \sum_{\mu=c,s} {\sum_{\mathbf{k}\neq 0}}' \frac{\hbar^2 k^2}{4m} \left[\frac{1}{\hbar^2} \langle \hat{P}^2_{\mathbf{k},\mu} \rangle + \langle \hat{Q}^2_{\mathbf{k},\mu} \rangle - 1 \right] \tag{4.34}$$

Перший доданок в квадратних дужках легко обчислюємо за допомогою хвильової функції основного стану з (4.11):

$$\langle \hat{P}^2_{\mathbf{k},\mu} \rangle = \frac{\hbar^2 \beta_k \zeta^2}{\zeta - 1/2} = \frac{\hbar^2}{2S(k)} \left(1 + \frac{\beta_k S(k)}{2} \right)^2 , \tag{4.35}$$

причому, вираз для ζ беремо з (4.11), а структурний фактор з (4.31). Другий доданок в (4.34), є фактично виразом для структурного фактора (4.31), поділеним на два. В результаті отримаємо вираз:

$$\langle K\rangle = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \frac{\hbar^2 k^2}{8m}\Big[\frac{\left(S(k)-1\right)^2}{S(k)} + \beta_k + \frac{\beta_k^2 S(k)}{4}\Big], \tag{4.36}$$

який при $\beta_k = 0$ є середньою квадратичною енергією в наближенні парних кореляцій. Зрештою, диференціюючи енергію основного стану (4.25) за масою частинки: $\langle K\rangle = -m\partial E_0/\partial m$, отримаємо той же результат для кінетичної енергії (4.36).

Середню кінетичну енергію можна записати через середнє число атомів $N_{\mathbf{k}}$, що мають імпульс $\hbar\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\neq 0$:

$$\langle K\rangle = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} N_{\mathbf{k}}, \tag{4.37}$$

при цьому порівнюючи (4.36) з останнім записом, отримаємо:

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{\left(S(k)-1\right)^2}{4S(k)} + \frac{\beta_k}{4} + S(k)\frac{\beta_k^2}{16} \tag{4.38}$$

Для середнього числа частинок такий ж результат можна одержати, почисливши варіаційну похідну за вільночастинковим спектром $\hbar^2k^2/2m$ від вільної енергії системи, яка при абсолютному нулі температури збігається з енергією основного стану (4.27).

Оцінимо також відносну кількість атомів, з імпульсом рівним нулеві (бозе-конденсат):

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0} N_{\mathbf{k}} = 1 - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\frac{\left(S(k)-1\right)^2}{S(k)} + \frac{\Delta N_0}{N}, \tag{4.39}$$

де внесок пов'язаний з деформацією:

$$\frac{\Delta N_0}{N} = -\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\beta_k\left(1+\frac{\beta_k S(k)}{4}\right) \tag{4.40}$$

Зауважимо, що всюди в проміжних обчисленнях ми вважаємо, що β_k є додатньою величиною, а в остаточних чисельних обчисленнях це обмеження знімаємо.

4.4.3. Потенціал міжатомниї взаємодії Початковий модельний гамільтоніан (4.5) явно містить лише парну взаємодію між бозе-частинками, і виникає питання про відтворення міжатомного потенціалу цілком, з урахуванням три- і чотиричастинкових взаємодій. Ці вищі взаємодії дають ненульовий внесок у термодинамічні функції, який ми враховуємо, деформуючи комутаційні співвідношення (4.4). Спершу запишемо $\nu(k)$ коефіцієнт Фур'є енергії взаємодії між частинками через обчислений нами структурний фактор (4.31):

$$\nu(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{4m\rho}\left(\frac{1}{S^2(k)} - 1 - \frac{\beta_k^2}{4}\right), \tag{4.41}$$

тут параметр β_k враховує вплив нелінійних флуктуацій, і коли $\beta_k = 0$, ми одержимо нульове наближення для фур'є-образу. Зафіксувавши параметр деформації, цей вираз можна співставляти з результатами роботи [188], де отримане рівняння для $\nu(k)$ методом колективних змінних в post-RPA наближенні. Згідно означення, запишемо потенціал взаємодії між атомами гелію в координатному представленні:

$$\Phi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{kr}}\nu(k)\; d\mathbf{k} \tag{4.42}$$

Провівши елементарні обчислення, внесок, зумовлений деформацією комутаційних співвідношень, буде таким:

$$\Delta\Phi(r) = -\frac{1}{8\pi^2\rho r}\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty k^3\beta_k^2 \sin kr\; dk \tag{4.43}$$

4.5. Основний стан системи “бозе–рідина плюс домішка” в представленні деформованих колективних змінних

Дослідимо рух домішки масою M у багатобозонній системі в межах формалізму деформованих комутаційних співвідношень між узагальненими координатами та відповідними узагальненими імпульсами (4.4), вважаючи бозон-домішкову взаємодію слабкою.

4.5.1. Вихідні вирази Нехай бозе-рідина перебуває в основному стані з хвильовою функцією $|0\rangle$ та енергією E_0. Рух домішки при цьому описуємо плоскою хвилею таенергією $\hbar^2k^2/2m$. Тоді довільний квантовий стан системи “бозе-рідина плюс домішковий атом” є добутком хвильової функції бозе-рідини $|\mathbf{k}\rangle$ та хвильової функції домішки:

$$|\mathbf{k},\mathbf{q}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{qr}} |\mathbf{k}\rangle, \tag{4.44}$$

де позначено

$$|\mathbf{k}\rangle = \prod_{\mathbf{k}\neq 0}{}' \prod_{\mu=c,s} \psi_{n_{\mathbf{k},\mu}}(x_{\mathbf{k},\mu}) \,, \tag{4.45}$$

причому, явний вигляд $\psi_{n_{\mathbf{k},\mu}}(x_{\mathbf{k},\mu})$ беремо з (4.19) оскільки детальний аналіз розв’язків стаціонарного рівняння Шредінгера з гамільтоніаном (4.5) показав, що для рідкого гелію, параметр деформації β_k слід обирати від’ємним (4.31).

Запишемо для прикладу хвильову функцію першого збудженого рівня системи “бозе-рідина плюс домішковий атом” для фіксованої $\mathbf{k}'$, μ моди та хвильового вектора домішки $\mathbf{q}'$, скориставшись тими ж міркуваннями, що й при записі (4.44), тому

$$|\mathbf{k}',\mathbf{q}'\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{V}}} \mathbf{e}^{-\mathbf{iq}'\mathbf{r}} |\mathbf{k}'\rangle, \tag{4.46}$$

де $|\mathbf{k}'\rangle$ є хвильовою функцією першого збудженого рівня бозе-рідини, і на підставі отриманих раніше результатів, при $\beta_k < 0$:

$$|\mathbf{k}'\rangle = \sqrt{2(\zeta-1)}\sinh(x_{\mathbf{k}',\mu'}\sqrt{|\beta_{k'}|})|0\rangle, \tag{4.47}$$

з урахуванням величини ζ з (4.20) та хвильової функції бозе-рідини $|0\rangle$ з (4.22). В границі $\beta \to 0$, для першого збудженого рівня одержимо:

$$|\mathbf{k}', \mathbf{q}'\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{q}'\mathbf{r}} \sqrt{2\alpha'_k}\rho_{-\mathbf{k}',\mu'}|0\rangle, \tag{4.48}$$

де хвильова функція основного стану бозе-рідини, виражається в наближенні парних кореляцій:

$$|0\rangle = \prod_{\mathbf{k}\neq 0}{}' \sqrt{\frac{\alpha_k}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\alpha_k \rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}}} \tag{4.49}$$

Взаємодію між бозе-частинками та домішкою описуватимемо оператором (3.3), який з введенням деформованої алгебри Гейзенберга (4.4) матиме вигляд:

$$\hat{H}_{int} = \rho\bar{\nu}(0) + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\sqrt{\rho}\bar{\nu}(k)\left(\widehat{Q}_{\mathbf{k},c} - i\widehat{Q}_{\mathbf{k},s}\right)e^{i\mathbf{kr}}, \tag{4.50}$$

тут ми врахували, що $\rho_{\mathbf{k},\mu} = \hat{Q}_{\mathbf{k},\mu}$.

Вважаючи $\hat{H}_{int}$ малим збуренням, дослідимо основний стан системи, пертурбативно, з точністю до другого порядку теорії збурень.

4.5.2. Поправки до енергії основного стану системи Повну енергію системи "бозе-рідина плюс домішковий атом" в границі низьких температур за теорією збурень можна записати у вигляді:

$$E_q = E_q^{(0)} + E_q^{(1)} + E_q^{(2)} \tag{4.51}$$

тут перший доданок є енергією основного стану системи "рідина плюс домішка" в нульовому наближенні:

$$E_q^{(0)} = E_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{2M}, \tag{4.52}$$

причому, вираз для енергії E_0 записуємо з урахуванням деформації (деталі розрахунку див. Розд. (4.3)). Другий доданок у (4.51) є діагональним матричним елементом оператора збурення (4.50), обчисленим на хвильових функціях основного стану системи:

$$E_q^{(1)} = \langle 0, \mathbf{q}|\hat{H}_{int}|0, \mathbf{q}\rangle = \rho\bar{\nu}(0), \tag{4.53}$$

тут ми врахували, що $\mathbf{k} \neq 0$.

Згідно означення, другу поправку до енергії основного стану системи можна записати у вигляді:

$$E_q^{(2)} = \sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{0}} \sum_{\mathbf{k}'\neq\mathbf{0}} \frac{|\langle \mathbf{k}', \mathbf{q}'|\hat{H}_{int}|0, \mathbf{q}\rangle|^2}{\hbar^2 q^2/2M - \hbar^2 q'^2/2M - E_{k'}}, \tag{4.54}$$

тут $E_{k'}$ спектр елементарних збуджень рідкого гелію, записаний через структурний фактор бозе-рідини $S(k')$, в деформованому випадку (4.31).

Для розрахунку поправки (4.54) потрібно обчислити недіагональний матричний елемент на хвильових функціях системи (4.47) при $n_{\mathbf{k},\mu} = 0$,з оператором збурення (4.50). Наведемо деякі деталі обчислень. Запишемо недіагональний матричний елемент у вигляді:

$$\langle \mathbf{k}', \mathbf{q}'|\widehat{H}_{int}|0, \mathbf{q}\rangle = \frac{\sqrt{N}}{V}\bar{\nu}(k)\left(\langle \mathbf{k}'|\widehat{Q}_{\mathbf{k},c}|0\rangle - i\langle \mathbf{k}'|\widehat{Q}_{\mathbf{k},s}|0\rangle\right)\delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}'-\mathbf{q}}. \tag{4.55}$$

Обчислимо один з доданків у дужках, використовуючи вираз для хвильової функції першого збудженого стану бозе-рідини (4.47):

$$\langle \mathbf{k}'|\widehat{Q}_{\mathbf{p},\mu'}|0\rangle \;=\; \sqrt{2(\zeta-1)}\langle 0|\sinh\left(x_{\mathbf{k}',\mu}\sqrt{|\beta_{k'}|}\right)\widehat{Q}_{\mathbf{p},\mu'}|0\rangle \tag{4.56}$$

тут уведено позначення $\mathbf{p} = \mathbf{q}' - \mathbf{q}$ а $\mu' = c$ або $\mu' = s$. Цей вираз не рівний нулеві, коли $\mathbf{p} = \mathbf{k}'$ і $\mu' = \mu$. З урахуванням явного вигляду хвильової функції основного стану, запишемо (4.56) так

$$\langle \mathbf{k}'|\widehat{Q}_{\mathbf{p},\mu'}|0\rangle = \frac{\sqrt{2(\zeta-1)}}{\sqrt{|\beta_{k'}|}}\frac{\Gamma(\zeta+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\zeta)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sinh^2\left(x_{\mathbf{k}',\mu}\sqrt{|\beta_{k'}|}\right)}{\cosh^{2\zeta+1}\left(x_{\mathbf{k}',\mu}\sqrt{|\beta_{k'}|}\right)}dx_{\mathbf{k}',\mu},$$

після обчислення інтегралу з використанням Бета-функції, остаточно одержимо:

$$\langle \mathbf{k}', \mathbf{q}' | \widehat{H}_{int} | 0, \mathbf{q} \rangle = \frac{\sqrt{N}}{V} \bar{\nu}(k')(1-i) \sqrt{\frac{\zeta - 1}{2|\beta_{k'}|}} \frac{\zeta - 1/2}{\zeta} \left[\frac{\Gamma(\zeta - 1/2)}{\Gamma(\zeta)} \right]^2$$

Для від'ємних значень параметра деформації матричний елемент відмінний від нуля лише коли $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{k}'$:

$$|\langle \mathbf{k}', \mathbf{q}' | \widehat{H}_{int} | 0, \mathbf{q} \rangle|^2 = \frac{N}{V^2} \bar{\nu}^2(k') \frac{1}{\beta_{k'}} \frac{(\zeta - 1)(\zeta - 1/2)^2}{\zeta^2} \left[\frac{\Gamma(\zeta - 1/2)}{\Gamma(\zeta)} \right]^4 \quad (4.57)$$

Запишемо другу поправку до енергії основного стану (4.54) з врахуванням отриманого матричного елементу (4.57) для $\beta_k < 0$. При цьому вираз під знаком суми у (4.54) розкладемо в ряд за степенями $\mathbf{k}'$:

$$\begin{aligned} E_q^{(2)} &= -\frac{N}{V^2} \sum_{\mathbf{k}' \neq 0} \bar{\nu}^2(k') \frac{1}{\beta_{k'}} \frac{(\zeta - 1)(\zeta - 1/2)^2}{\zeta^2} \left[\frac{\Gamma(\zeta - 1/2)}{\Gamma(\zeta} \right]^4 \times \\ &\times \frac{1}{\hbar^2 k'^2/2M + E_{k'}} \left[1 + \left(\frac{2(\mathbf{k}'\mathbf{q})}{k'^2 + 2E_{k'}M/\hbar^2} \right)^2 + ... \right]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Зауважимо, що у розкладі (4.58) доданки типу $\sum_{\mathbf{k}' \neq 0} (\mathbf{k}'\mathbf{q})^l$ з непарними степенями l дорівнюють нулеві. Причому, розклад за степенями $\mathbf{k}'$ допустимий для довільних значень хвильового вектора $\mathbf{k}'$. Для аналізу отриманих тут виразів, запишемо другу поправку до енергії основного стану системи (4.58) у вигляді:

$$E_q^{(2)} = E_{q=0}^{(2)} - \frac{N}{V^2} \sum_{\mathbf{k}' \neq 0} \left(\frac{\hbar^2 \bar{\nu}(k')}{M} \right)^2 \frac{(\mathbf{k}'\mathbf{q})^2}{[\hbar^2 k'^2/2M + E_{k'}]^3} f(\beta_{k'}), \quad (4.59)$$

де

$$E_{q=0}^{(2)} = -\frac{N}{V^2} \sum_{\mathbf{k}' \neq 0} \bar{\nu}^2(k') \frac{1}{\hbar^2 k'^2/2M + E_{k'}} f(\beta_{k'}) \quad (4.60)$$

де функція:

$$f(\beta_{k'}) = \frac{1}{|\beta_{k'}|} \frac{(\zeta - 1)(\zeta - 1/2)^2}{\zeta^2} \left[\frac{\Gamma(\zeta - 1/2)}{\Gamma(\zeta)} \right]^4 \quad (4.61)$$

В недеформованому випадку, коли $\beta_{k'} \to 0$, з урахуванням наближеного розкладу Г-функції: $\Gamma(\zeta + a) = \sqrt{2\pi} e^{-\zeta} \zeta^{(\zeta+a-1/2)}$, функція $f(\beta_{k'}) \to 1/\alpha_{k'}$.

