ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Ровенчак Андрій Адамович

УДК 530.145 + 531.19 + 538.941

Статистика Бозе і дробові статистики в теорії багаточастинкових систем і суміжних задачах

01.04.02 — Теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант:
доктор фізико-математичних наук,
професор
Вакарчук Іван Олександрович

ЛЬВІВ — 2016

Зміст

ВСТУП **8**

РОЗДІЛ 1. Становлення і сучасний стан досліджень **19**

1.1. Вступ 19

1.2. Квантовомеханічний підхід 24

1.2.1. Еніони. 24

1.2.2. q-деформації. 28

1.3. Статистико-механічні узагальнення 31

1.3.1. Статистика Джентіле. 32

1.3.2. Статистика Голдейна–Ву. 35

1.3.3. Статистика Поліхронакоса. 38

1.4. Неекстенсивна статистика 40

1.5. Системи бозонів 45

РОЗДІЛ 2. Однорідні бозе-системи зі взаємодією **50**

2.1. Вступ 50

2.2. Енергетичний спектр взаємодіючої бозе-системи 51

2.2.1. Факторизація гамільтоніана. 51

2.2.2. Обчислення спектра. 53

2.2.3. Результати й обговорення. 55

2.3. Розрахунок спектра бозе-системи в довгохвильовій границі 57

2.3.1. Рівняння руху для функцій Ґріна. 57

2.3.2. Розщеплення функцій Ґріна і спектр елементарних збуджень 58

2.3.3. Результати розрахунків. 61

2.3.4. Обговорення. 66

2.4. Міжатомні потенціали розрідженої багатобозонної системи 66

2.5. Вплив слабкої взаємодії на властивості бозе-газу 70

2.5.1. Ідеальний D-вимірний бозе-газ. 71
2.5.2. Слабковзаємодіючий газ. 76
2.6. Висновки до розділу 2 83

РОЗДІЛ 3. Системи частинок у зовнішньому потенціалі 85
3.1. Вступ 85
3.1.1. Ідеальний газ у зовнішньому потенціалі. 85
3.1.2. Приклад застосування квазікласичного наближення 87
3.2. Бозони в пористому середовищі під впливом зовнішнього поля 89
3.2.1. Загальна схема розрахунків. 89
3.2.2. Система осциляторів у D вимірах. 89
3.2.3. Напівкласичний підхід. 90
3.2.4. Точні результати: $1/N$-розклади. 91
3.2.5. Числові розрахунки. 92
3.3. Метод наближеного вторинного квантування для бозонів у пастці 94
3.3.1. Діагоналізація гамільтоніана. 94
3.3.2. Результати розрахунків. 99
3.4. Ефективний гамільтоніан і спектр елементарних збуджень бозонів у гармонічній пастці 100
3.4.1. Процедура діагоналізації. 101
3.4.2. Одновимірна задача. 105
3.4.3. Двосортова бозе-суміш. 109
3.5. Одновимірні слабковзаємодіючі гармонічні осцилятори зі статистикою Джентіле 112
3.5.1. Вихідні вирази. 112
3.5.2. Розрахунок термодинамічних функцій. 115
3.5.3. Хімічний потенціал при $T = 0$. 117

3.5.4. Результати числових розрахунків. 119
3.6. Висновки до розділу 3 124

РОЗДІЛ 4. Статистика Поліхронакоса з комплексним параметром 126

4.1. Вступ 126
4.2. Вихідні вирази 128
4.3. Бозонна і ферміонна границі 129
4.4. Система двовимірних осциляторів з нефіксованою кількістю частинок 131
4.5. Одновимірні гармонічні осцилятори 134
4.5.1. Критична температура і поведінка термодинамічних функцій 136
4.5.2. Можливості експериментальної перевірки. 140
4.6. Термодинамічні функції D-вимірних осциляторів 143
4.6.1. Високотемпературна границя. 145
4.6.2. Область фазового переходу. Критична температура 147
4.6.3. Критичне значення параметра статистики. 153
4.6.4. Поведінка термодинамічних функцій. 156
4.6.5. Низькотемпературна область і узагальнення результатів 163
4.7. Висновки до розділу 4 166

РОЗДІЛ 5. Двопараметричні дробові статистики 170

5.1. Вступ 170
5.2. Віріальне і кластерне розвинення 172
5.3. Зв'язок між різними типами дробової статистики 174
5.3.1. Віріальне розвинення для еніонів. 174
5.3.2. Розклади за параметром статистики. 178

5.4. Двопараметричні модифікації статистики 181
5.4.1. Неповна статистика Поліхронакоса. 183
5.4.2. Неадитивна статистика Поліхронакоса. 183
5.4.3. Неповна статистика Голдейна–Ву. 183
5.4.4. Неадитивна статистика Голдейна–Ву. 184
5.4.5. Зв'язок із еніонною статистикою. 184
5.4.6. Бозонна границя статистики Голдейна–Ву з q-експонентою 190
5.5. Слабконеадитивна статистика Поліхронакоса 194
5.5.1. Розклади за малими поправками. 196
5.5.2. Тривимірні гармонічні осцилятори. 199
5.5.3. Критична температура тривимірної системи. . . . 202
5.5.4. Теплоємність модельних систем зі СНАСП. 204
5.6. Висновки до розділу 5 208

РОЗДІЛ 6. Підхід статистичної механіки до задачі про розбиття натуральних чисел 211

6.1. Вступ 211
6.2. Фізична аналогія та метод розрахунку 213
6.3. Необмежені розбиття 216
6.3.1. Одновимірний випадок. 216
6.3.2. Двовимірний випадок. 217
6.3.3. Поправка до головної асимптотики. 219
6.4. Двовимірні розбиття цілих чисел з обмеженою кількістю частин 222
6.4.1. Загальні результати для скінченної системи N частинок 223
6.4.2. Перевірка підходу в одновимірному просторі. . . . 225
6.4.3. Результати для плоских розбиттів. 227

6.4.4. Числова оцінка кількості обмежених плоских розбиттів для проміжних значень $N \sim n^{2/3}$ 229
6.5. Зв'язок між дробовою статистикою і скінченною бозе-системою в одновимірному випадку . . 231
6.5.1. Мікроканонічний підхід. 232
6.5.2. Підхід канонічного і великого канонічного ансамблів 233
6.5.3. Степеневий енергетичний спектр. 234
6.6. Багатовимірні розбиття цілих чисел 237
6.7. Висновки до розділу 6 240

РОЗДІЛ 7. Статистика Бозе в задачі класифікації складних систем 242

7.1. Вступ 242
7.2. Ранґово-частотний розподіл 243
7.3. Фізична аналогія 246
7.3.1. Функція розподілу й енергетичний спектр. 246
7.3.2. Параметри розподілу Бозе. 247
7.4. Перші результати 249
7.5. Вплив довжини тексту на значення параметрів 253
7.6. Новела Антуана де Сент-Екзюпері 256
7.7. Траєкторії текстів 261
7.8. Моделі з дробовою вимірністю простору і дробовою статистикою 264
7.9. Можливості дослідження еволюції мов 269
7.10. Висновки до розділу 7 275

ВИСНОВКИ 278

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 282

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ДВС	дробова виключна статистика
СНАСП	слабконеадитивна статистика Поліхронакоса
BE	Bose–Einstein statistics (статистика Бозе–Айнштайна)
BEC	Bose–Einstein condensation (конденсація Бозе–Айнштайна)
FD	Fermi–Dirac statistics (статистика Фермі–Дірака)
FES	fractional exclusion statistics (дробова виключна статистика)
HW	Haldane–Wu statistics (статистика Голдейна–Ву)
IHWS	incomplete Haldane–Wu statistics statistics (неповна статистика Голдейна–Ву)
IPS	incomplete Polychronakos statistics (неповна статистика Поліхронакоса)
KT	Kosterlitz–Thouless [transition] ([перехід] Костерліца–Таулеса)
NAHWS	nonadditive Haldane–Wu statistics (неадитивна статистика Голдейна–Ву)
NAPS	nonadditive Polychronakos statistics (неадитивна статистика Поліхронакоса)
RPA	random phase approximation (наближення хаотичних фаз)
WKB	[наближення] Вентцеля–Крамерса–Бріллюена

ВСТУП

Актуальність теми. Квантові багаточастинкові системи посідають важливе місце в сучасній експериментальній і теоретичній фізиці. Одним із напрямків є вивчення макроскопічних квантових явищ, до яких належать, зокрема, надплинність, надпровідність, а також квантовий ефект Голла [1–3]. Розвиток експериментальних методів досягнення наднизьких температур і техніки керування нейтральними атомами дозволив зрештою отримати в 1995 році новий стан матерії — конденсат Бозе–Айнштайна — в лазерно-охолоджених розріджених газах лужних металів [4, 5].

Цікавим показником популярності певної тематики може бути кількість опублікованих праць. Можна прослідкувати, наприклад, у виданнях Американського фізичного товариства (серія Physical Review), що до середини 1990-х років в анотаціях терміни ‘бозе-конденсат’, ‘бозе-конденсація’ траплялися 1–2 рази на кожну тисячу статей, у другій половині 1990-х років цей показних майже досягнув значення 8, а після 2000 року стабільно тримається в межах 15–17 статей на 1000.

Першими системами, в яких експериментально досягли стану бозе-конденсації, стали ізотопи ^{87}Rb [4], ^{23}Na [5] та ^{7}Li [6]. Згодом перелік розширився іншими лужними й лужноземельними ізотопами, лантаноїдами та деякими іншими елементами [7], і сьогодні відомо про бозе-конденсацію в системі атомів калію, цезію, кальцію, хрому, стронцію, ітербію, диспрозію, ербію, а також у спін-поляризованого атомарного водню [8].

Експериментальні успіхи в дослідженні цього макроскопічного квантового явища дали новий поштовх зусиллям, спрямованим на побудову теоретичних моделей опису бозе-систем [9]. Для вивчення слабковзаємодіючих бозе-систем застосовують методи квантової теорії поля,

які пов'язані з використанням формалізму операторів породження–знищення [10–12], а також — набагато ширше — з нелінійним рівнянням Шрьодінґера (відомим як рівняння Ґросса–Пітаєвського [13]), пор. [14, 15]. Активно застосовують і числові методи [16, 17].

Складність і відповідно висока вартість експериментальних установок для дослідження конденсації Бозе–Айнштайна спричинили зацікавлення бозе-системами в нижчих розмірностях — дво- й одновимірних [17–19]. В окремий напрямок також можна виділити вивчення двокомпонентних [20–22] і багатокомпонентних [23, 24] бозе-конденсатів. Використання цих систем може бути зокрема пов'язане з квантовими обчисленнями [25].

Жвавий інтерес як експериментаторів, так і теоретиків різних дослідницьких груп нині викликають дослідження квантових вихорів у конденсатах [21, 24, 26, 27], а також інших нелінійних явищ, наприклад, квантової турбулентності [27–29].

Можливість того, що у двовимірному просторі частинки можуть підлягати статистиці, відмінній від бозонної чи ферміонної, було продемонстровано 1977 року [30]. Виявляється, що завдяки топологічним особливостям двовимірного руху перестановка двох частинок може спричиняти зміну фазового множника хвильової функції, відмінну від ± 1: $\psi(x_2, x_1) = e^{i\pi\alpha}\psi(x_1, x_2)$, де α — довільне число. Звідси й походить термін *еніони* (англ. *anyon*, від *any* — 'будь-який') [31].

Протягом останніх десятиліть до поняття дробової статистики для опису квантових систем використовують цілу низку підходів [32, 33]. Системи з дробовою статистикою набувають щораз ширшого застосування як ефективні моделі в різних галузях фізики, від високотемпературної надпровідності [34] до космології [35]. Такий перелік зокрема включає дробовий квантовий ефект Голла [36], холодні атомні гази [37], ядерну матерію [38] і навіть моделі темної матерії [39]. Цікаво, що та-

кож існують праці, де темну матерію розглядають як бозе-конденсати різного типу [40–42].

Так звану виключну статистику (англ. *exclusion statistics*) можна пов'язати із взаємодіями в одновимірних системах [43], для опису ультрахолодних газів використовують еніонно-ферміонне відображення [44]. Найновіші дослідження в галузі еніонної та дробової статистики включають вивчення так званих неабелевих еніонів [45–47], які є аналогами парастатистики Ґріна [48], а також застосування виключної статистики до різних систем [49, 50]. В окрему гілку можна виділити неекстенсивні узагальнення статистичної механіки [51, 52].

Вивчення дробових статистик, окрім самостійного теоретичного інтересу, має також важливе практичне значення. Такі статистики дозволяють описувати квантові бозе- та фермі-системи із різними типами взаємодій на досить простому математичному рівні. Самі ж такі квантові системи відіграють важливу роль в галузі сучасних інформаційних технологій [53]. Зокрема, на даний час існують пропозиції щодо реалізації квантових обчислень за допомогою еніонів [54, 55]. Серед майбутніх технологій запису інформації також розглядають бозе-конденсати, у яких фактично на макроскопічному рівні проявляються квантові властивості. Також важливою ділянкою застосування бозе-конденсатів є високоточна інтерферометрія [56, 57], яка виявляється на два порядки точнішою за традиційні оптичні методи.

Важливою рисою сучасної науки є міждисциплінарний характер багатьох її галузей. Фізичні методи — насамперед, розвинуті в межах статистичної фізики — активно застосовують не лише в математиці [58–60] чи природничих науках, зокрема в біології [61–63], але й для встановлення закономірностей певних явищ у гуманітарних [64–67] і суспільних науках [68–71].

Процеси, які є предметом опису гуманітарних і суспільних наук, і

макроскопічні квантові явища, окрім можливих спільних підходів на математичному рівні, поєднує також те, що всі вони є проявом емерджентності (від англ. *emergence* ‘виникнення’). Це поняття належить до теорії систем і означає існування в певної системи нових властивостей, що не характерні для її окремих елементів.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюджетних тем Фф-150Ф “Розробка нових математичних методів дослідження квантових систем” (2003–2005 рр., номер держреєстрації 0100U001446), Фф-55Ф “Теоретичні дослідження нових квантових систем” (2006–2008 рр., номер держреєстрації 0106U001294), Фф-14Ф “Нові методи дослідження квантових систем декількох і багатьох частинок” (2009–2011 рр., номер держреєстрації 0109U002096), Фф-110Ф “Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберґа” (2012–2014 рр., номер держреєстрації 0112U001275), проект ДФФД Ф64 “Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів” (2015–16 рр., номери держреєстрації 0115U004838, 0116U005055); Фф-30Ф “Класичні і квантові системи з нестандартними комутаційними співвідношеннями і статистиками” (2016 р., номер держреєстрації 0116U001539), частину міждисциплінарних досліджень зроблено за проектом М/6-2009 “Створення збалансованого текстового банку даних української мови” (2009–2010 рр., номер держреєстрації 0109U001786) в межах програми міжнародного науково-технічного співробітництва між Україною та Австрійською Республікою.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка нових підходів до вивчення систем бозонів та систем із різними типами дробової статистики, дослідження впливу взаємодії на явище бозе-конденсації, встановлення відповідностей зв’язку між параметра-

ми статистики та характеристиками бозе-систем для ефективного вивчення останніх.

Основними завданнями вивчення систем із дробовою статистикою було створення теорії, на підставі якої можна досліджувати простішими методами ефекти в бозонних системах, пов'язані із міжчастинковою взаємодією, впливом скінченності кількості частинок та ефективної зміни вимірності простору внаслідок впливу зовнішнього поля.

Об'єктом досліджень є квантові багаточастинкові системи з різними типами взаємодій та статистики. ***Предметом досліджень*** є термодинамічні функції та енергетичний спектр багатобозонних систем, термодинамічні функції систем із дробовою статистикою, властивості складних систем, які можна вивчати фізичними методами.

Для досягнення зазначеної мети використано такі методи досліджень: у межах квантової теорії поля — метод функцій Ґріна та наближене вторинне квантування, для вивчення властивостей систем з різними типами статистики — термодинамічний підхід, віріальне і кластерне розвинення, для аналізу суміжних задач теорії чисел та класифікації складних систем застосовано аналогію з відповідними фізичними системами.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі отримано низку нових результатів, що стосуються квантових багаточастинкових систем з різними типами статистики та кількох суміжних задач, для яких може бути встановлена аналогія з фізичними системами.

Для бозонів зі сильною міжчастинковою взаємодією запропоновано нові способи розрахунку спектра елементарних збуджень, зокрема показано можливість коректного відтворення фононної ділянки спектра рідкого гелію-4 без застосування поняття ефективної маси.

Метод наближеного вторинного квантування застосовано для си-

стеми бозонів у пастці. Вперше запропоновано процедуру побудови ефективного гамільтоніана у вигляді квадратичної форми, яку легко діагоналізувати стандартними способами. При цьому внески від доданків, вищих за квадратичні, враховано за допомогою наближень із використанням чисел заповнення.

Вперше розраховано термодинамічні функції слабковзаємодіючих гармонічних осциляторів, що підлягають дробовій (проміжній) статистиці Джентіле. Також вперше вдалося встановити відповідність між системою зі статистикою Джентіле і бозе-системою зі скінченною кількістю частинок.

Вперше встановлено зв'язок комплексного параметра дробової статистики Поліхронакоса з дисипативною частиною спектра та розглянуто системи осциляторів, що підкоряються такій статистиці. Для них уперше розраховано термодинамічні функції, передбачено існування фазових переходів зроблено аналітичні та числові оцінки критичних температур та оцінки про можливість експериментального вимірювання передбачених стрибків теплоємності.

Двопараметричні дробові статистики вперше використано для моделювання слабковзаємодіючих та скінченних бозе-систем, а також ідеального газу еніонів. Еквівалентності статистик досягнуто з точністю до третього віріального коефіцієнта.

У межах міждисциплінарних застосувань моделей на основі статистики Бозе уточнено головну асимптотику кількості одновимірних та вперше отримано вираз для кількості плоских розбиттів натуральних чисел з обмеженою кількістю частин.

На підставі аналогії між ранґово-частотним розподілом (на прикладі текстів) і розподілом Бозе запропоновано новий підхід для аналізу і класифікації складних систем.

Практичне значення одержаних результатів. Виконані дослідження мають фундаментальний характер.

Результати розрахунків спектра елементарних збуджень бозонних систем можуть бути використані для інтерпретації експериментів в галузі фізики конденсованих систем. Отримані аналітичні та числові результати щодо властивостей слабковзаємодіючих систем мають перспективи застосування зокрема в дослідженнях бозе-конденсатів у пастках.

Результати, що стосуються дробової статистики Поліхронакоса з комплексним параметром, можна використати для пояснення експериментів у системах з малою дисипативною частиною спектра елементарних збуджень. Двопараметричні дробові статистики дають змогу вивчати квантові системи з різними типами взаємодій на підставі простих математичних моделей. Знаходження квантовомеханічного зображення відповідної наближеної моделі еніонів може бути корисним у галузі квантової інформатики та квантових обчислень.

Розроблені міждисциплінарні застосування статистико-механічних підходів є важливими в дослідженнях складних систем з погляду передбачення їх поведінки чи класифікації за певними ознаками. Так, на даний момент у нас є певні попередні напрацювання щодо можливості класифікації діагнозів на підставі частотних характеристик електрокардіограм, які, однак, ще вимагають додаткового аналізу. Зрозуміло, що результати в таких ділянках можуть мати не лише науковий ефект, але й важливе практичне значення.

Особистий внесок здобувача. Всі викладені в дисертації оригінальні результати отримано автором самостійно або за його безпосередньої участі. У статті [72] автор обговорював результати та їх інтерпретацію, а також здійснював консультування щодо чисельних розрахунків. У решті спільних публікацій авторові дисертації належить

постановка задач та вибір методів дослідження. Також у статтях [73–76] автор здійснював перевірку аналітичних і числових розрахунків, а у статтях [77, 78] виконував розрахунки та брав участь в інтерпретації результатів. Решту праць написано без співавторів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи автор особисто доповідав на таких конференціях і семінарах:

- Конференція молодих учених та аспірантів ІЕФ'2003, 10–12 вересня 2003 р. (Ужгород);
- QFS2004: International Symposium on Quantum Fluids and Solids, 5–10 July 2004 (Trento, Italy);
- Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications. Annual Conference in Ukraine. 28–30 August 2005 (Lviv);
- Різдвяні дискусії 2006, 4–5 січня 2006 р. (Львів);
- QFS2006: International Symposium on Quantum Fluids and Solids, 1–6 August 2006 (Kyoto, Japan);
- QFS2007: International Symposium on Quantum Fluids and Solids, 1–6 August 2007 (Kazan, Russia);
- Різдвяні дискусії 2008, 4–5 січня 2008 р. (Львів);
- 4th International Conference "Physics of Liquid Matter: Modern Problems", 23–26 May 2008 (Kyiv);
- IV Літня школа "Квантова інформація", 7–8 червня 2008 р. (смт. Верхнє Синьовидне Львівської обл.);
- Workshop on Theoretical Physics, 5–8 July 2009 (Lviv);
- Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 19–21 October 2009 (Zielona Góra, Poland);
- Різдвяні дискусії 2010, 9–10 січня 2010 р. (Львів);
- 3rd Workshop on Current Problems in Physics, 5–9 July 2010 (Lviv);
- QFS2010: International Symposium on Quantum Fluids and Solids, 1–7 August 2010 (Grenoble, France);

- LT26: The 26th International Conference on Low Temperature Physics, 10–17 August 2011 (Beijing, China);
- Seminarium Instytutu Badań Fizykomedycznych (Puszczykowo / Poznań), 18–20 września 2011 r.;
- 4th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 24–26 October 2011 (Zielona Góra, Poland);
- XII Всеукраїнська школа-семінар і Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (30 травня 2012 р.), запрошена лекція;
- 5th Workshop on Current Problems in Physics, 10–11 July 2012 (Lviv);
- QFS2012: International Conference on Quantum Fluids and Solids, 15–21 August 2012 (Lancaster University, United Kingdom);
- Різдвяні дискусії 2013, 3–4 січня 2013 р. (Львів);
- 6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 23–25 September 2013 (Zielona Góra, Poland);
- VI International Conference "Physics of Disordered Systems", 14–16 October 2013 (Lviv);
- Різдвяні дискусії 2014, Львів, 9–10 січня 2014 р. (Львів);
- Семінар Лабораторії статистичної фізики складних систем Інституту фізики конденсованих систем НАНУ (15 січня 2014 р., Львів);
- 7th Workshop on Current Problems in Physics, 8–9 July 2014 (Lviv);
- Arithmetic Methods in Mathematical Physics and Biology, 3–8 August 2014 (Banach Center, Będlewo, Poland);
- International School and Workshop "Anyon Physics of Ultracold Atomic Gases", 12–15 December 2014 (Technische Universität Kaiserslautern, Germany), запрошені лекції;
- Різдвяні дискусії 2015, Львів, 12–13 січня 2015 р. (Львів);
- 20th International Conference on Control Systems and Computer Science CSCS 2015, 27–29 May 2015 (Bucharest, Romania);

- 8th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 19–22 October 2015 (Zielona Góra, Poland);
- Seminarium Instytutu Fizyki Uniwersytetu Zielonogórskiego, 12 kwietnia 2016 r.;
- Звітна конференція ЛНУ (2003–2015).

Результати були темами семінарів кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка (2003–2016).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [72–99]. Цей список робіт, який містить основні положення дисертації, налічує 27 статей та 1 препринт, із яких 23 — у фахових журналах за фізико-математичним напрямком [72–94], а решта відображають результати міждисциплінарних досліджень. Частково матеріали висвітлених у роботі досліджень увійшли також до авторського посібника "Фізика бозе-систем" [100]. Зазначений перелік публікацій включає 17 статей, індексованих у Web of Science [75–77, 80–84, 86, 88–94, 96], та додатково 6, індексованих у Scopus [72–74, 78, 87, 98]. Вибрані тези наведено в [101].

Виклад матеріалу в дисертаційній роботі має таку **структуру**. У розділі 1 подано історичний огляд становлення досліджень квантових систем з різними типами статистики, а також окреслено сучасні напрямки у цій галузі. Особливу увагу тут приділено саме дробовим статистикам [87], зважаючи на те, що бозонні системи належать назагал до відоміших фізичних об'єктів.

У розділі 2 методи квантової теорії поля застосовано для аналізу багатобозонних систем. Зокрема, знайдено енерґетичний спектр елементарних збуджень, отримано вирази для обчислення термодинамічних функцій та розраховано конденсатну фракцію модельної системи. Також досліджено бозе-газ зі слабкою міжчастинковою взаємодією.

Розділ 3 містить аналіз властивостей бозе-системи зі слабкою взаємодією у пастці за допомогою методу наближеного вторинного квантування. Також тут подано докладне виведення термодинамічних функцій невзаємодіючого бозе-газу для простору довільної вимірності (зокрема дробової, якою можна моделювати пористе середовище), отримано результати для термодинаміки слабковзаємодіючої системи з дробовою статистикою Джентіле в осциляторній пастці.

У розділі 4 запропоновано узагальнення дробової статистики Поліхронакоса з використанням комплексного параметра, розраховано термодинамічні функції системи гармонічних осциляторів з такою статистикою та передбачено існування фазових переходів, пов'язаних із комплекснозначністю цього параметра.

У розділі 5 запропоновано низку двопараметричних дробових статистик, за допомогою яких можна наближено моделювати ідеальну еніонну систему. Параметри однієї з таких статистик пов'язані з ефектами взаємодії та скінченною кількістю частинок у бозе-системі зі слабкою взаємодією.

Розділи 6 і 7 присвячено міждисциплінарним застосуванням методів дослідження бозе-систем. Зокрема, у розділі 6 на підставі аналогії між кількістю мікростанів квантової бозе-системи і математичною задачею про так звані розбиття натуральних чисел отримано оцінки кількості деяких типів розбиттів з фізичних міркувань. Також аналогію між розподілом Бозе і частотним розподілом у текстах використано в розділі 7 для вивчення можливості класифікації складних систем.

Завершується робота загальними висновками, у яких стисло підсумовано основні результати та коротко вказано можливості їх застосування і подальшого розвитку відповідних напрямків досліджень.

РОЗДІЛ 1

СТАНОВЛЕННЯ І СУЧАСНИЙ СТАН ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1. Вступ

Основи сучасної статистичної фізики було закладено переважно у другій половині XIX століття у працях Рудольфа Клаузіуса, Джеймса Клерка Максвелла, Людвіґа Больцмана, Джосаї Вілларда Ґіббса та ін. Протягом 1850-х–1860-х рр. Клаузіус сформулював поняття ентропії, увівши сам термін 1865 р. [102]. Розподіл молекул за швидкостями в ідеальному газі отримав Максвелл [103], результати якого узагальнив Больцман [104, 105]. Згодом Больцман запропонував спосіб розрахунку кількості мікростанів [106], фактично пов'язавши з ним ентропію, проте відомий вираз $S = k \log W$ уперше явно з'явився у праці Макса Планка 1901 р. [107]. На парадокс, який пов'язаний із пізнішим квантовомеханічним принципом тотожності частинок, уперше увагу звернув, мабуть, Ґіббс [108], йому ж належать уведення поняття статистикомеханічних ансамблів і виведення формули для розподілу ймовірностей [109], що становить основу класичної статистики Больцмана–Ґіббса.

Історія квантових розподілів бере початок у працях Сат'єндраната Бозе [110] й Альберта Айнштайна [111, 112], що з'явилися у 1924–25 роках. Бозе застосував комбінаторний підхід до квантів світла й за його допомогою вивів розподіл Планка. Цю ідею Айнштайн узагальнив на частинки з ненульовою масою, внаслідок чого передбачив явище

накопичення макроскопічної кількості частинок у стані з нульовим імпульсом — явище, яке називають конденсацією Бозе–Айнштайна.

1925 року Вольфґанґ Паулі з метою пояснення правила заповнення електронних оболонок атомів хімічних елементів увів правило [113], відоме зараз як принцип заборони, названий його іменем. Роком пізніше Енріко Фермі [114] та Поль Дірак [115] отримали функцію розподілу для частинок, які підкоряються принципові заборони Паулі, що відповідає антисиметричним хвильовим функціям.

Ідея Паулі спонукала до введення нового квантового числа, яке назвали спіном [116, 117]. Маркус Фірц [118] сформулював у 1939 р. твердження, відоме як теорема про зв'язок спіну зі статистикою. Систематичніший підхід до цього питання було дано у працях Паулі [119] і Юліана Швінґера [120]. У спрощеному вигляді теорема звучить так: хвильова функція системи тотожних частинок із цілим спіном симетрична щодо їх перестановок, а для частинок із півцілим спіном хвильова функція є антисиметричною щодо перестановок. Частинки із цілим спіном описує статистика Бозе–Айнштайна, відповідно їх називають *бозонами*; для частинок із півцілим спіном справедлива статистика Фермі–Дірака, тому їх називають *ферміонами*.

Згадані два типи частинок вичерпують можливі варіанти як значень спіну, так і статистики квантових частинок. Дихотомія між бозонами і ферміонами, як буде сказано нижче, порушується лише в разі переходу від три- до двовимірного простору. Не позбавленим сенсу є й припущення про те, що в реальних багаточастинкових системах відхилення від цієї дихотомії можливе як ефективний наслідок взаємодії. Такі міркування дають підстави розглядати певні узагальнення квантових статистик Бозе і Фермі.

Спрощено можна виділити два підходи до таких узагальнень: пер-

ший ґрунтується переважно на квантовомеханічному розгляді, тобто аналізі властивостей хвильової функції, комутаційних співвідношень тощо, а другий — пов'язаний з методами статистичної фізики, тобто підрахунком кількості мікростанів, узагальненням поняття ентропії та ін. Треба відзначити, що такий поділ є досить умовним, оскільки між обома підходами існує доволі тісний зв'язок [87].

Першу відому спробу узагальнення статистики зробив Джованні Джентіле (мол.) у 1940 р. [121]. Він запропонував проміжну статистику, у якій максимально дозволене заповнення рівня було обмежене деяким числом d. Також Джентіле та його колеги зробили спробу застосувати цю статистику для пояснення деяких властивостей рідкого гелію [122], див. також [123] і поклики там. Аналіз труднощів, які виникають із квантовомеханічним підходом до статистики Джентіле, можна знайти у праці Борселліно [124].

Цікаво, що Леон Бріллюен у своїй книзі [125, див. особливо розділ VI] наводить загальний вираз для кількості мікростанів у різних квантових статистиках, обмежуючись однак аналізом лише традиційних значень певного параметра, що відповідають статистикам Бозе, Фермі, і Больцмана (з урахуванням тотожності частинок; у термінології Брюллюена — статистика Планка). Значно пізніше довільне значення параметра статистики у такому ж виразі для кількості мікростанів допустив Алєксіос Поліхронакос [126].