Внесок до енергії основного стану (4.51) системи "рідина плюс домішковий атом" відповідає виразу, що отриманий в другому порядку теорії збурень без деформації:

$$E_q^{(2)} = -\frac{N}{V^2} \sum_{\mathbf{k}' \neq 0} \frac{\nu^2(k')/\alpha_{k'}}{\hbar^2 k'^2/2M + \hbar^2(\mathbf{k}'\mathbf{q})/M + E_{k'}}, \tag{4.62}$$

Перша поправка до енергії основного стану системи (4.51) разом з доданком (4.60) є енергією занурення домішкового атома в бозе-рідину:

$$E_i = \rho\bar{\nu}(0) - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}' \neq 0} \frac{(\rho\bar{\nu}(k'))^2}{\hbar^2 k'^2/2M + E_{k'}} f(\beta_{k'}), \tag{4.63}$$

На підставі отриманих результатів, формально запишемо вираз для повної енергії системи "бозе-рідина плюс домішковий атом" як у (2.26):

$$E_q = E_0 + E_i + \frac{\hbar^2 q^2}{2M^*} \tag{4.64}$$

тут величина M^* є ефективною масою домішки:

$$\frac{M}{M^*} = 1 - \frac{N}{V^2} \sum_{\mathbf{k}' \neq 0} \bar{\nu}^2(k') \left(\frac{2M}{\hbar^2}\right)^2 \frac{4(\mathbf{k}'\mathbf{q})^2}{[k'^2 + 2E_{k'}M/\hbar^2]^3} f(\beta_{k'}) \tag{4.65}$$

Звернимо увагу на те, що тут залежність від параметра деформації фігурує лише в спектрі елементарних збуджень E_k та функції $f(\beta_k)$.

4.6. Обговорення результатів

Оцінка внесків до отриманих нами фізичних характеристик, що зумовленні деформуванням комутаційних співвідношень (4.4), потребує вибору явної функції для параметра деформації та його коректного врахування в усіх виразах. Насамперед нам потрібно обрати таку

функцію, що забезпечить добре узгодження з результатами другого порядку теорії збурень для енергії бозе-рідини. Окрім того, цю функцію потрібно виразити через добре виміряні величини в теорії рідкого гелію-4, і при цьому оминути проблему щодо переписування фур'є-образу потенціалу бозон-бозонної взаємодії $\nu(0)$ через швидкість звуку в бозе-рідині, адже ми заздалегідь припускаємо, що параметр деформації залежить лише від хвильового вектора.

Зрозуміло, що ми не очікуємо повної тотожності опису властивостей системи "бозе-рідина плюс домішковий атом" деформованою алгеброю Гейзенберга, та якісно схожої поведінки з тими результатами, які отримані теорією збурень, ми досягли, моделюючи параметр деформації кількома способами.

4.6.1. Вибір параметра деформації Для чисельної оцінки параметра деформації, стартуватимемо з виразу для спектра елементарних збуджень (4.31), та візьмемо значення для структурного фактора та спектра елементарних збуджень зі експериментальних праць [187], [183]:

$$\beta_k = \frac{E_k}{\hbar^2 k^2/2m} - \frac{1}{S(k)}. \tag{4.66}$$

Оскільки спектр елементарних збуджень в реальній бозе-рідині – рідкому ^{4}He, має точку закінчення, а дані для структурного фактора наведено до 7.3 Å^{-1}, тому ми маємо значення параметра деформації в обмеженому діапазоні хвильових векторів. Однак, при $k \to \infty$, спектр елементарних збуджень повинен прямувати до вільночастинкового спектру $E_k \to \hbar^2 k^2/2m$, а структурний фактор $S(k) \to 1$, то параметр деформації в цій границі $\beta_k \to 0$. На Рис. 4.1 подано параметр деформації β_k, який виходячи з експериментальних значень для

$S(k)$ та E_k є від'ємним. Зауважимо, що на цьому графіку є виражений мінімум в околі точки $k = 1$ Å^{-1}, що відповідає характерному максимумові у поведінці спектра елементарних збуджень (див. Рис. 4.5). Для порівняння змоделюємо параметр деформації модельною функці-

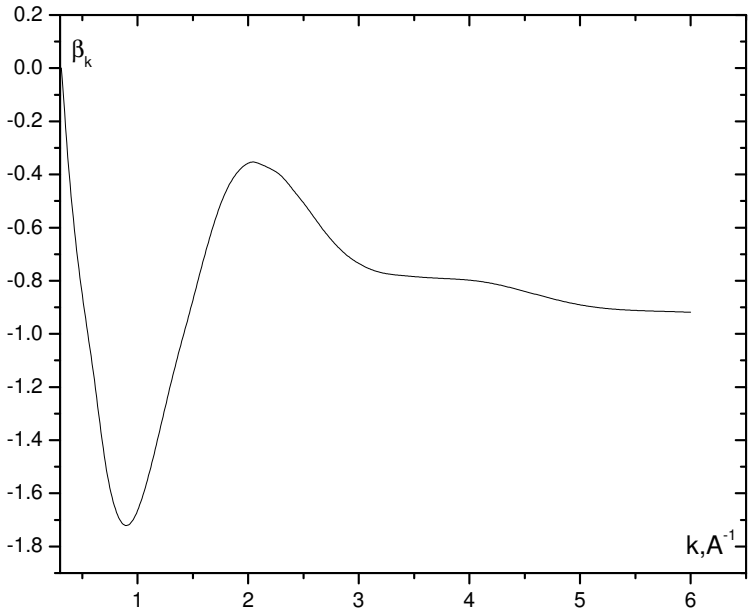

Рис. 4.1. Параметр деформації (4.66)

єю, де дані для структурного фактора бозе-рідини екстрапольовані до температури $T = 0$ K [175] , у вигляді:

$$\beta_k = -S(k)|S(k) - 1|^3. \tag{4.67}$$

Графік цієї функції подано Рис. 4.2. Зазначимо, що такий вибір відтворює поведінку параметра деформації в довгохвильвій області, і є застосовним до обчислення фізичних величин в границі $T \to 0$. На Рис. 4.3 наведено залежність, що ілюструє обмеження на цей параметр деформації (4.32).

Зрештою, можна запропонувати й інші модельні функції, які б задовольняли викладенні тут міркування, за умови, що внески до основних

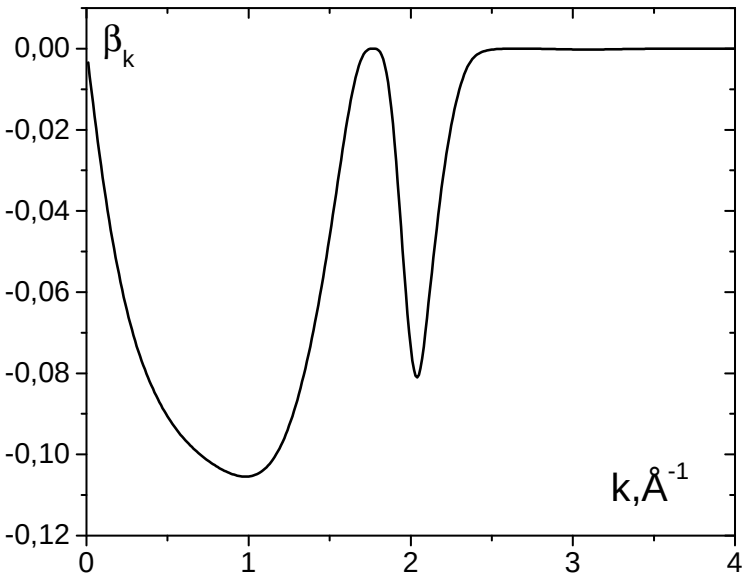

Рис. 4.2. Модельний параметр деформації (4.67)

фізичних характеристик системи відтворюватимуть результати post-RPA наближення в теорії рідкого гелію-4. Зокрема, можна вибрати параметр деформації у вигляді такої функції:

$$\beta_k = -\beta_0 e^{-(1-k/k_0)^2} \tag{4.68}$$

При $k \to \infty$ маємо $\beta_k = -\beta_0$. Коефіцієнт β_0 обираємо так, аби максимально наблизити теоретично обчислений спектр елементарних збуджень (4.31) до експериментально виміряного. Хвильовий вектор рівний при цьому $k_0 = 0.98$ Å^{-1}.

4.6.2. Енергія та ефективна маса домішки з деформацією

Маючи значення параметра деформації β_k з (4.67), далі проведемо чисельні розрахунки знайдених нами величин з розрахунком на одну частинку в термодинамічній границі.

Енергія основного стану бозе-рідини, з врахуванням деформаційно-

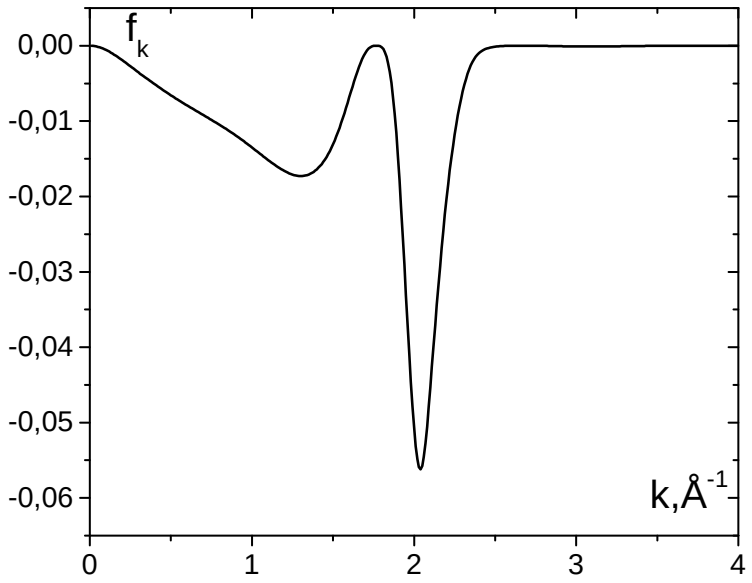

Рис. 4.3. Фунція $f_k = \beta_k S(k)/2$, як умова на обмеження параметра деформації (4.67).

го параметра:

$$\frac{E_0}{N} = \frac{E_B}{N} + \frac{\Delta E_0}{N}, \tag{4.69}$$

де внесок:

$$\frac{\Delta E_0}{N} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2 m\rho_0}\int_0^\infty k^4 dk \left(2(S_k^2-1) + \left(\frac{\beta_k S_k}{2}\right)^2\right)\left(\frac{\beta_k S_k}{2}\right)^2 + \\ + \frac{\hbar^2}{16\pi^2 m\rho}\int_0^\infty k^4 dk \left(\beta_k + \frac{\beta_k^2}{4}\right). \tag{4.70}$$

Чисельне значення першого доданку у (4.69), відповідає енергії основного стану в наближенні Боголюбова, (при $\rho = 0.0219$ Å^{-3} та швидкості звуку $c = 238.2$ м/с): $E_B/N = -5.31$ K.

Оцінка внеску, зумовленого деформацією дає: $\Delta E_0/N = -1.89$ K. Так, що повна енергія на одну частинку $E_0/N = -7.2$ K. Експериментальні вимірювання [175] дають $E_0/N = -7.13$ K.

Такий підбір параметра деформації (4.67) зумовлює не суттєву поправку до значення бозе-конденсату (4.40), отриману в нульовому наближенні:

$$\frac{N_0}{N} = \frac{N_B}{N} + \frac{\Delta N_0}{N}, \qquad \frac{\Delta N_0}{N} = 0.11 \tag{4.71}$$

N_B - дає невірний результат: $N_B/N = 0.31$.

Отже, деформація комутаційних співвідношень покращує результати нульового наближення при розгляді бозе-рідини. Однак, воно чисельно є недостатнім. Потрібно шукати бодай двопараметричну деформацію, яка краще враховуватиме внесок ангармонічних доданків $\Delta\hat{H}$ у гамільтоніані (4.2). Зауважимо, що нелінійні доданки пов'язані з деформацією, у виразі для потенціалу взаємодії між атомами гелію, є квадратичними (4.43). З графічної залежності (див. Рис. 4.4) видно, що їхній внесок не значний, в той час, як лінійна поправка за параметром деформації до спектра елементарних збуджень (4.31) дає вклад (див. Рис. 4.5). Зрештою, така поведінка є очікуваною вже при обчисленні енергії основного стану бозе-рідини з модельним параметром деформації - ведучим є лінійний доданок (4.27). Якщо б ми описували взаємодію між атомами гелію сферично-симетричними потенціалами, то при дослідженні основного стану в енергії були б відсутні квадратичні поправки. В термодинамічній границі, проінтегрувавши за кутами, вираз для ефективної маси домішкового атома (4.65) матиме вигляд:

$$\frac{M}{M^*} = 1 - \frac{2}{3\pi^2}\rho \int_0^\infty k^4 \frac{\bar{\nu}^2(k)(2M/\hbar^2)^2}{\left[k^2 + 2E_k M/\hbar^2\right]^3} f(\beta_k)\, dk \tag{4.72}$$

В припущенні, що $\nu(k) = \bar{\nu}(k)$ (3.37), з модельним параметром деформації (4.66), наведемо результати розрахунку ефективної маси домішки ^{3}He для різних густин рідкого гелію-4.

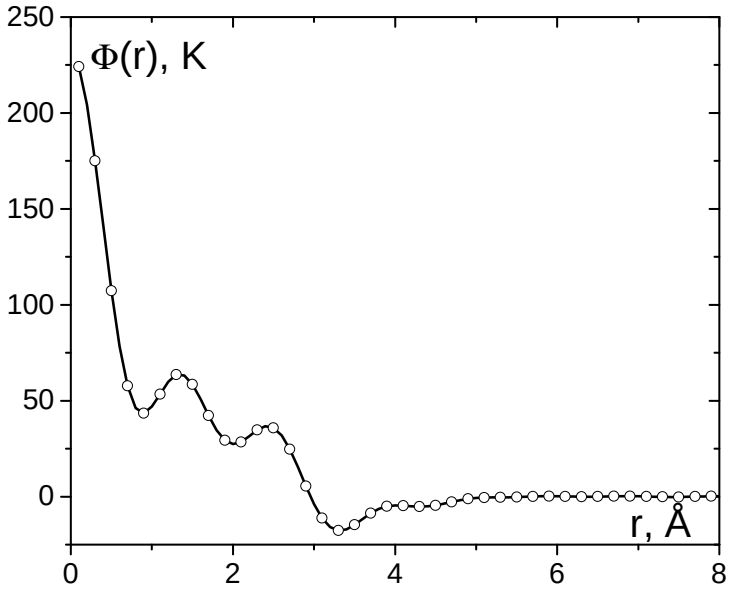

Рис. 4.4. Потенціал взаємодії між атомами гелію. Кружечки - недеформований випадок. Суцільна лінія - з модельним параметром деформації.

Наведемо ще явний вигляд енергії заміщення домішкового атома згідно означення (3.29), з урахуванням енергії основного стану бозе-рідини в деформованому випадку (4.25):

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{16\pi^2 m\rho}\int_0^\infty k^4(\alpha_k^2-1)\left(2-\frac{1}{\alpha_k}-\alpha_k S(k)- \right. \qquad (4.73)$$
$$\left. - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \frac{\alpha_k^2-1}{m/M+1/S(k)+\beta_k} f(\beta_k)\right) dk,$$

зауважимо, що для чисельних обчислень тут потрібно врахувати вираз для боголюбівського фактора записаний у такій формі:

$$\alpha_k^2 = \frac{1}{S_k^2} - \frac{\beta_k^2}{4}. \qquad (4.74)$$

В границі $\beta_k \to 0$ енергія заміщення (4.73) співпадає з виразом (3.43), отриманим варіаційним методом.