Герберт Сидні Ґрін запропонував 1953 р. узагальнення, відоме як парастатистика [48]. Певні модифікації комутаційних співвідношень між операторами породження–знищення дозволяють розглядати ситуації, коли хвильові функції $k > 1$ парабозонів є антисиметричними при перестановці не більше k частинок, і відповідно k парафермiонів залишаються симетричними за таких перестановок [127, Гл. 4]

Ціла низка модифікацій алґебри операторів породження–знищення приводить до різноманітних проміжних статистик, див. [128] і поклики там. Часто використовують так звані q-деформовані комутатори або q-мутатори $[a, a^\dagger]_q = aa^\dagger - qa^\dagger a$, порівн. [129–131]. При цьому для роботи необхідний відповідний математичний апарат, який називають *q-численням* або *квантовим аналізом* [132]. Варто відзначити також вивчення термодинаміки у просторах із деформованими комутаційними співвідношеннями для операторів координати та імпульсу, що приводять до існування мінімальної довжини [133].

1977 року Йон Манне Лайнос і Ян Міргайм [30] показали, що у двовимірній системі фаза хвильової функції при перестановці двох частинок може набувати довільних значень, на відміну від тривимірного випадку. Як уже згадувалося у Вступі, Френк Вілчек у 1982 р. [31] запропонував для таких частинок назву *еніони*. У 1975 р. було теоретично передбачено [134], а 1980 експериментально відкрито [135] квантовий ефект Голла — явище квантування за низьких температур у двовимірному електронному газі голлівської провідності $\sigma_{\text{H}} = \nu e^2/h$, де ν — ціле число. Після відкриття у 1982 р. дробового квантового ефекту Голла (ν — раціональний дріб) [136] було запропоновано кілька теорій цього явища, які ґрунтувалися на моделях збуджень із дробовим зарядом [137–140]. Виявилося, що відповідні квазічастинки можуть бути еніонами [138, 140].

Данкан Голдейн у 1991 р. ввів узагальнення принципу заборони Паулі, запропонувавши інтерполяційний між бозонною і ферміонною границями вираз для підрахунку кількості мікростанів [141]. Йон-Ші Ву у 1994 р. отримав функцію розподілу у цій статистиці [142], що отримала назву *дробової виключної статистики* (англ. *fractional exclusion statistics*). Виявилося, що такі ж вирази для термодинамічного потен-

ціалу і рівняння стану відповідають задачі про еніони на найнижчому рівні Ландау [143]. Однак, незважаючи на цей результат і на те, що підхід Голдейна є альтернативною моделлю для опису дробового квантового ефекту Голла, безпосереднього зв'язку між еніонною і дробовою виключною статистикою немає [33, Chap. 5]. Існують також інші способи запису кількості мікростанів систем із дробовою статистикою [126, 144], один із яких буде проаналізовано детальніше.

В окрему галузь можна виділити підходи, пов'язані з узагальненнями означення ентропії, започатковане у працях, присвячених поняттю інформаційної ентропії, зокрема Альфреда Реньї [145] та Золтана Дароці [146]. Константіно Цалліс у 1988 р. запропонував неекстенсивну статистику [147], яка, за задумом, може стосуватися систем із неадитивною ентропією, тобто таких, де суттєво проявляється далекодія, спостерігаються ефекти "пам'яті", суттєво немарківські процеси тощо [148]. Розвиток цих ідей відображено у працях Курадо і Цалліса [149], Цалліса *та ін.* [150], Башкірова [151], Олємского *та ін.* [51, 152].

Зрозуміло, що навіть у досить об'ємному огляді неможливо розглянути всі способи узагальнення квантової статистики. У наступному підрозділі коротко проаналізовано деякі найбільш популярні квантовомеханічні підходи до цього питання. Підрозділ 1.3 присвячено детальному аналізові кількох статистико-механічних варіантів уведення дробової статистики. Окремо в підрозділі 1.4 розглянуто неекстенсивну статистику Цалліса та пов'язані з нею аналоги квантових розподілів. Підрозділ 1.5 присвячено короткому аналізові сучасних напрямків дослідження бозонних систем.

1.2. Квантовомеханічний підхід

1.2.1. Еніони. Існування лише двох можливостей для хвильової функції системи багатьох частинок — симетричної або антисиметричної — пов'язане з властивістю оператора перестановки P. Розгляньмо для простоти хвильову функцію двох (тотожних!) частинок $\psi(1,2)$, яка при заміні їх місцями внаслідок дії оператора P_{12} набуває додаткової фази:

$$P_{12}\psi(1,2) = \psi(2,1) = e^{i\pi\alpha}\psi(1,2). \tag{1.1}$$

Повторна дія оператора P_{12} дає

$$P_{12}^2\psi(1,2) = e^{2i\pi\alpha}\psi(1,2) = \psi(1,2), \tag{1.2}$$

звідки отримуємо $\alpha = 0$ або 1, що відповідає симетричній (бозони) або антисиметричній (ферміони) хвильовій функції. Цей факт пов'язаний із тим, що подвійна перестановка зводиться до тотожної (одиничної) операції, $P_{12}^2 = I$. Виявляється, однак, що така властивість характерна для тривимірного простору, але порушується у двовимірних задачах [33, 153]. Справді, якщо уявити операцію перестановки як переміщення однієї частинки навколо іншої, то замкнений шлях можна неперервно стиснути в точку лише у просторі з розмірністю 3, а на площині цього зробити не можна, зважаючи на тверду серцевину (частинки не можуть просто проникати одна через одну), див. рис. 1.1.

Отже, у двовимірному випадку подвійна перестановка $P_{12}^2 \neq I$ і не існує обмеження на фазу хвильової функції $\pi\alpha$. Звідси, як уже було згадано у Вступі, й походить назва таких частинок — еніони.

Якщо у тривимірному просторі маємо справу із групою перестановок S_N, то відповідником у двовимірному буде так звана *група кіс* (англ. 'braid group') B_N [33, 153]. Деякі її властивості, які виявляю-

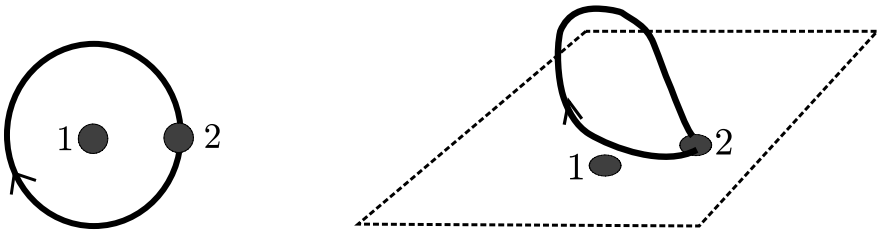


Рис. 1.1. Подвійна перестановка у двовимірному просторі (ліворуч) не зводиться до одиничної операції, як у тривимірному просторі (праворуч). Ілюстрацію класичних траєкторій можна переформулювати на квантовий випадок шляхом переходу до інтеґралів за траєкторіями.

ться багатшими порівняно зі звичайною групою перестановок, можна проілюструвати за допомогою такого графічного зображення. Ґенераторами групи кіс є оператори σ_i. Поставивши у відповідність i-тій частинці *струну*, що з'єднує i-ті точки, розташованій на двох впорядкованих множинах (прямих), зобразимо дію оператора σ_i, як показано на рис. 1.2. Такий оператор відповідає перестановці частинок 1 і 2 (взагалі кажучи, у визначеному напрямку — наприклад, проти годинникової стрілки).

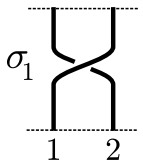


Рис. 1.2. Дія оператора σ_1. Струна, що виходить із точки, що відповідає частинці 1 на нижній прямій, до точки, що відповідає частинці 2 на верхній, пролягає *над* іншою [33, 154].

Як далі показано на рис. 1.3, повторна дія σ_1 не дає початкової конфіґурації — коса "заплітається", тобто топологічно $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^{-1}\sigma_1 = I$.

Ґенератори групи кіс σ_i задовольняють такі властивості (співвідношення Артіна, Artin relations) [33, 154, 155]:

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \tag{1.3}$$

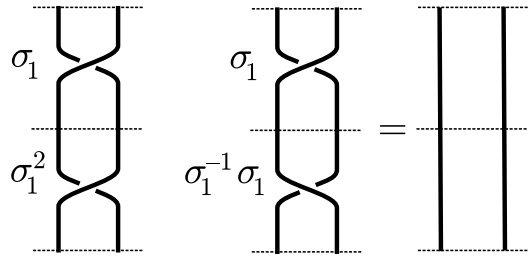


Рис. 1.3. Подвійна перестановка не зводиться до одиничної операції — дія оператора $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^{-1}\sigma_1 = I$.

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \qquad \text{якщо} \quad |i-j| \geq 2. \tag{1.4}$$

Відповідні графічні зображення наведено на рис. 1.4 і 1.5.

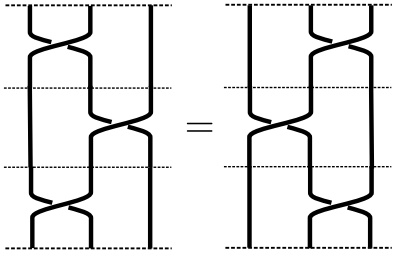


Рис. 1.4. Графічне зображення властивості операторів групи кіс $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ [33, 155].

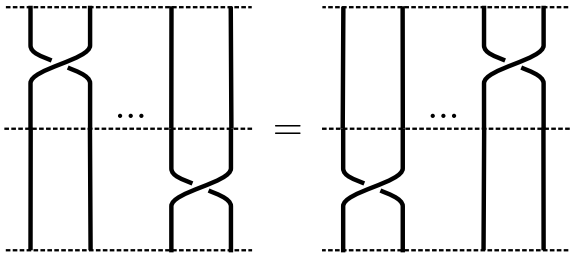


Рис. 1.5. Графічне зображення властивості операторів групи кіс $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i,\ |i-j| \geq 2$.

Можна також навести міркування про те, що спін у двовимірній задачі може набувати довільних значень, а не лише цілих або півцілих (в одиницях $\hbar$). Квантування спіну у тривимірному просторі пов'язане

з некомутативною алґеброю спінових операторів

$$[S_j, S_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl}S_l, \qquad j,k,l = 1,2,3, \tag{1.5}$$

де ε_{jkl} — символ Леві–Чівіти [33, Chap. 2], див. також [156, Розд. VI]. У двовимірному просторі відповідна алґебра стає тривіальною, оскільки зводиться до лише одного оператора (наприклад, S_3, який відповідає обертанню навколо осі z). Очевидно, що один оператор комутує сам із собою, отже, із самих його комутаційних властивостей не випливає квантування його власних значень — для їх знаходження потрібно врахувати граничні умови, які задовольняє хвильова функція. При перестановці двох частинок, що відповідає дії оператора повороту, вона набуває фази $e^{2\pi is}$, де цілі значення $s = 0, \pm 1, \ldots$ визначають симетричну хвильову функцію (бозони), а півцілі $s = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots$ — антисиметричну (ферміони). Оскільки у двовимірному просторі фаза $2\pi s$, яка пов'язана із власними значеннями оператора повороту, може бути довільною, то її можна ототожнити з довільним спіном.

Хвильову функцію N еніонів можна записати у вигляді [157, Chap. 4]:

$$\psi(z_1, \ldots, z_N) = \prod_{i<j}(z_i - z_j)^{\alpha}\phi(z_1, \ldots, z_N), \tag{1.6}$$

де положення k-ої частинки на площині з координатами x_k, y_k зручно описувати комплексною координатою $z_k = x_k + iy_k$, а ϕ — однозначна певним чином симетризована функція. Сама функція ψ вже буде багатозначною, її не вдається записати як добуток одночастинкових хвильових функцій: навіть для ідеального газу еніонів характерна своєрідна далекосяжна взаємодія, пов'язана з топологією траєкторій взаємного руху частинок [31]. Це, зокрема, показує, що розв'язування задачі N ідеальних еніонів не зводиться до відповідної одночастинкової задачі [158, 159]. Також не є простим перехід до вторинного квантування для еніонів: з цією метою застосовують, наприклад, формалізм

так званих визначників Слетера [160] або вершинні оператори моделі Калоджеро [161].

Першу фізичну модель, яка відповідає еніонам, запропонував Вілчек у вигляді композитів магнітного потоку і зарядженої частинки [162]. Про спостереження інтерференційної картини, яка відповідала лафлінівським квазічастинкам (елементарним збудженням із дробовим зарядом, характерним для дробового квантового ефекту Голла, які вважають одними з кандидатів на еніони), повідомили у 2005 р. Каміно *та ін.* [163]. Також експериментальні реалізації еніонів у системі, що складається із надпровідної плівки, вирощеної на напівпровідниковому гетеропереході, запропонували Вікс *та ін.* [164], а в одновимірних оптичних ґратках — Кайльман *та ін.* [165].

1.2.2. q-деформації. Як було зазначено у Вступі, комутаційні співвідношення між операторами породження–знищення $a^\dagger, a$ можна інтерполювати між ферміонами (антикомутатор) і бозонами (звичайний комутатор), увівши q-деформовані комутатори або q-мутатори. Найпростішим узагальненням буде так звана куонна (англ. ‘quon’) алґебра [166–168]:

$$[a_j, a_k^\dagger]_q = a_j a_k^\dagger - q a_k^\dagger a_j = \delta_{jk}, \tag{1.7}$$

де $-1 \leq q \leq 1$ забезпечує неперервну інтерполяцію між $q = -1$, що відповідає ферміонам, і $q = 1$ — бозонами.

Якщо ввести оператор “кількості частинок” N, доповнюючи q-мутатор відповідними співвідношеннями, то можна отримати таку алґебру q-бозонних операторів [129, 169]:

$$aa^\dagger - qa^\dagger a = 1, \qquad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0, \tag{1.8}$$

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger, \qquad [N, a] = -a. \tag{1.9}$$

Ортонормовану систему власних станів оператора N записують так:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]_q!}}(a^\dagger)^n|0\rangle, \qquad a|0\rangle = 0, \tag{1.10}$$

де q-факторіал

$$\begin{aligned} [n]_q! &= [n]_q[n-1]_q \dots [1]_q \\ &= (q^{n-1} + \dots q + 1)(q^{n-2} + \dots q + 1) \dots (q^2 + q + 1)(q + 1)1; \\ [0]_q! &= 1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

означено через так звані q-числа, які переходять у звичайні числа в бозонній границі $q = 1$:

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad [n]_1 = n. \tag{1.12}$$

Діють ці операторів на власні стани так:

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{[n+1]_q}\,|n+1\rangle, \tag{1.13}$$

$$a|n\rangle = \sqrt{[n]_q}\,|n-1\rangle, \tag{1.14}$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \tag{1.15}$$

причому

$$a^\dagger a = [N]_q, \qquad aa^\dagger = [N+1]_q, \tag{1.16}$$

а для оператора N формально запишемо:

$$N = \frac{1}{\ln q} \ln\left(1 + (q-1)a^\dagger a\right). \tag{1.17}$$

Можна також показати, що у великому канонічному ансамблі для чисел заповнення i-того рівня з енергією ε_i матимемо [169]:

$$n_i = \frac{1}{\ln q} \ln\left(\frac{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i} - 1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i} - q}\right), \tag{1.18}$$

де, як звичайно, $z = e^{\beta\mu}$ — активність, μ — хімічний потенціал, а $\beta = 1/T$ — обернена температура. Варто звернути увагу, що тут і далі стала Больцмана дорівнює одиниці, $k_\mathrm{B} = 1$.

Подібно до описаного вище, декілька різних алґебр для q-ферміонних операторів розглянули Алґін [170, 171], Алґін і Сенай [172].

Р.-Монтейро *та ін.* [173] розглянули таку q-бозонну алґебру:

$$\begin{aligned} &aa^\dagger - qa^\dagger a = q^{-N}, \\ &[N, a^\dagger] = a^\dagger, \qquad [N, a] = -a, \end{aligned} \tag{1.19}$$

і для гамільтоніана

$$H = \hbar\omega A^\dagger A, \qquad A^\dagger = a^\dagger q^{N/2},\ A = q^{N/2}a, \tag{1.20}$$

у границі $q \to \infty$ отримали ферміоноподібний вираз для чисел заповнення:

$$\langle N \rangle \simeq \frac{1 + 2e^{-\hbar\omega\beta q^2}}{1 + e^{\hbar\omega\beta} + e^{-\hbar\omega\beta q^2}}. \tag{1.21}$$

Чан і Чень [174] у межах алґебри (1.19) для q-деформованих бозе-осциляторів із гамільтоніаном

$$H = \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2}\left(a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k\right) \tag{1.22}$$

за допомогою функцій Ґріна отримали такий формальний результат для функції розподілу:

$$n(\varepsilon) = \left\{\exp\frac{\hbar\omega\beta(q^{N+1} + q^{-(N+1)})}{2} - 1\right\}^{-1}. \tag{1.23}$$

Розглядають також так звані (p, q)-деформації [175, 176], наприклад,

$$\begin{aligned} &aa^\dagger - qa^\dagger a = p^{-N}, \qquad aa^\dagger - p^{-1}a^\dagger a = q^N, \\ &[N, a^\dagger] = a^\dagger, \qquad [N, a] = -a, \end{aligned} \tag{1.24}$$

причому звичайний комутатор між операторами $a, a^\dagger$ зводиться до

$$[a, a^\dagger] = [N+1]_{p,q} - [N]_{p,q}, \qquad \text{де} \quad [x]_{p,q} = \frac{p^{-x} - q^x}{p^{-1} - q}. \tag{1.25}$$

Можливі також і багатопараметричні узагальнення подібного типу [176].

На завершення цього пункту відзначимо ще дві алґебри, у яких автори розглядали комплексний параметр q на одиничному колі $|q| = 1$. У праці Дутта *та ін.* [177] брали співвідношення між операторами породження–знищення q-ферміонів у вигляді:

$$f_q f_q^\dagger + q^{\frac{1}{2}} f_q^\dagger f_q = q^{-\frac{1}{2}N_f}, \tag{1.26}$$

$$[N_f, f_q] = -f_q, \qquad [N_f, f_q^\dagger] = f_q^\dagger. \tag{1.27}$$

В іншій праці Ян *та ін.* [178] запропонували такий варіант:

$$a_q a_q^\dagger - q a_q^\dagger a_q = 1, \qquad a_{q^*} a_{q^*}^\dagger - q^* a_{q^*}^\dagger a_{q^*} = 1. \qquad a_q = (a_{q^*}^\dagger)^\dagger, \tag{1.28}$$

де $q = e^{2\pi i/(s+1)}$ — $(s+1)$-ий корінь із одиниці, а зірочка позначає комплексне спряження.

Подібно до операторів f_q із [177], можна показати, що ці оператори володіють такою властивістю нільпотентності:

$$(a_q)^n = (a_{q^*})^n = \left(a_q^\dagger\right)^n = (a_{q^*}^\dagger)^n = 0, \quad \text{якщо } n \geq s+1. \tag{1.29}$$

Отже, така алґебра відповідає обмеженню на заповнення одного квантового стану не більше за s, тобто статистиці Джентіле [121], про яку йтиметься у наступному розділі.

1.3. Статистико-механічні узагальнення

У межах статистичної фізики дробові (проміжні) статистики можна отримати, ґрунтуючись на виразах для кількості мікростанів W_i, що забезпечуватимуть інтерполяцію між бозонами (B) і ферміонами (F):

$$W_i^{\mathrm{B}} = \frac{(G_i + N_i - 1)!}{N_i!\,(G_i - 1)!}, \qquad W_i^{\mathrm{F}} = \frac{G_i!}{N_i!\,(G_i - N_i)!}, \tag{1.30}$$

де G_i — ступінь виродження i-того рівня, а N_i — кількість частинок на цьому рівні.

Для знаходження чисел заповнення $n_i = N_i/G_i$ (функції розподілу), що відповідають певній статистиці, можна скористатися таким методом. Ентропія системи S пов'язана з кількістю мікростанів W відомим співвідношенням:

$$S = \ln W, \qquad \text{де} \qquad W = \prod_i W_i(N_i). \tag{1.31}$$

Вираз для n_i отримуємо внаслідок знаходження екстремуму цього функціонала за додаткових умов, що фіксують кількість частинок у системі

$$N = \sum_i N_i, \tag{1.32}$$

та повну енергію

$$E = \sum_i \varepsilon_i N_i, \tag{1.33}$$

де ε_i — енергія i-того рівня.

Таким чином, потрібно розв'язати задачу на умовний екстремум:

$$\delta S + \alpha \delta N - \beta \delta E = 0, \tag{1.34}$$

де варіацію беремо за N_i, а множники Лаґранжа пов'язані з температурою T і хімічним потенціалом μ: $\alpha = \mu/T$, $\beta = 1/T$, в чому легко переконатися на підставі стандартних термодинамічних співвідношень.

1.3.1. Статистика Джентіле. Можна постулювати певний проміжний розподіл, у якому максимальна заселеність рівня буде обмежена якимось числом d. Відповідна статистика має назву статистики Джентіле [121]. Зрозуміло, що при $d = 1$ матимемо граничний випадок розподілу Фермі, а $d = \infty$ відповідає розподілові Бозе.

Вираз для чисел заповнення у статистиці Джентіле можна отримати, виходячи з виразу для кількості способів розподілу частинок за всіма можливими енергґетичними рівнями:

$$W = \prod_i \frac{G_i!}{n_i(0)!n_i(1)!\ldots n_i(d)!},$$

де

$$G_i = \sum_{j=0}^{d} n_i(j) \tag{1.35}$$

— ваговий множник i-того стану, кількість частинок на i-тому рівні буде

$$N_i = \sum_{j=0}^{d} j n_i(j). \tag{1.36}$$

Внаслідок цього отримуємо варіаційну задачу (1.34), де кількість частинок та енергґію задано виразами (1.32) і (1.33), див., наприклад, [127, Гл. 3, 4]. З її розв'язків будемо мати числа заповнення:

$$n_i^{\mathrm{G}} = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} - 1} - \frac{d+1}{z^{-(d+1)}e^{(d+1)\varepsilon_i/T} - 1}, \tag{1.37}$$

де $z = e^{\mu/T}$ — активність. Нескладно переконатися, що справді $d = 1$ дає розподіл Фермі, а $d = \infty$ — розподіл Бозе.

Цікавою рисою статистики Джентіле є те, що високотемпературна поведінка системи в ній наближається до результатів статистики Бозе, тоді як в низькотемпературній границі спостерігають прояви, характерні для статистики Фермі. Зокрема, із самого означення статистики випливає існування аналога рівня Фермі ε_{G}: при $T = 0$ функція n_i^{G} має сходинкоподібну форму, тобто всі частинки перебувають у станах з енергґією, меншою за ε_{G}.

Рівняння стану ідеального D-вимірного газу N частинок з дисперсією $\varepsilon_p = ap^s$, які підкоряються статистиці Джентіле, можна записати

так [33, p. 160–161]:

$$\frac{pV}{NT} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{N}{A_{D,s} V T^{D/s}} \right)^{j-1} b_j^{\mathrm{G}}, \tag{1.38}$$

де стала

$$A_{D,s} = \frac{2a^{-D/s}}{(4\pi\hbar^2)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/s)}{s\Gamma(D/2)}, \tag{1.39}$$

а віріальні коефіцієнти b_j^{G} визначаються відповідними віріальними коефіцієнтами такої ж системи зі статистикою Бозе b_j^{B}:

$$\begin{aligned} b_j^{\mathrm{G}} &= b_j^{\mathrm{B}}, \quad \text{якщо} \quad j \leq d, \\ b_{d+1}^{\mathrm{G}} &= b_{d+1}^{\mathrm{B}} + \frac{d}{(d+1)^{D/s}}, \end{aligned} \tag{1.40}$$

див. також [177].

У високотемпературній границі теплоємність такої системи C_V також пов'язана з теплоємністю відповідного бозе-газу C_V^{B} [33, 177]:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{C_V^{\mathrm{B}}}{N} - \frac{1}{(d+1)^{D/s}} \frac{Dd}{s} \left(\frac{Dd}{s} - 1 \right) \left(\frac{N}{A_{D,s} V T^{D/s}} \right)^{d} + \dots . \tag{1.41}$$

Хоча фізична реалізація статистики Джентіле в реальних системах є досить сумнівною, ця модель становить не лише академічний інтерес [179]. Зважаючи на відносну простоту виразу для чисел заповнення і прозорість інтерпретації параметра d, статистику Джентіле зручно використовувати як певне узагальнення з подальшим переходом до бозонної й ферміонної границь [180, 181]. Цю статистику було застосовано до розв'язування задачі про обмежені розбиття в теорії чисел [182]. Можна також показати, що відповідний підбір параметра статистики d дозволяє моделювати скінченну бозе-систему [83].

Як показали Дай і Сє [183], для отримання розподілу Бозе–Айнштайна граничний перехід за параметром статистики Джентіле $d \to \infty$ потрібно виконувати перед термодинамічним граничним переходом за кількістю частинок $N \to \infty$. Особливості термодинаміки,

зокрема температурну поведінку теплоємності та хімічного потенціалу, системи слабковзаємодіючих одновимірних осциляторів з цією статистикою було проаналізовано у праці [74]. Шень *та ін.* [184] досліджували зв'язок між статистикою Джентіле й еніонною статистикою та визначили, за яких умов між ними можна встановити певну (неповну) еквівалентність. Також межі застосовності статистики Джентіле до задач, пов'язаних зі статистикою Голдейна–Ву, обговорювали Ван *та ін.* [185], зазначаючи математичну простоту виразу для функції розподілу в першій.

1.3.2. Статистика Голдейна–Ву. Голдейн [141] запропонував поняття параметра *статистичної взаємодії*

$$g = -\frac{d_{N+\Delta N} - d_N}{\Delta N}, \tag{1.42}$$

де d_N — розмірність простору одночастинкових станів системи N частинок за умови, що координати решти $N-1$ частинок фіксовані. Зрозуміло, що $g = 1$ для ферміонів (додавання однієї частинки забирає один стан, відповідно до принципу Паулі) і $g = 0$ для бозонів (через відсутність обмеження на заповнення станів). На параметр g накладено лише очевидне обмеження $g > 0$, натомість статистики з $g > 1$, що виходять за межі інтерполяційного інтервалу $g \in [0; 1]$, цілком можна розглядати. Фактично, пропозиція Голдейна полягає в постулюванні деякого узагальненого принципу Паулі, який може стосуватися не одного, а декількох станів.

Для кількості мікростанів станів W_i, у яких можуть перебувати N_i ідентичних частинок, що займають G_i станів, можна використати таку комбінаторну інтерполяційну формулу [142]:

$$W_i = \frac{[G_i + (N_i - 1)(1 - g)]!}{N_i! \, [G_i - gN_i - (1 - g)]!} \tag{1.43}$$

яка у границях $g = 0$ і $g = 1$ переходить у стандартні вирази для бозонів W_i^{B} і ферміонів W_i^{F} відповідно (1.30).

Середні числа заповнення $n_i = N_i/G_i$ виражаються так:

$$n_i^{\mathrm{HW}} = \frac{1}{w\left(e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}\right) + g}, \tag{1.44}$$

де функція $w(x)$ задовольняє трансцендентне рівняння

$$w^g(x)\left[1 + w(x)\right]^{1-g} = x \equiv e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}. \tag{1.45}$$

Легко переконатися, що при $g = 0$ отримаємо $w(x) = x - 1$ — тобто розподіл Бозе, а при $g = 1$ будемо мати $w(x) = x$, тобто розподіл Фермі. Зазначмо, що такий вираз для чисел заповнення у проміжній статистиці було отримано й раніше, зокрема, його можна знайти у праці Капура [186].

У границі $x \to \infty$ розв'язком рівняння (1.45) буде $w(x) \simeq x$, що дає

$$n_i = e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T} \tag{1.46}$$

— розподіл Больцмана, який, як бачимо, не залежить від параметра статистики g, чого й треба було очікувати.

З того, що x у рівнянні (1.45) завжди додатне, випливає, що також $w > 0$, отже

$$n_i^{\mathrm{HW}} \leq 1/g. \tag{1.47}$$

Як нескладно переконатися, при $T = 0$ поведінка чисел заповнення буде нагадувати статистику Фермі:

$$n_i^{\mathrm{HW}} = \begin{cases} 1/g, & \text{якщо } \varepsilon_i < \mu_0, \\ 0, & \text{якщо } \varepsilon_i > \mu_0, \end{cases} \tag{1.48}$$

де μ_0 — аналог енергії Фермі.

Рівняння (1.45) можна розв'язати аналітично для деяких значень g, що відрізняються від ферміонної і бозонної границь, а саме: $g = \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4$. Найпростіший результат отримаємо для так званих *семіонів* (англ. *semion*) із $g = 1/2$:

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{1/4 + e^{2(\varepsilon_i - \mu)/T}}}. \tag{1.49}$$

Загалом, для частинок, що підкоряються статистиці Голдейна–Ву, використовують назви *ексклюзон* (англ. *exclusion*) або g-он.

Як згадувалося у Вступі, дробова статистика може виникати ефективно у системах із взаємодією. Виявляється, що взаємодіючі ферміони в моделі Калоджеро–Сазерленда [187–190] з гамільтоніаном ($\hbar = m = 1$)

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\omega^2 x_i^2 \right) + \sum_{1 \le i < j \le N} \frac{\lambda}{(x_i - x_j)^2}, \qquad \lambda = \frac{g(g-1)}{2},$$

відповідають ідеальному газові ексклюзонів (1.44) [191]. Також цією статистикою можна описувати двовимірний електронний газ із короткосяжними взаємодіями [192], хоча тут ідентифікація параметра статистики через значення рівня Фермі допускає й інші варіанти (статистика Джентіле, Поліхронакоса). Цікаво, що тричастинкова модель Калоджеро з $-1/4 < \lambda < 0$ дозволяє емулювати еніонну статистику [193].

Розрахунок термодинамічних функцій системи частинок зі статистикою Голдейна–Ву можна провести стандартним способом. Нижче наведено результат для рівняння стану двовимірного ідеального газу N частинок з дисперсією $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m$ у границі $e^{\mu/T} \ll 1$, коли функція $w(x) = x + g - 1$ [142]:

$$\frac{p}{T} = \rho_2 \left(1 + \frac{2g-1}{4}\rho_2 \lambda^2 \right), \tag{1.50}$$

де p — тиск, T — температура $\rho_2 = N/V_2$ — двовимірна густина. Цей вираз, який фактично є віріальним розкладом, буде використано в розділі 5.3 для встановлення зв'язку між різними типами статистик. Як легко зауважити, "статистична взаємодія" є відштовхувальною при $g > 1/2$ і притягальною при $g < 1/2$ [142].

Нескладно отримати високотемпературний розклад теплоємності D-вимірного ідеального газу ексклюзонів із дисперсією $\varepsilon_p = ap^s$ [33, p. 154]:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{D}{s}\left[1 + \frac{g - 1/2}{2^{D/s}} \frac{\rho_D}{A_{D,s} T^{D/s}} \left(1 - \frac{D}{s}\right) + \ldots\right], \tag{1.51}$$

де ρ_D — D-вимірна густина, $A_{D,s}$ — константа (1.39).

Термодинаміку ідеального газу зі статистикою Голдейна–Ву вивчали різні групи, зокрема Ісаков *та ін.* [194], Джойс *та ін.* [195]. Аояма [196], розглядаючи модель сильного зв'язку на ґратці (tight-binding model), показав, що теплоємність відповідного двовимірного газу характеризується певними особливостями, на відміну від звичайної системи, в якій не проявляється залежність від параметра статистики. Цінь і Чень [197] аналізували швидкість звуку і стисливість газу ексклюзонів у гармонічній пастці. Анґель *та ін.* [38] застосували дробову виключну статистику для розрахунку термодинамічних характеристик релятивістської ядерної матерії.

Статистика Голдейна–Ву також виявилася корисною у математичних задачах: зокрема, з її допомогою було отримано деякі співвідношення для так званого дилогарифма Роджерса [198].

1.3.3. Статистика Поліхронакоса. У 1996 році Поліхронакос [126] запропонував таку реалізацію дробової статистики: нехай перша частинка в системі може зайняти один із G станів, друга вже має на

вибір $(G-\gamma)$ станів, третя — $(G-2\gamma)$ станів і т. д. Повну кількість мікростанів, що комбінаторно відповідає кількості способів розміщення N_i частинок по G_i станах, можна записати так:

$$W = \prod_i \frac{G_i(G_i-\gamma)(G_i-2\gamma)\dots(G_i-(N_i-1)\gamma)}{N_i!}. \tag{1.52}$$

Переписавши кількість мікростанів у вигляді [126]

$$W_i = \gamma^N \frac{(G_i/\gamma)!}{N!(G_i/\gamma - N_i)!}, \tag{1.53}$$

де під факторіалом нецілого числа мають на увазі узагальнення через гамма-функцію $x! = \Gamma(x+1)$, можна стандартним способом показати, що середні числа заповнення $n_i = N_i/G_i$ у цій статистиці виражаються простим співвідношенням:

$$n_i^{\mathrm{P}} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}+\gamma}. \tag{1.54}$$

Зокрема, Ачар'я і Нараяна Свамі [199] розглядали цей вираз як простий варіант статистикомеханічного опису еніонів з коректною граничною поведінкою в бозонній і ферміонній границях. Легко бачити, що граничні значення $\gamma = \pm 1$ виразу для кількості мікростанів (1.52) відповідають розподілам Фермі та Бозе (1.30).

Зважаючи на математичну подібність виразу (1.54) до функцій розподілу у статистиках Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака, нескладно отримати рівняння стану та результати для віріальних коефіцієнтів ідеального D-вимірного газу з дисперсією $\varepsilon_p = ap^s$ у статистиці Поліхронакоса [33, p. 163]:

$$\begin{aligned} b_j^{\mathrm{P}}(\gamma) &= |\gamma|^{j-1} b_j^{\mathrm{B}}, \qquad \text{якщо} \quad \gamma < 0, \\ b_j^{\mathrm{P}}(\gamma) &= \gamma^{j-1} b_j^{\mathrm{F}}, \qquad \text{якщо} \quad \gamma > 0, \end{aligned} \tag{1.55}$$

де $b_j^{\mathrm{B,F}}$ — j-ий віріальний коефіцієнт бозе- або фермі-системи відповідно, див. також [199].

Як і у статистиці Джентіле, функція розподілу (1.54) може виникати в контексті q-деформованих алґебр [200]. Статистику Поліхронакоса також неодноразово аналізували одночасно з деякими іншими видами дробових статистик, насамперед це стосується узагальнень Джентіле й Голдейна–Ву [33, 201, 202].

Мірза і Могаммадзаде [202] вивчали так звану термодинамічну геометрію [203] кількох типів дробової статистики. Зокрема, було виявлено явище, подібне до бозе-конденсації в ідеальному газі зі статистикою Поліхронакоса. Заре *та ін.* [204] розглядали бозе-газ на розтягнутому горизонті чорних дір Шварцшільда і Керра, використовуючи статистику Поліхронакоса для моделювання взаємодії у газі ґравітонів.

Плавний перехід у рівнянні (1.54) між фермі- і бозе-статистикою, минаючи так звану квантову статистику Больцмана ($\alpha = 0$), можна забезпечити вибором параметра γ у вигляді комплексного числа $\gamma = e^{i\pi\nu}$, $\nu = 0 \div 1$. Виявляється, що зокрема у бозонній границі така система буде відповідати бозе-газові з енерґетичним спектром ϵ_p, який містить малу розсіювальну (уявну) частину $\epsilon_p = \varepsilon_p + i\varkappa_p$, яка пов'язана з параметром статистики ν: $\varkappa_p \simeq \pi\nu T$ [86]. Особливості одновимірної системи осциляторів із такою статистикою проаналізовано в [88].

1.4. Неекстенсивна статистика

Традиційно ентропію вводять як логарифм кількості мікростанів:

$$S = \ln W, \tag{1.56}$$

причому звідси майже автоматично випливає адитивність ентропії:

$$S(A + B) = S(A) + S(B), \tag{1.57}$$

де A і B позначають підсистеми, а логарифм добутку їх імовірностей (що відповідає системі $A + B$) зводиться до суми логарифмів.

Цю ентропію, відому як ентропія Больцмана–Ґіббса, можна переписати через імовірності p_j реалізації j-го стану відомим способом:

$$S = -\sum_j p_j \ln p_j. \tag{1.58}$$

Виявляється, що адитивність ентропії, яка є майже інтуїтивною, може порушуватися для різноманітних систем, що мають певні особливості. Зокрема, до таких особливих належать фрактальні структури та системи, в яких присутня далекодіюча взаємодія (у більшості "традиційних" об'єктів у взаємодіях беруть безпосередню участь лише близькі сусіди). Іншим прикладом можуть бути суттєво немарківські процеси (системи з "пам'яттю"). Окрім суто фізичних явищ, викладений нижче підхід [148, Chap. 1] може бути застосований і в суспільних дисциплінах (моделі фінансових ринків, лінгвістичні закони тощо).

Так звана неекстенсивна статистика, описана в цьому розділі, стоїть дещо осібно порівняно з наведеними в попередніх. Взагалі кажучи, існує щонайменше зо два десятки способів узагальнити означення ентропії Больцмана–Ґіббса (1.58). Один із них, який запропонував Цалліс [147], розглянемо нижче.

Можна ввести узагальнену ентропію співвідношенням

$$S_q = \frac{1}{q-1}\left(1 - \sum_{n=1}^{W} p_n^q\right), \qquad \sum_{n=1}^{W} p_n = 1, \quad q \in \mathbb{R}. \tag{1.59}$$

Нескладно переконатися, що в границі $q \to 1$ отримаємо звичну ентропію Больцмана–Ґіббса (1.58). Справді,

$$p_n^{q-1} = e^{(q-1)\ln p_n} \simeq 1 + (q-1)\ln p_n$$

й ентропія набуває вигляду

$$S_q = \frac{1}{q-1}\left(1 - \sum_{n=1}^{W} p_n^q\right) = \ldots = -\sum_{n=1}^{W} p_n \ln p_n,$$

що збігається з очікуваним виразом (1.58).

Замість умови адитивності (екстенсивності), заданої формулою (1.57), ентропія (1.59) задовольняє співвідношення

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B), \tag{1.60}$$

тобто є неекстенсивною величиною. При цьому індекс q є фактично мірою неекстенсивності.

Як і звичайна ентропія, S_q досягає максимуму за умови рівних імовірностей $p_n = 1/W \ \forall n$ (т. зв. принцип Лапласа):

$$S_q = \frac{W^{1-q} - 1}{1-q}. \tag{1.61}$$

У границі $q \to 1$ звідси отримаємо відоме співвідношення Больцмана $S = \ln W$.

Вводячи q-логарифм

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \qquad \ln_1 x = \ln x, \tag{1.62}$$

можна записати ентропію Цалліса у больцманоподібній формі

$$S_q = \ln_q W. \tag{1.63}$$

Легко показати, що оберненою до q-логарифма буде така q-експонента:

$$\exp_q(x) = [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}, \tag{1.64}$$

яка у границі $q \to 1$ переходить у звичайну експоненту.

Варто звернути увагу, що q-експонента Цалліса відрізняється від q-експонент, що виникають в деяких інших задачах, зокрема пов'язаних

із q-деформованими комутаторами:

$$\exp_q x \equiv e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]_q!}, \qquad \mathrm{Exp}_q x \equiv E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]_q!}, \quad (1.65)$$

де q-факторіал задано формулою (1.11). Зрозуміло, що

$$e_1^x = E_1^x = e^x \quad (1.66)$$

Для знаходження ймовірностей p_n скористаємося стандартним методом множників Лаґранжа. Екстремум ентропії S_q визначимо з умови

$$\delta \left\{ \frac{1}{q-1} \sum_{n=1}^{W} (p_n - p_n^q) - \alpha \sum_{n=1}^{W} p_n - \beta \sum_{n=1}^{W} \varepsilon_n p_n \right\} = 0,$$

де одиницю в означенні S_q розписано як $1 = \sum_{n=1}^{W} p_n$. Отримаємо остаточно

$$p_n = \left\{ \frac{1 - (q-1)(\alpha + \beta\varepsilon_n)}{q} \right\}^{\frac{1}{q-1}}. \quad (1.67)$$

За допомогою узагальненої статистичної суми

$$Z_q = \left\{ \frac{1 - (q-1)\alpha}{q} \right\}^{-\frac{1}{q-1}}, \quad (1.68)$$

з якою вільна енергія пов'язана співвідношенням

$$F = -\frac{q}{\beta} \ln_q Z_q = -(1+\alpha)\frac{1}{\beta}, \quad (1.69)$$

визначимо температуру як

$$T = \frac{1 - (q-1)\alpha}{\beta} = \frac{1}{Z_q^{q-1}} \frac{1}{\beta}. \quad (1.70)$$

Тепер імовірність p_n набуває звичного "ґіббсівського" вигляду:

$$p_n = \frac{1}{Z_q} \exp_q \left(-\frac{\varepsilon_n}{T} \right). \quad (1.71)$$

Додатковий коефіцієнт у зв'язок (1.70) між T і β насправді ускладнює опис систем за допомогою ентропії Цалліса. З метою уникнення

відповідних проблем було запропоновано низку модифікацій описаного підходу, відомих як статистики (Цалліса–)Мендеса–Пластіно [150], Курадо(–Цалліса) [149], Башкірова [151] та ін.

Існують також q-узагальнення розподілів Фермі–Дірака й Бозе–Айнштайна [205–207]:

$$n_i = \frac{1}{\{1+(q-1)\beta(\varepsilon_i-\mu)\}^{\frac{1}{q-1}} \pm 1} = \frac{1}{\exp_q[\beta(\varepsilon_i-\mu)] \pm 1}. \quad (1.72)$$

Модифікацію виразу для ентропії застосував Ван зі співавторами [207–209] для побудови статистико-механічних узагальнень на підставі так званої неповної інформаційної теорії. Наприклад, неповна умова нормування

$$\sum_{i=1}^{W} p_i^q = 1 \quad (1.73)$$

і відповідно утворена узагальнена ентропія

$$S_q = -\sum_{i=1}^{W} p_i^q \ln p_i \quad (1.74)$$

дають змогу отримати вираз для чисел заповнення бозе- або ферміподібних збуджень у так званій екстенсивній неповній статистиці (extensive incomplete statistics) [208]:

$$n_i = \frac{1}{e^{q(\varepsilon_i-\mu)/T} \pm 1}. \quad (1.75)$$

Неекстенсивні аналоги [207, 209] можна утворити подібно до розподілів Фермі та Бозе у статистиці Цалліса (1.72):

$$n_i = \frac{1}{\{1+(q-1)\beta(\varepsilon_i-\mu)\}^{\frac{q}{q-1}} \pm 1} = \frac{1}{\exp_q[q\beta(\varepsilon_i-\mu)] \pm 1} \quad (1.76)$$

Загалом, неекстенсивна статистика допускає й багато інших узагальнень квантових розподілів, а їх детальний аналіз потребує окремого розширеного огляду, що виходить далеко за межі тематики цієї праці.

1.5. Системи бозонів

У розглянутих далі в цій праці підходах особливе місце займає статистика Бозе–Айнштайна: саме на її основі, зокрема, побудовано узагальнення дробової статистики Поліхронакоса в розділах 4 і 5. На аналогіях з розподілом Бозе ґрунтуються підходи до розв'язування задач теорії чисел у розділі 6 та лінґвістики у розділі 7. Інтерес до багатобозонних систем пов'язаний насамперед із тим, що в них на макроскопічному рівні проявляється квантовомеханічний принцип тотожності частинок — явище конденсації Бозе–Айнштайна.

Зважаючи на велике розмаїття напрямків дослідження бозонних систем, тут коротко розглянемо лише ті теми, які мають безпосередній стосунок до роботи, а також деякі основні найцікавіші сучасні експерименти з бозе-конденсатами.

Однією з класичних задач фізики низьких температур і зокрема теорії бозе-систем є розрахунок спектра елементарних збуджень, який став важливим складником у формулюванні теорії надплинності рідкого гелію-4. Феноменологічно спостульований Ландау [210, 211], цей спектр також було розраховано з мікроскопічних міркувань у працях Бейля [212], Боголюбова [10], Файнмана і Коена [213, 214]. Протягом наступних десятиліть з'явилися численні праці на цю тему, порівн. [215–224]. Зазвичай у таких теоріях використовують параметри для підгонки, наприклад, у статті [219] доброго узгодження з експериментом досягнуто для обмеженої області навколо ротонного мінімуму, а в [220] спектр було добре підігнано за допомогою двох параметрів.

Вивчення багатобозонних систем отримало новий поштовх після експериментального відкриття у 1995 році конденсації Бозе–Айнштайна в ультрахолодних розріджених газах лужних металів ^{87}Rb і ^{23}Na [4, 5],

а згодом і в інших речовинах [7]. Це відкрило шлях пошуку теоретичних методів, за допомогою яких можна передбачити відповідні явища. Зокрема, майже відразу з'явилися праці, в яких досліджували питання колективних збуджень у таких системах [225–227].

Бозе-конденсацію під впливом зовнішнього гармонічного потенціалу (пастки) обговорювали в [228–230], квазіодновимірним системам присвячено працю [231]. Огляди, що стосуються відповідних квантових багаточастинкових явищ як з експериментального, так і з теоретичного боку, можна знайти в низки авторів [7, 14, 232, 233].

Цікавим об'єктом досліджень можуть бути дво- та багатокомпонентні бозе-суміші, які не лише характеризуються багатством фізичних явищ, але й безпосередньо пов'язані з технологіями, про що докладніше сказано трохи далі. Вперше таку суміш було отримано із двох станів ^{87}Rb, що відрізнялися надтонкою структурою [234], згодом — з різних ізотопів ^{85}Rb і ^{87}Rb [235] та з різних хімічних елементів [236, 237]. Відзначимо також експерименти з ітербієвими сумішами, що можуть складатися як із ферміонів і бозонів, так і з самих бозонних ізотопів [238]. Відповідні теоретичні методи досліджень перебувають на стадії розробки.

Опис збуджень у бозонних системах, що перебувають у пастках, зараз не можна вважати повністю розв'язаною проблемою, коли йдеться про вихід за межі наближення середнього поля чи рівняння Ґросса–Пітаєвського [239, 240]. Наприклад, спектри елементарних збуджень у низькорозмірних бозе-системах за допомогою теорії Ліба–Лініґера [241, 242] вивчали у [243, 244]. Для аналізу бозе-конденсатів ув оптичних ґратках часто застосовують модель Бозе–Габбарда [245–247]. Математичні аспекти наближення Боголюбова [10] для спектра елементарних збуджень бозонів зі слабкою міжчастинковою взаємодією обго-

ворювали у працях [248, 249]. Теоретичний опис збуджень типу Боголюбова в екситонно-поляритонних конденсатах подано в [250].

Повідомлення про експериментальне спостереження збуджень боголюбівського типу в екситонно-поляритонних бозе-конденсатах зробили Уцономія *та ін.* [251]. Такі системи [252, 253] є, поруч із розрідженими газами лужних металів, добрими об'єктами для спостереження конденсації Бозе–Айнштайна [9]. Досить своєрідні експерименти з так званої нерівноважної бозе-конденсації екситонів-поляритонів у полімері за кімнатної температури описано в праці [254].

В окремий напрямок можна виділити дослідження бозе-конденсатів, що обертаються [255]. Відповідні експерименти зокрема забезпечують вивчення так званої квантової турбулентності, яка полягає в появі квантових вихорів [256–258]. Незважаючи на квантову природу, це явище вдається описувати за допомогою досить простих математичних моделей, а отже його можна розглядати як своєрідну лабораторію для аналізу класичної турбулентності [258, 259] — важливого складника гідро- та аеродинаміки.

Бозе-системи зі скінченною кількістю частинок N стали предметом низки теоретичних праць [260–262], у яких було знайдено відповідні поправки до термодинамічних функцій, спричинені скінченністю N. Ще одним важливим об'єктом досліджень є бозонні системи в пористому середовищі, зокрема, властивості гелію-4 в пористих стеклах [263], аероґелі [264, 265], нанопористому склі Gelsil [266, 267] або вайкорі (Vycor) [268, 269]. Один із можливих підходів до аналізу бозонів полягає в моделюванні пористого середовища простором із фрактальною вимірністю [270, 271].

З експериментами над гелієм-4 у вайкорі пов'язана цікава епопея: у 2004 р. Кім і Чан [272] зробили повідомлення про можливі ефекти

надплинності у твердому гелії-4 (відповідний стан називають *supersolid*). Кілька років пошуків підтвердження такої особливої поведінки не принесли успіхів жодній з експериментальних груп, і 2012 року Чан визнав, що спостереження було помилковим [273].

До дещо несподіваних експериментів належить досягнення стану бозе-конденсації фотонів [274]. Зрозуміло, що через відсутність в них маси спокою спостереження цього явища можливе лише за певних умов — наприклад, у мікропорожнинах із дзеркальними стінками, що забезпечують скінченну (ненульову) масу спокою [275].

Конденсати Бозе–Айнштайна застосовують для моделювання різних фізичних систем і явищ. Наприклад, квантові симуляції з використанням ультрахолодних ферміонів і бозонів описано в [54, 276]. Моделі з бозе-конденсатами належать до квантових аналогів ґравітації [277]. Нещодавно в бозе-конденсаті ^{87}Rb за допомогою топологічних дефектів було земульовано отримання ізольованих магнітних монополів [278].

Поступово набувають поширення технології з використанням бозе-конденсатів. Передбачено їх застосування у квантових обчисленнях, метрології, інтерферометрії. Наприклад, у праці [25] запропоновано реалізацію квантових алгоритмів на підставі колективних станів двокомпонентних конденсатів. Гібридні пристрої для опрацювання квантової інформації з використанням ультрахолодних атомів, які перебувають в оптичних мікропорожнинах на магнітній плівці, описано в [279]. У праці [280] показано можливість квантової телепортації когерентного спінового стану за допомогою бозе-конденсатів.

Схеми з використанням ультрахолодних атомів цезію [281] та рубідію [282] застосовано у квантовій метрології [283]. Інтерферометр Маха–Цендера на бозе-конденсаті атомів рубідію-87 в умовах мікро-

ґравітації сконструювала експериментальна група у Бремені [56]. Високої контрастності вдалося досягти іншій групі за допомогою інтерферометра Ремсі, також на рубідієвому конденсаті [57]. Так званий контрастний інтерферометр з використанням бозе-конденсату ізотопів ітербію ^{174}Yb дає перспективи високоточних вимірювань до однієї частини на мільярд [284].

У розділах 6 та 7 розглянуто можливості застосування методів, які ґрунтуюся на використанні статистики Бозе і дробових статистик, до розв'язування деяких проблем із суміжних галузей науки. Насамперед, це теоретико-числові задачі про розбиття натуральних чисел, а також питання класифікації складних систем.

РОЗДІЛ 2

ОДНОРІДНІ БОЗЕ-СИСТЕМИ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ

2.1. Вступ

Гамільтоніан системи N бозе-частинок масою m з координатами $\mathbf{r}_j$ в об'ємі V з урахуванням багаточастинкових взаємодій має вигляд:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\Delta_j + \sum_{1\le j<l\le N}\Phi(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_l) + \sum_{1\le j<l<s\le N}\Phi_3(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_l,\mathbf{r}_s) + \ldots, \quad (2.1)$$

де Δ_j — оператор Лапласа щодо j-ї координати, $\Phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ і $\Phi_3(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3) = \Phi_3(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)$ — парний і тричастинковий потенціали відповідно, а крапки відповідають доданкам з чотиричастинковими й вищими взаємодіями в потенціальній енергії.

У зображенні колективних змінних [285]

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}, \qquad \partial_{-\mathbf{k}} \equiv \frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}}}, \qquad \text{де} \quad \mathbf{k}\neq 0, \quad (2.2)$$

якщо врахувати тричастинкові взаємодії [81], матимемо:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left\{\varepsilon_k\left(\rho_{\mathbf{k}}\partial_{-\mathbf{k}} - \partial_{\mathbf{k}}\partial_{-\mathbf{k}}\right) + \frac{N}{2V}\tilde{\nu}_k\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}}\right\} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{k}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\left\{\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{k}\mathbf{q}\,\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{k}}\partial_{-\mathbf{q}} + \right. \\ &+ \left.\frac{N^2}{6V^2}\nu_3(\mathbf{k}+\mathbf{q},-\mathbf{k},-\mathbf{q})\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{q}}\right\}, \quad (2.3)\end{aligned}$$

де ε_k — енергетичний спектр вільної частинки $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m$, а ν_k та $\nu_3(\mathbf{k}+\mathbf{q}, -\mathbf{k}, -\mathbf{q})$ — фур'є-зображення відповідно дво- і тричастинкового потенціалу, що залежать від хвильових векторів $\mathbf{k}, \mathbf{q}$, при цьому

$$\tilde{\nu}_k = \nu_k + \frac{N}{V}\nu_3(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, 0) - \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\nu_3(\mathbf{k}+\mathbf{q}, -\mathbf{k}, -\mathbf{q}). \tag{2.4}$$

Надалі всі вирази записано у наближенні, наступному після хаотичних фаз (RPA). Це відповідає двом сумам за хвильовим вектором у гамільтоніані і, відповідно, одній сумі у виразах ля операторів, які в нього входять.

Для обчислення енергетичного спектру застосуємо метод факторизації гамільтоніана взаємодіючої багатобозонної системи. Подібні результати було отримано також у праці [286] шляхом уведення поняття ефективної маси і використання техніки двочасових температурних функцій Ґріна. Результати цього розділу опубліковано у статтях [73, 79–81, 93].

2.2. Енергетичний спектр взаємодіючої бозе-системи

2.2.1. Факторизація гамільтоніана. Гамільтоніан бозе-системи можна записати через колективні змінні $(\rho_{\mathbf{k}},\, \partial_{\mathbf{k}})$ або $(\rho_{\mathbf{k}},\, \hat{\pi}_{\mathbf{k}})$ [80], де колективний 'потік'

$$\hat{\pi}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}\left(\frac{\hbar}{m}\right)(\mathbf{k}\hat{\mathbf{p}}_j)$$

пов'язаний з оператором $\partial_{\mathbf{k}}$ таким чином:

$$\varepsilon_k \partial_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\hat{\pi}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}} \frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{k}\mathbf{q}\,\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}.$$

У цих співвідношеннях $\hat{\mathbf{p}}_j$ — імпульс j-ої частинки.

Нижче ми покажемо, що гамільтоніан системи можна переписати за допомогою спряжених операторів $\hat{A}_{\mathbf{q}}$ і $\hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}}$:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{q}\neq\mathbf{0}} \hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}} \hat{A}_{\mathbf{q}} + \Delta\hat{H}, \tag{2.5}$$

де недіагональна частина $\Delta\hat{H}$ необов'язково дорівнює нулеві. Її поява спричинена тим, що вихідний гамільтоніан (2.3) є неермітовим (з одиничною ваговою функцією; цю проблему можна обійти, використовуючи оператори $\rho_{\mathbf{q}}$, $\hat{\pi}_{\mathbf{q}}$ замість $\rho_{\mathbf{q}}$, $\partial_{\mathbf{q}}$, але останні зручніші для аналітичних перетворень). У наближенні, яке ми використовуємо, $\Delta\hat{H} = 0$.

Спробуймо шукати оператор $\hat{A}_{\mathbf{q}}$ у такому вигляді:

$$\hat{A}_{\mathbf{q}} = u_q\, \rho_{\mathbf{q}} + v_q\, \partial_{\mathbf{q}} + \sum_{\substack{\mathbf{q}'\neq 0 \\ \mathbf{q}'+\mathbf{q}\neq 0}} \left[w_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\, \rho_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}'} + y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\, \rho_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}'} \right], \tag{2.6}$$

де коефіцієнти $u_q, v_q, w_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}$ і $y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}$ — дійсні функції. Оператор, спряжений до $\partial_{\mathbf{q}}$, у наближенні, наступному після RPA, запишеться:

$$\partial^{\dagger}_{\mathbf{q}} = \rho_{-\mathbf{q}} - \partial_{-\mathbf{q}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}'\neq 0 \\ \mathbf{q}'+\mathbf{q}\neq 0}} \frac{\hbar^2}{2m}\, \mathbf{q}'\mathbf{q} \frac{1}{\varepsilon_q} \rho_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}'}.$$

Можна показати, що спряжений оператор $\hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}}$ задається виразом

$$\hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}} = \widetilde{u}_q\, \rho_{-\mathbf{q}} + \widetilde{v}_q\, \partial_{-\mathbf{q}} + \sum_{\substack{\mathbf{q}'\neq 0 \\ \mathbf{q}'+\mathbf{q}\neq 0}} \left[\widetilde{w}_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\, \rho_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}'} + \widetilde{y}_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\, \rho_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}'} \right],$$

де

$$\widetilde{u}_q = u_q + v_q, \qquad \widetilde{v}_q = -v_q,$$
$$\widetilde{y}_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} = -y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}, \qquad \widetilde{w}_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} = w_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} + y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{q}'\mathbf{q} \frac{v_q}{\varepsilon_q}.$$

Енергетичний спектр отримаємо з комутатора

$$[\hat{A}_{\mathbf{q}}, \hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}}] = \hat{E}_q.$$

Оператор $\hat{E}_q$ складається з неоператорної частини $E_q^{(0)}$ (яка приводить до звичайного, боголюбівського, спектру) плюс доданки операторної природи.

Порівнюючи вирази (2.5) і (2.3), можна отримати такий результат для коефіцієнтів у (2.6):

$$u_q = \frac{\sqrt{\varepsilon_q}}{2}(\alpha_q - 1), \quad v_q = \sqrt{\varepsilon_q}, \qquad \text{де} \quad \alpha_q = \sqrt{1 + \frac{2N}{V}\frac{\nu_q}{\varepsilon_q}},$$

$$y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} = -\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{q}'\mathbf{q}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_q}},$$

$$w_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\alpha_q\sqrt{\varepsilon_q}}\left[\frac{N^2}{6V^2}\nu_3(\mathbf{q}'+\mathbf{q},-\mathbf{q}',-\mathbf{q}) - \frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{q}'\mathbf{q}\frac{(\alpha_q-1)}{4}\right].$$

У термодинамічній границі $N \to \infty$ комутатор набуває вигляду

$$[\hat{A}_{\mathbf{q}}, \hat{A}^\dagger_{\mathbf{q}'}] = \delta_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\Big\{E_q^{(0)} + \frac{1}{N}\sum_{\substack{\mathbf{k}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}}[W(\mathbf{k},\mathbf{q})\,\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}} + Y(\mathbf{k},\mathbf{q})\,\rho_{\mathbf{k}}\partial_{-\mathbf{k}}]\Big\}, \quad (2.7)$$

де

$$E_q^{(0)} = \varepsilon_q\alpha_q,$$

$$W(\mathbf{q}',\mathbf{q}) = y_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q},\mathbf{q}}\left[w_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q},\mathbf{q}} + \widetilde{w}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q},\mathbf{q}} + w_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} + \widetilde{w}_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\right],$$

$$Y(\mathbf{q}',\mathbf{q}) = -2y_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q},\mathbf{q}}y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}.$$

2.2.2. Обчислення спектра. Оператори колективних змінних під сумою за хвильовим вектором можна подати через оператори $\hat{A}_{\mathbf{q}}, \hat{A}^\dagger_{\mathbf{q}}$, записані в наближенні хаотичних фаз:

$$\hat{A}_{\mathbf{q}} = u_q\rho_{\mathbf{q}} + v_q\partial_{\mathbf{q}}, \qquad \hat{A}^\dagger_{-\mathbf{q}} = (u_q+v_q)\rho_{\mathbf{q}} - v_q\partial_{\mathbf{q}}.$$

Після нескладних алґебраїчних перетворень отримаємо такі вирази:

$$\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\alpha_q\sqrt{\varepsilon_q}}\left[\hat{A}_{\mathbf{q}} + \hat{A}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\right] \tag{2.8}$$

$$\partial_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_q}}\left[\left(\frac{1}{\alpha_q}+1\right)\hat{A}_{\mathbf{q}} + \left(\frac{1}{\alpha_q}-1\right)\hat{A}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\right] \tag{2.9}$$

Отже, гамільтоніан дорівнює

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{A}_{\mathbf{k}}, \tag{2.10}$$

а комутаційні співвідношення мають вигляд:

$$[\hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}] = \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}\Big\{E^{(0)}_k + \frac{1}{N}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}}\Big[B(\mathbf{k},\mathbf{q})\left(\hat{A}_{\mathbf{q}}\hat{A}_{-\mathbf{q}} + \hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{A}_{\mathbf{q}}\right) + C(\mathbf{k},\mathbf{q})\left(\hat{A}^{\dagger}_{-\mathbf{q}}\hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}} + \hat{A}_{\mathbf{q}}\hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\right)\Big]\Big\}, \tag{2.11}$$

$$[\hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{A}_{\mathbf{k}'}] = 0, \qquad [\hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{k}}, \hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}] = 0. \tag{2.12}$$

Таким чином, маємо досить складну нелінійну алґебру. Коефіцієнтні функції $B(\mathbf{k},\mathbf{q})$ і $C(\mathbf{k},\mathbf{q})$ повністю визначаються міжатомними взаємодіями. Вирази для них легко відтворити з (2.7)–(2.9). Одним зі способів їх застосування є розширення підходу деформованої алґебри для багатовимірного випадку (порівн. [287]).