У таблиці (4.2) наведено значення енергії розділення, обчисленої нами згідно означення (3.30) в деформованому випадку з використанням

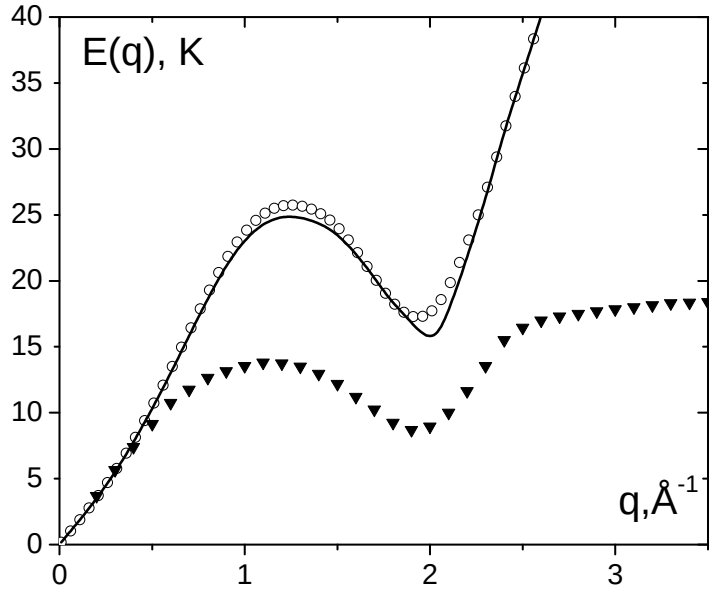

Рис. 4.5. Спектр елементарних збуджень. Кружечки - фейманівський спектр; суцільна лінія - спектр, з врахуванням параметра деформації; трикутники - експериментальні значення спектра.

виразів (4.69) і (4.73). Для наочності ми виписали тут значення енергій при різних густинах, що отримані в роботі [63], та з розділу (3.3), де енергія розділення обчисленна варіаційним методом. З огляду на структуру гамільтоніану (4.5), випадок $\beta_k = 0$ відповідає наближенню парних кореляцій, і енергія суттєво залежить від густини рідкого гелію-4. В той час як варіаційний розрахунок енергії (остання колонка) не дає такої динаміки. Один з можливих способів вибору модельного параметра деформації у вигляді (4.67) значно впливає на поведінку енергії розділення.

Таблиця 4.1. Ефективна маса домішкового атома ^{3}He за різних густин рідкого гелію-4

ρ, Å^{-3}	M^*/M, (4.72)	M^*/M, (4.72, $\beta_k = 0$)	M^*/M(exp), [113]	M^*/M, [84]	M^*/M, [150]
0.0218	1.78	1.71	2.15	2.02	2.09
0.0240	2.13	2.00	2.39	2.36	2.34
0.0254	2.49	2.27	2.62	2.72	2.55

Таблиця 4.2. Чисельні результати для енергії розділення у випадку домішки ^{3}He.

ρ, Å^{-3}	B, K $\beta_k \neq 0$	B, K $\beta_k = 0$	B, K, [63]	B, K, 3.3
0.0218	4.56	2.09	1.39	2.02
0.0226	4.09	1.66	1.15	2.05
0.0234	3.58	1.21	0.88	2.09
0.0242	3.05	0.74	0.51	2.09
0.0250	2.53	0.27	0.13	2.05
0.0258	2.00	−0.16	−0.36	1.98

4.7. Висновки до розділу 4

В цьому розділі запропоновано підхід, особливістю якого є врахування багаточастинкових кореляцій в теорії рідкого ^{4}He, деформуючи комутаційні співвідношення між узагальненими координатами та імпульсами. Параметр деформації, що враховує вплив нелінійних флуктуацій на поведінку бозе-систем, обрано виходячи з експериментальних значень для спектра елементарних збуджень та екстрапольованих експериментальних даних структурного фактора до температури

$T = 0$ K. З модельним параметром деформації проведено чисельну оцінку енергії основного стану та кількості бозе-конденсату, відтворено спектр елементарних збуджень та потенціал взаємодії між атомами рідкого гелію-4. З такою деформованою алгеброю досліджено домішкові стани, зокрема обчислено ефективну масу та енергію на прикладі домішки ^{3}He при різних густинах рідкого гелію-4. Результати наведені в цьому розділі, можуть бути використанні при дослідженні поведінки домішок різного типу у розріджених бозе-конденсатах.

РОЗДІЛ 5

МЕТОД ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ У ПРОБЛЕМІ БОЗЕ-ПОЛЯРОНА

5.1. Вступ

На відміну від попередніх розділів, тут розглянемо малу концентрацію фермі-домішок, що рухаються в середовищі взаємодіючих бозонів. Домішові стани такої двосортної багаточастинкової системи можна досліджувати теоретико-польовими методами з використанням інтегралів за траєкторіями. В рамках цього підходу система описується деяким функціоналом $S[\psi^*, \psi, \phi^*, \phi]$, що має зміст дії:

$$S = \int_0^{1/T} d\tau \int d\mathbf{r}\psi^*(\mathbf{r},\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(\mathbf{r},\tau) + \int_0^{1/T} d\tau \int d\mathbf{r}\phi^*(\mathbf{r},\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(\mathbf{r},\tau) - \int_0^{1/T} d\tau H(\tau), \tag{5.1}$$

тут величини ψ^*, ψ є комплексними грасмановими полями фермі-частинок а ϕ^*, ϕ комплексними полями бозе-частинок. Вони залежать від уявного часу τ та просторових координат частинок. Останній доданок дії (5.1) містить нормально впорядкований гамільтоніан системи "бозерідина плюс невзаємодіючі домішки" $H(\tau)$ на мові вторинного квантування, де оператори народження та знищення частинок слід замінити на відповідні комплексні поля. До прикладу, гамільтоніан домішок, що

взаємодіють з бозе-середовищем задається такими виразами:

$$H_I(\tau) = -\int d\mathbf{r}\psi^*(\mathbf{r},\tau)\left(\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + \mu\right)\psi(\mathbf{r},\tau),$$

$$H_{int}(\tau) = \int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\psi^*(\mathbf{r}',\tau)\phi^*(\mathbf{r},\tau)V(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\psi(\mathbf{r}',\tau)\phi(\mathbf{r},\tau),$$

тут μ– хімічний потенціал фермі-частинок.

Для знаходження параметрів спектра домішкового атома, в термінах польових операторів можна ввести мацубарівську функцію Гріна з Т-впорядкованими операторами:

$$G(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}',\tau') = -\langle\psi(\mathbf{r},\tau)\psi^*(\mathbf{r}',\tau)\rangle, \tag{5.2}$$

яка описує одночастинкові збудження, що виникають при взаємодії домішок з взаємодіючою бозе-системою.

Ламані дужки у (5.2) означають статистичне усереднення з дією (5.1):

$$\langle(\ldots)\rangle = \frac{\int e^S(\ldots)D\Psi^*D\Psi}{\int e^S D\Psi^*D\Psi}, \tag{5.3}$$

інтеграли, що тут фігурують називають континуальними. Причому, міра інтегрування записана символічно, бо інтегрування ведеться за усією сукупністю бозонних та ферміонних комплексних полів системи:

$$D\Psi^*D\Psi = \frac{1}{\pi}\prod_{\mathbf{r}}\prod_{0\leqslant\tau\leqslant 1/T} d\psi(\mathbf{r},\tau)d\psi(\mathbf{r},\tau)d\mathrm{Re}\phi(\mathbf{r},\tau)d\mathrm{Im}\phi(\mathbf{r},\tau)$$

В цьому розділі ми у представленні континуальних інтегралів розвинемо теорію збурень для одночастинкової функції Гріна домішкових атомів, та побудуємо для цієї функцій діаграмну техніку. Що своєю чергою дозволить нам оцінити ефективну масу домішкового атома.

5.2. Дія системи в імпульсному просторі

Розглянемо не одну частинку занурену в бозе-рідину, а сукупність спін-поляризованих невзаємодіючих ферміонів в границі зникаюче малої густини, що занурені в рідкий гелій-4. Використовуючи метод функціонального інтеграла (інтеграла за траєкторіями) при скінченних температурах, дію системи (5.1) запишемо у вигляді суми

$$S = S_0 + S_B + S_{int}. \tag{5.4}$$

Перший доданок описує ферміонну підсистему

$$S_0 = \sum_P \{i\nu_n - \varepsilon_f(p) + \mu\}\psi_P^*\psi_P, \tag{5.5}$$

з одночастинковим спектром $\varepsilon_f(p) = \hbar^2\mathbf{p}^2/2M$. Тут ми ввели позначення для чотиривектора $P = (\nu_n, \mathbf{p})$, де $\nu_n = (2n+1)\pi T$, (n - цілі числа) — ферміонна мацубарівська частота. А також для зручності в обчисленнях, перейшли від грасманових комплексних полів $\psi(\mathbf{r},\tau), \psi^*(\mathbf{r},\tau)$ до їх Фур'є образів:

$$\psi(\mathbf{r},\tau) = \sqrt{\frac{T}{V}}\sum_P e^{i(\mathbf{pr}+\nu_n\tau)}\psi_P, \qquad \psi^*(\mathbf{r},\tau) = \sqrt{\frac{T}{V}}\sum_P e^{-i(\mathbf{pr}+\nu_n\tau)}\psi_P^*.$$

Другий доданок формули (5.4) описує систему взаємодіючих бозечастинок — рідкий гелій-4. Для відтворення структури дії S_B ми скористаємось підходом Попова [189], де функціональний інтеграл рахується не за комплексними бозонними полями, а за дійсними змінними густина-фаза:

$$\phi(x) = \sqrt{\rho(x)}e^{i\varphi(x)}, \quad \phi^*(x) = \sqrt{\rho(x)}e^{-i\varphi(x)}, \quad x = \mathbf{r},\tau$$

В представленні таких полярних координат $\rho(x), \varphi(x)$ дія бозе-рідини набуде такого вигляду:

$$S_B = \int dx \left(\rho(x) i\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\rho(x)(\nabla\varphi(x))^2 - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla\rho(x))^2}{\rho(x)} + \mu_B\rho(x)\right)$$

$$- \frac{1}{2}\int dx \int dx' \rho(x)\rho(x')\Phi(x-x') - \ldots, \tag{5.6}$$

тут, залежно від конкретної задачі, ми можемо брати до уваги лише взаємодію бінарного типу між бозе-частинками (останній доданок), або враховувати вищі наближення у потенціальній енергії (позначено крапками). Зауважимо, що перехід до нових змінних використовується також у підході колективних координат, де величини $\rho(x)$ в певному сенсі є аналогом флуктуацій густини бозе-частинок. Більш того, з дією S_B у змінних $\rho(x), \varphi(x)$, можна побудувати теорію збурень для мацубарівських функцій Гріна, яка не міститиме розбіжностей при малих енергіях та імпульсах. Це дає змогу проаналізувати низькочастотний спектр взаємодіючих бозонів.

Після математичних спрощень, вираз для дії (5.6) є квадратичною формою за $\varphi(x)$. Тому, ми як і в роботі [190], попередньо відінтегруємо дію S_B за цими фазовими полями, а у $\rho(x)$ перейдемо до фур'є-образів:

$$\rho(x) = \rho + \sqrt{\frac{T}{V}} \sum_K e^{i(\mathbf{kr}+\omega_k\tau)}\rho_K, \tag{5.7}$$

де ρ - рівноважна густина бозе-частинок.

Таким чином дію бозе-рідини запишемо виключно через флуктуації густини ρ_K

$$\begin{aligned} S_B = &- \frac{1}{2}\sum_K D_0(K)\rho_K\rho_{-K} \\ &- \frac{1}{3!\sqrt{\beta V}} \sum_{K_1+K_2+K_3=0} D_0(K_1,K_2,K_3)\rho_{K_1}\rho_{K_2}\rho_{K_3} - \ldots, \end{aligned} \tag{5.8}$$

де K позначає $(\omega_k, \mathbf{k})$ і $\omega_k = 2\pi nT$ є бозонною мацубарівською частотою. Зауважимо, що всюди в підсумовуваннях за хвильовим вектором доданок з $\mathbf{k} = 0$ відсутній.

Гауссова частина дії S_B містить в собі наближення Боголюбова:

$$D_0(K) = \frac{m\omega_k^2}{\rho\hbar^2k^2} + \frac{\hbar^2k^2}{4m\rho} + \nu(k), \tag{5.9}$$

а величина

$$D_0(K_1,K_2,K_3)=\frac{\hbar^2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}{4m\rho^2}\left(1-\frac{\omega_{k_1}\omega_{k_2}}{\varepsilon_{k_1}\varepsilon_{k_2}}\right)+\text{perm.} \tag{5.10}$$

описує найпростіші процеси розсіяння боголюбівських збуджень. Для мікроскопічних параметрів, що описують бозе-частинки і їх взаємодію, позначення є стандартними: m і ρ — маса і густина частинок, а $\nu(k)$ — фур'є-образ потенціалу парної взаємодії між ними. Також, уведено позначення для об'єму періодичності V і вільночастинкового спектру ідеального бозе-газу $\varepsilon_k=\hbar^2k^2/2m$.

Останній доданок дії (5.4) описує взаємодію бозе-системи з домішковими станами ідеального фермі-газу

$$S_{int}=-\rho\bar{\nu}(0)\sum_P\psi_P^*\psi_P-\frac{1}{\sqrt{\beta V}}\sum_{K,P}\bar{\nu}(k)\rho_K\psi_P^*\psi_{P-K}, \tag{5.11}$$

де $\bar{\nu}(k)$ – фур'є-образ ферміон-бозонної взаємодії. Причому, перший доданок у (5.11) можна об'єднати з S_0 зсуваючи хімічний потенціал $\bar{\mu}=\mu-\rho\bar{\nu}(0)$ ферміонів.

Таким чином, сумарна дія досліджуваної системи (5.4) в імпульсному просторі містить квадратичну форму за ферміонними полями та флуктуаціями густини бозе-частинок. Окрім того, тут присутні нелінійні внески, що враховують одночастинкові процеси розсіяння домішок на флуктуаціях густини (взагалі кажучи, навіть мала концентрація домішок ефективно збурює середовище, але ми вважаємо, що чотириквазічастинкові процеси розсіяння в системі є малоймовірними). Доданки, пропорційні $\rho\rho\rho,\rho\psi^*\psi$ можна вважати ефективним збуренням в системі, і далі розвивати теорію збурень для функцій Гріна в формалізмі континуальних інтегралів.

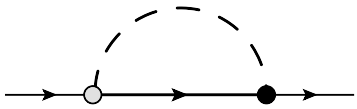

Рис. 5.1. Діаграма, що описує власно-енергетичну частину $\Sigma(P)$. Суцільною лінією позначено точну одночастинкову функції Гріна, штрихованою — точний корелятор $\langle\rho_K\rho_{-K}\rangle$. Світлий кружечок позначає нульове наближення $\bar{\nu}(k)$, а темний — точну $\Gamma(P,P+K)$ вершинні функції.

5.3. Власноенергетична частина домішкового спектра

Надалі, щоб дослідити спектр домішки, скористаємось методами квантової статистичної фізики [191] і запишемо одночастинкову температурну функцію Гріна ферміонів

$$G(P)=\langle\psi_P^*\psi_P\rangle=\{i\nu_n-\varepsilon_f(p)+\bar{\mu}-\Sigma(P)\}^{-1}, \tag{5.12}$$

тут ламані дужки $\langle\ldots\rangle$ позначають статистичне усереднення з дією (5.4), а вся інформація про взаємодію домішки з бозе-системою міститься у власноенергетичній частині $\Sigma(P)$, для якої *точне* діаграмне представлення зображено на Рис. 1. Формально, це точне співвідношення, яке визначає одночастинкову функцію Гріна домішки, а наближення будуються для вершинної функції $\Gamma(P,P+K)$, яка в свою чергу, залежить від $G(P)$ та корелятора "густина-густина" $\langle\rho_K\rho_{-K}\rangle$:

$$\begin{aligned}\Gamma(P,P+K)&=\bar{\nu}(k)+\frac{1}{V\beta}\sum_S\Gamma(P+K,P+K+S)\Gamma(P+S,P+K+S)\\&\times\Gamma(P,P+S)G(P+S)G(P+K,P+K+S)\langle\rho_S\rho_{-S}\rangle\\&-\frac{1}{V\beta}\sum_S\Gamma(P+K,P+K+S)\Gamma(P,P+K+S)D_0(S,K,-S-K)\\&\times G(P+K+S)\langle\rho_S\rho_{-S}\rangle\langle\rho_{S+K}\rho_{-S-K}\rangle+\ldots.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Така процедура, зазвичай, призводить до складної системи нелінійних інтегральних рівнянь, яку потрібно розв'язувати самоузгоджено.

Технічно це надзвичайно складна задача, і навіть розв'язуючи її чисельно для найпростіших систем, доводиться нехтувати поправками на вершинну функцію. В свою чергу, це призводить до невиконання співвідношень Уворда, і як наслідок, порушення законів збереження.

Таким чином, ми для аналізу власноенергетичної частини домішкової функції Гріна використовуємо так звану "скелетну" діаграмну техніку, в якій усі лінії та вершинні функції, що входять у $\Sigma(P)$, є точними [192]. В цій техніці усі діаграми, що виникають внаслідок ефективної бозон-домішкової взаємодії, вже містять в собі підсумований ряд з безмежної кількості діаграм звичайної теорії збурень. Зокрема, у звичайній теорії збурень усі вершини беруться в нульовому наближенні, бозонні корелятори обчислюються з дією ідеального бозе-газу, а одночастинкова функція Гріна домішки є функцією Гріна ідеальних ферміонів.

Функції Гріна (5.12) після аналітичного продовження, відповідає запізнююча функції Гріна, прості полюси якої визначають спектр та його загасання. Тому здійснемо аналітичне продовження у верхню комплексну півплощину

$$\Sigma(P)_{i\nu_n\to\nu+i0} = \Sigma_R(\nu,p) + i\Sigma_I(\nu,p), \tag{5.14}$$

та після перетворень отримаємо енергію домішкового атома з імпульсом $\mathbf{p}$:

$$\varepsilon_f^*(p) = \varepsilon_f(p) + \Sigma_R(\varepsilon_f^*(p),p) - \Sigma_R(0,0), \tag{5.15}$$

тут ми врахували, що на сфері фермі, для домішок, які взаємодіють з середовищем, має місце рівність $(\varepsilon_f^*(p)-\bar{\mu})|_{p=p_0} = 0$ (де $p_0 \propto (N/V)^{2/3}$ - імпульс фермі). І у випадку однієї домішки радіус фермі-сфери прямує до нуля, а отже різниця $\bar{\mu} - \Sigma_R(0,0) \propto 1/V^{2/3}$ зникає в термодинамічній границі. Величина $\Sigma_R(0,0)$ у (5.15) має зміст енергії занурення

домішки в бозе-рідину.

Через розсіяння енергії домішки на бозе-частинках виникає уявна частина власної енергії $\Sigma_I(\nu, p)$, що визначає загасання спектра. В наших розрахунках воно є малим, порівняно з енергією домішки (5.15). В принципі, використовуючи умову унітарності [193], неважко отримати точне діаграмне співвідношення і для $\Sigma_I(\nu, p)$, в яке будуть входити спектральні густини домішки і елементарних збуджень бозе-системи, а також точна вершина. Повністю аналогічно до роботи [194], для $\Gamma(P, P+K)$ можна отримати точне співвідношення в границі розсіяння домішки на довгохвильових фононах $\Gamma(P, P) = \bar{\nu}(0) + \partial\Sigma(P)/\partial\rho$. Із загальних фізичних міркувань зрозуміло, що домішковий атом буде розсіювати свою енергію на бозе-частинках лише тоді, коли буде рухатись зі швидкостями $\hbar p/M^*$ більшими за швидкість поширення звуку в системі c. Проте, така ситуація реалізується тільки в слабонеідеальному бозе-газі [5], де спектр добре описується формулою Боголюбова і є монотонно зростаючою функцією. В реальному гелії-4 ця гранична швидкіть при якій домішка ще не втрачає енергію є значно меншою [195], і пов'язана з можливістю народження збудження в ротонній ділянці спектра.

5.3.1. Метод розрахунку Уникаючи трудностей з повним чисельним розв'язком задачі про знаходження енергії домішки в бозе-рідині $\varepsilon_f^*(p)$, ми повинні вдатись до певних спрощень. По-перше, припускаємо, що вся інформація про поведінку парного корелятора "густина-густина" нам відома. Зокрема, це функція, яка безпосередньо пов'язана з динамічним структурним фактором бозе-системи, який у випадку рідкого гелію-4 є добре виміряним [196]. По-друге, для одночастинко-

Рис. 5.2. Діаграма, що описує власно-енергетичну частину $\Sigma(P)$ в нульовому наближенні.

вої функції Гріна оберемо простий анзац

$$G(P) = [i\nu_n - \varepsilon_f^*(p)]^{-1}, \tag{5.16}$$

перевагами якого є простота подальших розрахунків і можливість уникнути нефізичної ситуації, коли загасання нерухомої домішки не рівне нулеві [5, 48, 94]. Серед недоліків — не цілком коректне відтворення структури спектральної густини одночастинкових станів в околі максимума для чого необхідно було б враховувати переномування "хвильової функції" домішки $Z^{-1}(p) = 1 - \partial\Sigma_R(\varepsilon_f^*(p), p)/\partial\varepsilon_f^*(p)$, що в нашому випадку (коли нехтується уявною частиною в анзаці) призводить до порушення закону збереження числа частинок. По-третє, будемо розрахувати вершинну функцію, яка характеризує перенормовану бозон-домішкову взаємодію, за допомогою теорії збурень.

Після таких міркувань далі обговоримо послідовність обчислення власноенергетичної частини домішки, з точністю до другого наближення: $\Sigma(P) = \Sigma^{(1)}(P) + \Sigma^{(2)}(P)$.

5.3.2. Найпростіше наближення В цьому наближенні діаграма на Рис.(5.1) відповідає діаграмі звичайної теорії збурень в першому порядку для власноенергетичної частини (див. Рис.5.2), якій відповідає простий аналітичний вираз:

$$\Sigma^{(1)}(P) = -\frac{T}{V}\sum_K \Gamma^2(P, P+K)\langle\rho_K\rho_{-K}\rangle\langle\psi^*_{K+P}\psi_{K+P}\rangle, \tag{5.17}$$

Наша скелетна техніка передбачає розв'язування рівнянь для вершинної функції послідовними наближеннями. Зокрема, в першому порядку

теорії збурень для точної вершини у (5.13) беремо нульове наближення $\Gamma(P, P+K) = \bar{\nu}(k)$. Далі, підставляючи (5.16), причому, $\nu_n \to \nu_n + \omega_k$, та використавши для бозонного корелятора фейнманівське наближення

$$\langle \rho_K \rho_{-K} \rangle = 2\rho\varepsilon_k/(\omega_k^2 + E_k^2), \tag{5.18}$$

ми обчислюємо суму за частотами, здійснивши перехід $1/\beta_k \sum_{\omega_k}(\ldots) \to 1/(2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}(\ldots)d\omega_k$. Після інтегрування за теоремою Коші про лишки, отримуємо при низьких температурах вираз:

$$\Sigma^{(1)}(P) = -\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \rho \frac{\bar{\nu}^2(k)}{\alpha_k} \frac{1}{E_k + \varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{p}) - i\nu_n}, \tag{5.19}$$

тут $E_k = \varepsilon_k \alpha_k$, де $1/\alpha_k = S(k)$ — статичний структурний фактор бозе-системи. Зауважимо, що в границі звичайної теорії збурень $\varepsilon_f^*(p) \to \varepsilon_f(p)$ цей результат неодноразово відтворювався різними методами [197].

5.3.3. Друга апроксимація Для розрахунку $\Sigma(P)$ в цьому наближенні вже необхідно враховувати перші поправки до вершинної функції $\Gamma(P, P+K)$, зображені на Рис.(5.3). Цим діаграмам відповідає

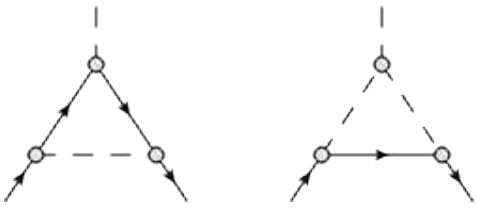

Рис. 5.3. Діаграми, що визначають першу поправку до вершини $\Gamma(P, P+K)$. Тут світлим кружечком, з якого відходять три штриховані лінії, позначено $D_0(K_1, K_2, K_3)$.

рівняння (5.13), причому, під знаком сум вершинні функції є відповідними фур'є-образами бозон-домішкової взаємодії: $\Gamma(P, P+S) \to \bar{\nu}(s)$.

Підставивши рівняння (5.13) у власноенергетичну частину домішкової функції Гріна на рис. (5.1), ми отримаємо діаграми, зображені на рис. (5.4).

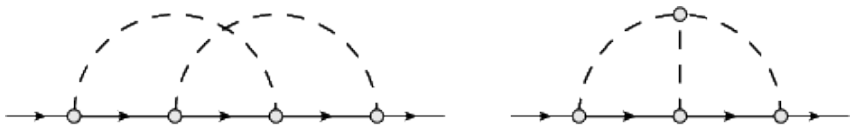

Рис. 5.4. Діаграми власноенергетичної частини: ліворуч – врахування ефективної бозон-домішкової взаємодії, праворуч – врахування ангармонізмів боголюбівських збуджень.

Таким чином, другій апроксимації до власноенергетичної частини, відповідають такі аналітичні вирази:

$$
\begin{aligned}
- \quad & \left(\frac{T}{V}\right)^2 \sum_{K,S} \Gamma(P, P+K)\Gamma(P+K, P+K+S) \times \\
\times \quad & \Gamma(P+K+S, P+S)\Gamma(P, P+S)\langle \rho_K \rho_{-K}\rangle \langle \rho_S \rho_{-S}\rangle \times \\
\times \quad & \langle \psi^*_{K+P}\psi_{K+P}\rangle \langle \psi^*_{K+P+S}\psi_{K+P+S}\rangle \langle \psi^*_{P+S}\psi_{P+S}\rangle; \\
- \quad & \left(\frac{T}{V}\right)^2 \sum_{K,S} \Gamma(P, P+K)\Gamma(P+K, P+K+S)\Gamma(P+K+S, P) \times \\
\times \quad & D_0(K, S, -K-S)\langle \rho_K \rho_{-K}\rangle \langle \rho_S \rho_{-S}\rangle \langle \rho_{K+S} \rho_{-K-S}\rangle \times \\
\times \quad & \langle \psi^*_{K+P}\psi_{K+P}\rangle \langle \psi^*_{K+P+S}\psi_{K+P+S}\rangle.
\end{aligned}
$$

Нагадуємо, що в цій теоретико-польовій скелетній техніці не потрібно враховувати діаграм, типу власноенергетичних вставок, одна з них наведена на Рис. (5.5). Діаграми такого типу формують рівняння Дайсона для функції Гріна в звичайній теорії збурень. Більш того, в границі однієї домішки, ми не беремо до уваги ті діаграми, які відповідають процесам перенормування бозон-бозонної взаємодії.

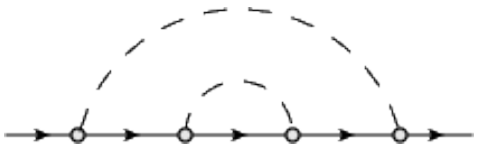

Рис. 5.5. Внески у власноенергетичну частину $\Sigma(P)$

Зрозуміло, що для реалізації описаної вище схеми розрахунків необхідно замінити затравочну бозонну вершину $D_0(K_1, K_2, K_3)$ на точну $D(K_1, K_2, K_3)$. Але ця величина погано міряється (якщо взагалі міряється) і для неї можна порахувати лише довгохвильову асимптотику $D(0,0,0) = \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{mc^2}{\rho}$, та поведінку на великих значеннях чотиривекторів (де вона збігається з (5.10)), чого не є достатньо для коректного визначення $\Sigma^{(2)}(P)$. Тому заміна $D(K_1, K_2, K_3) \to D_0(K_1, K_2, K_3)$ – це чергове спрощення, оцінити точність якого важко.

Не зупиняючись на деталях розрахунків, після підстановки діаграм на Рис.(5.3) у діаграму на Рис.(5.1), для другої поправки до $\Sigma(P)$ ми отримали при $T = 0$:

$$\Sigma^{(2)}(P) =$$

$$= \frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{s}} \rho \frac{\bar\nu(k)\bar\nu(s)\bar\nu(|\mathbf{k}+\mathbf{s}|)}{\alpha_k\alpha_s\alpha_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}} \frac{1}{E_s + \varepsilon_f^*(\mathbf{s}-\mathbf{p}) - i\nu_n} \frac{1}{E_k + \varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{p}) - i\nu_n}$$

$$-\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{s}} \rho^2 \frac{\bar\nu^2(k)\bar\nu^2(s)}{\alpha_k\alpha_s} \frac{1}{E_k + \varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{p}) - i\nu_n} \frac{1}{E_s + \varepsilon_f^*(\mathbf{s}+\mathbf{p}) - i\nu_n}$$

$$\times \frac{1}{E_k + E_s + \varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{s}+\mathbf{p}) - i\nu_n}$$

$$-\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{s}} \rho \frac{\bar\nu(k)\bar\nu(s)\bar\nu(|\mathbf{k}+\mathbf{s}|)}{\alpha_k\alpha_s\alpha_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}} \frac{D_+(\mathbf{k},\mathbf{s})}{E_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|} + \varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{s}+\mathbf{p}) - i\nu_n} \times$$

$$\times \frac{1}{E_k + \varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{p}) - i\nu_n} \frac{1}{E_k + E_s + \varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{s}+\mathbf{p}) - i\nu_n} +$$

$$+\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{s}}\rho\frac{\bar{\nu}(k)\bar{\nu}(s)\bar{\nu}(|\mathbf{k}+\mathbf{s}|)}{\alpha_k\alpha_s\alpha_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}}\frac{D_-(\mathbf{k},\mathbf{s})}{E_k+E_s+E_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}}\frac{1}{E_k+\varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{p})-i\nu_n}\times$$

$$\times\frac{1}{E_k+E_s+\varepsilon_f^*(\mathbf{k}+\mathbf{s}+\mathbf{p})-i\nu_n}, \tag{5.20}$$

де симетричні функції своїх аргументів $D_\pm(\mathbf{k},\mathbf{s})$:

$$\begin{aligned} D_\pm(\mathbf{k},\mathbf{s}) \quad &= \frac{\hbar^2}{2m}\left[\mathbf{k}(\mathbf{k}+\mathbf{s})(\alpha_k-1)(\alpha_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}\pm 1)+\right. \\ &\left.+\mathbf{s}(\mathbf{s}+\mathbf{k})(\alpha_s-1)(\alpha_{|\mathbf{k}+\mathbf{s}|}\pm 1)\pm\mathbf{ks}(\alpha_k-1)(\alpha_s-1)\right]. \end{aligned}$$

Навіть після стількох спрощень, розрахунок $\Sigma(P)$ не є простою чисельною задачею, тому вважаючи, що фур'є-образ потенціалу взаємодії домішки з бозе-частинками є швидкоспадною функцією хвильового вектора, виконаємо підстановку: $\varepsilon_f^*(p)=\hbar^2p^2/2M^*$. Цей вираз є аналогом спектру ідеального газу, але з ефективною масою домішкового атома M^*. Перенормовану масу M^*, з врахуванням (5.16), можна знайти самозгодженно.