Найпростішим шляхом застосування комутатора (2.7) видається усереднення відповідних виразів з метою переходу від операторів до звичайних функцій у правій частині. Тому пропонуємо переписати (2.7) у наближеній формі:

$$[\hat{A}_{\mathbf{q}}, \hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}}] = E^{(0)}_q + \frac{1}{N}\sum_{\substack{\mathbf{q}'\neq 0\\ \mathbf{q}'+\mathbf{q}\neq 0,\ q'<Q}}\left[W(\mathbf{q}',\mathbf{q})\,S_{q'} + Y(\mathbf{q}',\mathbf{q})\,D_{q'}\right] \tag{2.13}$$

з такими позначеннями для середніх:

$$S_q = \langle\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle = \frac{1}{\alpha_q} \qquad D_q = \langle\rho_{\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_q}-1\right).$$

Верхня межа Q суми за хвильовим вектором визначається з умови, що кількість ступенів вільності в системі дорівнює $3N$, порівн. [288]:

$$3N = \sum_{\mathbf{q}'\neq 0,\ q'<Q} 1; \qquad Q = \left(18\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3},$$

останнє співвідношення відповідає переходові від підсумовування до інтеґрування за стандартним правилом $\sum_{\mathbf{q}} \to V \int d\mathbf{q}/(2\pi)^3$ і наступному використанню сферичних координат.

Подібний вираз можна отримати за допомогою формалізму функцій Ґріна. А саме, якщо в рівнянні руху для функції $\langle\langle \hat{A}^\dagger_{\mathbf{k}} \,|\, \hat{A}_{\mathbf{k}} \rangle\rangle$ розщепити функції $\langle\langle \rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} \hat{A}^\dagger_{\mathbf{k}} \,|\, \hat{A}_{\mathbf{k}} \rangle\rangle$ так: $\langle \rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} \rangle \langle\langle \hat{A}^\dagger_{\mathbf{k}} \,|\, \hat{A}_{\mathbf{k}} \rangle\rangle$ і т. д. Спектр визначається як полюси функції Ґріна.

2.2.3. Результати й обговорення. Енерґетичний спектр взаємодіючої бозе-системи матиме вигляд:

$$E_q = E_q^{(0)} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\mathbf{q}'\neq 0 \\ \mathbf{q}'+\mathbf{q}\neq 0,\ q'<Q}} \left[W(\mathbf{q}', \mathbf{q}) \frac{1}{\alpha_{q'}} + Y(\mathbf{q}', \mathbf{q}) \frac{1-\alpha_{q'}}{2\alpha_{q'}} \right]. \quad (2.14)$$

На рис. 2.1 зображено результати розрахунків для рідкого ^{4}He. Видно, що поправка до $E_q^{(0)}$ (другий доданок у (2.14)) суттєво покращує спектр, особливо в околі так званого “ротонного мінімуму”.

Ми також оцінили внесок тричастинкових взаємодій. У грубому конволюційному наближенні для ν_3 (див. [81]) спостерігається опускання кривої в напрямку до експериментальних значень.

Цікаво, що врахування тричастинкових ефектів також уточнює результати розрахунків структурних функцій, що можна проілюструвати на прикладі парної функції розподілу на рис. 2.2.

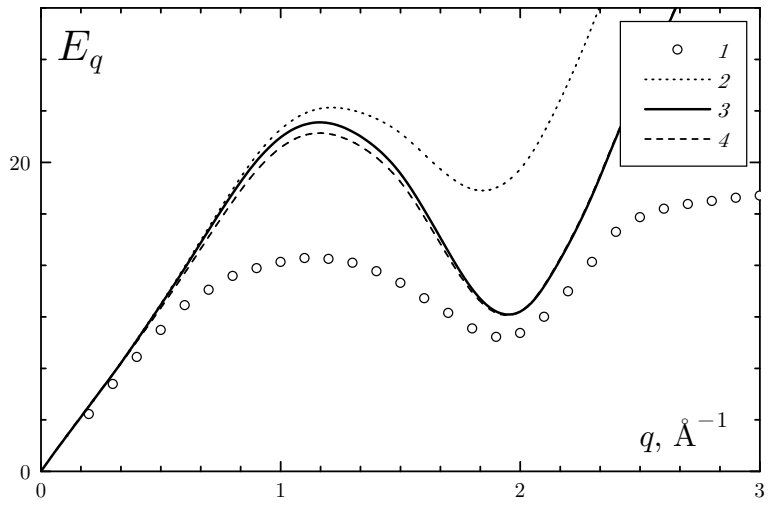


Рис. 2.1. Енергетичний спектр ^{4}He. *1* — експериментальні значення [289]; *2* — наближення хаотичних фаз, або боголюбівське, результат $E_q^{(0)}$; *3* — ця робота, без врахування тричастинкових взаємодій; *4* — ця робота, з урахуванням тричастинкових взаємодій (якісний результат).

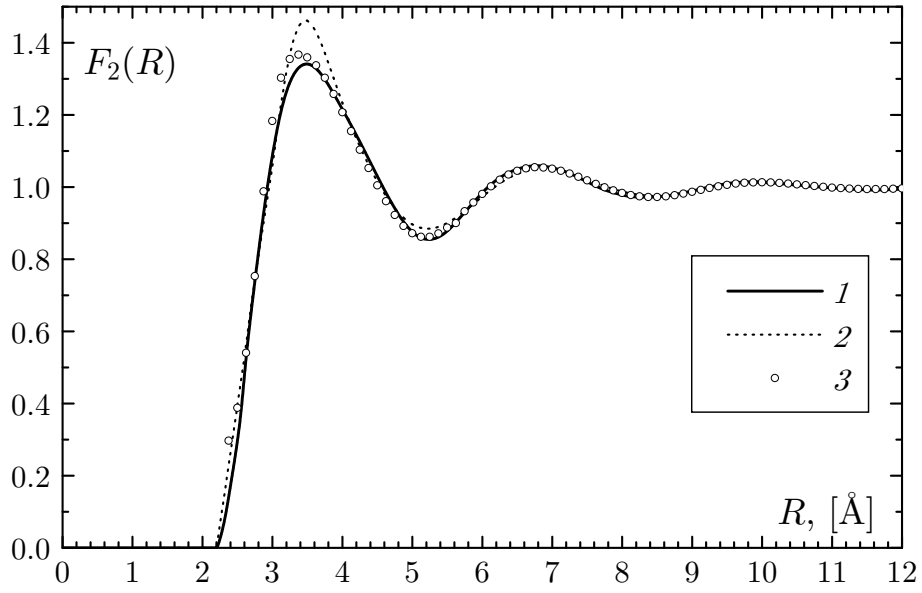


Рис. 2.2. Парна функція розподілу ^{4}He: *1* — експериментальні значення при 1.38 K [290]; *2* — врахування лише двочастинкових взаємодій; *3* — врахування тричастинкових взаємодій [81].

2.3. Розрахунок спектра бозе-системи в довгохвильовій границі

У цьому підрозділі розглянемо взаємодіючу бозе-систему за допомогою двочасових температурних функцій Ґріна на колективних змінних. Буде проаналізовано дві системи: рідкий гелій-4 і бозе-рідина з потенціалом Юкави, що може слугувати моделлю ядерної матерії [93].

2.3.1. Рівняння руху для функцій Ґріна. Для операторів A та B у зображенні Гайзенберґа двочасові температурні функції визначають так [291]:

$$\langle\langle A(t)|B(t')\rangle\rangle = i\theta(t-t')\left\langle[A(t),B(t')]\right\rangle, \tag{2.15}$$

де $\theta(t)$ — одинична сходинка Гевісайда, а $[\cdot,\cdot]$ позначає комутатор.

Рівняння руху у частотному зображенні записують у вигляді

$$\hbar\omega\langle\langle A|B\rangle\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle[A,B]\rangle + \langle\langle[A,H]|B\rangle\rangle, \tag{2.16}$$

звідки після нескладних перетворень, використовуючи гамільтоніан (2.3), отримаємо таку систему:

$$\begin{aligned}
\hbar\omega\langle\langle\rho_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle &= -\varepsilon_k\langle\langle\rho_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle + 2\varepsilon_k\langle\langle\partial_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}}\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{kq}\langle\langle\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle, \\
\hbar\omega\langle\langle\partial_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle &= \frac{1}{2\pi} + \varepsilon_k\langle\langle\partial_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle + n\nu_k\langle\langle\rho_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{kq}\langle\langle\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle - \frac{n^2}{2}\nu_3(\mathbf{k},\mathbf{q})\langle\langle\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle\right].
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Відкидаючи триператорні функції Ґріна, тобто у наближенні RPA,

отримаємо такий вираз для одного з розв'язків системи (2.17):

$$\langle\langle \rho_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\rangle = \frac{\varepsilon_k}{\pi} \frac{1}{(\hbar\omega)^2 - \varepsilon_k^2 \alpha_k^2}, \tag{2.18}$$

що відразу дає спектр Боголюбова із полюсів функції Ґріна щодо $\hbar\omega$:

$$E_k^{\mathrm{B}} = \varepsilon_k \alpha_k, \qquad \text{де} \quad \alpha_k = \left(1 + 2n\nu_k/\varepsilon_k\right)^{1/2}. \tag{2.19}$$

Можна також записати рівняння руху для триоператорних функцій, однак із їх розв'язків не вдасться отримати виразу для спектра елементарних збуджень у замкненому вигляді. Тому у наступному пункті ми розглянемо інший спосіб розрахунку, який виявляється дещо простішим.

2.3.2. Розщеплення функцій Ґріна і спектр елементарних збуджень. Оскільки функції Ґріна типу $\langle\langle AB|C\rangle\rangle$ використовують для розрахунку середніх від добутку трьох операторів $\langle CAB\rangle$, то можна запропонувати розщеплення

$$\langle\langle A_1 B_2 | C_3 \rangle\rangle = \lambda(1,2) \langle\langle A_{1+2} | C_3 \rangle\rangle + \mu(1,2) \langle\langle B_{1+2} | C_3 \rangle\rangle \tag{2.20}$$

з такими коефіцієнтами:

$$\lambda(1,2) = (1-\eta) \frac{\langle C_3 A_1 B_2 \rangle}{\langle C_3 A_{1+2} \rangle}, \qquad \mu(1,2) = \eta \frac{\langle C_3 A_1 B_2 \rangle}{\langle C_3 B_{1+2} \rangle}, \tag{2.21}$$

де значення параметра $\eta = 0 \div 1$ виберемо згодом. Числами 1,2,3 для скорочення позначено хвильові вектори $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ відповідно.

У роботі було проаналізовано два наближення для середніх:

$$\langle C_3 A_1 B_2 \rangle_s = \frac{1}{6} \Big(\langle CA \rangle_1 \langle CB \rangle_2 \langle AB \rangle_3 + \text{симетр. за індексами} \Big) \tag{2.22}$$

із шістьма доданками в дужках, звідки й походить позначення "s" (від англ. *six*), та

$$\begin{aligned} \langle C_3 A_1 B_2 \rangle_f \;=\; & \frac{1}{4} \Big[(\langle AB \rangle_1 \langle CA \rangle_2 + \langle AB \rangle_2 \langle CA \rangle_1) \langle CB \rangle_3 + \\ & + (\langle AB \rangle_1 \langle CB \rangle_2 + \langle AB \rangle_2 \langle CB \rangle_1) \langle CA \rangle_3 \Big] \end{aligned} \tag{2.23}$$

з чотирма доданками в дужках (позначення "f" — від англ. *four*).

Щоб розщепити функції, які входять у рівняння (2.17), потрібно знати такі середні:

$$\langle\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle_{s,f} = \frac{1}{\sqrt{N}}\langle\rho_{-\mathbf{q}}\rho_{\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}}\rangle, \tag{2.24}$$

що відповідає так званому конволюційному наближенню і є однаковим для обох типів розщеплення, зазначених вище,

$$\langle\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}\rangle_s = \frac{1}{3\sqrt{N}}(\langle\rho_{-\mathbf{q}}\rho_{\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle + \tag{2.25}$$
$$+ \langle\rho_{-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle + \langle\rho_{-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}}\rangle),$$

$$\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}\rangle_s = \frac{1}{3\sqrt{N}}(\langle\partial_{-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle + \tag{2.26}$$
$$+ \langle\rho_{-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{q}}\rangle\langle\partial_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle + \langle\rho_{-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle\langle\partial_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle),$$

а також

$$\langle\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}\rangle_f = \tag{2.27}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{N}}(\langle\rho_{-\mathbf{q}}\rho_{\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle + \langle\rho_{-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle),$$

$$\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}\rangle_f = \tag{2.28}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{N}}(\langle\partial_{-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle + \langle\rho_{-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{q}}\rangle\langle\partial_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle).$$

Парні середні легко розрахувати в наближенні RPA за допомогою відповідних розв'язків системи (2.17) [286]:

$$\langle\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\alpha_k}, \qquad \langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k} - 1\right),$$

$$\langle\partial_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha_k} - \alpha_k\right). \tag{2.29}$$

Застосовуючи розщеплення в (2.17), отримаємо таку систему рівнянь руху:

$$\hbar\omega\langle\langle\rho_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle = -\varepsilon_k^{(1)}\langle\langle\rho_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle + 2\varepsilon_k^{(2)}\langle\langle\partial_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle$$

(2.30)

$$\hbar\omega\langle\langle\partial_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle \;=\; \frac{1}{2\pi}+\varepsilon_k^{(3)}\langle\langle\partial_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle+n\nu_k^{(*)}\langle\langle\rho_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle,$$

де

$$\varepsilon_k^{(1)}=\varepsilon_k+\frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}}\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{kq}\,X(\mathbf{k},\mathbf{q}), \tag{2.31}$$

$$\varepsilon_k^{(2)}=\varepsilon_k+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}}\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{kq}\,Y(\mathbf{k},\mathbf{q}), \tag{2.32}$$

$$\varepsilon_k^{(3)}=\varepsilon_k+\frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}}\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{kq}\,Z(\mathbf{k},\mathbf{q}), \tag{2.33}$$

$$\nu_k^{(*)}=\tilde{\nu}_k+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}}\nu_3(\mathbf{k},\mathbf{q})T(\mathbf{k},\mathbf{q}). \tag{2.34}$$

Тут використано такі позначення:

$$X(\mathbf{k},\mathbf{q})=(1-\eta)\frac{\langle\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}\rangle}{\langle\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}}\rangle},\qquad Y(\mathbf{k},\mathbf{q})=-\eta\frac{\langle\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}\rangle}{\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle}, \tag{2.35}$$

$$Z(\mathbf{k},\mathbf{q})=\frac{\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}\rangle}{\langle\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{k}}\rangle},\qquad T(\mathbf{k},\mathbf{q})=\frac{\langle\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle}{\langle\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}}\rangle}$$

Спектр елементарних збуджень тепер буде розв'язком біквадратного рівняння:

$$E_k=\frac{1}{2}\left\{\varepsilon_k^{(3)}-\varepsilon_k^{(1)}+\sqrt{\left[\varepsilon_k^{(1)}\right]^2+\left[\varepsilon_k^{(3)}\right]^2+2\varepsilon_k^{(1)}\varepsilon_k^{(3)}+8\varepsilon_k^{(2)}n\nu_k^{(*)}}\right\}. \tag{2.36}$$

Якщо у цьому виразі відкинути доданки, що містять суму за хвильовим вектором, то отримаємо результат Боголюбова (2.19), як і повинно бути.

2.3.3. Результати розрахунків. Спектр елементарних збуджень було розраховано для двох бозе-систем: рідкого гелію-4 та бозе-рідини з потенціалом Юкави, що може слугувати моделлю ядерної матерії. Оскільки даних про тричастинкові взаємодії у цих системах досить мало, внесок від $\nu_3(\mathbf{k},\mathbf{q})$ не враховано. Як було сказано у попередньому підрозділі, у випадку рідкого гелію-4 такий підхід не впливає суттєво на довгохвильову ділянку спектра [80].

У чисельних розрахунках підсумовування за хвильовим вектором у формулах (2.31)–(2.33) зручно замінити на інтеґрування за правилом

$$\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}}\ldots=\frac{1}{N}\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q}\ \ldots\ . \tag{2.37}$$

Вирази, які можна безпосередньо використати для чисельних розрахунків, мають такий вигляд:

$$S_1=\frac{1}{\alpha_q},\quad L_1=\frac{S_1-1}{2},\quad D_1=\frac{1}{4}\left(S_1-\frac{1}{S_1}\right),\quad \text{де } q=|\mathbf{q}|;$$

$$S_2=\frac{1}{\alpha_p},\quad L_2=\frac{S_2-1}{2},\quad D_2=\frac{1}{4}\left(S_2-\frac{1}{S_2}\right),\quad \text{де } p=|\mathbf{k}+\mathbf{q}|;$$

$$S_3=\frac{1}{\alpha_k},\quad L_3=\frac{S_3-1}{2},\quad D_3=\frac{1}{4}\left(S_3-\frac{1}{S_3}\right),\quad \text{де } k=|\mathbf{k}|. \tag{2.38}$$

Для розщеплення s-типу:

$$\varepsilon_k^{(1)}=\varepsilon_k+\frac{(1-\eta)}{(2\pi)^3}\frac{1}{n}\frac{\hbar^2}{m}\int d\mathbf{q}\,(\mathbf{kq})\frac{S_1L_2L_3+L_1S_2L_3+L_1L_2S_3}{3S_3},$$

$$\varepsilon_k^{(2)}=\varepsilon_k-\frac{\eta}{(2\pi)^3}\frac{1}{n}\frac{\hbar^2}{2m}\int d\mathbf{q}\,(\mathbf{kq})\frac{S_1L_2L_3+L_1S_2L_3+L_1L_2S_3}{3L_3}, \tag{2.39}$$

$$\varepsilon_k^{(3)}=\varepsilon_k+\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{n}\frac{\hbar^2}{2m}\int d\mathbf{q}\,(\mathbf{kq})\frac{D_1L_2L_3+L_1D_2L_3+L_1L_2D_3}{3L_3}.$$

Для розщеплення f-типу:

$$\varepsilon_k^{(1)} = \varepsilon_k + \frac{(1-\eta)}{(2\pi)^3}\frac{1}{n}\frac{\hbar^2}{m}\int d\mathbf{q}\,(\mathbf{kq})(S_1L_2 + L_1S_2)\frac{L_3}{2S_3},$$

$$\varepsilon_k^{(2)} = \varepsilon_k - \frac{\eta}{(2\pi)^3}\frac{1}{n}\frac{\hbar^2}{2m}\int d\mathbf{q}\,(\mathbf{kq})\frac{S_1L_2 + L_1S_2}{2}, \tag{2.40}$$

$$\varepsilon_k^{(3)} = \varepsilon_k + \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{n}\frac{\hbar^2}{2m}\int d\mathbf{q}\,(\mathbf{kq})\frac{D_1L_2 + L_1D_2}{2}.$$

Інтеґрування у цих формулах зручно проводити у сферичних координатах.

Для розрахунків спектра рідкого гелію-4 використано такі значення параметрів:

$$m = 4.0026 \text{ a. m. u.}, \qquad n = 0.02185 \text{ Å}^{-3}. \tag{2.41}$$

Дані про міжчастинковий потенціал ν_k взято з праці [292]. Треба зауважити, що точні парні потенціали, які ґрунтуються на квантовомеханічних або напівфеноменологічних розрахунках [293–295], не дуже добре підходять для наших обчислень. Потенціал із праці [292] було отримано самоузгодженим способом у підході колективних змінних, і він є в певному сенсі ефективним парним потенціалом, який враховує також внески від багаточастинкових взаємодій. Це уподібнює його до розглянутого нижче потенціалу Юкави, який можна трактувати як екранований кулонівський потенціал.

Результати для спектра елементарних збуджень гелію-4, які відповідають рівнянню (2.36), показано на рис. 2.3 у порівнянні з наближенням хаотичних фаз (спектром Боголюбова) та експериментальними даними. Параметр η взято $\eta = 1$, оскільки для менших значень поправка до RPA виявляється недостатньою, щоби правильно відтворити нахил фононної гілки (лінійної у границі $k \to 0$). Це означає,

що функція $\langle\langle \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle = \mu(\mathbf{k},\mathbf{q})\langle\langle \partial_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle$, а включення доданка з $\langle\langle \rho_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\rangle$ приводить до небажаної взаємної компенсації відповідних поправок.

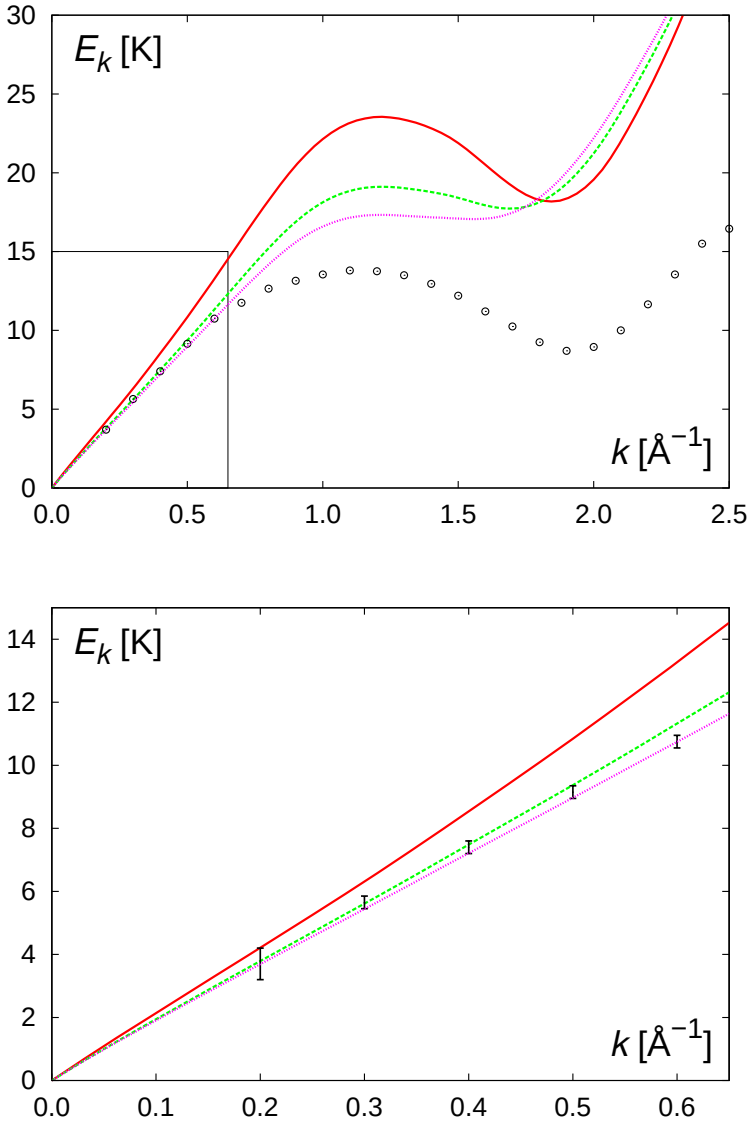


Рис. 2.3. Спектр елементарних збуджень рідкого гелію-4. На нижньому графіку у збільшеному вигляді зображено виділену прямокутну область верхнього графіка. Суцільна лінія — результат RPA (спектр Боголюбова); штрихова — спектр (2.36) із розщепленням s-типу, $\eta = 1$; пунктирна — спектр (2.36) із розщепленням f-типу, $\eta = 1$. кружечки (з "вусами") — експериментальні дані [289].

Таблиця 2.1. Спектр елементарних збуджень рідкого гелію-4. Обчислені значення у наближенні Боголюбова E_k^{B} та з використанням двох типів розщеплення (s і f) подано у порівнянні з експериментальними даними [289]. Одиниця вимірювання енергії — кельвіни.

k, Å^{-1}	E_k^{B}	$E_k^{s-\mathrm{type}}$	$E_k^{f-\mathrm{type}}$	E_k^{exp}		ΔE_k
0.2	4.21	3.79	3.69	3.70	±	0.5
0.3	6.31	5.60	5.44	5.65	±	0.20
0.4	8.53	7.48	7.21	7.40	±	0.20
0.5	10.84	9.37	8.97	9.15	±	0.20
0.6	13.27	11.32	10.75	10.75	±	0.20
0.7	15.80	13.31	12.52	11.75	±	0.20
0.8	18.26	15.22	14.17	12.65	±	0.20
0.9	20.47	16.90	15.60	13.15	±	0.20
1.0	22.14	18.13	16.59	13.55	±	0.25
1.2	23.55	19.09	17.29	13.75	±	0.25
1.4	22.83	18.78	17.17	12.95	±	0.20
1.6	20.45	17.89	17.05	11.20	±	0.20
1.8	18.23	18.12	18.43	9.25	±	0.20
2.0	19.57	21.23	22.20	8.95	±	0.20

Як s-, так і f-типи розщеплень можна застосовувати для опису довгохвильової поведінки спектра гелію-4, не використовуючи поняття ефективної маси, яка необхідна в RPA, порівн. [286]. З іншого боку, запропонований метод і надалі не дає добрих результатів при більших значеннях хвильового вектора, і варто шукати подальші модифікації для коректного відтворення так званих максонної та ротонної ділянок.

Цікавим також видається аналіз ядерної матерії, у якій передбачають існування різних типів бозе-конденсації [296, 297]. Ядерну матерію можна моделювати потенціалом Юкави [298]

$$\Phi(r) = \epsilon \frac{e^{-r/\sigma}}{r}.$$

Його фур'є-зображення має вигляд [299]

$$\nu_k = \frac{4\pi\epsilon\sigma^3}{1+\sigma^2k^2}. \tag{2.42}$$

Ядерній матерії відповідають такі значення параметрів [298]:

$$\epsilon = 5725 \text{ MeV}, \qquad \sigma = 0.244 \text{ fm}^{-1}, \tag{2.43}$$

а також:

$$\Lambda^* = \frac{2\pi\hbar}{\sigma\sqrt{\epsilon m}} = 1.08, \qquad n = 0.16 \text{ fm}^{-3}. \tag{2.44}$$

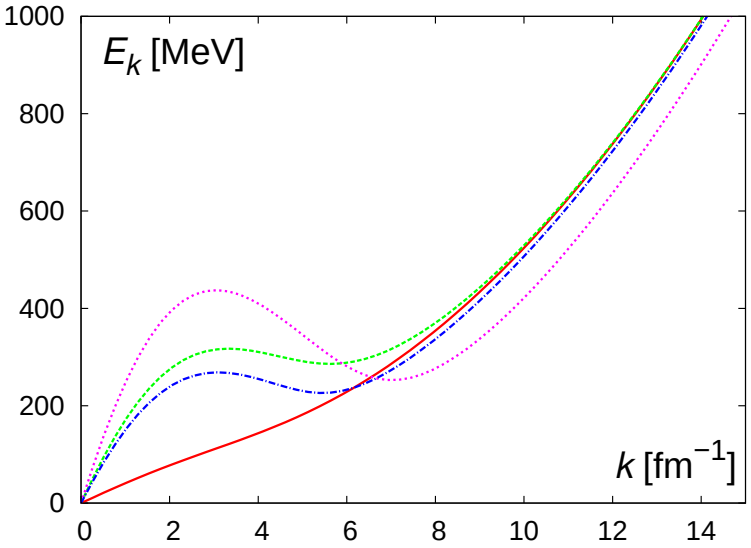


Рис. 2.4. Спектр елементарних збуджень бозе-рідини з потенціалом Юкави; параметри відповідають ядерній матерії. Суцільна лінія — результат RPA (спектр Боголюбова); штрихова — спектр (2.36) із розщепленням s-типу, $\eta = 0$; пунктирна — спектр (2.36) із розщепленням f-типу, $\eta = 0$; штрихпунктирна — спектр (2.36) із розщепленням f-типу, $\eta = 0.1$.

Результати розрахунків спектра елементарних збуджень такої системи наведено на рис. 2.4. Отримана поправка до наближення RPA змінює форму кривої E_k, що дає добре якісне узгодження з іншими даними [299, 300]. Потрібно зазначити, що у цьому випадку значення параметра η близькі до нуля, оскільки, починаючи від $\eta \gtrsim 0.2$, виникають нефізичні розбіжності в області мінімуму ($k = 4 \div 6$ fm^{-1}).

2.3.4. Обговорення. Підсумовуючи результати цього підрозділу, відзначимо, що було запропоновано підхід до вивчення взаємодіючих бозе-систем, який дає добрий опис спектра елементарних збуджень у довгохвильовій границі. При цьому коректний опис фононної ділянки спектра рідкого гелію-4 отримано без застосування поняття ефективної маси. Як показує проведений аналіз, у двох розглянутих моделях потрібно брати різні значення параметра розщеплення η: $\eta = 1$ для рідкого гелію-4 й $\eta = 0$ для юкавівської бозе-рідини. Вибір параметра залежить від типу взаємодій: у випадку короткосяжного потенціала в гелії відбувається ефективна зміна доданка, відповідального з взаємодію $\varepsilon_k^{(2)}\nu_k$ у виразі (2.36), а відносно далекосяжний потенціал Юкави вимагає зміни "кінетичних" доданків $\varepsilon_k^{(1,3)}$.

2.4. Міжатомні потенціали розрідженої багатобозонної системи

Хоча в багатьох випадках для встановлення властивостей розрідженої системи достатньо задати лише основні параметри міжатомної взаємодії, такі, наприклад, як радіус (при моделюванні твердими кульками), все ж з'ясування деталей потенціальної кривої становить інтерес з огляду на перспективу точніших розрахунків термодинамічних і структурних функцій, а також конденсатної фракції. Дослідження парного потенціалу, його зв'язку зі структурою, проводилося для різних речовин. Оскільки розрахунки здійснено для рубідію-87, то цікаво зазначити деякі праці, що стосуються цього газу. В основному такі дослідження виконували за суттєво інших умов порівняно з тими, що відповідають бозе-конденсації [301–303]. Скажімо, у праці [301] значення температури становить 1900 K, а в [303] — 185 K. Фактично

йдеться про рідкий рубідій, а нас цікавитиме газ при температурах ~ 1 нК. Зважаючи на порівняну новизну в цьому питанні, відповідних експериментальних і теоретичних даних для порівняння бракує.

На підставі отриманих раніше результатів для багатобозонної системи на прикладі гелію-4 [292, 304, 305] запишемо вирази для міжатомного потенціалу сильно-розрідженої системи. Відповідне рівняння для фур'є-зображення потенціалу ν_k отримується в межах формалізму колективних змінних. Воно має вигляд [292, 304, 305]:

$$\frac{N}{2V}\nu_k \;+\; \varepsilon_k\, a_2(\mathbf{k}) - \varepsilon_k\, a_2^2(\mathbf{k}) - \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\varepsilon_q\, a_4(\mathbf{q},-\mathbf{q},\mathbf{k},-\mathbf{k}) + \\ + \;\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{q}(-\mathbf{k}-\mathbf{q})\, a_3(\mathbf{k},\mathbf{q},-\mathbf{k}-\mathbf{q}) = 0, \qquad (2.45)$$

тут ε_k — енергія вільної частинки, N — кількість частинок, V — об'єм системи. Коефіцієнтні функції a_3, a_4 складним чином виражаються через структурний фактор.

Якщо у всіх співвідношеннях зберегти лише доданки, лінійні за густиною N/V (таке наближення є цілком виправданим, зважаючи на типове значення густини $\sim 10^{-11}\,\text{Å}^{-3}$ [4]), то для фур'є-зображення міжатомного потенціалу $\nu(x)$ у знерозміреній формі отримаємо

$$\nu(x) = \nu_0(x) + \frac{1}{x}\int_0^\infty dy \int_{|x-y|}^{x+y} dp\; py\,\frac{\nu(p)}{p^2}\times \\ \times\left[\frac{\nu(x)}{x^2}(x^2+p^2-y^2) + \frac{\nu(y)}{y^2}(x^2+p^2+y^2)\right], \qquad (2.46)$$

при цьому, попри позірну розбіжність, насправді цей інтеґрал виявляється збіжним, що можна показати за допомогою детального аналізу. У цьому виразі одиницею вимірювання Фур'є-зображення потенціалу

виступає $4\pi\hbar^2 a/m$, а хвильового вектора — $2\pi/a$, де a — параметр довжини, зміст якого з'ясовано нижче. Така форма запису дозволяє відразу отримати результати для різних речовин, що відповідає різним значенням a та m.

Початкове наближення для $\nu_0(x)$ можна вибрати, виходячи з потенціалу "майже твердих сфер" [306]. У даній роботі з цією метою використано пробну функцію Маєра у вигляді

$$f(R) = \exp\left[-\left(\frac{a}{R}\right)^n\right] - 1, \qquad n = 36. \tag{2.47}$$

У випадку Rb^{87} взято значення $a = 58.2$ Å (довжина розсіяння s-хвилі) [9]. При цьому, виходячи з форми кривої, яка отримується внаслідок ітераційного розв'язування інтеґрального рівняння, можна сказати, що розв'язок для Фур'є-зображення потенціалу парної взаємодії потрібно шукати у вигляді суперпозиції функцій типу

$$\frac{\cos 2n\pi x}{x^{2m}}, \quad \frac{\sin 2n\pi x}{x^{2m+1}}$$

із деяким загасаючим множником. Попередній аналіз вказує, що достатньо обмежитися значеннями $m, n < 4$. Однак, через складність аналітичних викладок, а також через неможливість отримати аналітичні результати навіть на проміжних етапах розв'язування рівняння (2.46) (це пов'язано з його нелінійністю), було застосовано ітераційну процедуру, аналогічну до [292].

Початкове наближення $\nu_q^{(0)}$ виражається через структурний фактор S_q так [292]:

$$\nu_q^{(0)} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\,\frac{V}{2N}\left(\frac{1}{S_q^2} - 1\right), \tag{2.48}$$

тут вжито розмірні величини.

Обмежуючись лише доданками, лінійними за густиною, можна показати, що

$$\nu_q^{(0)} = -4\pi \frac{\hbar^2}{2m} q \int_0^\infty dR\, Rf(R) \sin qR, \tag{2.49}$$

де $f(R)$ — функція Маєра (2.47) (див., наприклад, [307], де наведено вираз для парної функції розподілу у вигляді ряду за густиною).

Обчислення проведемо, підставляючи в інтеґральний доданок у формулі (2.46) на місце $\nu(y)$ і $\nu(p)$ початкове наближення, відповідно, $\nu_0(y)$ і $\nu_0(p)$. Перейшовши потім до координатного простору

$$\Phi(R) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{qR}} \nu_q \tag{2.50}$$

для потенціалу $\Phi(R)$ матимемо криву, зображену на рис. 2.5.

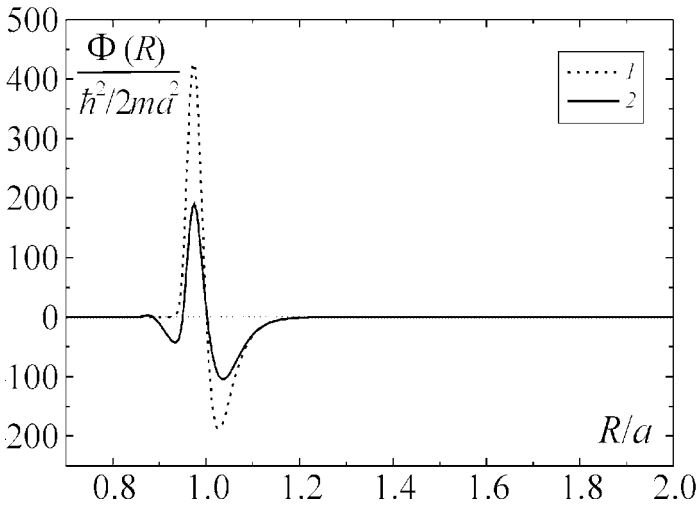


Рис. 2.5. Потенціал взаємодії між атомами Rb^{87}. *1* — початкове наближення, *2* — перша ітерація.

Треба зауважити, що, незважаючи на сильне відштовхування у моделі, така процедура, пов'язана з Фур'є-перетворенням, є коректною — згадаймо, наприклад, псевдопотенціал для твердих сфер [308]. Зазначмо ще між іншим, що початкове наближення $\nu_0(x)$, отримане в моделі твердих сфер, не можна безпосередньо використовувати для ітерацій,

оскільки інтеґральний доданок у рівнянні (2.46) виявляється розбіжним. Проте цю незручність можна обійти, вводячи певний обрізуючий множник — експоненту з малим показником. Як видно з рис. 2.5, на потенціальній кривій з'являється мінімум, що означає притягання між атомами. Така поведінка потенціалу свідчить про те, що застосоване наближення є кращим від, скажімо, наближення звичайних твердих сфер, у якому присутнє тільки короткосяжне відштовхування. Що стосується нульових чи від'ємних значень потенціалу на малих міжатомних віддалях і можливості квантовомеханічного тунелювання крізь потенціальний бар'єр, то ймовірність такої події при малих температурах (нанокельвіновий діапазон), коли спостерігається бозе-конденсація, є нехтовно малою.

Здійснення точнішого (неітераційного) розв'язування рівняння (2.46) може бути предметом окремого дослідження, так само як і вивчення впливу параметрів моделі початкового наближення на результати розрахунків. На даному етапі можна стверджувати, що поведінка першої ітерації стосовно початкової якісно відображає спостережуваний раніше ефект у випадку гелію-4 [292], що дає підстави розвивати запропоновану методику.

2.5. Вплив слабкої взаємодії на властивості бозе-газу

Незважаючи на те, що більшість відомих бозе-систем є взаємодіючими, модель ідеального бозе-газу часто можна використати як базову для побудови теорії, особливо, коли взаємодію можна вважати слабкою. У цьому розділі ми спочатку коротко підсумуємо основні відомості про термодинамічні функції ідеального бозе-газу, розглянемо вплив зовнішнього потенціалу на властивості цієї системи, і зрештою розглянемо

властивості слабковзаємодіючого бозе-газу, у якому міжатомний потенціал враховано в моделі твердих сфер з використанням енерґетичного спектра Боголюбова [10].

2.5.1. Ідеальний D-вимірний бозе-газ. Розглядатимемо систему N бозонів, які можуть перебувати у станах з енерґіями $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$. Тоді, враховуючи функцію розподілу у статистиці Бозе–Айнштайна, запишемо:

$$N = \sum_n \frac{g_n}{e^{(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1}. \tag{2.51}$$

Ця рівність задає хімічний потенціал μ як функцію числа частинок N і температури T.

З міркувань загальності можна вважати простір D-вимірним. Різні значення вимірності простору можуть виникати у фізичних задачах ефективно, наприклад, унаслідок врахування впливу зовнішнього потенціалу. Загалом, D може бути й дробовим, що використовують при моделюванні пористих середовищ чи знову ж таки для систем у зовнішньому потенціалі. Тому далі буде використано вирази у формі, що дають змогу узагальнювати отримані результати на випадок неперервних значень D, хоч би й зовсім формально.

Нехай частинки перебувають в об'ємі $\mathscr{V}_D$. Підсумовування за станами можна замінити сумою за імпульсами $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_D)$ і спінами s, причому $\varepsilon_p = p^2/2m$, де m — маса частинки; $p = |\mathbf{p}| = \sqrt{p_1^2 + \ldots + p_D^2}$. Враховуючи, що за великого об'єму дискретністю імпульсу можна знехтувати, отримаємо вираз:

$$N = \sum_{\mathbf{p},s} \frac{g_{\mathbf{p},s}}{e^{(\varepsilon_p-\mu)/T}-1} = (2\sigma+1)\frac{\mathscr{V}_D}{(2\pi\hbar)^D}\int \frac{(dp)}{e^{(\varepsilon_p-\mu)/T}-1} =$$

$$= (2\sigma+1)\int \frac{d\tau}{e^{(\varepsilon_p-\mu)/T}-1}, \tag{2.52}$$

де $\mathscr{V}_D$ — D-вимірний об'єм, а елемент фазового об'єму

$$d\tau = \frac{(dp)(dq)}{(2\pi\hbar)^D}, \qquad \mathscr{V}_D = \int (dq),$$

$$(dp) = dp_1 \dots dp_D, \qquad (dq) = dq_1 \dots dq_D.$$

Величина $(2\sigma+1)$ — це мультиплетність. Для спрощення у подальших розрахунках вважатимемо бозони безспіновими, $\sigma = 0$.

Рівність (2.52) можна записати, ввівши функцію густини станів $g(\varepsilon)$:

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)\, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}-1}. \tag{2.53}$$

Враховуючи, що енергія частинки ε_p залежить лише від модуля імпульсу p, після переходу в (2.52) до інтеґрування за (гіпер-)сферичними координатами, $dp_1 \dots dp_D = p^{D-1} dp\, d\Omega_D$, де $\Omega_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(\frac{D}{2})$ — повний тілесний гіперкут у D-вимірному просторі, матимемо остаточно:

$$g(\varepsilon) = \mathscr{V}_D \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{(2m)^{D/2}}{(2\pi\hbar)^D}\, \varepsilon^{D/2-1}. \tag{2.54}$$

Важливим результатом тут є показник степеня густини станів ідеального D-вимірного бозе-газу:

$$g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D/2-1}, \tag{2.55}$$

який можна використовувати для інтерпретації ефективної вимірності простору в низці задач.

Після нескладних перетворень вираз (2.53) мрожна звести до вигляду:

$$\frac{N}{\mathscr{V}_D} = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{(2m)^{D/2}}{(2\pi\hbar)^D} \int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon^{D/2-1}\, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1} = \frac{1}{\lambda^D} \operatorname{Li}_{D/2}\left(e^{\mu/T}\right), \quad (2.56)$$

де

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{1/2}, \quad (2.57)$$

— довжина теплової хвилі де Бройля, а так званий полілогарифм, або функція Бозе, визначається рядом:

$$\operatorname{Li}_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}. \quad (2.58)$$

У граничному випадку $z = 1$ ця функція переходить у дзета-функцію Рімана:

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \operatorname{Li}_\alpha(1). \quad (2.59)$$

Увівши для величини $N/\mathscr{V}_D$, яка за змістом є густиною (чи, точніше, концентрацією), позначення $\rho_D = N/\mathscr{V}_D$, запишемо у компактній формі рівняння, з якого визначатимемо хімічний потенціал як функцію температури і густини:

$$\rho_D \lambda^D = \operatorname{Li}_{D/2}(z). \quad (2.60)$$

Якщо при заданій густині ρ_D зменшувати температуру газу, то хімічний потенціал μ, що встановлюється з рівності (2.60), зменшуватиметься за модулем і досягне значення $\mu = 0$ за критичної температури, що визначається виразом

$$T_c^{(D)} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{\rho_D}{\zeta(D/2)}\right)^{2/D}. \quad (2.61)$$

При $T < T_c^{(D)}$ рівняння для обчислення N не має фізичних розв'язків — ця точка відповідає явищу конденсації Бозе–Айнштайна (бозе-конденсації). Це означає, що найнижчий одночастинковий стан ($\varepsilon = 0$) стає макроскопічно заселеним із кількістю частинок $N_0 \sim N$. Внесок від цього стану потрібно врахувати явно під час переходу до густини станів:

$$N = N_0 + \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1}, \tag{2.62}$$

оскільки при $D > 2$ функція $g(\varepsilon)$ не дає змоги врахувати макроскопічну заселеність стану $\varepsilon = 0$, див. (2.55). Кількість частинок у цьому стані (бозе-конденсат) легко отримати у вигляді:

$$N_0 = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_c^{(D)}}\right)^{\frac{D}{2}}\right]. \tag{2.63}$$

При $D = 2$ в ідеальному бозе-газі бозе-конденсації не відбувається [309, 310]. Математично це випливає з того, що у виразі (2.61) ζ-функція дає розбіжний внесок у вигляді

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

а отже $T_c^{(2)} = 0$. Не спостерігається бозе-конденсація й при $D < 2$.

Обчисливши μ з (2.60), енергію E і теплоємність C_V системи розрахуємо за співвідношенням:

$$E = \sum_n \frac{\varepsilon_n g_n}{e^{(\varepsilon_n-\mu)/T} - 1} = \int_0^\infty \frac{\varepsilon g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1}, \qquad C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V. \tag{2.64}$$

Зокрема, залежність питомої теплоємності C_V/N від $T \leq T_c$ можна записати так:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{D(D+2)}{4}\frac{\zeta\left(\frac{D}{2}+1\right)}{\zeta\left(\frac{D}{2}\right)}\left(\frac{T}{T_c^{(D)}}\right)^{\frac{D}{2}}, \tag{2.65}$$

а класична границя $T \to \infty$ буде

$$\frac{C_V}{N} = \frac{D}{2}. \tag{2.66}$$

Поведінку ж теплоємності, як і енергії, при проміжних температурах ($T > T_c$) вже не можна з'ясувати на підставі простого аналізу. Особливий інтерес становить безпосередній окіл критичної точки $T \to T_c + 0$, який і стане предметом подальшого розгляду.

Результати розрахунків теплоємності для різних вимірностей простору наведено на рис. 2.6. Дробове значення $D = \ln 20/\ln 3 = 2.726\ldots$ відповідає фрактальній вимірності т. зв. губки Сєрпінського або Менґера (див. рис. 2.7), якою можна моделювати, наприклад, пористе середовище.

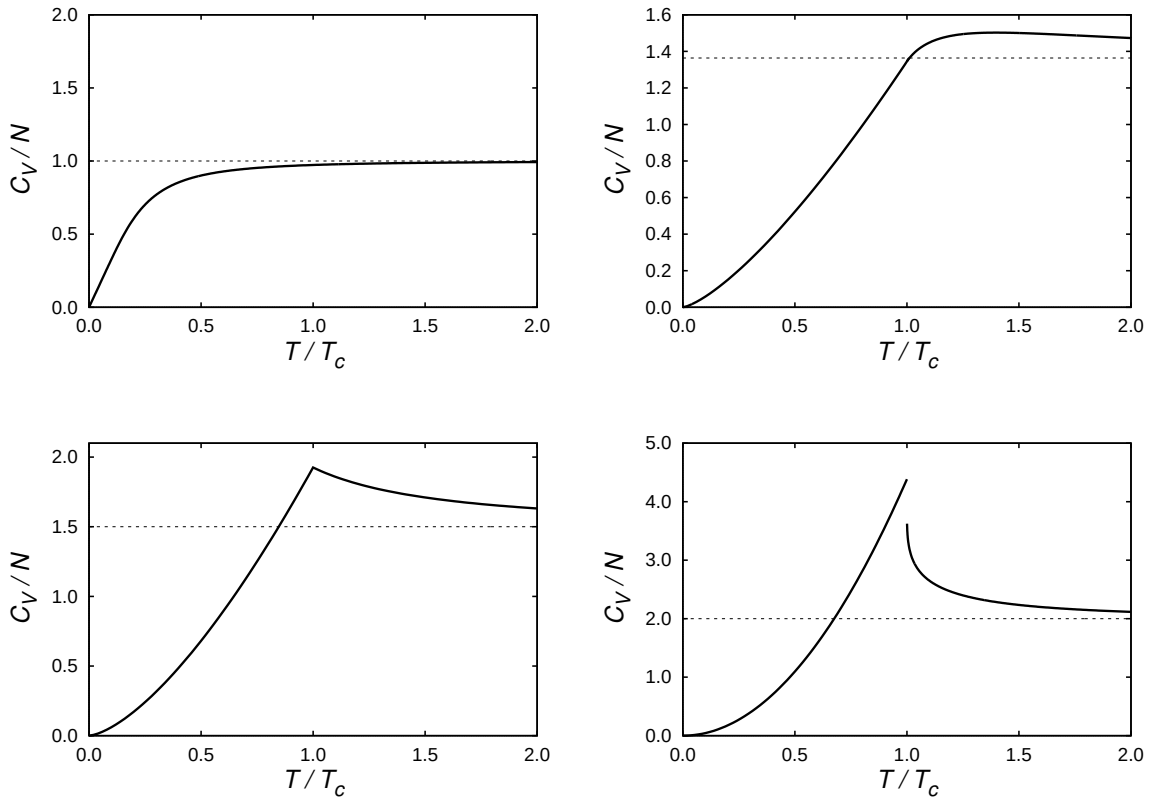


Рис. 2.6. Питома теплоємність C_V/N ідеального бозе-газу в D-вимірному просторі. Верхній лівий графік відповідає $D = 2$, верхній правий — $D = \ln 20/\ln 3 = 2.726\ldots$ — вимірність губки Менґера; у нижньому ряду ліворуч $D = 3$ і праворуч $D = 4$.

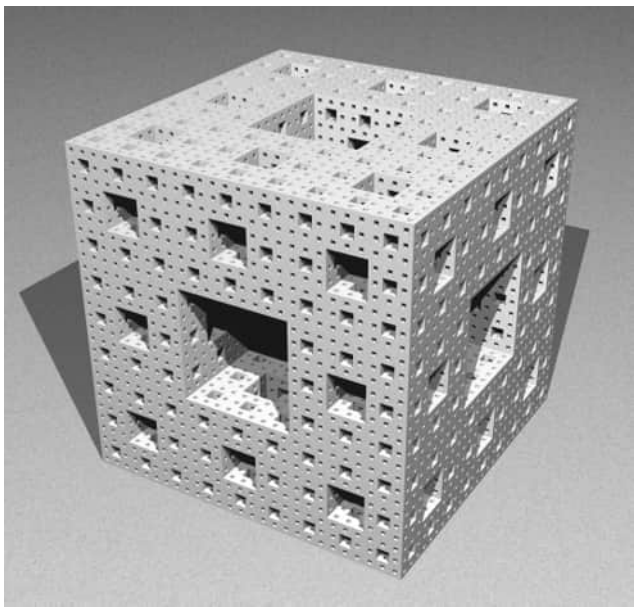


Рис. 2.7. Губка Менґера (джерело: `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Menger-Schwamm-einfarbig.jpg`).

2.5.2. Слабковзаємодіючий газ. Для дослідження бозе-конденсації в розріджених газах можна використати спрощену теорію слабковзаємодіючого бозе-газу, яка була вперше розвинена зі сподіванням пояснити властивості рідкого гелію [10].

Незважаючи на багато зусиль, проблема визначення залежності температури бозе-конденсації слабковзаємодіючого бозе-газу від взаємодії все ще не знайшла остаточної відповіді [311], порівн. [312]. Відомо, що температура T_c переходу в конденсатний стан, несуттєво відрізняється від температури, передбаченої для ідеального газу. Це вказує на те, що взаємодії незначно змінюють протікання цього явища. Їхній вплив на температуру переходу становить декілька відсотків, тому таку систему дуже часто можна трактувати як ідеальну в головному наближенні.

Без взаємодії всі N частинок системи заселяють стан з нульовою енерґією та з нульовим імпульсом (для вимірності простору більше двох). У цьому випадку кількість конденсованих частинок N_0 дорівнює загальній кількості частинок. Коли вмикається взаємодія, частинки

можуть покинути конденсат, тому N_0 природно зменшується [311].

У розрідженій системі враховуємо тільки двочастинкову взаємодію, оскільки ймовірність багаточастинкових зіткнень мізерна. Розгляньмо слабковзаємодіючий газ у наближенні твердих сфер, потенціал яких найбільш пристосований до вивчення газів із низькими густинами через його формальну простоту [313].

Пояснити поведінку газу твердих сфер можна, використавши енергетичний спектр Боголюбова для слабконеідеального газу [10]

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}\sqrt{1 + \frac{2\varrho\nu_p}{p^2/2m}}, \tag{2.67}$$

де ε — енергія, $p = |p|$ — абсолютне значення імпульсу частинки; $\varrho = N/V$ — густина системи, ν_p — фур'є-зображення потенціалу міжатомної взаємодії, $\nu_p = \nu_0 = \text{const}$ для моделі твердих сфер.

Із дисперсійного співвідношення (2.67) виходить, що в довгохвильовій межі боголюбівські квазічастинки поводяться як фонони зі швидкістю звуку $c = \sqrt{\frac{\varrho\nu_0}{m}}$ та при низькій температурі термодинаміка бозеконденсованої системи визначається її фононним спектром. На противагу цьому в короткохвильовій межі квазічастинки поводяться як вільні частинки з енергією $p^2/2m$.

Розглядаючи слабковзаємодіючий газ твердих сфер, ми розвинемо за степенями ν_0 густину станів, що може бути корисним для дослідження розріджених багатобозонних систем.

Для опису слабковзаємодіючої системи бозонів у зовнішньому потенціалі застосуємо метод, який ґрунтується на теорії ідеального бозе-газу, описаній у пункті 2.5.1. Зв'язок між енергією та імпульсом частинки масою m можна записати, використовуючи результат Боголюбова для спектра елементарних збуджень слабковзаємодіючого бозе-газу (2.67).

Для конкретизації задачі розглядатимемо двовимірну систему.

У випадку твердих сфер потенціал взаємодії у борнівському наближенні можна записати

$$\Phi(\mathbf{r}) = \nu_0 \delta(\mathbf{r}).$$

Вигляд потенціалу взаємодії визначає мінімальне значення енергії (2.67), тобто енергії основного стану. При $p = 0$

$$\varepsilon \simeq \frac{p^2}{2m} \left(\frac{4m\varrho\nu_0}{p^2} \right)^{1/2} = p\sqrt{\frac{\varrho\nu_0}{m}},$$

$$\varepsilon\Big|_{p\to 0} = 0.$$

Обчислимо основні термодинамічні функції.

Густина станів

$$g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{(dp)\int dV}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{\Omega_2 V}{(2\pi\hbar)^2} p\, dp,$$

$$p(\varepsilon) = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + m^2\varrho^2\nu_0^2} - m\varrho\nu_0},$$

$$p(\varepsilon)\, dp = m^2\varepsilon(m^2\varepsilon^2 + m^2\varrho^2\nu_0^2)^{-1/2} d\varepsilon.$$

Функцію $g(\varepsilon)$ запишемо, використовуючи розклад за параметром взаємодії ν_0:

$$g(\varepsilon) = g_0(\varepsilon) + \nu_0 g_1(\varepsilon) + \nu_0^2 g_2(\varepsilon) + \cdots$$

Зважаючи на різні ділянки збіжності функції $p(\varepsilon)$, розгляньмо два випадки:

1) $\varepsilon < \varrho\nu_0$

Можна записати

$$p\, dp \;=\; \frac{m\varepsilon}{\varrho\nu_0} \left(\frac{\varepsilon^2}{\varrho^2\nu_0^2} + 1 \right)^{-1/2} d\varepsilon =$$

$$= \quad m\left[\frac{\varepsilon}{\varrho\nu_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{(2n-1)!!}{2^n}\left(\frac{\varepsilon}{\varrho\nu_0}\right)^{2n+1}\right]d\varepsilon. \quad (2.68)$$

2) $\varepsilon > \varrho\nu_0$

$$\begin{aligned} p\,dp &= m\left(1+\frac{\varrho^2\nu_0^2}{\varepsilon^2}\right)^{-1/2}d\varepsilon = \\ &= m\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{(2n-1)!!}{2^n}\left(\frac{\varrho\nu_0}{\varepsilon}\right)^{2n}\right)d\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Кількість частинок визначаємо з (2.62):

$$N = N_0+\int_0^{\infty}\frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} = N_0+\int_0^{\varrho\nu_0}\frac{g_{\varepsilon<\varrho\nu_0}(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1}+\int_{\varrho\nu_0}^{\infty}\frac{g_{\varepsilon>\varrho\nu_0}(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1}.$$

Зміст індексів біля $g(\varepsilon)$ очевидний.

Перепишімо інтеґрал для першого випадку так:

$$\int_0^{\varrho\Phi}\frac{g_{\varepsilon<\varrho\nu_0}(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} = \frac{V}{2\pi\hbar^2}\left(\frac{m}{\varrho\nu_0}\int_0^{\varrho\nu_0}\frac{\varepsilon\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1}-\frac{m}{2\varrho^3\nu_0^3}\int_0^{\varrho\nu_0}\frac{\varepsilon^3\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{3m}{8\varrho^5\nu_0^5}\int_0^{\varrho\nu_0}\frac{\varepsilon^5\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1}-\cdots\right).$$

Розгляньмо окремо інтеґрал

$$\int_0^{\varrho\nu_0}\frac{\varepsilon\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\varrho^2\nu_0^2+T\varrho\nu_0\ln\left(1-e^{\frac{\varrho\nu_0-\mu}{T}}\right)+T^2\left[\mathrm{Li}_2\left(e^{\frac{\varrho\nu_0-\mu}{T}}\right)-\mathrm{Li}_2\left(e^{\frac{-\mu}{T}}\right)\right],$$

Розписуючи полілогарифм (2.58), матимемо

$$\mathrm{Li}_2\left(e^{\frac{\varrho\nu_0-\mu}{T}}\right)-\mathrm{Li}_2\left(e^{\frac{-\mu}{T}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{-n\mu}{T}}}{n^2}\left(e^{\frac{n\varrho\nu_0}{T}}-1\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{-n\mu}{T}}}{n^2}\left(n\frac{\varrho\nu_0}{T}+\frac{1}{2}n^2\frac{\varrho^2\nu_0^2}{T^2}+\cdots\right) =$$

$$= \frac{\varrho\nu_0}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{-n\mu}{T}}}{n}+\frac{1}{2}\frac{\varrho^2\nu_0^2}{T^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{-n\mu}{T}}+\mathcal{O}(\varrho^3\nu_0^3) =$$

$$= -\frac{\varrho\nu_0}{T}\ln\left(1-e^{\frac{-\mu}{T}}\right) + \frac{\varrho^2\nu_0^2}{2T^2}\frac{e^{\frac{-\mu}{T}}}{1-e^{\frac{-\mu}{T}}} + \mathcal{O}(\varrho^3\nu_0^3).$$

Тут враховано, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n\frac{-\mu}{T}}}{n} = -\ln\left(1-e^{\frac{-\mu}{T}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{-n\mu}{T}} = \frac{e^{\frac{-\mu}{T}}}{1-e^{\frac{-\mu}{T}}}.$$

Остаточно отримаємо значення інтеґрала

$$\int_0^{\varrho\nu_0}\frac{\varepsilon\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} = \frac{1}{2}\frac{\varrho^2\nu_0^2}{e^{-\mu/T}-1} + \mathcal{O}(\varrho^3\nu_0^3).$$

Аналогічно обчислюємо наступні інтеґрали.

$$\int_0^{\varrho\nu_0}\frac{g_{\varepsilon<\varrho\nu_0}(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} = \frac{mV}{2\pi\hbar^2}\Big\{\frac{1}{2}\frac{\varrho\nu_0}{e^{-\mu/T-1}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{\varrho\nu_0}{e^{-\mu/T}-1} +$$
$$+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}\frac{\varrho\nu_0}{e^{-\mu/T}-1} + \mathcal{O}(\varrho^2\nu_0^2)\Big\}. \tag{2.70}$$

Після перетворень можна записати (з точністю до лінійних доданків):

$$\int_0^{\varrho\nu_0}\frac{g_{\varepsilon<\varrho\nu_0}(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} = \frac{mV}{2\pi\hbar^2}\varrho\nu_0\frac{1}{e^{-\mu/T}-1}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!2^n(2n+2)}\right]$$
$$= \frac{mV}{2\pi\hbar^2}\varrho\nu_0\frac{1}{e^{-\mu/T}-1}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(n+1/2)}{2n+2}\right]$$
$$= \frac{mV}{2\pi\hbar^2}\varrho\nu_0\frac{1}{e^{-\mu/T}-1}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Для $\varepsilon > \varrho\nu_0$, використовуючи зазначений вище спосіб, можемо записати:

$$\int_{\varrho\nu_0}^{\infty}\frac{g_{\varepsilon>\varrho\nu_0}(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} = \frac{mV}{2\pi\hbar^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{T\frac{1}{n}e^{n(\mu-\varrho\nu_0)/T} - \frac{1}{2}e^{n\mu/T}\varrho\nu_0 +$$
$$+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}e^{n\mu/T}\varrho\nu_0 - \frac{5}{16}\cdot\frac{1}{5}e^{n\mu/T}\varrho\nu_0 + \frac{35}{128}\cdot\frac{1}{7}e^{n\mu/T}\varrho\nu_0 + \ldots +$$
$$+ +\varrho^2\nu_0^2\ln\frac{n\varrho\nu_0}{T}\frac{e^{n\mu/T}n}{T} + \ldots\Big\}.$$

Після перетворень, аналогічних виконаним для першого інтеґрала,

$$\int_{\varrho\nu_0}^{\infty} \frac{g_{\varepsilon>\varrho\nu_0}(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} = -\frac{mV}{2\pi\hbar^2}T\ln\left(1-e^{\frac{\mu-\varrho\nu_0}{T}}\right) + \\ + \frac{mV}{2\pi\hbar^2}\varrho\nu_0\frac{1}{e^{-\mu/T}-1}\left(1-\sqrt{2}\right). \qquad (2.71)$$

Для розрахунку хімічного потенціалу та критичної температури запишемо повну кількість частинок

$$N = N_0 + \int_0^{\varrho\nu_0} \frac{g_{\varepsilon<\varrho\nu_0}(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} + \int_{\varrho\nu_0}^{\infty} \frac{g_{\varepsilon>\varrho\nu_0}(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} \\ = N_0 + \frac{mV}{2\pi\hbar^2}\left[-T\ln\left(1-e^{\frac{\mu-\varrho\nu_0}{T}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\varrho^2\nu_0^2\frac{e^{n\mu/T}}{T}n\ln\frac{n\varrho\nu_0}{T}\right]. \qquad (2.72)$$

Після перетворень маємо

$$N = N_0 + \frac{mV}{2\pi\hbar^2}\left[-T\ln\left(1-e^{\frac{\mu-\varrho\nu_0}{T}}\right) + \frac{1}{4T\,\mathrm{sh}^2\,\frac{\mu}{2T}}\varrho^2\nu_0^2\ln\frac{\varrho\nu_0}{T}\right]. \qquad (2.73)$$

Це — рівняння для визначення хімічного потенціалу, яке зручніше переписати у вигляді:

$$-T\ln\left(1-e^{\frac{\mu-\varrho\nu_0}{T}}\right) + \frac{1}{4T\,\mathrm{sh}^2\,\frac{\mu}{2T}}\varrho^2\nu_0^2\ln\frac{\varrho\nu_0}{T} = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\varrho,$$

де враховано, що при наближенні до точки бозе-конденсації справа $N_0 = 0$. Бачимо, що при $\mu \to 0$ другий доданок стає розбіжним, що, зокрема, вказує на існування фазового переходу.