5.4. Результати й обговорення

Найбільш природнім для практичної реалізації прикладом нашої системи, є домішка ^{3}He (чи навіть ^{6}He) в надплинному ^{4}He, хоча й отримані формули можна застосовувати для опису сучасних експериментів з холодними газами. Для цього достатньо замінити у формулах (5.19), (5.20) E_k на боголюбівський спектр. Проте, зважаючи на слабкість міжчастинкової взаємодії в таких системах, для їх задовільного опису достатньо і звичайної теорії збурень. Тому природньо протестувати наш самоузгоджений розрахунок на дослідженні домішкових станів у сильноскорельованій бозе-рідині. Зрозуміло, що отримані результати залежатимуть лише від форми бозон-домішкового потенціалу $\bar{\nu}(k)$. В

адіабатичному наближенні енергію взаємодії між атомами ^{4}He та ^{3}He можна вважати рівною потенціальній енергії двох атомів ^{4}He. Більш того, зважаючи на структуру зовнішньої електронної оболонки, наші розрахунки можна поширити вибираючи в якості домішки атоми рідкоземельних елементів.

Найпростіший спосіб вибору $\bar{\nu}(k)$ полягає в порівнянні боголюбівського та фейнманівського спектрів (тут $\rho = 0.02185\,A^{-3}$ — рівноважна густина рідкого ^{4}He):

$$\bar{\nu}(k) = \varepsilon_k(1/S_k^2 - 1)/2\rho. \tag{5.21}$$

Така процедура дозволяє непогано описати термодинамічні та структурні функції рідкого гелію-4 у всій області температур [198], включно з околом критичної точки. Послідовність чисельного розрахунку така: спочатку розкладаючи в ряд різницю $\Sigma_R(\varepsilon_f^*(p), p) - \Sigma_R(0,0)$ при малих хвильових векторах ми знаходимо ефективну масу домішки, а далі отриманий результат підставляється у формулу $\mu = \rho\bar{\nu}(0) + \Sigma_R(0,0)$ для розрахунку енергії занурення. Результати представленні на Рис. 5.6. Для порівняння, ми також навели криві побудовані в першому та другому наближеннях до власноенергетичної частини.

Отриману у першому наближенні ефективну масу ^{4}He $M^*(1)/M = 1.41$ можна порівняти з результатом 1.58 роботи [188], де також використана самоузгоджена процедура обчислень у схожому наближенні. А пораховане нами у другому наближенні значення ефективної маси для ^{3}He $M^*(3/4)/M = 2.13$ добре узгоджується з екпериментальними даними 2.18, 2.15 [113, 199], результатами інших теоретичних досліджень 2.09 [150], дифузійного 2.20(5) [84] та варіаційного 2.06–2.07 [85] методу Монте Карло.

Цікаві результати при дослідженні одночастинкових станів можна

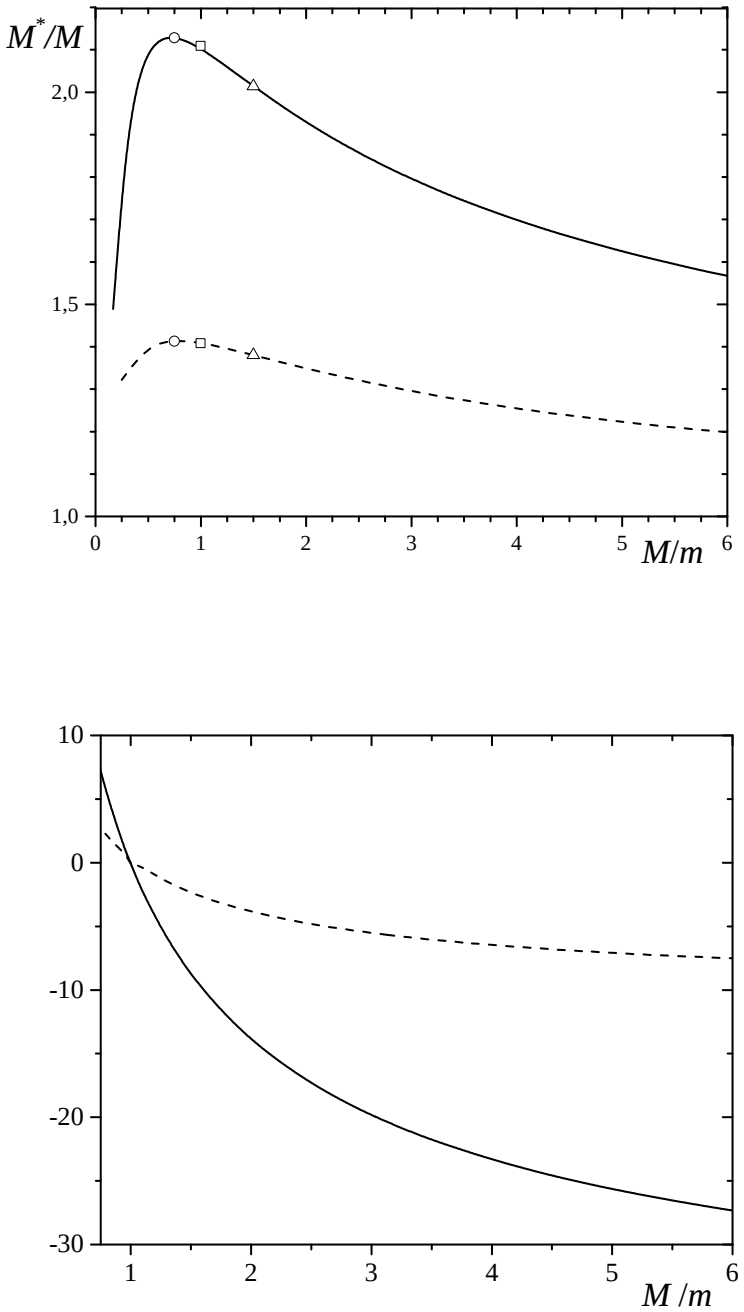

Рис. 5.6. Згори – ефективна маса домішки M^* в рідкому гелії-4, як функція відношення M/m. Коло, квадрат, трикутник – домішки ^{3}He, ^{4}He, ^{6}He. Знизу – енергія занурення $\mu(M/m) - \mu(1)$ (в кельвінах) домішкового атома. Штрихована лінія — перша, а суцільна — друга апроксимація.

отримати, якщо розглянути ферміони з протилежними спінами, що рухаються у бозе середовищі. В такій моделі, слабка бозон-ферміонна

взаємодія призводить до ефективної відштовхувальної чи притягальної ферміон-ферміонної взаємодії. Причому, в першому випадку ми отримаємо принципово іншу поведінку ефективної маси домішки (яка вже є вже за своєю суттю біполяроном) а в другому – ми вже матимемо справу з купарівським спарюванням, або ж з утворенням молекули (наприклад, бозон плюс ферміон із фіксованим напрямом спіна).

5.5. Висновки до розділу 5

В цьому розділі досліджено властивості бозе-полярона на прикладі домішки ^{3}He в надплинному гелії-4, з використанням методу функціонального інтегрування. Використовуючи самоузгодженну за ефективною масою процедуру розрахунку власноенергеточної частини одночастинкової функції Гріна домішки, з точністю до другого наближення, знайдено ефективну масу і енергію занурення. Показано, що отримані результати для власноенергетичної частини можна застосувати до домішкових атомів рідкоземельних елементів. А запропонований підхід може бути використаний для аналізу низькорозмірних систем.

ВИСНОВКИ

Головні результати роботи можна підсумувати у вигляді таких тез.

1. Досліджено властивості спектра домішкового атома, що рухається в сильно розрідженому бозе-конденсаті. В рамках теорії збурень Брілюена-Вігнера вперше отримано параметри спектра притягального та відштовхувального бозе-поляронів в довгохвильовій границі. Проаналізовано межі застосовності теорії збурень на прикладі проблеми стабільності бозе-полярона.

2. В рамках варіаційного підходу отримано термодинамічні та структурні характеристики системи “ домішковий атом плюс сильноскорельоване бозе-середовище” в границі низьких температур, з урахуванням непрямих кореляцій між бозе-частинками. На прикладі домішок – ізотопів гелію, що занурені у рідкий гелій-4, знайдено розподіл частинок за імпульсами в бозе-рідині.

3. Запропонований нами спосіб врахування багатобозонних кореляцій шляхом деформації комутаційних співвідношень для колективних координат та відповідних узагальнених імпульсів дає добре узгодження з експериментальними даними для ефективної маси домішки 3He, що рухається в рідкому гелії-4. З модельним параметром деформації вперше обчислено енергію основного стану, оцінено кількість бозе-конденсату, відтворено спектр елементарних збуджень бозе-рідини.

4. Досліджено властивості бозе-полярона на прикладі домішки 3He в надплинному гелії-4, з використанням методу функціонального інтегрування. Використовуючи самоузгоджену процедуру розрахунку власноенергетичної частини одночастинкової функції Гріна

домішкового атома, ми знайшли ефективну масу та енергію бозе-полярона.

5. Усі чисельні розрахунки характеристик системи проведено на підставі переписування параметрів міжчастинкової взаємодії через структурний фактор рідкого гелію-4.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Vakarchuk I. O.* Impurity states in a many-boson system / I. O. Vakarchuk, G. I. Panochko // J. Phys. Stud. — 2012. — Vol. 16, No. 4. — Art. 4601. — 8 p.

[2] *Vakarchuk I. O.* The theory of a many boson system with the deformed Heisenberg algebra / I. O. Vakarchuk, G. I. Panochko // Cond. Matt. Phys. — 2015. — Vol. 18, No. 3. — Art. 33002. — 14 p.

[3] *Вакарчук І. О.* Метод функціонального інтегрування у проблемі бозе-полярона / І. О. Вакарчук, Г. І. Паночко, В. С. Пастухов // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. — 2016. — Vol. 52, No. 2. — P. 17–27.

[4] *Vakarchuk I. O.* Effective mass of the impurity atom with deformed Heisenberg algebra / I. O. Vakarchuk, G. Panochko // Ukr. J. Phys. — 2017. — Vol. 62, No. 2. — P. 123–131.

[5] *Panochko G.* Behavior of the impurity athom in a weakly-interacting Bose gas / G. Panochko, V. Pastukhov, Vakarchuk I. // Condens. Matter Phys. — 2017. — Vol. 20, No. 1. — Art. 13604. — 11 p.

[6] *Panochko G.* Impurity self-energy in the strongly-correlated Bose systems / G. Panochko, V. Pastukhov, I. Vakarchuk // Int. J. Mod. Phys. B. — 2018. — Vol. 32, No. 5. — Art. 1850053. — 9 p.

[7] *Panochko G.* Density matrix of the system Bose liquids plus impurities in the approximation of pair correlations / G. Panochko, I. Vakarchuk // International Symposium on Quantum Fluids and Solids QFS2010, August 01-07, 2010. Grenoble,France. — P. 96.

[8] *Panochko G.* Heisenberg's deformed algebra in the theory of many-boson system / G. Panochko, I. Vakarchuk // International Conference Physics of Liquid Matter: Modern Problems, May 21-24, 2010, Kyiv, Ukraine. — P. 335.

[9] *Паночко Г.* Повна матриця густини системи бозе-рідина плюс домішка в границі низьких температур / Г. Паночко // Міжнародна конференція молодих учених і аспірантів ІЕФ-2011, 24-27 травня 2011 р., Ужгород, Україна. — С. 88.

[10] *Panochko H. I.* One-particle density matrix of the system bose-liquid plus impurity in the limit of low temperatures / H. I. Panochko, I.O. Vakarchuk // III Young Scientists Conference Modern Problems of Theoretical Physics, December 21-23, 2011, Kyiv, Ukraine. — P. 63.

[11] *Вакарчук І. О.* Структурні фактори системи бозе-рідина плюс домішковий атом в наближенні парних кореляцій / І. О. Вакарчук, Г. Паночко // 12-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 30 травня - 1 червня 2012. Інститут фізики конденсованих систем НАН України. — С. 39.

[12] *Panochko G.* The ^{3}He impurity states in ^{4}He / G. Panochko, I. O. Vakarchuk // International Conference on Quantum Fluids and Solids QFS2012, August 15-21, 2012. Lancaster University, UK. — P. 46.

[13] *Паночко Г.* Повна матриця густини системи бозе-рідина плюс домішка в наближенні парних кореляцій / Г. Паночко, І. Вакарчук // Різдвяні дискусії 2012, 3-4 січня 2012, Львів: Журн. фіз. дослідж. — 2012. — Т. 16, №1/2. — С. 1998-5.

[14] *Panochko G.* One-particle density matrix of the Bose-system plus impurity atom at finite temperatures / G. Panochko // Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 10-11 July 2012: J. Phys. Stud.—2012.—Vol. 16, No. 3.—3998.— P. 4.

[15] *Panochko G.* The ^{3}He impurity states in ^{4}He / G. Panochko, I. Vakarchuk // 6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 23-25 September 2013, Zielona Góra, Poland. —

P. 25.

[16] *Vakarchuk I.O.* The impurity states in the liquid Helium-4 / I.O. Vakarchuk, G. Panochko // Proceedings of VI International Conference Physics of Disordered Systems, Lviv, Ukraine, 14-16 October, 2013. — P. 36.

[17] *Паночко Г.* Урахування три- та чотиричастинкових кореляцій у деформованому просторі Гайзенберґа на прикладі рідкого ^{4}He / Г. Паночко // Різдвяні дискусії 2014, Львів, 9-10 січня 2014: Журн. фіз. дослідж.— 2014. — Т. 18, №1.— С. 1998-5.

[18] *Вакарчук І. О.* Домішка в рідкому ^{4}He з деформованою алгеброю Гайзенберга / І. О. Вакарчук, Г. Паночко // 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 4-5 червня 2015. Інститут фізики конденсованих систем НАН України — С. 26.

[19] *Vakarchuk I.O.* The separation energy of the impurity atom in the liquid ^{4}He with the deformed heisenberg algebra / I.O. Vakarchuk, G. Panochko // 7th International Conference Physics of Liquid Matter: Modern Problems, May 27-30, 2016, Kyiv, Ukraine: Abstracts. — P. 43.

[20] *Вакарчук І. О.* Ефективна маса домішкового атома в розрідженому бозе-газі / І. О. Вакарчук, Г. Паночко // Різдвяні дискусії 2017, Львів, 11-12 січня 2017 :Журн. фіз. дослідж.— 2017.— Т. 21, №1/2.— С. 1998-3.

[21] *Паночко Г.* Спектр домішки в сильноскорельованій бозе-системі / Г. Паночко // 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 8-9 червня 2017. Інститут фізики конденсованих систем НАН України — С. 38.

[22] *Panochko G.* Self-energy of the Bose polaron / G. Panochko, I. Vakarchuk // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona

Góra – Lviv, Zielona Góra – October 16-19 2017 —P. 9.

[23] *Panochko G.* The liquid Helium-4 in a deformed Heisenberg space in low temperatures limit / G. Panochko, I.O. Vakarchuk // LT27: 27th International Conference on Low Temperature Physics, August 6-13, 2014, Buenos Aires, Argentina. — P. 143.

[24] *Пекар С. И.* Исследования по електронной теории кристаллов / С. И. Пекар. — Ленинград : Л:ГИТТЛ, 1951. — С. 258.