Для оцінки хімічного потенціалу в лінійному наближенні запишемо його так:

$$\mu = \mu_0 + \Delta\mu.$$

Тут μ_0 — хімічний потенціал ідеального газу, а $\Delta\mu$ — доданок, який враховує взаємодію в системі. Знаходимо його з рівняння

$$-T\ln\left(1-e^{\frac{\mu-\varrho\nu_0}{T}}\right) + o(\rho\nu_0) = -T\ln\left(1-e^{\frac{\mu_0}{T}}\right).$$

Отже, $\Delta\mu = \varrho\nu_0$:

$$\mu = \mu_0 + \Delta\mu = \mu_0 + \varrho\nu_0.$$

Тепер можна визначити T_c як точку, в якій потенціал ідеального бозе-газу набуває значення $(-\varrho\nu_0)$:

$$-T_c \ln\left(1 - e^{\frac{-\varrho\nu_0}{T_c}}\right) = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\varrho. \tag{2.74}$$

Отже, для T_c отримаємо трансцендентне рівняння. Для малих ν_0:

$$T_c \simeq -\frac{2\pi\hbar^2\varrho/m}{\ln\left(\nu_0/\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)} \to 0, \tag{2.75}$$

що збігається з $T_c = 0$ для ідеального двовимірного бозе-газу.

У таблиці 2.2 наведено порівняння числових розрахунків критичної температури зі значенням, яке дає вираз (2.75).

Таблиця 2.2. Залежність критичної температури однорідного слабковзаємодіючого бозе-газу від параметра взаємодії ν_0. Значення параметрів: $2\pi\hbar^2/m = 1$, $\varrho = 1$.

ν_0	Числовий результат	Оцінка (2.75)
1.0	0.95	∞
0.5	0.74	1.44
0.25	0.58	0.72
0.125	0.47	0.48
0.0625	0.39	0.36
0.03125	0.32	0.29

Розгляньмо далі поведінку системи у просторі вимірності $D = 4$. Як ми побачимо в наступному розділі, це ефективно відповідає ідеальному двовимірному газові в зовнішньому квадратичному потенціалі. У цьому випадку показник ε у густині станів збільшується на 1,

див. (2.55). Для $\varepsilon < \varrho\nu_0$ найнижчі степені — $\varrho^2\nu_0^2$, тобто нелінійні за $\varrho\nu_0$.

Згідно з попередніми наближеннями,

$$\begin{aligned}\int_{\varrho\nu_0}^{\infty} \frac{g_{\varepsilon>\varrho\nu_0}(\varepsilon)\, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} &= T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu/T}}{n^2} + \mathcal{O}(\varrho^2\nu_0^2 \ln \varrho\nu_0) \\ &= T^2\, \mathrm{Li}_2\left(e^{\frac{\mu}{T}}\right) + \mathcal{O}\left(\varrho^2\nu_0^2 \ln \varrho\nu_0\right). \qquad (2.76)\end{aligned}$$

Тобто, у наближенні, лінійному за ν_0, хімічний потенціал збігається з результатом для ідеального бозе-газу. Поправки матимуть порядок $\varrho^2\nu_0^2 \ln \varrho\nu_0$.

2.6. Висновки до розділу 2

У розділі проаналізовано бозе-системи з різними типами міжчастинкових взаємодій. Для випадку сильних взаємодій застосовано два різні підходи до розрахунку спектра елементарних збуджень, один із яких дає добрий опис спектра елементарних збуджень у довгохвильовій границі, а інший — в області більших значень хвильового вектора. При цьому досягнуто коректного опису фононної ділянки спектра рідкого гелію-4 отримано без застосування поняття ефективної маси, а для системи бозонів із потенціалом Юкави отримано якісний збіг з результатами інших авторів.

Детальніше вивчення точних комутаційних співвідношень для операторів $\hat{A}_{\mathbf{q}}$, $\hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}}$, за допомогою яких розраховано спектр у підрозділі 2.2, може бути предметом окремих досліджень.

Ми очікуємо, що подальший розвиток обчислень міжатомних потенціалів покращить розрахований енергетичний спектр. Отримані загальні вирази можна застосовувати до вивчення інших бозе-систем,

насамперед тих, де відомі фур'є-зображення потенціалів (напр., розріджені бозе-гази з потенціалом у вигляді δ-функції чи заряджені бозе-системи [314]). Для покращення опису рідкого гелію поза довгохвильовим наближенням потрібно зокрема враховувати тричастинкові взаємодії та застосовувати інші способи розщеплення триоператорних функцій.

Для слабковзаємодіючого бозе-газу розраховано потенціал взаємодій між атомами рубідію. У модельній системі твердих сфер обчислено густину станів, кількість частинок, критичну температуру та хімічний потенціал із використанням теорії ідеального газу на підставі спектра Боголюбова. Для двовимірного газу отримано розклади за параметром взаємодії ν_0, які можна узагальнити для довільної вимірності. Показано, що критична температура $T_c \sim -1/\ln \nu_0$ й очікувано прямує до нуля, а хімічний потенціал газу в пастці з точністю до лінійних за ν_0 доданків дорівнює хімічному потенціалові ідеального газу й відрізняється від нього доданками типу $\varrho^2 \nu_0^2 \ln \varrho\nu_0$.

РОЗДІЛ 3

СИСТЕМИ ЧАСТИНОК У ЗОВНІШНЬОМУ ПОТЕНЦІАЛІ

3.1. Вступ

Наявність зовнішнього потенціалу (пастки, від англ. *trap*) забезпечує сприятливі умови для контролю за розрідженими охолодженими газами та дослідження їхніх властивостей. Поведінку бозе-систем визначають не лише просторова вимірність та кінематичні характеристики частинок, але й форма зовнішнього поля [315]. Саме тому важливо спочатку підсумувати деякі загальні відомості про ідеальні бозе-гази в пастках.

Результати цього розділу опубліковано у статтях [74, 82, 84, 94].

3.1.1. Ідеальний газ у зовнішньому потенціалі. Енергію частинки у D-вимірному просторі можна подати в такому загальному вигляді

$$\varepsilon = \alpha p^{\beta} + \sum_{i=1}^{D} b_i \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^{\eta_i}. \tag{3.1}$$

Для характеристики явища конденсації Бозе–Айнштайна доцільно ввести параметр χ [316]:

$$\chi = \frac{D}{\beta} + \sum_{i=1}^{D} \frac{1}{\eta_i} > 1. \tag{3.2}$$

Величина $(\chi - 1)$ — це показник степеня у функції густини станів (див. зокрема [100]), яка відповідає проаналізованому далі квазікласичному наближенню, $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\chi-1}$ порівняно з $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D/2-1}$ для ідеального

D-вимірного газу вільних частинок. Лише за умови (3.2) у системі може відбуватися бозе-конденсація. Легко бачити, що в означення χ входить не тільки вимірність простору D та кінематичні характеристики частинок β (для ідеального газу $\beta = 2$), але також і форма зовнішнього потенціалу, яку визначають показники η_i. Для бозе-газу з $D/\beta \leq 1$ зовнішній потенціал має визначальну роль для можливості переходу системи у стан бозе-конденсату. Наприклад, у нерелятивістському двовимірному бозе-газі ($D = 2$, $\beta = 2$), згідно з (3.2) бозе-конденсація відсутня, якщо система вільна; це забезпечують значення $\eta_i \to \infty$ — границя, яка відповідає вертикальним стінкам [309]. Але якщо система поміщена в зовнішній гармонічний потенціал, тоді $\eta_i = 2$ і бозе-конденсація відбувається. Критерій (3.2) показує, що вибором потрібного потенціалу можна забезпечити існування конденсації Бозе–Айнштайна у просторі довільної вимірності. Коли зовнішній потенціал симетричний, тобто $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_D = \eta$, то умова спрощується:

$$\frac{D}{\beta} + \frac{D}{\eta} > 1.$$

Можна показати, що теплоємність системи при температурі $T < T_c$ залежить від χ так [315]:

$$C_{T<T_c} = N\chi(\chi+1)\frac{\zeta(\chi+1)}{\zeta(\chi)}\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\chi}, \tag{3.3}$$

а в безпосередньому околі критичної температури при $T > T_c$ —

$$C_{T>T_c} = N\chi(\chi+1)\frac{\zeta(\chi+1)}{\zeta(\chi)}\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\chi} - \chi^2\frac{\zeta(\chi)}{\zeta(\chi-1)}. \tag{3.4}$$

Якщо задовольняється критерій (3.2), то теплоємність у точці T_c розривається і відбувається фазовий перехід. Якщо χ задовольняє умову $1 < \chi \leq 2$, то теплоємність в T_c буде неперервною. Легко бачити, що коли $D/\beta \leq 2$, саме зовнішній потенціал системи визначає поведінку теплоємності системи.

3.1.2. Приклад застосування квазікласичного наближення. Виявляється, що система в зовнішньому полі ефективно поводиться так, як такий самий ідеальний газ вищих вимірностей [310]. Наявність зовнішнього потенціалу не дає змоги просто замінити координатну частину об'єму фазового простору (dq) в (2.52) на об'єм системи V. У квазікласичному трактуванні рух відбувається між класичними точками повороту [310], тобто межі R просторового інтеґрування визначаються з умови $U(x) = \varepsilon$, див. схематичний рис. 3.1.

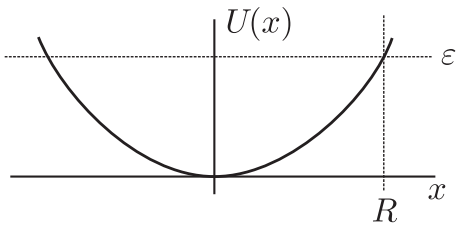


Рис. 3.1. Зовнішній потенціал і класичні точки повороту.

Розгляньмо для прикладу двовимірний ідеальний бозе-газ у пастці

$$U(x,y) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2). \tag{3.5}$$

Енерґія частинки відповідно дорівнюватиме

$$\varepsilon(p) = p^2/2m + U(x,y). \tag{3.6}$$

Кількість частинок

$$N = \int \frac{dx\,dy\,dp_x\,dp_y}{(2\pi\hbar)^2} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1}. \tag{3.7}$$

Імпульс системи

$$p = \sqrt{2m(\varepsilon - U(x,y))}, \qquad dp_x\,dp_y = 2\pi p\,dp, \tag{3.8}$$

Інтеґрал

$$\int dx\,dy = S$$

просто обчислюємо з умови $p = 0$ (між класичними точками повороту)

$$\varepsilon = U(x, y) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2).$$

Легко бачити, що це рівняння еліпса, тому

$$S = \frac{2\pi\varepsilon}{m\omega_x\omega_y},$$

тобто в задачі виникає певна ефективна площа.

Отже, кількість частинок

$$N = \frac{1}{(\hbar\omega_x)(\hbar\omega_y)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1}. \tag{3.9}$$

Зауважимо принагідно, що зі співвідношення (2.62) густина станів

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(\hbar\omega_x)(\hbar\omega_y)} \propto \varepsilon.$$

У загальному випадку (2.55) $\rho \propto \varepsilon^{\frac{D}{2}-1}$, тобто тут маємо ефективну вимірність $D = 4$.

Критична температура двовимірного ідеального бозе-газу в потенціалі загальнішого вигляду $U(r) = U_0(r/a)^\eta$, встановлена з умови $\mu = \varepsilon_0$ при $T = T_c$, буде [310]

$$T_c^{\,\mathrm{2D}} = \left[\frac{2N\hbar^2 U_0^{2/\eta}}{ma^2\Gamma(2/\eta+1)\zeta(2/\eta+1)}\right]^{\eta/(2+\eta)}. \tag{3.10}$$

У D-вимірному просторі в такому ж степеневому потенціалі нижче від критичної температури кількість частинок у конденсаті $N_0 \neq 0$, якщо виконується умова (3.2), і температурна залежність для конденсатної фракції має вигляд [317]:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{D(\eta+2)/2\eta}. \tag{3.11}$$

Для гармонічного потенціалу $\eta = 2$, результати для вільної системи (у скриньці) обчислюють, приймаючи $\eta \to \infty$. Якщо $D = 2$, то бозе-конденсація в останньому випадку не відбувається, оскільки $T_c \to 0$ з формули (3.10) через $\zeta(1) = \infty$.

3.2. Бозони в пористому середовищі під впливом зовнішнього поля

У цьому підрозділі вплив пористого середовища враховано шляхом уведення дробової (фрактальної) просторової вимірності [270, 271].

3.2.1. Загальна схема розрахунків. Для розрахунку термодинамічних функцій системи бозонів використаємо таку просту схему. Кількість частинок N пов'язана з активністю z і температурою T співвідношенням:

$$N = N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{z^{-1}e^{\varepsilon_n/T} - 1}, \tag{3.12}$$

де $N_0 = z/(1-z)$ — заповнення найнижчого енергетичного рівня, ε_n — енергетичний спектр одночастинкових збуджень (причому $\varepsilon_0 = 0$), а g_n — виродження n-ого рівня. Величина N_0 є макроскопічною лише тоді, коли відбувається бозе-конденсація.

Рівняння (3.12) неявно задає z як функцію N і T. Далі активність можна використати для розрахунку енергії

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n g_n}{z^{-1}e^{\varepsilon_n/T} - 1}, \tag{3.13}$$

де враховано, що енергія найнижчого рівня дорівнює нулеві. Похідна енергії за температурою дасть теплоємність $C = dE/dT$.

3.2.2. Система осциляторів у D вимірах. Нехай задано систему N гармонічних осциляторів, що перебувають в ізотропній пастці. Одночастинковий енергетичний спектр такої системи буде $\varepsilon_n = \hbar\omega n$. В одновимірному просторі виродження рівнів дорівнює $g_n = 1$, у двовимірному — $g_n = n+1$, а у тривимірному $g_n = (n+1)(n+1)/2$. Тобто

у випадку D вимірів його визначає біноміальний коефіцієнт

$$g_n = C^{D-1}_{n+D-1} = \frac{(n+D-1)!}{n!(D-1)!}. \tag{3.14}$$

Природним є таке узагальненням цього виразу для неперервних D, порівн. [318]:

$$g_n = \frac{\Gamma(n+D)}{\Gamma(D)\Gamma(n+1)}. \tag{3.15}$$

Отже, вираз (3.12) набуває вигляду

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{z}{\Gamma(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+D)}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{e^{\hbar\omega n/T} - z}. \tag{3.16}$$

Подібне співвідношення можна записати також для енергії (3.13).

3.2.3. Напівкласичний підхід. При напівкласичному підході нехтують дискретністю енергетичних рівнів, а доступний для частинки у зовнішньому потенціалі простір визначають класичні точки повороту [310]. В осциляторній задачі енергія частинки дорівнює $\varepsilon = p^2/2m + m\omega^2 q^2/2$, де p — модуль її імпульсу, а q — модуль її координати.

Після нескладних перетворень отримаємо аналог (3.12):

$$N = N_0 + \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \mathrm{Li}_D(z), \tag{3.17}$$

де $\mathrm{Li}_D(z)$ — полілогарифм (2.58).

Критичну температуру T_c (точку, в якій починається бозе-конденсація) визначають дві умови, $N_0 = 0$ і $z = 1$. Із (3.17) отримуємо

$$T_c = \hbar\omega \left[\frac{N}{\zeta(D)}\right]^{1/D}. \tag{3.18}$$

Зауважмо, що цей результат справедливий лише для $D > 1$, а також, що ніяких ознак бозе-конденсації в гармонічній пастці при $D \leq 1$ не спостерігається.

Конденсатна фракція дорівнює

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^D, \tag{3.19}$$

а енергія

$$E = \hbar\omega D \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D+1} \mathrm{Li}_{D+1}(z). \tag{3.20}$$

При $T < T_c$ теплоємність має вигляд

$$C = D(D+1)\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D+1). \tag{3.21}$$

3.2.4. Точні результати: $1/N$-розклади. Перед тим, як перейти до точних розрахунків за формулою (3.16), варто з'ясувати, якою є термодинамічна границя у цій задачі. Підказку дає формула (3.18): T_c залишається сталою, якщо $\omega N^{1/D} = \mathrm{const}$. Таку ж умову можна отримати з інших міркувань [14, 311]. Для спрощення розрахунків зручно використовувати $\hbar\omega$ як одиницю енергії й температури. Також позначимо

$$T_0 = \left[\frac{1}{\zeta(D)}\right]^{1/D}. \tag{3.22}$$

Критична температура системи з дискретним спектром визначається з умови

$$N = \frac{1}{\Gamma(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+D)}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{e^{n/T_c} - 1}, \qquad T_c = T_0 N^{1/D}. \tag{3.23}$$

Щоб його перетворити, можна скористатися формулою Стірлінґа для Г-функції й отримати:

$$\frac{\Gamma(n+D)}{\Gamma(n+1)} \approx n^{D-1} \left\{1 + \frac{1}{n}\frac{D(D-1)}{2} + \ldots\right\}. \tag{3.24}$$

Цей вираз є асимптотичним.

У границі великих N підсумовування в першому доданку можна зробити за формулою Ейлера–Маклорена:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{D-1}}{e^{n/T_c}-1} &= T_c^D\int_{1/T_c}^{\infty}\frac{x^{D-1}\,dx}{e^x-1}+\frac{1}{2}T_c+\ldots= \\ &= T_c^D\int_0^{\infty}\frac{x^{D-1}\,dx}{e^x-1}-T_c^D\int_0^{1/T_c}\frac{x^{D-1}\,dx}{e^x-1}+\frac{1}{2}T_c+\ldots= \\ &= T_c^D\Gamma(D)\zeta(D)+T_c\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{D-1}+\ldots\right]+o(T_c),\end{aligned}$$

де крапки позначають малі поправки до другого та наступних доданків у формулі Ейлера–Маклорена.

Другий доданок у (3.24) дає такий внесок:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{D-2}}{e^{n/T_c}-1}=T_c\sum_{n=1}^{\infty}n^{D-3}+o(T_c)=T_c\zeta(3-D)+o(T_c).$$

Цей розклад є правильним при $D<2$.

Решту доданків у (3.24) можна розрахувати аналогічно, проте вони дають малі поправки й ними можна знехтувати.

Збираючи розраховані суми, запишемо розклад для критичної температури N-частинкової системи $T_c^{(N)}=T_0^{(N)}N^{1/D}$:

$$T_0^{(N)}=\left[\frac{1}{\zeta(D)}\right]^{1/D}\left\{1-B_DN^{1/D-1}+o(N^{1/D-1})\right\}, \tag{3.25}$$

де

$$\begin{aligned}B_D &= \left(\frac{1}{\zeta(D)}\right)^{1/D}\frac{1}{2\Gamma(D+1)}\times \\ &\quad\times\left[1-\frac{2}{D-1}+D(D-1)\zeta(3-D)+\ldots\right].\end{aligned} \tag{3.26}$$

3.2.5. Числові розрахунки. Числовий аналіз проведено для випадку килимка Сєрпінського, об'єкта із гаусдорфівською вимірністю $D=\ln 8/\ln 3=1.892789\ldots$. Результати наведено на рис. 3.2 і 3.3.

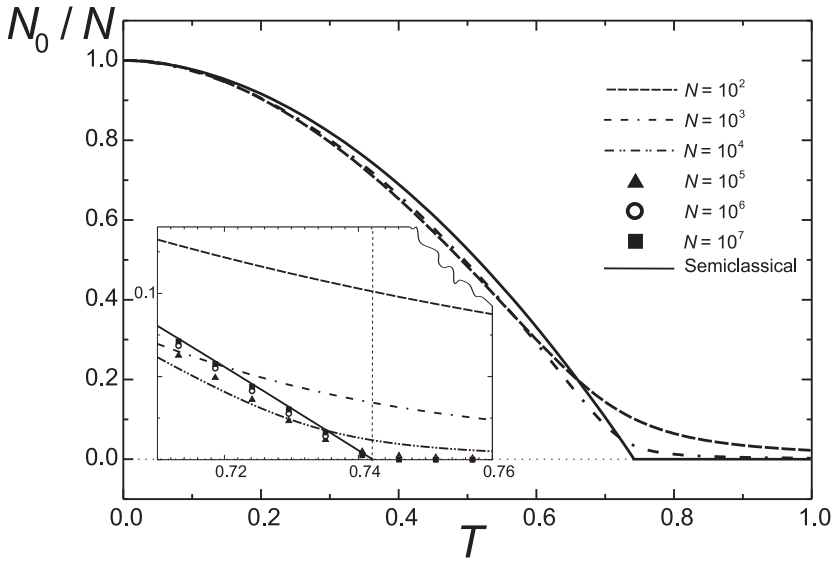


Рис. 3.2. Конденсатна фракція системи бозонів у просторі з дробовою вимірністю $D = 1.892789\ldots$, що відповідає фракталові "килимок Сєрпінського". Суцільною лінією показано результати напівкласичного наближення (3.19). На врізці показано окіл температури фазового переходу T_c. Одиниці вимірювання зафіксовано умовою $\hbar\omega N^{1/D} = 1$.

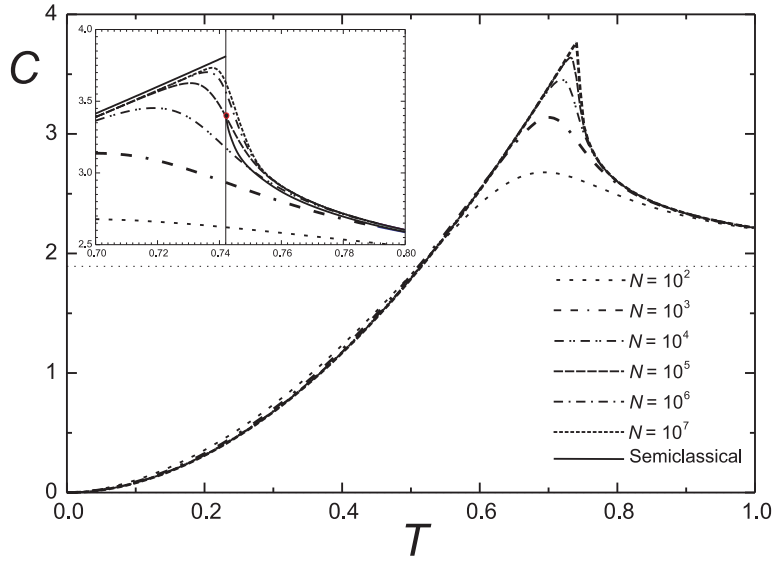


Рис. 3.3. Теплоємність системи бозонів у просторі з дробовою вимірністю $D = 1.892789\ldots$, що відповідає фракталові "килимок Сєрпінського". Суцільною лінією показано результати напівкласичного наближення (3.21). На врізці показано окіл температури фазового переходу T_c. Одиниці вимірювання зафіксовано умовою $\hbar\omega N^{1/D} = 1$.

3.3. Метод наближеного вторинного квантування для бозонів у пастці

У цьому підрозділі викладено метод, який є узагальненням підходу Боголюбова [10] на випадок слабковзаємодіючого D-вимірного бозе-газу у гармонічному зовнішньому потенціалі. З цією метою до гамільтоніана вихідної системи застосовано метод наближеного вторинного квантування на власних функціях D-вимірного гармонічного осцилятора. Унаслідок діагоналізації гамільтоніана отримано систему матричних рівнянь, що дозволило врешті розрахувати конденсатну фракцію та енергію [82].

3.3.1. Діагоналізація гамільтоніана. Розглядатимемо D-вимірну систему N слабковзаємодіючих бозонів масою m кожен, які перебувають у гармонічному зовнішньому потенціалі (пастці)

$$V(x_1, \ldots, x_D) = \frac{m}{2}\left(\omega_1^2 x_1^2 + \ldots + \omega_D^2 x_D^2\right). \tag{3.27}$$

Потенціал міжатомної взаємодії має вигляд $U(x_1, \ldots, x_D) = g\delta(\mathbf{x})$, який відповідає борнівському наближенню в моделі твердих сфер, де вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_D)$, а g — параметр взаємодії.

Гамільтоніан задачі має вигляд

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V(\mathbf{x}_j)\right] + \sum_{1\le j<l\le N} U(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l) = \hat{H}_0 + \hat{U}. \tag{3.28}$$

У цьому виразі $\hat{\mathbf{p}}_j$ — оператор імпульсу j-ої частинки, $\mathbf{x}_j$ — її координата.

Вторинне квантування можна побудувати з використанням власних функцій $|\mathbf{n}\rangle = |n_1, \ldots, n_D\rangle$ оператора $\hat{H}_0$, що відповідає звичайному D-вимірному гармонічному осциляторові. Для спрощення вимагатимемо,

щоб відношення частот $\omega_1, \ldots, \omega_D$ не було раціональним числом — цим уникнемо випадкового виродження енергетичних рівнів.

Нехай $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{n}}, \hat{a}_{\mathbf{n}}$ — оператори породження–знищення стану $|\mathbf{n}\rangle$. Відповідні енергетичні рівні $\varepsilon_{\mathbf{n}} = \hbar\left(\omega_1 n_1 + \ldots + \omega_D n_D\right)$. У такому зображенні гамільтоніан (3.28) дорівнює

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{n}} \varepsilon_n \hat{a}^\dagger_{\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m},\mathbf{m}',\mathbf{n},\mathbf{n}'} \langle \mathbf{mn}|U|\mathbf{m}'\mathbf{n}'\rangle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{m}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{m}'} \hat{a}_{\mathbf{n}'}. \qquad (3.29)$$

Оператори задовольняють стандартні бозонні комутаційні співвідношення:

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{n}'}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{n}}\right] = \delta_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} \qquad (3.30)$$

Застосуємо наближене вторинне квантування відповідно до [10]. Нехай N_0 — кількість частинок на найнижчому енергетичному рівні ε_0. Оскільки взаємодія слабка, то поведінка бозонів не буде суттєво відрізнятися від ідеальної системи. Тобто при низьких температурах можна очікувати конденсації Бозе–Айнштайна, а отже N_0 — макроскопічна величина. Враховуючи, що вона є власним значенням оператора $\hat{a}^\dagger_0 \hat{a}_0$, можемо вважати $\hat{a}^\dagger_0$ і $\hat{a}_0$ c-числами: $\hat{a}^\dagger_0 \hat{a}_0 = N_0,\ \hat{a}_0 \hat{a}^\dagger_0 = N_0 + 1 \simeq N_0,\quad \hat{a}^\dagger_0 \simeq \sqrt{N_0},\ \hat{a}_0 \simeq \sqrt{N_0}$. З метою отримання загальніших фізичних результатів ми не покладатимемо $N_0 = N$. Зауважмо ще, що при $D < 3$ бозе-конденсація можлива лише в пастках [310].

Далі, за Боголюбовим, знехтуємо доданками, що мають більше ніж два оператори з ненульовим індексом. Оскільки власні функції $|\mathbf{n}\rangle$ дійсні, то матричні елементи в другому доданкові (3.29) при різних комбінаціях операторів збігаються: $\langle \mathbf{m0}|U|\mathbf{n0}\rangle = \langle \mathbf{mn}|U|\mathbf{00}\rangle = \langle \mathbf{00}|U|\mathbf{mn}\rangle \equiv g\, c_{\mathbf{mn}}$, де

$$c_{\mathbf{mn}} = \left(\frac{m\omega}{2\pi^2\hbar}\right)^{D/2} \prod_{j=1}^{D} (-1)^{(3m_j+n_j)/2} \frac{1}{\sqrt{m_j!\, n_j!}}\, \Gamma\left(\frac{m_j + n_j + 1}{2}\right), \qquad (3.31)$$

якщо $m_j + n_j$ парне для всіх j і $c_{\mathbf{mn}} = 0$ в іншому випадку. Тут використано позначення $\omega = (\omega_1 \ldots \omega_D)^{\frac{1}{D}}$.

Матричні елементи з трьома нулями дорівнюють

$$\langle \mathbf{n0}|U|\mathbf{00}\rangle \equiv g\, d_{\mathbf{n}} = g\left(\frac{m\omega}{2\pi^2\hbar}\right)^{D/2} \prod_{j=1}^{D} (-1)^{n_j/2} \frac{1}{\sqrt{n_j!}}\, \Gamma\left(\frac{n_j+1}{2}\right), \quad (3.32)$$

якщо n_j парне для всіх j.

Гамільтоніан (3.29) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \hat{H} \;&=\; \text{const} + \sum_{\mathbf{n}} \varepsilon_{\mathbf{n}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{n}} + g N_0^{3/2} \sum_{\mathbf{n}} d_{\mathbf{n}} \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{n}} + \hat{a}_{\mathbf{n}}\right) + \\ &+ g\,\frac{N_0}{2} \sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} c_{\mathbf{mn}} \left(4\hat{a}^\dagger_{\mathbf{m}} \hat{a}_{\mathbf{n}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{m}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{n}} + \hat{a}_{\mathbf{m}} \hat{a}_{\mathbf{n}}\right), \end{aligned} \quad (3.33)$$

де ‘const’ позначає доданки неоператорного типу, які ми далі відкинемо. Для скорочення запису умову $\mathbf{n} \neq 0, \mathbf{m} \neq 0$ не виписано явно. Зауважмо появу лінійних доданків $\sim \hat{a}^\dagger$, $\sim \hat{a}$, яких не було у боголюбівському підході [10] через закон збереження імпульсу.