[25] *Fr´ohlich H.* XX properties of slow electrons in polar materials / H Fr´ohlich, H Pelzer, S Zienau // Philosophical Magazine Series 7. — 1950. — Vol. 41, No. 314. — P. 221-242.

[26] *Lee T. D.* The motion of slow electrons in a polar crystal / T. D. Lee, F. E. Low, D. Pines // Phys. Rew. — 1953. — Vol. 90, No. 2. — P. 297-302.

[27] *Alexandrov A. S.* Unconventional pairing symmetry of layered superconductors caused by acoustic phonons / A. S. Alexandrov // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 77. — P. 094502.

[28] *Baym G.* Landau Fermi-liquid theory: concepts and applications / G. Baym, Pethick. — Germany : Wiley–VCH: Weinheim, 1991. — P. 123-168.

[29] *Балабанян Г.О.* Енергія / Г.О. Балабанян // ТМФ. — 1986. — Т. 66, № 1. — С. 121-145.

[30] Observation of fermi polarons in a tunable fermi liquid of ultracold atoms / A. Schirotzek, Cheng-Hsun Wu, A. Sommer, M. W. Zwierlein // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 102, No. 23. — Art. 230402. — 4 p.

[31] Attractive and repulsive Fermi polarons in two dimensions / M. Koschorreck, D. Pertot, E. Vogt [et al.] // Nature. — 2012. — Vol. 485, No. 7400. — P. 619–622.

[32] Fermi polaron in a one-dimensional quasiperiodic optical lattice: The simplest many-body localization challenge / Hui Hu, An-Bang Wang,

Su Yi, Xia-Ji Liu // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93, No. 5. — Art. 053601. — 7 p.

[33] *Grusdt F.* New theoretical approaches to bose polarons / F. Grusdt, E. Demler // Arxiv:1510.04934v1. — 2015. — P. 96.

[34] Observation of Bose-Einstain condensation in a dilute atomic vapor / M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, et al. // Science. — 1995. — Vol. 269, No. 5221. — P. 198–201.

[35] Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson Junction / M. Albiez, R. Gati, J. Fölling [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95, No. 1. — Art. 053617. — 4 p.

[36] *Schmid S.* Dynamics of a cold trapped ion in a Bose-Einstein condensate / S. Schmid, A. Harter, J. H. Denschlag // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105, No. 13. — Art. 133202. — 4 p.

[37] Dynamics of single neutral impurity atoms immersed in an ultracold gas / N. Spethmann, F. Kindermann, S. John [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109, No. 23. — Art. 235301. — 5 p.

[38] *Mulansky F.* Impurity in a Bose-Einstein condensate in a double well / F. Mulansky, J. Mumford, D. H. J. O'Dell // Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 84, No. 6. — Art. 063602. — 17 p.

[39] *Rinck M.* Effects of a single fermion in a Bose Josephson junction / M. Rinck, C. Bruder // Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 83, No. 2. — Art. 023608. — 7 p.

[40] Observation of attractive and repulsive polarons in a Bose-Einstein condensate / N. B. Jorgensen, L. Wacker, K. T. Skalmstang [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117, No. 5. — Art. 055302. — 6 p.

[41] Bose polarons in the strongly interacting regime / Ming-Guang Hu, M. J. Van de Graaff, D. Kedar [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117, No. 5. — Art. 055301. — 6 p.

[42] Coherent interaction of a single fermion with a small bosonic field / S. Will, T. Best, S. Braun [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol.

106, No. 11. — Art. 115305. — 4 p.

[43] *Каширина Н. И.* Биполярон большого радиуса и взаимодействие поляронов / Н. И. Каширина, Лахно В.Д. // Успехи физических наук. — 2010. — Т. 180, № 5. — С. 449-473.

[44] Bipolarons and multipolarons consisting of impurity atoms in a Bose-Einstain condensate / W. Casters, J. Tempere, O. Gamayun, J. T. Devreese // Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 88, No. 00. — Art. 013613. — 12 p.

[45] *Lakhno V.* Cooper pairs and bipolarons / V. Lakhno // Modern Phys. Lett. B. — 2016. — Vol. 30, No. 31. — Art. 1650365. — 6 p.

[46] Localization of bosonic atoms by fermionic impurities in a three-dimensional optical lattice / S. Ospelkaus, C. Ospelkaus, O. Wille [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96, No. 18. — Art. 180403. — 4 p.

[47] *Privitera A.* Polaronic slowing of fermionic impurities in lattice Bose-Fermi mixtures / A. Privitera, W. Hofstetter // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 82, No. 6. — Art. 063614. — 11 p.

[48] *Li W.* Variational study of polarons in Bose-Einstein condensates / W. Li, S. Das Sarma // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 90, No. 1. — Art. 013618. — 5 p.

[49] *Christensen R. S.* Quasiparticle properties of a mobile impurity in a Bose-Einstein condensate / R. S. Christensen, J. Levinsen, G. M. Bruun // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 115, No. 16. — Art. 160401. — 5 p.

[50] *Cucchietti F. M.* Strong-coupling polarons in dilute gas Bose-Einstein condensates / F. M. Cucchietti, E. Timmermans // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96, No. 21. — Art. 210401. — 4 p.

[51] *Casteels W.* Polaronic properties of an impurity in a Bose-Einstein condensate in reduced dimensions / W. Casteels, J. Tempere, J. T. Devreese // Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 86, No. 4. — Art.

043614. — 10 p.

[52] *Schecter M.* Dynamics and Bloch oscillations of mobile impurities in one-dimensional quantum liquids / M. Schecter, D.M. Gangardt, A. Kamenev // Annals of Physics. — 2012. — Vol. 327, No. 3. — P. 639–670.

[53] Quantum dynamics of impurities in a one-dimentional Bose gas / J. Catani, G. Lamporesi, D. Naik [et al.] // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85, No. 2. — Art. 023623. — 6 p.

[54] Momentum relaxation of a mobile impurity in a one-dimensional quantum gas / E. Burovski, V. Cheianov, O. Gamayun, Lychkovskiy O. // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89, No. 4. — Art. 041601(R). — 5 p.

[55] *Pastukhov V.* Impurity states in the one-dimensional bose gas / V. Pastukhov // Phys. Rev. A. — 2017. — Vol. 96, No. 4. — Art. 043625. — 7 p.

[56] *Sacha K.* Self-localized impurities embedded in a one-dimensional Bose-Einstein condensate and their quantum fluctuations / K. Sacha, E. Timmermans // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 73, No. 6. — Art. 063604. — 7 p.

[57] *Konietin P.* 2D dilute Bose mixture at low temperatures / P. Konietin, V. Pastukhov // J. Low Temp. Phys. — 2018. — Vol. 190, No. 3. — 256-266 p.

[58] *Loft N. J. S.* A mixed dimensional Bose-polaron / N. J. S. Loft, Z. Wu, Bruun G. M. // Phys. Rev. A. — 2017. — Vol. 96, No. 3. — Art. 033625. — 9 p.

[59] *Landau L. D.* Motion of extraneous particles in Helium II / L. D. Landau, I. Ya. Pomeranchuk // DAN SSSR. — 1948. — Vol. 59. — P. 669.

[60] *Bardeen M.* Effective interaction of ^{3}He atoms in dilute solutions of ^{3}He in ^{4}He at low temperatures / M. Bardeen, G. Baym, D. Pines //

Phys Rev. — 1967. — Vol. 156, No. 1. — 207–221 p.

[61] *Guttman Lester.* The nonparticipation of he^6 in the superfluidity of he^4 / Lester Guttman, James R. Arnold // Phys. Rev. — 1953. — Vol. 92, No. 3. — P. 547–551.

[62] *Woo Chai-Wei.* Theory of dilute solutions of ^{3}He in liquid ^{4}He / Chai-Wei Woo, Hing-Tat Tan, W. E. Massey // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 185, No. 1. — P. 287–298.

[63] *Davison T. B.* Theory of a He^3 atom in liquid He^4 at $T = 0$ / T. B. Davison, E. Feenberg // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 178, No. 1. — P. 306–314.

[64] *E. Kurten K.* Phase separation in isotopic Helium mixtures / K E. Kurten, M L. Ristig // Phys. Rev. B, Condensed matter. — 1988. — Vol. 37. — P. 3359-3365.

[65] *Shi Hualin.* Phase separation of Bose gases at finite temperature / Hualin Shi, Wei-Mou Zheng, Siu-Tat Chui // Phys. Rev. A. — 2000. — Vol. 61, No. 6. — Art. 063613. — 7 p.

[66] *Вакарчук І. О.* Бозе-конденсат у двокомпонентній бозе-рідині / І. О. Вакарчук, В. С. Пастухов // Журн. Фіз. Досл. — 2008. — Vol. 12, No. 3. — Art. 3001. — 8 p.

[67] *Lemeshko M.* Quasiparticle approach to molecules interacting with quantum solvents / M. Lemeshko // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 118, No. 9. — Art. 095301. — 7 p.

[68] *Boninsegni M.* Kinetic energy and momentum distribution of isotopic liquid Helium mixtures / M. Boninsegni // J. Chem. Phys. — 2018. — Vol. 148, No. 10. — Art. 102308. — 6 p.

[69] Dual-species Bose-Einstein condensate of ^{87}Rb and ^{133}Cs / D. J. McCarron, H. W. Cho, D. L. Jenkin [et al.] // Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 84, No. 1. — Art. 011603. — 4 p.

[70] Creation of rydberg polarons in a bose gas / F. Camargo, R. Schmidt, J. D. Whalen [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2018. — Vol. 120, No. 8. —

P. 083401.

[71] *Пашицкий Є. А.* Роль парных корреляций в формировании основного состояния и спектра элементарных возбуждений сверхтекучей бозе-жидкости / Є. А. Пашицкий // ФНТ. — 1999. — Т. 25, № 2. — С. 115–140.

[72] *Cole M.W.* Structure of positive impurity ions in liquid Hhelium / M.W. Cole, R. A. Bachman // Phys. Rev. B. — 1977. — Vol. 15, No. 3. — P. 1388-1394.

[73] *Krotscheck E.* Impurity states in liquid-helium films / E. Krotscheck, M. Saarela, J. L. Epstein // Phys. Rev. B. — 1988. — Vol. 38, No. 1. — P. 111–128.

[74] *Reynolds M. W.* Hyperfine resonance of atomic deuterium at 1 K / M. W. Reynolds, M. E. Hayden, W. N. Hardy // Journal of Low Temperature Physics. — 1991. — Vol. 84, No. 1. — P. 87–108.

[75] Quantum diffusion of ^{3}He impuritons in solid ^{4}He / B. N. Eselson, V. A. Mikheev, V. N. Grigorev, N. P. Mikhin // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1978. — Vol. 74, No. 6. — P. 2311-2319.

[76] *Burmistrov S. N.* On the crystal growth of solid ^{3}He in the presence of small ^{3}He-impurity / S. N. Burmistrov, L. B. Dubovskii // Physica B: Condensed Matter. — 1994. — Vol. 194, No. ? — P. 861 - 862.

[77] *Manousakis Efstratios.* Possible role of ^{3}He impurities in solid ^{4}He / Efstratios Manousakis // EPL. Europhysics Letters. — 2007. — Vol. 78, No. 3. — Art. 36002. — 7 p.

[78] Effects of ^{3}He impurity on solid ^{4}He studied by compound torsional oscillator / P. Gumann, M. C. Keiderling, D. Ruffner, H. Kojima // Phys. Rev. B. — 2011. — Vol. 83, No. 22. — Art. 224519. — 9 p.

[79] *Vitiello S. A.* Effects of a ^{3}He impurity on the elastic anomalies of ^{4}He / S. A. Vitiello, R. Pessoa // Journ. of Low Temp. Physics. — 2013. — Vol. 171, No. 3-4. — P. 315–321.

[80] *Maidanov V.A.* Kinetic processes in solid Helium involving impuri-

ties and vacancies (review) / V.A Maidanov, E. Ya Rudavskii, S.S. Sokolov // Low Temp. Phys. — 2017. — Vol. 43, No. 1. — P. 67–75.

[81] *Ardila L. A. P.* Bose polaron problem: Effect of mass imbalance on binding energy / L. A. P. Ardila, S. Giorgini // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 94, No. 6. — Art. 063640. — 4 p.

[82] *Ardila L. A. Pena.* Impurity in a Bose-Einstein condensate: Study of the attractive and repulsive branch using quantum Monte Carlo methods / L. A. Pena Ardila, S. Giorgini // Phys. Rev. A. — 2015. — Vol. 92, No. 3. — Art. 033612. — 12 p.

[83] Diagrammatic Monte Carlo study of the acoustic and the Bose-Einstein condensate polaron / J. Vlietinck, W. Casteels, K. V. Houcke [et al.] // New Journal of Physics. — 2015. — Vol. 17, No. 3. — P. 033023.

[84] *Boronat J.* Quantum Monte Carlo study of static properties of one ^{3}He atom in superfluid ^{4}He / J. Boronat, J. Casulleras // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 59, No. 13. — P. 8844–8851.

[85] *Galli D.E.* Variational calculation of excited-state properties of a ^{3}He impurity in superfluid ^{4}He / D.E. Galli, G.L. Masserini, Reatto L. // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 60, No. 5. — P. 3476–3484.

[86] Alkali and alkali-earth ions in ^{4}He systems / M. Rossi, M. Verona, D.E. Galli, Reatto L. // Phys. Rev. B. — 2004. — Vol. 69, No. 21. — Art. 212510. — 4 p.

[87] *Campbell C. E.* Many-boson dynamic correlations / C. E. Campbell, E. Krotscheck // International Journal of Modern Physics B. — 2008. — Vol. 22, No. 25-26. — P. 4296–4302.

[88] Feynman path-integral treatment of the BEC-impurity polaron / J. Tempere, W. Casteels, M. K. Oberthaler [et al.] // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 80, No. 18. — P. 184504.

[89] *Novikov A.* Variational approach to the ground state of an impuri-

ty in a Bose-Einstein condensate / A. Novikov, M. Ovchinnikov // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. — 2010. — Vol. 43, No. 10. — P. 105301.

[90] *Levinsen J.* Impurity in a Bose-Einstein condensate and the Efimov effect / J. Levinsen, M.M. Parish, G. M. Bruun // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 115, No. 12. — Art. 125302. — 5 p.

[91] Renormalization group approach to the Fróhlich polaron model: application to impurity-BEC problem / F. Grusdt, Y. E. Shchadilova, A. N. Rubtsov, E. Demler // Sci. Rep. — 2015. — Vol. 94, No. 1. — P. 12124.

[92] *Grusdt F.* All-coupling theory for the Frohlich polaron / F. Grusdt // Phys. Rev. B. — 2016. — Vol. 93, No. 14. — P. 144302.

[93] *Novikov A.* A diagrammatic calculation of the energy spectrum of quantum impurity in degenerate Bose-Einstein condensate / A. Novikov, M. Ovchinnikov // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2009. — Vol. 42, No. 13. — P. 135301.

[94] *Rath S. P.* Field-theoretical study of the Bose polaron / S. P. Rath, R. Schmidt // Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 88, No. 5. — Art. 053632. — 16 p.

[95] Renormalized energy of ground and first excited state of Fróhlich polaron in the range of weak coupling / M. V. Tkach, Ju. O. Seti, O. M. Voitsekhivska, O. Yu. Pytiuk // Condens. Matter Phys. — 2015. — Vol. 18, No. 3. — Art. 33707. — 11 p.

[96] *Isihara A.* Exchange effects on the exitation spectrum of liquid Helium / A. Isihara, T. Samulski // Phys. Rev. B. — 1977. — Vol. 16, No. 5. — P. 1969-1978.

[97] *Вакарчук І. О.* До теорії λ-переходу в рідкому He-4 / І. О. Вакарчук // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. — 1993. — Т. 26, № 00. — С. 29-38.

[98] *Вакарчук І. О.* Статистичний оператор системи тотожніх взаємо-

діючих частинок у координатному зображенні / І. О. Вакарчук // Журн. Фіз. Досл. — 1996. — Т. 1, № 1. — С. 25-38.

[99] *Rovenchak A.* A note on the calculation of the long-wavelength limit of the bosonic excitation spectrum / A. Rovenchak // Z. Naturforsch. — 2015. — Vol. A70, No. 1. — P. 73–78.

[100] *Astrakharchik G. E.* Motion of a heavy impurity through a Bose-Einstein condensate / G. E. Astrakharchik, L. P. Pitaevskii // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70, No. 1. — Art. 013608. — 5 p.

[101] Polaronic mass renormalization of impurities in Bose-Einstein condensates: Correlated Gaussian-wave-function approach / Yulia E. Shchadilova, Fabian Grusdt, Alexey N. Rubtsov, Eugene Demler // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93, No. 4. — Art. 043606. — 9 p.

[102] Localisation of bosonic atoms by fermionic impurities in a three-dimensional optical lattice / S. Ospelkaus, C. Ospelkaus, O. Wille [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96, No. 18. — Art. 180403. — 4 p.

[103] Motional coherence of fermions immersed in a Bose gas / R. Scelle, T. Rentrop, A. Trautmann [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 111, No. 7. — Art. 070401.

[104] Neutral impurities in a Bose-Einstein condensate for simulation of the Frohlich-polaron / M. Hohman, F. Kindermann, B. Ganger [et al.] // EPJ Quantum Technology. — 2015. — Vol. 2, No. 23. — P. 1–15.

[105] A trapped single ion inside a Bose-Einstein condensate / C. Zipkes, S. Palser, C. Sias, M. Kohl // Nature. — 2010. — Vol. 464. — P. 388-391.

[106] Coupling a single electron to a Bose-Einstein condensate / J. B. Balewski, A. T. Krupp, A. Gaj [et al.] // Nature. — 2013. — Vol. 502, No. 7473. — P. 664–667.

[107] Quantum dynamics of a mobile spin impurity / T. Fukuhara,

A. Kantian, M. Endres [et al.] // Nature Phys. — 2009. — Vol. 9. — P. 235–241.

[108] *Гургенишвили Г. Е.* Точно решаемая модель бозе-газа с примесью / Г. Е. Гургенишвили, Г. А. Харадзе, Л. А. Чобанян // ФНТ. — 1975. — Т. 25, № 2. — С. 275-279.

[109] *Miller A.* Elementary excitations in liquid helium / A. Miller, D. Pines, P. Nosieres // Phys. Rev. — 1962. — Vol. 127, No. 5. — P. 1452–1464.

[110] *Feynman R. P.* Energy spectrum of the excitations in liquid Helium / R. P. Feynman, M. Cohen // Phys. Rev. — 1956. — Vol. 102, No. 5. — P. 1189–1204.

[111] Spin waves in a one-dimensional spinor bose gas / J. N. Fuchs, D. M. Gangardt, T. Keilmann, G. V. Shlyapnikov // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95, No. 15. — Art. 150402. — 4 p.

[112] *Вильчинский С. И.* О парном характере сверхтекучего конденсата в гелии-II / С. И. Вильчинский, Є. А. Пашицкий, П. И. Фомин // ФНТ. — 1997. — Т. 23, № 12. — С. 1267-1271.

[113] *Simons R.* Specific heat of ^{3}He/^{4}He mixtures at low temperatures and high ^{3}He concentrations / R. Simons, Robert M. Mueller // Czechoslovak Journal of Physics. — 1996. — Vol. 46, No. 1. — P. 201–202.

[114] *Ландау Л. Д.* Статистическая физика / Л. Д. Ландау, Л. П. Питаевський // Теория конденсированного состояния. — Москва : Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1978. — P. 108–166.

[115] *Casteels W.* Response of the polaron system consisting of an impurity in a Bose-Einstein condensate to Brag spectroscopy / W. Casteels, J. Tempere, J. T. Devreese // Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 83, No. 3. — Art. 033631. — 9 p.

[116] *Huang B. B.* Polaron in Bose-Einstein condensation system /

B. B Huang, S. L. Wan // Chinese Physics Letters. — 2009. — Vol. 26, No. 8. — Art. 080302. — 5 p.

[117] *Peeters F. M.* Acoustical polaron in three dimensions: The ground-state energy and the self-trapping transition / F. M. Peeters, J. T. Devreese // Phys. Rev. B. — 1985. — Vol. 32, No. 6. — P. 3515–3521.

[118] *Ткач М. В.* Квазічастинки у наносистеах / М. В. Ткач, Сеті Ю.О., Войцехівська О.М. — Чернівці : Книги XXI, 2015. — P. 8–23.

[119] *Kain Ben.* Polarons in a dipolar condensate / Ben Kain, Hong Y. Ling // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89, No. 2. — Art. 023612. — 7 p.

[120] Radio-frequency spectroscopy of polarons in ultracold Bose gases / A. Shashi, F. Grusdt, D. A. Abanin, E. Demler // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89, No. 5. — Art. 053617. — 17 p.

[121] *Casteels W.* Polaronic properties of an ion in a Bose-Einstein condensate in the strong-coupling limit / W. Casteels, J. Tempere, J. T. Devreese // Journal of Low Temp. Phys. — 2011. — Vol. 162, No. 3-4. — P. 266–273.

[122] *Bruderer M.* Self-trapping of impurities in Bose-Einstein condensates: Strong attractive and repulsive coupling / M. Bruderer, W. Bao, D. Jaksch // Eur. Phys. Lett. — 2008. — Vol. 82, No. 3. — Art. 30004. — 6 p.

[123] *Grusdt Fabian.* Tunable polarons of slow-light polaritons in a two-dimensional Bose-Einstein condensate / Fabian Grusdt, Michael Fleischhauer // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116. — P. 053602.

[124] Quantum dynamics of ultracold Bose polarons / Y. E. Shchadilova, R. Schmidt, F. Grusdt, E. Demler // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117, No. 11. — Art. 113002. — 6 p.

[125] Bound states in boson impurity models / Tao Shi, Ying-Hai Wu, A. Gonzalez-Tudela, J. I. Cirac // Phys. Rev. X. — 2016. — Vol. 6,

No. 2. — Art. 021027. — 13 p.

[126] Observation of an orbital interaction-induced feshbach resonance in ^{173}Yb / M. Hofer, L. Riegger, F. Scazza [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 115, No. 26. — P. 265302.

[127] *Sun M.* Visualizing the efimov correlation in bose polarons / M. Sun, H. Zhai, X. Cui // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 119, No. 1. — Art. 013401. — 6 p.

[128] *Bohm D.* General theory of collective coordinates / D. Bohm. — Moskov : Мир, 1964. — 152 p.

[129] *Bohm D.* A collective description of electron interactions. i. magnetic interactions / D. Bohm, D. Pines // Phys. Rev. — 1951. — Vol. 82, No. 5. — P. 625–634.

[130] *Боголюбов Н.Н.* Волновая функция нижнего состояния системи взаємодействующих бозе-частиц / Н.Н. Боголюбов, Д.Н. Зубарев // ЖЕТФ. — 1955. — Т. 28, № 2. — С. 129–139.

[131] *Hiroike K.* Ground-state energy of a Bose system in the weak coupling limit / K. Hiroike // Prog. Theor. Phys. — 1975. — Vol. 54, No. 2. — P. 308–315.

[132] *Yamasaki S.* On the interaction between elementary excitations in many-boson system / S. Yamasaki, T. Kebukawa, S. Sunakawa // Prog. Theor. Phys. — 1975. — Vol. 54, No. 2. — P. 348–369.

[133] *Vakarchuk N. A.* Sevaration of “normal” and “superfluid” mctions in the schrodinger equation by means of the method of displacements and collective variables / N. A. Vakarchuk, I. R. Yukhnovskii // Theoretical and Mathematical Physics. — 1974. — Vol. 18, No. 1. — P. 63–75.

[134] *Vakarchuk I. A.* Self-consistent description of long-range and short-range correlations in the theory of liquid ^{4}He i / I. A. Vakarchuk, I. R. Yukhnovskii // Theoretical and Mathematical Physics. — 1979. — Vol. 40, No. 1. — P. 100–111.

[135] *Vakarchuk I. A.* Microscopic theory of the energy spectrum of liquid He ii / I. A. Vakarchuk, I. R. Yukhnovskii // Theoretical and Mathematical Physics. — 1980. — Vol. 42, No. 1. — P. 73–80.

[136] *Grest G. S.* Field-theoretic approach to many-boson systems / G. S. Grest, A. K. Rajagopal // Phys. Rev. A. — 1974. — Vol. 10. — P. 1395–1408.

[137] *Rajagopal A. K.* Elementary excitations in superfluid liquid helium based on the Bogoliubov-Zubarev formalism / A. K. Rajagopal, G. S. Grest // Phys. Rev. A. — 1974. — Vol. 10. — P. 1837–1851.

[138] *Tserkovnikov Yu. A.* Calculation of the correlation functions of a nonideal bose gas by the method of collective variables / Yu. A. Tserkovnikov // Theoretical and Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 26, No. 1. — P. 50–61.

[139] *Vakarchuk I. A.* Free energy of a many-boson system at low temperatures / I. A. Vakarchuk, P. A. Glushak // Theoretical and Mathematical Physics. — 1988. — Vol. 75, No. 1. — P. 399–408.

[140] *Vakarchuk I. A.* Density matrices of superfluid helium-4. i / I. A. Vakarchuk // Theoretical and Mathematical Physics. — 1989. — Vol. 80, No. 3. — P. 983–991.

[141] *Vakarchuk I. A.* Density matrices of superfluid helium-4. ii / I. A. Vakarchuk // Theoretical and Mathematical Physics. — 1990. — Vol. 82, No. 3. — P. 308–316.

[142] *Vakarchuk I. O.* Impurity effective mass in superfluid ^{4}He / I. O. Vakarchuk, V. V. Babin // Cond. Matt. Phys. — 1998. — Vol. 1, No. 1. — P. 161–168.

[143] Low-temperature asymptotic behaviour of the impurity effective mass in superfluid ^{4}He / E. C. Svensson, V. F. Sears, A. D. B. Woods, P. Martel // Jour. Phys. Stud. — 1999. — Vol. 3. — P. 468–473.

[144] *Massey Walter E.* Variational calculations on liquid He^4 and He^3 / Walter E. Massey, Chia-Wei Woo // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 164,

No. 1. — P. 256–259.

[145] Neutron-diffraction study of the static structure factor and pair correlations in liquid ^{4}He / E. C. Svensson, V. F. Sears, A. D. B. Woods, P. Martel // Phys. Rev. B. — 1980. — Vol. 21, No. 8. — P. 3638–3651.

[146] *Robkoff H. N.* Structure-factor measurements in ^{4}He at saturated vapor pressure for 1.38< T <4.24 K / H. N. Robkoff, R. B. Hallock // Phys. Rev. B. — 1981. — Vol. 24, No. 1. — P. 159–182.

[147] *Слюсарєв В. А.* До теорії енергетичного спектра слабких розчинів ^{3}He у надплинному ^{4}He / В. А. Слюсарєв, М. О. Стржемечний // УФЖ. — 1969. — Т. 14, № 1. — Ст. 450.

[148] *Owen J. C.* Effective mass of one ^{3}He atom in liquid ^{4}He / J. C. Owen // Phys. Rev. B. — 1981. — Vol. 23, No. 11. — P. 5815–5823.

[149] *Justrow R.* Many-body problem with strong forces / R. Justrow // Phys. Rev. — 1955. — Vol. 98, No. 5. — P. 1479–1484.

[150] Concentration dependence of the effective mass of ^{3}He atoms in ^{3}He–^{4}He mixtures / E. Krotscheck, M. Saarela, K. Schorkhuber, R. Zillich // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80. — P. 4709–4712.

[151] *Kürten K. E.* Paired-phonon analysis of impurities in bose fluids / K. E. Kürten, M. L. Ristig // Il Nuovo Cimento D. — 1983. — Vol. 2, No. 4. — P. 1057–1064.

[152] *Kempf A.* Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry / A. Kempf // J. Math. Phys. — 1994. — Vol. 35. — P. 4483.

[153] *Vakarchuk I.O.* Deformed heisenberg algebra in the theory of liquid He-4 / I.O. Vakarchuk // Ukr. J. Phys. — 2010. — Vol. 55, No. 1. — P. 36-43.

[154] *Quesne C.* More on a SUSYQM approach to the harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in position and/or momentum /

C. Quesne, V. M. Tkachuk // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2004. — Vol. 37, No. 43. — P. 10095.

[155] *Quesne C.* Dirac oscillator with nonzero minimal uncertainty in position / C. Quesne, V. M. Tkachuk // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2005. — Vol. 38, No. 8. — P. 1747.

[156] *Pedram P.* On the (2 + 1)-dimensional Dirac equation in a constant magnetic field with a minimal length uncertainty / P. Pedram, M. Amirfakhrian, H. Shababi // Int. J. Mod. Phys. D. — 2015. — Vol. 24, No. 2. — Art. 1550016. — 8 p.

[157] *Buisseret F.* Quantum N-body problem with a minimal length / F. Buisseret // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 82, No. 6. — Art. 062102. — 4 p.

[158] *Samar M. I.* Exact solutions for two-body problems in 1D deformed space with minimal length / M. I. Samar, V. M. Tkachuk // Journal of Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 58. — Art. 122108. — 9 p.

[159] *Camacho A.* Some consequences of a generalitization to Heisenberg algebra in quantum electrodynamics / A. Camacho // Int. J. Mod. Phys. D. — 2003. — Vol. 12, No. 9. — P. 1687.

[160] *Camacho A.* Generalized uncertainty principle and quantum electrodynamics / A. Camacho // Int. J. Mod. Phys. D. — 2003. — Vol. 35, No. 7. — P. 1153–1160.

[161] *Vakarchuk I.O.* Differential cross-section of the photoelectric effect in the deformed electromagnetic field / I.O. Vakarchuk, Iu.M. Diakiv // J. Phys. Stud. — 2014. — Vol. 18, No. 2. — Art. 2004. — 5 p.

[162] *Vakarchuk I. O.* Theory of radiation and absorption of deformed field quanta / I. O. Vakarchuk // Cond. Matt. Phys. — 2008. — Vol. 11, No. 3. — P. 1409–416.

[163] *Vakarchuk I.O.* The casimir effect in a deformed field / I.O. Vakarchuk // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2008. — Vol. 41, No. 18. — P. 185402.

[164] *R-Monteiro M.* Quantum algebraic nature of the phonon spectrum in ^{4}He / M. R-Monteiro, L. M. C. S. Rodrigues, S. Wulck // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 76, No. 7. — P. 1098–1101.

[165] *Rego-Monteiro M.* q-deformation and instability of the phonon spectrum in ^{4}He / M. Rego-Monteiro, L.M.C.S. Rodrigues, S. Wulck // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 1998. — Vol. 259, No. 3. — P. 245–260.

[166] *Mizrahi S.S.* Energy spectrum, potential and inertia functions of a generalized f -oscillator / S.S. Mizrahi, Camargo Lima J. P., V. V. Dodonov // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2004. — Vol. 37, No. 11. — P. 3707.

[167] *Gavrilik A.M.* Correlation function intercepts for μ,q-deformed Bose gas model implying effective accounting for interaction and compositeness of particles / A.M. Gavrilik, Yu.A. Mishchenko // Nuclear Physics B. — 2015. — Vol. 891. — P. 466–481.