Нехай індекси m, n нумерують усі стани, які позначали векторні індекси $\mathbf{m}, \mathbf{n}$. Для отримання енергетичного спектра гамільтоніана (3.33) застосуємо процедуру діагоналізації. Для цього зобразимо гамільтоніан (3.33) у такій матричній формі:

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \mathcal{E} \hat{\mathbf{a}} + 2\lambda\sqrt{N_0}\left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger \mathbf{d} + \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{d}\right) + \lambda\left(4\hat{\mathbf{a}}^\dagger C \hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger C \hat{\mathbf{a}}^{\dagger T} + \hat{\mathbf{a}}^T C \hat{\mathbf{a}}\right), \quad (3.34)$$

де $\hat{\mathbf{a}}$ та $\mathbf{d}$ — вектори безмежної розмірності:

$$\hat{\mathbf{a}}^T = (\hat{a}_1,\, \hat{a}_2\, \ldots), \qquad \hat{\mathbf{a}}^\dagger = \left(\hat{a}^\dagger_1,\, \hat{a}^\dagger_2,\, \ldots\right), \quad \mathbf{d}^T = (d_1,\, d_2,\, \ldots),$$

діагональна матриця

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \ldots \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix},$$

а елементами матриці C є коефіцієнти c_{mn}. Також для скорочення запису введено позначення $g\,N_0/2 = \lambda$.

Щоб отримати гамільтоніан в діагональному вигляді

$$\hat{H} = \sum_n \epsilon_n \hat{\alpha}_n^\dagger \hat{\alpha}_n = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^\dagger \mathfrak{E}\, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{3.35}$$

де $\mathfrak{E}$ — діагональна матриця з елементами ϵ_n, можна застосувати узагальнення відомих u–v перетворень Боголюбова у такій формі:

$$\hat{\mathbf{a}} = X\hat{\boldsymbol{\alpha}} + Y\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\dagger T} + \mathbf{z}, \qquad \hat{\mathbf{a}}^\dagger = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^\dagger X + \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T Y + \mathbf{z}^T. \tag{3.36}$$

Тут X та Y — квадратні матриці безмежної розмірності, вимагатимемо, щоби вони були ермітовими (симетричними й дійсними), а $\mathbf{z}$ — вектор з дійсними компонентами. З комутаційних співвідношень (3.30) випливає, що X та Y задовольняють таку умову:

$$X^2 - Y^2 = I, \tag{3.37}$$

де I — одинична матриця.

Легко показати, що лінійні доданки (вирази в перших дужках) у рівнянні (3.34) спричиняють лише зсув енерґетичних рівнів, не змінюючи відстані між ними. Тому далі братимемо до уваги лише квадратичні за $\hat{\mathbf{a}}$ й $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ доданки в гамільтоніані.

Щоб занулити лінійні за $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ члени в $\hat{H}$, вектор $\mathbf{z}$ мусить дорівнювати

$$\mathbf{z} = -2\lambda\sqrt{N_0}\,(\mathcal{E} + 6\lambda C)^{-1}\mathbf{d}. \tag{3.38}$$

Вимагаючи відсутності в гамільтоніані членів типу $\hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_n^\dagger$ і $\hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_n$, отримаємо такі матричні рівняння:

$$X\mathcal{E}Y + 4\lambda XCY + \lambda XCX + \lambda YCY = 0, \tag{3.39}$$

$$Y\mathcal{E}X + 4\lambda YCX + \lambda XCX + \lambda YCY = 0. \tag{3.40}$$

Матриця $\mathfrak{E}$ дорівнює

$$\mathfrak{E} = X\mathcal{E}X + Y\mathcal{E}Y + 4\lambda(XCX + YCY) + 2\lambda(XCY + YCX), \quad (3.41)$$

а її власні значення визначають шуканий енергетичний спектр.

Якщо у системі вимкнути міжатомну взаємодію ($g = 0$), то розв'язки матимуть вигляд $X = I,\ Y = 0$. Тому розкладемо матриці X та Y в ряд за параметром λ:

$$X = I + 2\lambda^2\chi^2 + \ldots, \qquad Y = \lambda\upsilon + \lambda^2\upsilon_1 + \ldots\ . \quad (3.42)$$

Матриці $\chi, \upsilon, \upsilon_1$ можна знайти з рівнянь (3.37)–(3.40):

$$\upsilon = 2\chi; \qquad \chi = -\mathcal{E}^{-1}C/2; \qquad \upsilon_1 = 4\,\mathcal{E}^{-1}C\mathcal{E}^{-1}C. \quad (3.43)$$

З точністю до λ^2 отримаємо для матриці $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{E} = \mathcal{E} + 4\lambda C + \frac{\lambda^2}{2}\left\{\left(\mathcal{E}^{-1}C\right)^2\mathcal{E} - 3\,C\mathcal{E}^{-1}C - 2\mathcal{E}^{-1}C^2\right\}, \quad (3.44)$$

а енергетичні рівні $\epsilon_n = \varepsilon_n + 4\lambda c_{nn} + \mathcal{O}(\lambda^2)$, як і треба очікувати з (3.33).

Систему рівнянь (3.37)–(3.40) у загальному випадку розв'язувати складно, оскільки вони є нелінійними щодо безмежних матриць. Їх можна трактувати як систему матричних рівнянь Ріккаті:

$$XAY + XBX + YBY = 0, \quad (3.45)$$

$$YAX + XBX + YBY = 0, \quad (3.46)$$

$$X^2 - Y^2 - I = 0, \quad (3.47)$$

де $A = \mathcal{E} + 4\lambda C,\ B = \lambda C$. Чисельне (непертурбативне) розв'язування такої задачі вимагає спеціальних підходів [319–321].

3.3.2. Результати розрахунків. При бозе-конденсації хімічний потенціал μ системи наближається до нуля, а повне число частинок визначається виразом:

$$N = N_0 + \sum_{n>0} \frac{1}{\exp(\epsilon_n/T) - 1}, \tag{3.48}$$

де N_0 — заповнення найнижчого енергетичного рівня. Тому, знаючи N та енергетичний спектр $\epsilon_n = \epsilon_n(\lambda) = \epsilon_n(gN_0)$ з власних значень (3.44), можна розрахувати N_0 як функцію температури T. Таким чином, приходимо до самоузгодженої задачі, розв'язки якої дають змогу розрахувати енергію

$$E = E_0 + \sum_{n>0} \frac{\epsilon_n}{\exp(\epsilon_n/T) - 1} \tag{3.49}$$

та інші термодинамічні функції.

На рис. 3.4 наведено температурні залежності конденсатної фракції N_0/N та енергії $(E - E_0)/N$ для одновимірного газу. Для простоти розрахунки здійснено для модельної системи з такими параметрами: $\hbar = \omega = 1,\ m = 2\pi^2,\ N = 1000,\ g = 0.0002$.

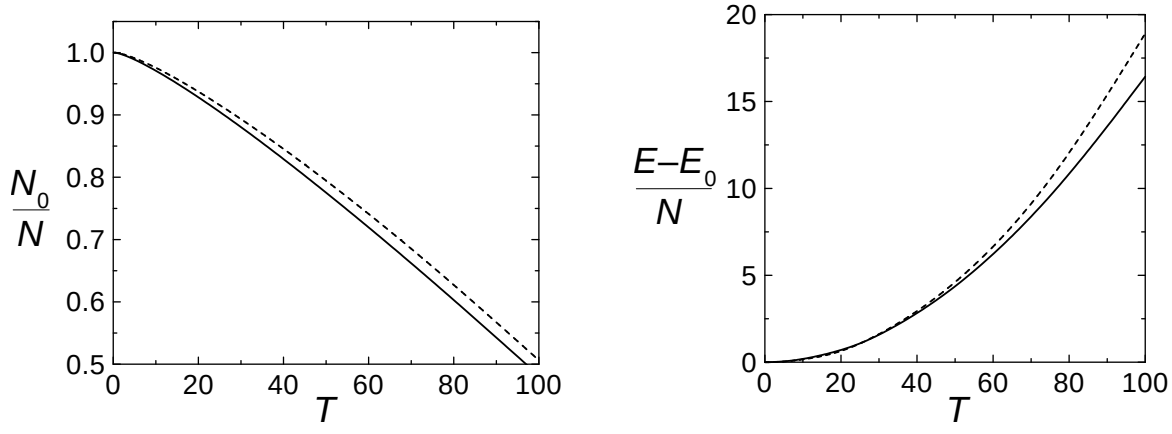


Рис. 3.4. (Ліворуч) — конденсатна фракція N_0/N як функція температури T; (праворуч) — енергія як функція температури. Штрихова лінія відповідає взаємодіючій системі, суцільна — ідеальному бозе-газові.

Оскільки $c_{nn} > 0$, то взаємодія зсуває енергетичні рівні вгору, що ефективно відповідає легшим частинкам. Отже, температура бозе-конденсації зростає. Проте варто зазначити, що запропонований підхід не є коректним для вищих температур — у цьому випадку потрібно враховувати більше доданків у гамільтоніані (3.33).

3.4. Ефективний гамільтоніан і спектр елементарних збуджень бозонів у гармонічній пастці

Головна ідея цього підрозділу полягає в тому, щоби запропонувати математично просте наближення для врахування поправок вищих порядків у гамільтоніані бозонів у гармонічній пастці. Цього можна досягти, пов'язавши певним феноменологічним способом добутки операторів породження–знищення з відповідними числами заповнення.

Як показано в попередньому підрозділі, доданки, лінійні за операторами $\hat{a}^\dagger$ чи $\hat{a}$, дають лише сталий зсув енергетичних рівнів [82], тому їх можна не враховувати в подальшому аналізі. Відкидаючи також неоператорні доданки, отримаємо з (3.29) такий гамільтоніан:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\mathbf{j}\neq 0} \varepsilon_{\mathbf{j}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{j}} + \frac{N_0}{2} \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}\neq 0} c_{\mathbf{jk}} (4\hat{a}^\dagger_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{j}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{k}}) + \\ &+ N_0^{1/2} \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{l}\neq 0} c_{\mathbf{jkl}} (\hat{a}^\dagger_{\mathbf{j}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{m}\neq 0} c_{\mathbf{jklm}}\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{j}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}} \hat{a}_{\mathbf{m}}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

де, враховуючи дійсність власних функцій гармонічного осцилятора,

$$c_{\mathbf{jk}} = \langle \mathbf{j0}|U|\mathbf{k0}\rangle = \langle \mathbf{jk}|U|\mathbf{00}\rangle = \langle \mathbf{00}|U|\mathbf{jk}\rangle, \tag{3.51}$$

$$c_{\mathbf{jkl}} = \langle \mathbf{jk}|U|\mathbf{l0}\rangle = \langle \mathbf{j0}|U|\mathbf{kl}\rangle, \tag{3.52}$$

$$c_{\mathbf{jklm}} = \langle \mathbf{jk}|U|\mathbf{lm}\rangle. \tag{3.53}$$

3.4.1. Процедура діагоналізації. Щоб отримати з (3.50) квадратичну форму за операторами $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$, придатну для подальшої діагоналізації, можна застосувати таку процедуру. Число заповнення, що відповідає станові $|\mathbf{j}\rangle$, дорівнює

$$n_{\mathbf{j}} = \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle. \tag{3.54}$$

На цій підставі пропонуємо замінити оператори в доданках, що містять добутки трьох і чотирьох $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$:

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{j}} \to n^x_{\mathbf{j}}, \qquad \hat{a}_{\mathbf{j}} \to n^{1-x}_{\mathbf{j}}, \tag{3.55}$$

де параметр x визначатимемо згодом.

Після цієї процедури отримаємо задачу про діагоналізацію квадратичної форми загального вигляду

$$\sum_{j,k} \left(A_{jk} \hat{a}^\dagger_j \hat{a}_k + B_{jk} \hat{a}^\dagger_j \hat{a}^\dagger_k + B^*_{jk} \hat{a}_j \hat{a}_k \right), \tag{3.56}$$

яку розглядали в деяких працях [82, 322–324].

Певного математичного спрощення вдається досягти, застосовуючи подальші наближення, а саме пов'язуючи оператори породження–знищення з різними індексами через деякий множник,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{kj}} \hat{a}_{\mathbf{j}}, \qquad \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} = f^*_{\mathbf{kj}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{j}}. \tag{3.57}$$

Беручи до уваги (3.55), отримаємо:

$$f_{\mathbf{kj}} = \left(\frac{n_{\mathbf{k}}}{n_{\mathbf{j}}} \right)^{1-x}, \qquad f^*_{\mathbf{kj}} = \left(\frac{n_{\mathbf{k}}}{n_{\mathbf{j}}} \right)^{x}. \tag{3.58}$$

Оскільки числа заповнення $n_{\mathbf{j}}$ — дійсні і додатні, то $f^*_{\mathbf{kj}} = f_{\mathbf{kj}}$ і тому $x = 1/2$. Для спрощення будемо далі застосовувати також позначення:

$$h_{\mathbf{j}} = n^x_{\mathbf{j}} = \sqrt{n_{\mathbf{j}}}. \tag{3.59}$$

Триоператорні доданки замінимо так:

$$c_{\mathbf{jkl}}\Big(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}+\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}\Big) \;\to\; \frac{c_{\mathbf{jkl}}}{3}\Big(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}h_{\mathbf{l}}+\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{k}}+\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{j}})+ \\ +\;\frac{c_{\mathbf{jkl}}}{3}(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{k}}h_{\mathbf{l}}+\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{k}}+\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{j}})\Big), \quad (3.60)$$

а для чотириоператорних будемо мати відповідно

$$c_{\mathbf{jklm}}\,\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}\hat{a}_{\mathbf{m}} \to \frac{c_{\mathbf{jklm}}}{6}\Big(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}h_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{m}}+\hat{a}_{\mathbf{l}}\hat{a}_{\mathbf{m}}h_{\mathbf{j}}h_{\mathbf{k}}+\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{k}}h_{\mathbf{m}}+ \\ +\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{m}}h_{\mathbf{j}}h_{\mathbf{l}}+\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{j}}h_{\mathbf{m}}+\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{m}}h_{\mathbf{k}}h_{\mathbf{l}}\Big). \quad (3.61)$$

Зважаючи на симетрію коефіцієнтів $c_{\mathbf{jk}}$, $c_{\mathbf{jkl}}$ і $c_{\mathbf{jklm}}$ за всіма індексами, після нескладних перетворень, описаних вище, отримаємо ефективний гамільтоніан у вигляді:

$$\hat{H}_{\text{eff}}=\sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{0}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{j}}\Big[\varepsilon_{\mathbf{j}}+2N_0\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}}f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jk}}+ \\ +\frac{4}{3}\sqrt{N_0}\sum_{\mathbf{k,l}\neq\mathbf{0}}f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jkl}}h_{\mathbf{l}}+\frac{1}{3}\sum_{\mathbf{k,l,m}\neq\mathbf{0}}f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jklm}}h_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{m}}\Big]+ \\ +\sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{0}}\Big(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}+\hat{a}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{j}}\Big)\Big[\frac{N_0}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}}f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jk}}+ \\ +\frac{1}{3}\sqrt{N_0}\sum_{\mathbf{k,l}\neq\mathbf{0}}f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jkl}}h_{\mathbf{l}}+\frac{1}{12}\sum_{\mathbf{k,l,m}\neq\mathbf{0}}f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jklm}}h_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{m}}\Big]. \quad (3.62)$$

Запропоновані перетворення зручно проілюструвати за допомогою формалізму функцій Ґріна. Розгляньмо рівняння руху для двочасових температурних функцій Ґріна $\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle$:

$$\hbar\omega\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle=\frac{1}{2\pi}+\langle\langle[\hat{a}_{\mathbf{q}},\hat{H}]|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle= \\ =\frac{1}{2\pi}+\varepsilon_q\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle+N_0\sum_{\mathbf{k}\neq0}c_{\mathbf{qk}}\Big(2\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{k}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle+\langle\langle\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle\Big)+ \\ +\sqrt{N_0}\sum_{\mathbf{k,l}\neq0}c_{\mathbf{qkl}}\Big(2\langle\langle\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle+\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle\Big)+\sum_{\mathbf{k,l,m}\neq0}c_{\mathbf{qklm}}\langle\langle\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}\hat{a}_{\mathbf{m}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle$$

Використовуючи ефективний гамільтоніан (3.62) отримаємо натомість:

$$\hbar\omega\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle = \frac{1}{2\pi} + \langle\langle[\hat{a}_{\mathbf{q}}, \hat{H}_{\text{eff}}]|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle =$$
$$= \frac{1}{2\pi} + \varepsilon_q\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle + N_0\sum_{\mathbf{k}\neq 0} c_{\mathbf{qk}}\Big(2f_{\mathbf{kq}}\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle + f_{\mathbf{kq}}\langle\langle\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle\Big) +$$
$$+ \frac{2}{3}\sqrt{N_0}\sum_{\mathbf{k},l\neq 0} c_{\mathbf{qkl}}\Big(2f_{\mathbf{kq}}h_{\mathbf{l}}\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle + f_{\mathbf{kq}}h_{\mathbf{l}}\langle\langle\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle\Big) +$$
$$+ \frac{1}{12}\sum_{\mathbf{k},l,\mathbf{m}\neq 0} c_{\mathbf{qk}l\mathbf{m}}f_{\mathbf{kq}}h_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{m}}\Big(\langle\langle\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle + \langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle\Big).$$

Отже, пропонована заміна операторів приводить до замкненої системи рівнянь руху (для $\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle$ і $\langle\langle\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle$) внаслідок того, що вдалося позбутися позадіагональних функцій

$$\sum_{\mathbf{k}\neq 0} c_{\mathbf{qk}}\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{k}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle \quad \rightarrow \quad \langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle\sum_{\mathbf{k}\neq 0} c_{\mathbf{qk}}f_{\mathbf{kq}} \equiv G_0(\mathbf{q})\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle,$$

а також розщепити функції вищих порядків

$$\sum_{\mathbf{k},l\neq 0} c_{\mathbf{qkl}}\langle\langle\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle \quad \rightarrow \quad G_1(\mathbf{q})\langle\langle\hat{a}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle + G_2(\mathbf{q})\langle\langle\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\rangle\rangle \quad \text{тощо,}$$

де коефіцієнти $G_{1,2}(\mathbf{q})$ пов'язані з $f_{\mathbf{kq}}$ і $h_{\mathbf{l}}$. Перше з наведених співвідношень можна до певної міри пов'язати з так званою умовою збереження квантового числа [325]

$$\langle\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{q}}\rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\langle\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{a}_{\mathbf{q}}\rangle,$$

тоді як друге є наближенням типу середнього поля. Подібний підхід було успішно застосовано для моделювання спектра сильновзаємодіючої бозе-системи у розділі 2, див. також [93].

Нижче ми використовуватимемо такі позначення:

$$\gamma_{\mathbf{j}} \;=\; \frac{N_0}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jk}}; \tag{3.63}$$

$$\eta_{\mathbf{j}} = \frac{1}{3}\sqrt{N_0}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}\neq\mathbf{0}} f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jkl}}h_{\mathbf{l}}; \tag{3.64}$$

$$\varphi_{\mathbf{j}} = \frac{1}{12}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{m}\neq\mathbf{0}} f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jklm}}h_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{m}}. \tag{3.65}$$

Гамільтоніан відповідно запишемо у вигляді

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{0}} \Big\{ \left(\varepsilon_{\mathbf{j}} + 4Q_{\mathbf{j}}\right)\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{j}} + Q_{\mathbf{j}}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}} + \hat{a}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{j}}\right)\Big\}, \tag{3.66}$$

де

$$Q_{\mathbf{j}} = \gamma_{\mathbf{j}} + \eta_{\mathbf{j}} + \varphi_{\mathbf{j}}. \tag{3.67}$$

До цієї квадратичної форми далі застосуємо стандартне u–v перетворення Боголюбова.

Оператори кожної моди (стану) виразимо так:

$$\hat{a}_{\mathbf{j}} = u_{\mathbf{j}}\hat{b}_{\mathbf{j}} + v_{\mathbf{j}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{j}}, \qquad \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}} = u^{*}_{\mathbf{j}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{j}} + v^{*}_{\mathbf{j}}\hat{b}_{\mathbf{j}}. \tag{3.68}$$

З бозонного комутатора

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{j}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\right] = 1, \tag{3.69}$$

вимагаючи відсутності позадіагональних добутків $\hat{b}_{\mathbf{j}}\hat{b}_{\mathbf{j}}$ і $\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{j}}$ в остаточних виразах, отримаємо гамільтоніан у вигляді

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{0}} E_{\mathbf{j}}\,\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{b}_{\mathbf{j}}, \tag{3.70}$$

де спектр елементарних збуджень

$$E_{\mathbf{j}} = \sqrt{\varepsilon^2_{\mathbf{j}} + 8\varepsilon_{\mathbf{j}}Q_{\mathbf{j}} + 12Q^2_{\mathbf{j}}}. \tag{3.71}$$

Подальші розрахунки не можна провести без конкретизації функціональних залежностей $f_{\mathbf{j}}$ і $h_{\mathbf{j}}$. З іншого боку, коефіцієнти c (матричні елементи оператора потенціальної енергії) мають вигляд:

$$c_{\mathbf{jk}} = c_{j_1k_1}\ldots c_{j_Dk_D}, \qquad c_{\mathbf{jkl}} = c_{j_1k_1l_1}\ldots c_{j_Dk_Dl_D},$$
$$c_{\mathbf{jklm}} = c_{j_1k_1l_1m_1}\ldots c_{j_Dk_Dl_Dm_D} \tag{3.72}$$

завдяки тому, що власні функції D-вимірного гармонічного осцилятора факторизуються на одновимірні.

3.4.2. Одновимірна задача. Як приклад розрахунків із запропонованим ефективним гамільтоніаном розглянемо одновимірну задачу. Власні функції гармонічного осцилятора з масою m і частотою ω мають вигляд:

$$|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^j j!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_j\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right), \qquad j = 0, 1, 2, \dots , \tag{3.73}$$

де $H_j(\xi)$ — поліноми Ерміта.

Використовуючи природну в цій задачі одиницю довжини

$$a_{\rm ho} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \tag{3.74}$$

яку ще називають довжиною гармонічного осцилятора, для матричних елементів (3.51)–(3.53) отримаємо:

$$\begin{aligned} c_{jk} &= \frac{g}{a_{\rm ho}} \frac{1}{\sqrt{2^{j+k} j!\, k!}} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} = e^{-2\xi^2} H_j(\xi) H_k(\xi)\, d\xi = \\ &= \frac{g}{a_{\rm ho}} \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{(-1)^{(j-k)/2}}{\sqrt{j!\, k!}} \Gamma\left(\frac{j+k+1}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned} c_{jkl} &= \frac{g}{a_{\rm ho}} \frac{1}{\sqrt{2^{j+k+l} j!\, k!\, l!}} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\xi^2} H_j(\xi) H_k(\xi) H_l(\xi)\, d\xi = \\ &= \frac{g}{a_{\rm ho}} \frac{1}{\pi^2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{j!\, k!\, l!}} \Gamma\left(\frac{j+k-l+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j-k+l+1}{2}\right) \times \\ &\qquad \times \Gamma\left(\frac{k-j+l+1}{2}\right), \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$c_{jklm} = \frac{g}{a_{\rm ho}} \frac{1}{\sqrt{2^{j+k+l+m} j!\, k!\, l!\, m!}} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\xi^2} H_j(\xi) H_k(\xi) H_l(\xi) H_m(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{g}{a_{\rm ho}}\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{(-1)^{(k-j+m-l)/2}}{\sqrt{j!\,k!\,l!\,m!}}\frac{\Gamma\left(\frac{j+k+l-m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{j-k+l+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j-k+l-m+1}{2}\right)}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left(\begin{array}{ccc} -j, & -l, & \frac{k-j+m-l+1}{2}; \\ \frac{m-j-k-l+1}{2}, & \frac{k-j-l-m+1}{2}; & \end{array} 1\right). \quad (3.77)$$

Інтеґрування цих виразів у замкненій формі можна здійснити, як показано, наприклад, у працях [227, 326–328]. У наведених формулах $\Gamma(z)$ — це гамма-функція Ейлера, а ${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; z)$ — гіпергеометрична функція. Потрібно також зазначити, що суми індексів у коефіцієнтах c (тобто $j+k$, $j+k+l$ та $j+k+l+m$) мусять бути парними числами, інакше відповідні інтеґрали дорівнюють нулеві завдяки властивостям поліномів Ерміта.

Моделі множників f_{kj} і h_j використовують числа заповнення n_j:

$$f_{kj} = \sqrt{\frac{n_k}{n_j}}, \qquad h_j = \sqrt{n_j}. \quad (3.78)$$

Загалом, для гармонічних осциляторів

$$n_j = \frac{1}{z^{-1}e^{\hbar\omega j/T} - 1}, \quad (3.79)$$

а активність z можна наближено вважати рівною одиниці при малих температурах, що відповідають режимові бозе-конденсації.

У границі $\hbar\omega \gg T$ матимемо

$$n_j \simeq e^{-\hbar\omega j/T}. \quad (3.80)$$

Натомість більшість експериментів із холодними атомними газами відбуваються за протилежних умов, $\hbar\omega \ll T$, див. [225, 329]. Тобто

$$n_j \simeq \frac{T}{\hbar\omega j}. \quad (3.81)$$

На підставі цих простих виразів зробимо числові розрахунки. Залежності f_{kj} і h_j набудуть вигляду:

$$f_{kj} = \sqrt{\frac{j}{k}}, \qquad h_j = \sqrt{\frac{T}{\hbar\omega j}}. \tag{3.82}$$

Це означає зокрема відсутність температурної залежності в γ_j, проте поправки η_j та φ_j будуть пропорційними відповідно до $\sqrt{T}$ і T.

У стані бозе-конденсації заповнення найнижчого рівня N_0 наближається до загальної кількості частинок N, тому покладемо $N_0 = N$ у виразах для γ_j і η_j:

$$\gamma_j = \frac{gN}{a_{\rm ho}}\,\bar{\gamma}_j, \tag{3.83}$$

$$\eta_j = \frac{g}{a_{\rm ho}}\sqrt{\frac{NT}{\hbar\omega}}\,\bar{\eta}_j, \tag{3.84}$$

$$\varphi_j = \frac{g}{a_{\rm ho}}\frac{T}{\hbar\omega}\,\bar{\varphi}_j, \tag{3.85}$$

де $\bar{\gamma}_j$, $\bar{\eta}_j$ і $\bar{\varphi}_j$ — безрозмірні коефіцієнти, отримані внаслідок підстановки (3.75)–(3.77) з f_{kj} і h_j із (3.78) в одновимірні аналоги рівнянь (3.63)–(3.65).

Спектр (3.71) в одновимірному випадку з $\varepsilon_j = \hbar\omega j$ буде

$$E_j = \hbar\omega j\sqrt{1 + 8\frac{\gamma_j + \eta_j + \varphi_j}{\hbar\omega j} + 12\left(\frac{\gamma_j + \eta_j + \varphi_j}{\hbar\omega j}\right)^2}. \tag{3.86}$$

Вводячи безрозмірні параметри

$$x = \frac{gN}{a_{\rm ho}}\frac{1}{\hbar\omega}, \qquad y = \frac{T}{\hbar\omega N}, \tag{3.87}$$

отримаємо

$$E_j = \hbar\omega j\sqrt{1+8\,\frac{x\bar{\gamma}_j + x\sqrt{y}\,\bar{\eta}_j + y\bar{\varphi}_j}{j}+12\left(\frac{x\bar{\gamma}_j + x\sqrt{y}\,\bar{\eta}_j + y\bar{\varphi}_j}{j}\right)^2}. \tag{3.88}$$

Числові значення $\bar{\gamma}_j$, $\bar{\eta}_j$, і $\bar{\varphi}_j$ наведено в табл. 3.1. Залежності енергій перших трьох рівнів $j = 1, 2, 3$ від значень x та y показано на рис. 3.5.

Таблиця 3.1. Значення безрозмірних коефіцієнтів у рівняннях (3.83)–(3.85) залежно від номера рівня j.

j	$\bar{\gamma}_j$	$\bar{\eta}_j$	$\bar{\varphi}_j$
1	0.074987	0.020906	0.041237
2	0.049719	0.047775	0.073939
3	−0.067169	0.045062	0.087680
4	−0.044015	−0.022696	0.081353
5	0.041606	−0.044378	0.056191
6	0.030211	0.005830	0.036522
7	−0.023169	0.030029	0.039952
8	−0.018589	0.000509	0.049381
9	0.012314	−0.017838	0.045257
10	0.010780	−0.001987	0.035160
11	−0.006394	0.009961	0.033071
12	−0.006034	0.001827	0.036096
13	0.003288	−0.005385	0.035395
14	0.003311	−0.001339	0.031684
15	−0.001702	0.002872	0.029970
16	−0.001815	0.000955	0.030215
17	0.000926	−0.001549	0.029776
18	0.001035	−0.000784	0.028471
19	−0.000590	0.000883	0.027376
20	−0.000678	0.000844	0.026641
25	0.000843	−0.000360	0.023545
30	0.001743	−0.004430	0.023388
50	0.007818	0.000009	0.025675
100	−0.000160	0.000125	0.000214

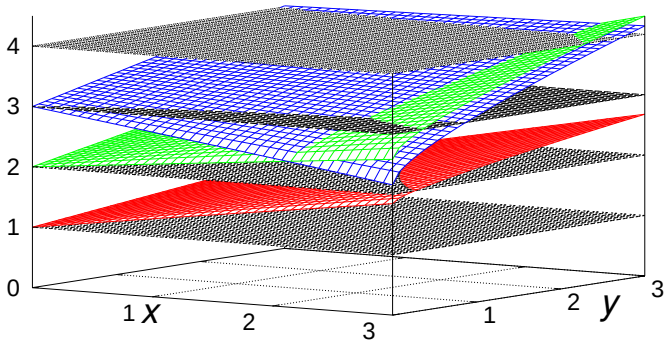


Рис. 3.5. Енергії перших трьох збуджених рівнів E_1, E_2, E_3 (вертикальна вісь, в одиницях $\hbar\omega$) з рівняння (3.88) як функції параметрів x та y (3.87). Червона поверхня — E_1, зелена — E_2, синя — E_3. Сірі площини відповідають енергіям невзаємодіючих осциляторів $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$.