[168] *Lavagno A.* Deformed quantum statistic in two dimensions / A. Lavagno, P. Narayana Swamy // Int. J. Mod. Phys. B. — 2009. — Vol. 23. — P. 235.

[169] *Fityo T.V.* Statistical physics in deformed spaces with minimal length / T.V. Fityo // Physics Letters A. — 2008. — Vol. 372, No. 37. — P. 5872–5877.

[170] *Lavagno A.* Thermostatistics of deformed bosons and fermions / A. Lavagno, P. Narayana Swamy // Found. Phys. — 2010. — Vol. 40, No. 7. — P. 814–828.

[171] *Xiu-Ming Zhang.* Effect of the minimal length on Bose-Einstein condensation in the relativistic ideal bose gas / Zhang Xiu-Ming, Tian Chi // Chinese Physics Letters. — 2015. — Vol. 32, No. 1. — P. 010303.

[172] *Pastukhov Volodymyr.* Polaron in dilute Bose gas at low temperatures / Volodymyr Pastukhov // ArXiv 1712.06978. —

2017. — 5 p.

[173] Finite-temperature behavior of the bose polaron / Jesper Levinsen, Meera M. Parish, Rasmus S. Christensen [et al.] // Phys. Rev. A. — 2017. — Vol. 96, No. 6. — P. 063622.

[174] Bose polarons at finite temperature and strong coupling / Nils-Eric Guenther, Pietro Massignan, Maciej Lewenstein, Georg M. Bruun // Phys. Rev. Lett. — 2018. — Vol. 120, No. 5. — P. 050405.

[175] *Вакарчук І. О.* Вступ до проблеми багатьох тіл / І. О. Вакарчук. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 1999. — 128 с.

[176] *Fetter A. L.* Quantum theory of many-particle system / A. L. Fetter, J. D. Walescka // Methods of Text Analysis: Omnibus volume. — New York : McGraw - Hill, 1971. — P. 125–132.

[177] *Вакарчук І.О.* Внутрішня енергія багатобозонної системи з урахуванням три та чотиричастинкових кореляцій / І.О. Вакарчук, О. І. Григорчак // Журн. фіз. дослідж. — 2015. — Vol. 19, No. 1–2. — Art. 2005. — 14 p.

[178] *Вакарчук І. О.* Структурні функції багатобозонної системи із врахуванням прямих три- та чотиричастинкових кореляцій / І. О. Вакарчук, Григорчак О. І. // Укр. фіз. журн. — 2015. — Vol. 60, No. 11. — P. 1116–1126.

[179] *Вакарчук И. А.* Неприводимое групповое разложение для логарифма s-частичной матрицы плотности многобозонной системы / И. А. Вакарчук // ТМФ. — 1977. — Т. 32, № 2. — С. 247–261.

[180] *Vakarchuk I. A.* The impurity energy spectrum in quantum liquids / I. A. Vakarchuk. — Kiev : International school on the physics of ionic solvation: Abstr., 1983. — 31–32 p.

[181] *Vakarchuk I.O.* One-particle density matrix of liquid 4-He in the pair correlation approximation / I.O. Vakarchuk // Ukr. J. Phys. — 2009. — Vol. 54, No. 7. — P. 686–695.

[182] *Nowicki N.* Relation of deformed nonlinear algebras with linear ones / N. Nowicki, V. M. Tkachuk // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2014. — Vol. 47, No. 2. — P. 025207.

[183] *Donnelly R. J.* Specific heat and dispersion curve for Helium II / R. J. Donnelly, J. A. Donnelly, R. N. Hills // Journal of Low Temperature Physics. — 1981. — Vol. 44, No. 5. — P. 471–489.

[184] *Вакарчук І. О.* Квантова механіка / І. О. Вакарчук. — Львів : ЛНУ ім.Івана Франка, 2012. — 789–791 с.

[185] *Ландау Л.Д.* Квантова механіка / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — Наука: Москва, 1989. — 768 с.

[186] *Bogoliubov N.* On the theory of superfluidity / N. Bogoliubov // J.Phys. (USSR). — 1947. — Vol. 11, No. 9. — P. 23–32.

[187] *Cowley R.A.* Inelastic scattering of thermal neutrons from liquid Helium / R.A. Cowley, A.D.B. Woods // Canadian Journ. Phys. — 1971. — Vol. 49, No. 1. — P. 177–200.

[188] *Rovenchak A. A.* Effective mass of atom and the excitation spectrum in liquid Helium-4 at $T = 0$ K / A. A. Rovenchak // Low Temp. Phys. — 2003. — Vol. 29, No. 2. — P. 105.

[189] *Popov V.N.* Functional Integrals and Collective Excitations / V.N. Popov. — Cambridge : Cambridge University Press, 1988. — 211 p.

[190] *Pastukhov V.* Damping of Bogoliubov excitations at finite temperatures / V. Pastukhov // J. Phys. A: Math. Theor. — 2015. — Vol. 48, No. 40. — Art. 405002. — 9 p.

[191] *Абрикосов А. А.* Методы квантовой теории поля в статистической физике / А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, Дзялошинский И.Е. — Москва : Физматгиз, 1962. — 446 с.

[192] *Стасюк І. В.* Функції Гріна у квантовій статистиці твердих тіл / І. В. Стасюк. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. — С. 391.

[193] *Ginzburg S. L.* Unitarity conditions for a many-body system at zero

temperature / S. L. Ginzburg, Maleev S. V. // Theoret. and Math. Phys. — 1970. — Vol. 3, No. 3. — P. 616–625.

[194] *Pastukhov V.* Infrared behavior of dipolar bose systems at low temperatures / V. Pastukhov // J. Low Temp. Phys. — 2017. — Vol. 186, No. 1. — P. 148–162.

[195] Fermi liquid properties of ^{3}He-^{4}He mixtures / M. Saarela, E. Krotscheck, J. Paaso [et al.] // J. Low Temp.Phys. — 1998. — Vol. 113, No. 5. — P. 993–998.

[196] Structure of the excitation spectrum of liquid ^{4}He / N. M. Blagoveshchenskii, I. V. Bogoyavlenskii, L. V. Karnatsevich [et al.] // Phys. Rev. B. — 1994. — Vol. 50, No. 22. — P. 16550–16565.

[197] *Polls A.* A microscopic look at liquid helium: the ^{3}He impurity case / A. Polls, A. Fabrocini // J. Mod. Phys. B. — 2001. — Vol. 269, No. 10–11. — P. 1575–1590.

[198] Ефективна маса атома ^{4}He в надплинній і нормальній фазах / І.О. Вакарчук, О. І. Григорчак, В. С. Пастухов, Притула Р. О. // Укр. фіз. журн. — 2016. — Vol. 61, No. 1. — P. 31–39.

[199] *Yorozu S.* Isochoric pressure and ^{3}He quasiparticle effective mass in a ^{3}–^{4}He mixture under pressure / S. Yorozu, H. Fukuyama, Ishimoto H. // Phys. Rev. B. — 1993. — Vol. 48, No. 13. — P. 9660–9663.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті

[1] Вакарчук І. О., Паночко Г. І. Домішкові стани в багатобозонній системі // Журн. фіз. дослідж.— 2012.— Т. 16, №4.— Ст. 4601.— 8 с.

[2] Vakarchuk I. O., Panochko G. I. Theory of a many-boson system with deformed Heisenberg algebra // Condens. Matter Phys.— 2015.— Vol. 18, No. 3.— Art. 33002.— 14 p.

[3] Вакарчук І. О., Паночко Г. І., Пастухов В. С. Метод функціонального інтегрування у проблемі бозе-полярона // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз.— 2016.— Вип. 52.— С. 17-27.

[4] Vakarchuk I. O., Panochko G. The effective mass of an impurity atom in the Bose liquid with a deformed Heisenberg algebra // Ukr. J. Phys.— 2017.— Vol. 62, No. 2.— P. 123-131.

[5] Panochko G., Pastukhov V., Vakarchuk I. Behavior of the impurity atom in a weakly-interacting Bose gas // Condens. Matter Phys.— 2017.— Vol. 20, No. 1.— Art. 13604.— 11 p.

[6] Panochko G., Pastukhov V., Vakarchuk I. Impurity self-energy in the strongly-correlated Bose systems // Int. J. Mod. Phys. B.— 2018.— Vol. 32, No. 5.— Art. 1850053.— 9 p.

Конференції

[7] Panochko G., Vakarchuk I. Density matrix of the system "Bose liquids + impurities" in the approximation of pair correlations // QFS 2010. International Symposium on Quantum Fluids and Solids. August 1-7, 2010. Grenoble, France: List of contributions.— P. 96.

[8] Vakarchuk I. O., Panochko H. I. Heisenberg's deformed algebra in the theory of many-boson system // International Conference "Physics of Liquid Matter: Modern Problems", May 21-24, 2010, Kyiv, Ukraine:

Abstracts.— P. 335.

[9] Паночко Г. Повна матриця густини системи “бозе-рідина + домішка” в границі низьких температур // Міжнародна конференція молодих учених і аспірантів ІЕФ-2011, Ужгород, 24-27 травня 2011 р.: Програма і тези доповідей.— С. 88.

[10] Vakarchuk I. O., Panochko H. I. One-particle density matrix of the system “Bose-liquid + impurity“ in the limit of low temperatures // III Young Scientists Conference “Modern Problems of Theoretical Physics”, December 21-23, 2011, Kyiv, Ukraine: Program and Abstracts.— P. 63.

[11] Вакарчук І. О., Паночко Г. Структурні фактори системи “бозе-рідина+домішковий атом“ в наближенні парних кореляцій // 12-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 30 травня - 1 червня 2012. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 39.

[12] Panochko G., Vakarchuk I. O. The 3He impurity states in 4He // International Conference on Quantum Fluids and Solids 2012, 15th-21st August 2012, Lancaster University, UK: Conference Handbook.— [P. 46]

[13] Вакарчук І., Паночко Г. Повна матриця густини системи “бозе-рідина + домішка” в наближенні парних кореляцій [Різдвяні дискусії 2012, Львів, 3-4 січня 2012] // Журн. фіз. дослідж.— 2012.— Т. 16, №1/2.— С. 1998-5.

[14] Panochko G. One-particle density matrix of the “Bose-system + impurity atom“ at finite temperatures [Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 10-11 July 2012] // J. Phys. Stud.— 2012.— Vol. 16, No. 3.— 3998.— P. 4.

[15] Vakarchuk I., Panochko G. The 3He impurity states in 4He // 6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 23-25 September 2013, Zielona Góra, Poland: Book of abstracts.— P. 25.

[16] Vakarchuk I. O., Panochko G. The impurity states in the liquid

Helium-4// Proceedings of VI International Conference “Physics of Disordered Systems”, Lviv, Ukraine, 14-16 October, 2013.— P. 36.

[17] Паночко Г. Урахування три- та чотиричастинкових кореляцій у деформованому просторі Гейзенберга на прикладі рідкого 4He [Різдвяні дискусії 2014, Львів, 9-10 січня 2014] // Журн. фіз. дослідж.— 2014.— Т. 18, №1.— С. 1998-5.

[18] Вакарчук І. О., Паночко Г. І. Домішка в рідкому 4He з деформованою алгеброю Гайзенберга // 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 4-5 червня 2015. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 26.

[19] Vakarchuk I. O., Panochko G. I. The separation energy of the impurity atom in the liquid 4He with the deformed Heisenberg algebra // 7th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems”, May 27-30, 2016, Kyiv, Ukraine: Abstracts.— P. 43.

[20] Вакарчук І. О., Паночко Г. Ефективна маса домішкового атома в розрідженому бозе-газі [Різдвяні дискусії 2017, Львів, 11-12 січня 2017] // Журн. фіз. дослідж.— 2017.— Т. 21, №1/2.— С. 1998-3.

[21] Паночко Г. І. Спектр домішки в сильноскорельованій бозе-системі // 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 8-9 червня 2017. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 38.

[22] Panochko G., Vakarchuk I. Self-energy of the Bose polaron // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, Zielona Góra – October 16-19 2017: Abstracts.— P. 9.

[23] Panochko G., Vakarchuk I. O. The liquid helium-4 in a deformed Heisenberg space in low temperatures limit // LT27: 27th International Conference on Low Temperature Physics, August 6-13, 2014, Buenos Aires, Argentina: Abstract Book.— P. 143.

АПРОБАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Panochko G., Vakarchuk I. Density matrix of the system "Bose liquids + impurities" in the approximation of pair correlations // International Symposium on Quantum Fluids and Solids. August 1-7, 2010. Grenoble, France – poster report.

[2] Vakarchuk I. O., Panochko H. I. Heisenberg's deformed algebra in the theory of many-boson system // International Conference "Physics of Liquid Matter: Modern Problems", May 21-24, 2010, Kyiv – oral report.

[3] Паночко Г. Повна матриця густини системи "бозе-рідина + домішка" в границі низьких температур // Міжнародна конференція молодих учених і аспірантів ІЕФ-2011, Ужгород, 24-27 травня 2011 р. – усна доповідь.

[4] Vakarchuk I. O., Panochko H. I. One-particle density matrix of the system "Bose-liquid + impurity" in the limit of low temperatures // III Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", December 21-23, 2011, Kyiv – усна доповідь.

[5] Вакарчук І. О., Паночко Г. Структурні фактори системи "бозе-рідина+домішковий атом" в наближенні парних кореляцій // 12-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 30 травня - 1 червня 2012. Інститут фізики конденсованих систем НАН України – усна доповідь.

[6] Panochko G., Vakarchuk I. O. The 3He impurity states in 4He // International Conference on Quantum Fluids and Solids 2012, 15th-21st August 2012, Lancaster University, UK – poster report.

[7] Вакарчук І., Паночко Г. Повна матриця густини системи "бозе-рідина + домішка" в наближенні парних кореляцій // Різдвяні дискусії 2012, Львів, 3-4 січня 2012 – усна доповідь.

[8] Panochko G. One-particle density matrix of the "Bose-system + impurity atom" at finite temperatures // Workshop on Current Problems

in Physics, Lviv, 10-11 July 2012 – oral report.

[9] Vakarchuk I., Panochko G. The 3He impurity states in 4He // 6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 23-25 September 2013, Zielona Góra, Poland– oral report.

[10] Vakarchuk I. O., Panochko G. The impurity states in the liquid Helium-4// Proceedings of VI International Conference "Physics of Disordered Systems", Lviv, 14-16 October, 2013 – усна доповідь.

[11] Паночко Г. Урахування три- та чотиричастинкових кореляцій у деформованому просторі Гейзенберга на прикладі рідкого 4-He // Різдвяні дискусії 2014, Львів, 9-10 січня 2014 – усна доповідь.

[12] Вакарчук І. О., Паночко Г. І. Домішка в рідкому 4He з деформованою алгеброю Гайзенберга // 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 4-5 червня 2015. Інститут фізики конденсованих систем НАН України – усна доповідь.

[13] Vakarchuk I. O., Panochko G. I. The separation energy of the impurity atom in the liquid 4He with the deformed Heisenberg algebra // 7th International Conference "Physics of Liquid Matter: Modern Problems", May 27-30, 2016, Kyiv – oral report.

[14] Вакарчук І. О., Паночко Г. Ефективна маса домішкового атома в розрідженому бозе-газі // Різдвяні дискусії 2017, Львів, 11-12 січня 2017 – усна доповідь.

[15] Паночко Г. І. Спектр домішки в сильноскорельованій бозе-системі // 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 8-9 червня 2017. Інститут фізики конденсованих систем НАН України – усна доповідь.

[16] Panochko G., Vakarchuk I. Self-energy of the Bose polaron // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, Zielona Góra – October 16-19 2017 - oral report.