Зауважмо, що коли x досягає значень понад 2, то виникає перетин енергій E_2 і E_3. Подібна поведінка можлива для деяких інших рівнів, оскільки $\bar{\gamma}_j$ і $\bar{\eta}_j$ можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Зрозуміло, що справедливість наближення зменшується для доданків, що містять η_j і ще більше у випадку φ_j. Це пов'язано з кількістю застосованих спрощень порівняно з доданками, які містять γ_j.

Більш послідовний підхід може полягати в отриманні виразів для $h_{\mathbf{j}}$ та $f_{\mathbf{kj}}$, що вимагає розв'язування варіаційної задачі типу Гросса–Пітаєвського, однак вищого порядку. Так, оператор $\hat{a}$ можна розбити на суму неоператорної частини h і малої поправки $\hat{\alpha}$, тобто $\hat{a} = h + \hat{\alpha}$. Відповідний аналіз спричиняє значні математичні ускладнення порівняно з наведеним підходом, а отже суперечить початковій ідеї ефективного спрощення проблеми діагоналізації.

3.4.3. Двосортова бозе-суміш. Слабковзаємодіючі бозе-суміші в гармонічних пастках протягом останнього часу стали предметом активних експериментальних і теоретичних досліджень, зокрема, йдеться

про суміші ізотопів іттербію [238, 330] або рубідію з деякими іншими елементами [330, 331], див. також [332].

Нехай система містить два сорти бозонів, a і b, які характеризуються параметрами взаємодії g_a, g_b і g_{ab}, причому останній відповідає міжсортовій взаємодії. Одночастинкові задачі будуть однаковими для кожного сорту:

$$\hat{H}_{1a} = \hat{H}_{0a} + U_a; \qquad \hat{H}_{1b} = \hat{H}_{0b} + U_b, \tag{3.89}$$

де невзаємодіючі гамільтоніани дорівнюють

$$\hat{H}_{0a} = \hat{K}_a + V_a; \qquad \hat{H}_{0b} = \hat{K}_b + V_b \tag{3.90}$$

із потенціалами пасток

$$V_{a,b}(\mathbf{x}) = \frac{m_{a,b}}{2}\left(\omega_1^2 x_1^2 + \ldots + \omega_D^2 x_D^2\right). \tag{3.91}$$

Доданки взаємодії будуть

$$U_a = g_a\delta(\mathbf{x}); \qquad U_b = g_b\delta(\mathbf{x}); \qquad U_{ab} = g_{ab}\delta(\mathbf{x}). \tag{3.92}$$

У формалізмі чисел заповнення отримаємо:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum \hat{H}_{1a} + \sum \hat{H}_{1b} + \sum U_{ab} = \\ &= \sum_{n_a} \varepsilon_{n_a} \hat{a}^\dagger_{n_a}\hat{a}_{n_a} + \sum_{n_a} \varepsilon_{n_b} \hat{b}^\dagger_{n_b}\hat{b}_{n_b} + U,\end{aligned} \tag{3.93}$$

де суми пробігають усі відповідні частинки, а U — повна потенціальна енергія системи. Отже, нас особливо цікавитиме такий гамільтоніан:

$$\begin{aligned}\hat{H}' &= \sum_{mn}\Big(A_{mn}\hat{a}^\dagger_m\hat{a}_n + B_{mn}\hat{b}^\dagger_m\hat{b}_n + C_{mn}\hat{a}^\dagger_m\hat{a}^\dagger_n + C^*_{mn}\hat{a}_m\hat{a}_n + \\ &\quad + D_{mn}\hat{b}^\dagger_m\hat{b}^\dagger_n + D^*_{mn}\hat{b}_m\hat{b}_n + F_{mn}\hat{a}^\dagger_m\hat{b}^\dagger_n + F^*_{mn}\hat{a}_m\hat{b}_n + \\ &\quad + G_{mn}\hat{a}^\dagger_m\hat{b}_n + G^*_{mn}\hat{b}^\dagger_m\hat{a}_n\Big).\end{aligned} \tag{3.94}$$

Його отримуємо відкиданням три- і чотириоператорних доданків, як показано в попередньому пункті. Діагоналізований гамільтоніан

$$\hat{H}'' = \sum_j E_j \hat{\xi}_j^\dagger \hat{\xi}_j = \sum_m E_m^{(\alpha)} \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m + \sum_n E_n^{(\beta)} \hat{\beta}_n^\dagger \hat{\beta}_n \tag{3.95}$$

можна отримати, безпосередньо застосовуючи процедуру діагоналізації, подібну до описаної у працях [82, 322–324]. Вона є досить складною технічно і вимагає розв'язування нелінійних рівнянь для безмежних матриць; доброю альтернативою може бути пертурбативний розв'язок.

З іншого боку, можна застосувати описану вище процедуру й отримати гамільтоніан у вигляді

$$\hat{H}'' = \sum_j \hat{h}_j, \tag{3.96}$$

де діагоналізація квадратичної форми у кожній моді $\hat{h}_j$ просто зводиться до розв'язування біквадратного рівняння.

Для спрощеного одномодового виразу

$$\begin{aligned} \hat{h} \;=\; & \varepsilon_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \varepsilon_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \\ & + \lambda_a (4\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}) + \lambda_b (4\hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger + \hat{b}\hat{b}) + \\ & + \lambda_{ab} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger), \end{aligned} \tag{3.97}$$

де λ_a, λ_b та λ_{ab} пов'язані з параметрами взаємодії g_a, g_b та g_{ab} і також містять певні ефективні внески, пов'язані зі спрощеннями вихідного гамільтоніана, можна отримати такі дві гілки спектра елементарних збуджень:

$$E^{(1,2)} = \sqrt{\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}, \tag{3.98}$$

де

$$p = (\varepsilon_a + 4\lambda_a)^2 + (\varepsilon_b + 4\lambda_b)^2 - \lambda_a^2 - \lambda_b^2 + 2\lambda_{ab}^2 \tag{3.99}$$

і

$$\begin{aligned} q &= (\varepsilon_a + 4\lambda_a)^2(\varepsilon_a + 4\lambda_a)^2 - \\ &\quad - \lambda_a^2(\varepsilon_b + 4\lambda_b)^2 - \lambda_b^2(\varepsilon_a + 4\lambda_a)^2 - \lambda_a^2\lambda_b^2 - \\ &\quad - 2\lambda_{ab}^2(\varepsilon_a + 4\lambda_a)(\varepsilon_b + 4\lambda_b) - 2\lambda_a\lambda_b\lambda_{ab}^2 - \lambda_{ab}^4. \end{aligned} \tag{3.100}$$

3.5. Одновимірні слабковзаємодіючі гармонічні осцилятори зі статистикою Джентіле

У цьому підрозділі розглядатимемо одновимірну систему гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле [121], див. пункт 1.3.1 на стор. 32. Для неї є характерним особливе заповнення енергетичних рівнів: кількість частинок на певному енергетичному рівні обмежена деяким скінченним числом M, яке називають порядком статистики. Виявляється, зокрема, що можна показати зв'язок між властивостями такої системи та скінченної системи бозонів [83].

Аналіз проводитимемо за близької до нуля температури. Інтерес до системи гармонічних осциляторів пов'язаний зокрема з тим, що тепер досить активно вивчають властивості бозонів у зовнішньому полі (так звана гармонічна пастка) [9]. Використовуючи зв'язок функції розподілу частинок із термодинамічними величинами, дослідимо термодинаміку системи для ідеального випадку та при включенні слабкої міжчастинкової взаємодії.

3.5.1. Вихідні вирази. Вираз для чисел заповнення у статистиці Джентіле має вигляд [33, 121, 127]:

$$f_M(\varepsilon_i, \mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(\varepsilon_i - \mu)/T} - 1}, \tag{3.101}$$

де ε_i — енергія i-го рівня, μ — хімічний потенціал, T — температура системи. Як сказано вище, на кожному рівні може перебувати не більше ніж M частинок. Легко показати, що в граничних випадках $M = 1$ та $M \to \infty$ він переходить у функції розподілу Фермі–Дірака $f_{\mathrm{FD}}(\varepsilon, \mu)$ та Бозе–Айнштайна $f_{\mathrm{BE}}(\varepsilon, \mu)$ відповідно:

$$f_M(\varepsilon, \mu) = \begin{cases} f_{\mathrm{FD}}(\varepsilon, \mu), & M = 1 \\ f_{\mathrm{BE}}(\varepsilon, \mu), & M \to \infty \end{cases}. \tag{3.102}$$

Цікаво відзначити поведінку функції $f_M(\varepsilon, \mu)$ у границях $(\varepsilon - \mu)/T \to 0$ та $T \to 0$. У першому випадку одержуємо співвідношення:

$$\lim_{\frac{\varepsilon-\mu}{T} \to 0} f_M(\varepsilon, \mu) = \frac{M}{2}. \tag{3.103}$$

Для другої границі $T \to 0$ після нескладних перетворень маємо:

$$\lim_{T \to 0} f_M(\varepsilon_i, \mu) = \begin{cases} M, & \varepsilon < \mu_0 \\ 0, & \varepsilon > \mu_0 \end{cases}. \tag{3.104}$$

Ця "сходинка" розмивається з підвищенням температури подібно до функції розподілу Фермі–Дірака. При низьких температурах ($T \to 0$) хімічний потенціал μ практично дорівнює енергії μ_0, яка відіграє роль аналога рівня Фермі.

Далі покажемо, як можна врахувати слабку взаємодію в системі осциляторів. Нехай потенціал взаємодії має вигляд

$$U(x) = g\delta(x), \tag{3.105}$$

де x — координата частинки в одновимірному просторі, а g — параметр взаємодії; при $g = 0$ взаємодія відсутня.

Тоді запишемо вираз для гамільтоніана нашої системи:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\hat{p}_j}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x_j^2 \right] + \sum_{1 \le j < l \le N}^{N} U(x_j - x_l) = \hat{H}_0 + \hat{U}, \tag{3.106}$$

де $\hat{p}_j$ — імпульс j-ої частинки, m — маса однієї частинки, ω — частота осциляцій, що відповідає зовнішньому потенціалу пастки. $\hat{H}_0$ — це гамільтоніан ідеальної системи за відсутності міжчастинкової взаємодії, а $\hat{U}$ — оператор взаємодії.

Енергетичний спектр системи ε_n такий:

$$\varepsilon_n = \hbar\omega n + \lambda c_n, \tag{3.107}$$

тут n — номер енергетичного рівня, $\hbar$ — стала Планка, λ — параметр взаємодії, пропорційний до g, а параметр c_n — функція складної структури [82] (див. рис. 3.6). Відраховуватимемо рівні від $\hbar\omega/2$ та покладемо $\hbar\omega$ рівним одиниці. Щоб знайти енергетичний спектр системи, можна також скористатися звичайною стаціонарною теорією збурень.

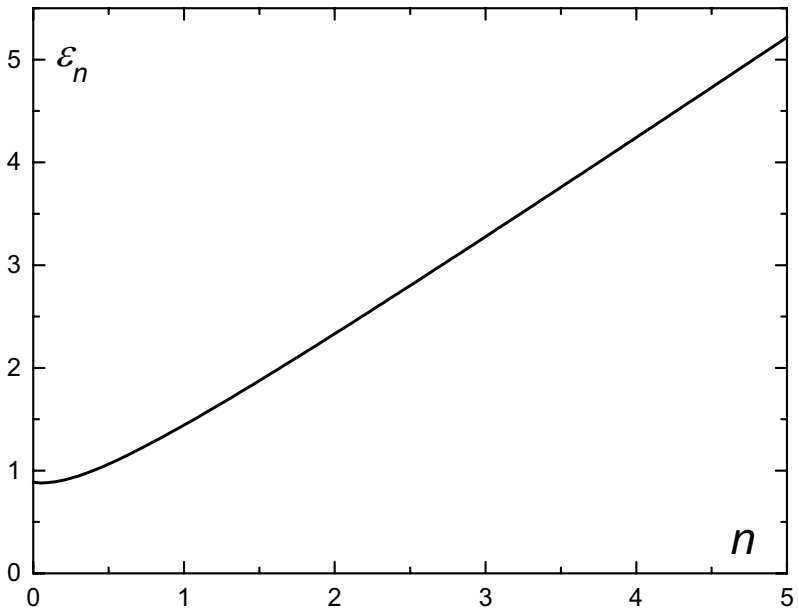


Рис. 3.6. Енергетичний спектр (3.107) при $\lambda = 0.5$.

Коефіцієнт c_n дорівнює

$$c_n = \frac{1}{n!}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{3.108}$$

При великих n, використовуючи формулу Стірлінга, матимемо:

$$c_n \to \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad n \to \infty. \tag{3.109}$$

Відзначмо, що для систем із дробовою статистикою можливий дещо інший підхід до розрахунку енергґетичного спектра на підставі квантовомеханічних міркувань [333]. Автори цієї праці розглядали гармонічний осцилятор як систему, гамільтоніан якої є квадратичною формою

$$\hat{H} = \frac{1}{4}\left[\hat{a}^\dagger\hat{b} + e^{-2\pi i/(M+1)}\hat{b}\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{a} + e^{2\pi i/(M+1)}\hat{a}\hat{b}^\dagger\right]$$

за операторами породження $\hat{a}^\dagger$ і знищення $\hat{b}$, що задовольняють таке комутаційне співвідношення:

$$\left[\hat{b}, \hat{a}^\dagger\right]_M \equiv \hat{b}\hat{a}^\dagger - e^{2\pi i/(M+1)}\hat{a}^\dagger\hat{b} = 1.$$

У наведених виразах збережено позначення M для порядку статистики. Вирази для енергґетичних рівнів матимуть досить громіздкий вигляд, проте числові розрахунки, зроблені в нашій праці, нескладно провести і для іншої функціональної форми спектра.

3.5.2. Розрахунок термодинамічних функцій. Повну кількість частинок у системі задає співвідношення:

$$N = \sum_n f_M\left(\varepsilon_n, \mu\right), \tag{3.110}$$

а енергґія системи пов'язана з $f_M\left(\varepsilon_i, \mu\right)$ так:

$$E = \sum_n \varepsilon_n f_M\left(\varepsilon_n, \mu\right). \tag{3.111}$$

Із формули (3.110) можна отримати залежність хімічного потенціалу від температури T та від кількості частинок у системі N.

Розгляньмо низькотемпературну границю виразу (3.110) для системи невзаємодіючих гармонічних осциляторів, енергґетичний спектр якої $\varepsilon_n = n$. Щоб спростити аналіз, зручно перейти від дискретної

суми до інтеґрування за формулою Ейлера–Маклорена

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) \approx \int_{a}^{b} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\left[f(b)+f(a)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right], \qquad (3.112)$$

де B_{2k} — числа Бернуллі; $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, ...

У результаті нескладних обчислень матимемо для N

$$N = M\mu - T\ln\frac{1-e^{-\mu/T}}{1-e^{-\mu(M+1)/T}} + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{-\mu/T}-1} - \frac{M+1}{e^{-\mu(M+1)/T}-1}\right) + \dots . \qquad (3.113)$$

Зокрема, у границі низьких температур буде такий зв'язок:

$$N = M\mu + M/2 + \dots ,$$

а при $T = 0$ це наближення дає

$$\mu(T=0) = \frac{N}{M} - \frac{1}{2}. \qquad (3.114)$$

Далі розгляньмо термодинамічні величини системи гармонічних осциляторів зі слабкою міжчастинковою взаємодією. Розрахуймо перші поправки за параметром взаємодії λ у виразах для термодинамічних функцій. З цією метою зобразимо хімічний потенціал у вигляді

$$\mu = \mu_{\rm id} + \Delta\mu, \qquad (3.115)$$

де $\mu_{\rm id}$ — хімічний потенціал системи невзаємодіючих осциляторів, а $\Delta\mu$ — поправка, спричинена взаємодією. Використовуючи розклади в ряд за величинами λ і $\Delta\mu$, отримаємо для кількості частинок у першому порядку за поправками:

$$N = \sum_{n}\left[\frac{1}{e^{(n-\mu_{\rm id})/T}-1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(n-\mu_{\rm id})/T}-1}\right] + \qquad (3.116)$$

$$+\sum_n(\Delta\mu-\lambda c_n)\frac{e^{(n-\mu_{\rm id})/T}}{T}\left[\frac{1}{\left(e^{(n-\mu_{\rm id})/T}-1\right)^2}-\frac{(M+1)^2e^{M(n-\mu_{\rm id})/T}}{\left(e^{(M+1)(n-\mu_{\rm id})/T}-1\right)^2}\right],$$

тут вираз під першою сумою — не що інше, як функція розподілу з енергією невзаємодіючих осциляторів $\varepsilon_n = n$ ($\lambda = 0$)

$$f_M^{\rm id}(n,\mu)=\frac{1}{e^{(n-\mu)/T}-1}-\frac{M+1}{e^{(M+1)(n-\mu)/T}-1}, \tag{3.117}$$

тому зрозуміло, що перший доданок у правій частині дорівнює N і відповідні величини знищуються. Зручно ввести позначення для множника у другій сумі:

$$h_M(n)=e^{(n-\mu_{\rm id})/T}\left[\frac{1}{\left(e^{(n-\mu_{\rm id})/T}-1\right)^2}-\frac{(M+1)^2e^{M(n-\mu_{\rm id})/T}}{\left(e^{(M+1)(n-\mu_{\rm id})/T}-1\right)^2}\right]. \tag{3.118}$$

Тоді поправка $\Delta\mu$ (у першому наближенні) матиме вигляд:

$$\Delta\mu=\lambda\,\frac{\sum\limits_n c_n h_M(n)}{\sum\limits_n h_M(n)}. \tag{3.119}$$

Для оцінки значення $\Delta\mu$ можна, взагалі кажучи, знехтувати другим доданком у виразі (3.118).

Для енергії після аналогічних перетворень матимемо:

$$\begin{aligned} E &= \sum_n n f_M^{\rm id}(n,\mu)+\lambda\sum_n c_n\left[f_M^{\rm id}(n,\mu)-\frac{n}{T}h_M(n)\right]+\ldots= \\ &= E_{\rm id}+\lambda\sum_n c_n\left[f_M^{\rm id}(n,\mu)-\frac{n}{T}h_M(n)\right]+\ldots\,. \end{aligned} \tag{3.120}$$

Розрахувавши енергію, можна обчислити й інші термодинамічні функції, наприклад, теплоємність системи:

$$C=\frac{dE}{dT}. \tag{3.121}$$

3.5.3. Хімічний потенціал при $T = 0$. Проаналізуймо значення μ_0 хімічного потенціалу при $T = 0$. Розгляньмо два випадки, коли $\varepsilon_n > \mu_0$ та $\varepsilon_n < \mu_0$.

1) $\varepsilon_n > \mu_0$, дослідимо

$$f_M^{\mathrm{id}}(\varepsilon_n, \mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1}.$$

Тоді показники експонент у знаменнику дорівнюватимуть $+\infty$, а сам вираз — нулеві.

Нагадаймо, що енерґетичний рівень ε_n модельної системи дорівнює $\varepsilon_n = n + \lambda c_n$, тож можемо зробити висновок, що при n, які задовольнятимуть умову $n + \lambda c_n > \mu_0$, вираз під сумою у формулі (3.110) дорівнюватиме нулеві.

2) $\varepsilon_n < \mu_0$, за такої умови експоненти матимуть показник $-\infty$, тож вони дорівнюватимуть нулеві, отже:

$$\begin{aligned} f_M^{\mathrm{id}}(\varepsilon_n, \mu) &= \frac{1}{e^{(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1} = \\ &= -1 - \frac{M+1}{-1} = M. \end{aligned} \tag{3.122}$$

Тобто для всіх значень n, таких, що $n + \lambda c_n \leq \mu_0$ вираз під сумою у формулі (3.110) дорівнює M.

Можна показати [74], що без увімкнення взаємодії ($\lambda = 0$) хімічний потенціал μ_0 (аналог рівня Фермі) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \mu_0 = \dfrac{N}{M} - 1 + x, & \left\{\dfrac{N}{M}\right\} = 0 \\ \\ \mu_0 = \left[\dfrac{N}{M}\right] + x, & \left\{\dfrac{N}{M}\right\} \neq 0, \end{cases} \tag{3.123}$$

де $x < 1$, дужки $[\ldots]$ позначають цілу, а $\{\ldots\}$ — дробову частини числа відповідно. Якщо загальна кількість частинок у системі N ділиться на M без остачі, тобто $\{N/M\} = 0$, то числовий аналіз поведінки μ при $T \to 0$ дає для ідеальної системи $x = 1/2$. Цікаво, що таке значення x точно отримуємо, якщо в розрахунках замінити суму на інтеґрал і застосувати формулу Ейлера–Маклорена.

3.5.4. Результати числових розрахунків. Використовуючи зв'язок функції розподілу з повним числом частинок у системі N (див. формулу (3.110)), ми розрахували хімічний потенціал μ як функцію температури.

У нашій задачі відсутній такий параметр, як об'єм, тому звичну умову термодинамічної границі $N/V = \text{const}$ застосувати не можна. Для системи D-вимірних осциляторів роль термодинамічної границі виконує умова $N^{1/D} = \text{const}$. Її можна отримати на підставі різних міркувань [83, 311]. Тому такі величини, як енергія чи температура, в одновимірному випадку зручно нормувати з множником $1/N$.

Числові розрахунки для $N = 100,\ M = 20$ і $\lambda = 0.1$ та 0.5 наведено на рис. 3.7–3.10. Суцільною лінією показано залежність для ідеального газу ($\lambda = 0$). Дані, за якими побудовано графіки, подано у табл. 3.2.

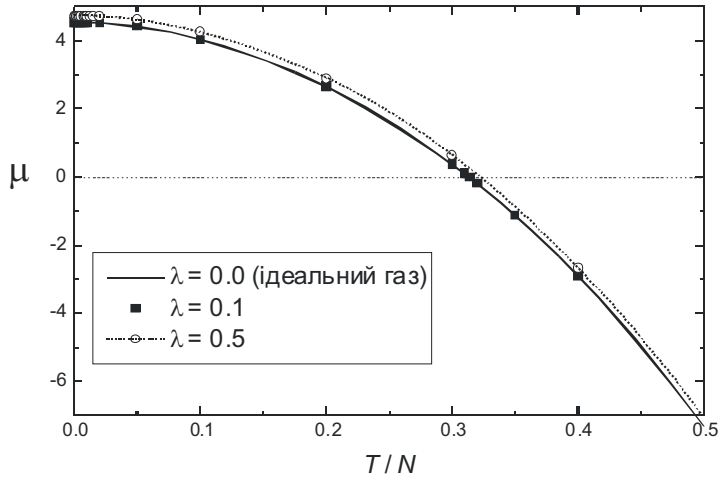


Рис. 3.7. Температурні залежності хімічного потенціалу μ для $\lambda = 0.1$ (квадратики) $\lambda = 0.5$ (пунктирна лінія) та $\lambda = 0$ (суцільна лінія).

Як бачимо, з графіка важко якісно судити про відмінності в поведінці μ з температурою для випадків ідеального газу та наявності взаємодії. Графічно відмінність між двома кривими натомість можна побачити лише на масштабованій залежності (рис. 3.8), де включено

лише низькотемпературну область. Проте й тут чітко не видно особливості, яка простежується за табличними даними.

Таблиця 3.2. Залежність хімічного потенціалу μ від температури.

T/N	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.5$
0.000	4.50000	**4.54604**	**4.73021**
0.005	4.49995	**4.54619**	**4.73107**
0.007	4.49981	**4.54626**	**4.73184**
0.008	4.49969	4.54622	**4.73217**
0.009	4.49951	4.54609	**4.73240**
0.010	4.49927	4.54585	**4.73249**
0.012	4.49830	4.54502	4.73225
0.015	4.49596	4.54285	4.73083
0.020	4.48962	4.53677	4.72588
0.050	4.38206	4.43113	4.62871
0.100	3.99287	4.04626	4.26267
0.200	2.60124	2.66193	2.90680
0.300	0.32952	0.39042	0.63345
0.310	0.04907	0.10968	0.35133
0.320	−0.24153	−0.18126	0.05886
0.350	−1.17535	−1.11633	−0.88161
0.400	−2.94485	−2.88847	−2.66472
0.500	−7.32411	−7.27408	−7.07579
1.000	−46.3626	−46.3354	−46.2273

З таблиці 3.2 видно, що для ідеального газу ми маємо спадну функцію, а для значень $\lambda = 0.1,\ 0.5$ — незначне відхилення, а саме, зростання μ для малих температур (виділено жирним шрифтом у таблиці).

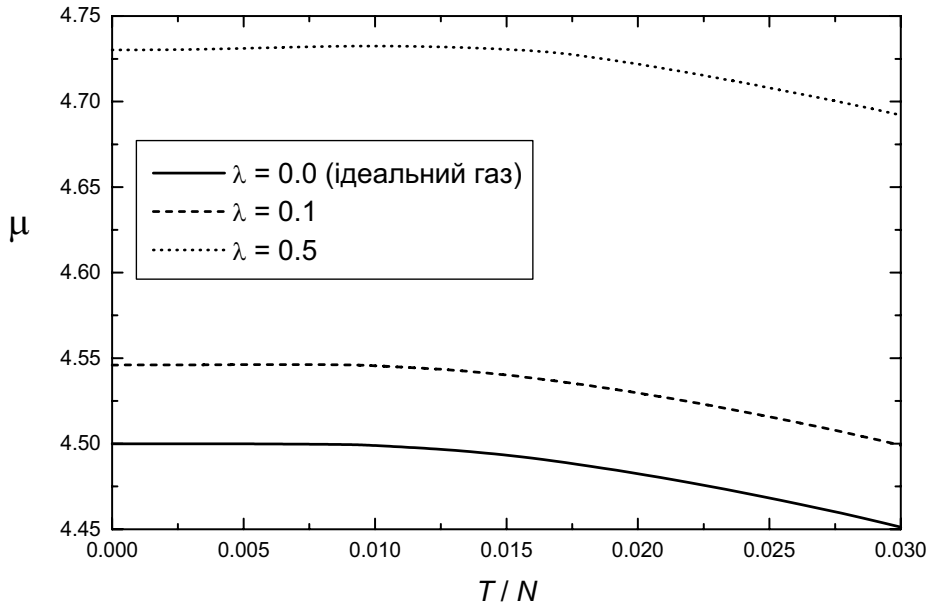


Рис. 3.8. Температурні залежності хімічного потенціалу μ для $\lambda = 0.1$ (штрихова лінія) $\lambda = 0.5$ (пунктирна лінія) та $\lambda = 0$ (суцільна лінія) в області низьких температур.

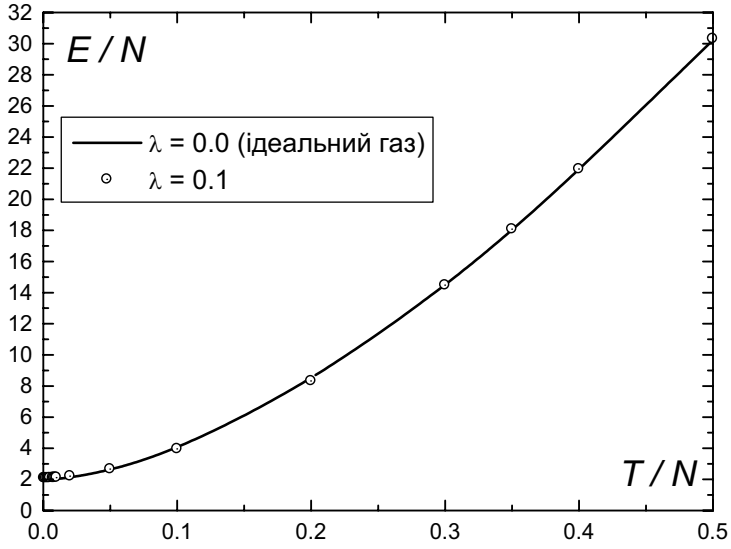


Рис. 3.9. Температурна залежність повної енергії системи слабковзаємодіючих одновимірних гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле (кружечками позначено взаємодіючу систему, суцільною лінією — ідеальну систему).

Наступним кроком був розрахунок енергії системи за виразом (3.111). Температурну залежність енергії системи слабковзаємодіючих одновимірних гармонічних осциляторів за статистикою Джентіле показано на рис. 3.9 і в табл. 3.3.

Таблиця 3.3. Залежність енергії й теплоємності від температури.

T	E_{id}	$E(\lambda = 0.1)$	C_{id}	$C(\lambda = 0.1)$	$C(\lambda = 0.5)$
0.0	200.00	208.71	0.0000	0.0000	0.0000
0.05	200.00	208.72	0.0098	0.0102	0.0119
0.1	200.01	208.73	0.3469	0.3520	0.3733
0.2	200.09	208.82	1.2850	1.2925	1.3229
0.3	200.25	208.98	1.9756	1.9859	2.0289
0.4	200.49	209.21	2.6349	2.6497	2.7133
0.5	200.78	209.51	3.2907	3.3111	3.4018
0.7	201.57	210.30	4.5732	4.6059	4.7516
0.8	202.06	210.79	5.1859	5.2234	5.3885
0.9	202.60	211.34	5.7723	5.8132	5.9907
1.0	203.21	211.95	6.3298	6.3728	6.5565
2.0	211.82	220.60	10.549	10.583	10.717
5.0	257.00	265.87	19.363	19.391	19.506
10.0	387.24	396.27	32.452	32.486	32.619
20.0	822.87	832.01	53.586	53.565	53.450
30.0	1439.7	1448.4	68.949	68.875	68.568
40.0	2186.8	2194.6	79.795	79.701	79.330
50.0	3023.4	3030.2	86.983	86.890	86.528
100.0			97.266	97.234	97.105

Розрахувавши енерґію, можемо отримати графік температурної поведінки теплоємності, для цього беремо похідну у виразі (3.121) різницевим методом, тобто

$$C = \frac{dE}{dT} \approx \frac{E(T + \Delta T) - E(T)}{\Delta T}$$

при малому значенні ΔT. Аналітично робити ці розрахунки немає сенсу, оскільки залежність хімічного потенціалу μ від температури можна одержати лише чисельно. Результати наведено на рис. 3.10.

При великих температурах графік функції теплоємності слабковзаємодіючих осциляторів має асимптоту $C/N = 1$, для прикладу, D-вимірний ідеальний газ має асимптоту $D/2$ (в одновимірному випадку матимемо $1/2$). Така особливість виникає внаслідок різної кількості ступенів вільності в системах; система гармонічних осциляторів має вдвічі більше ступенів вільності, ніж система ідеального газу, тож для системи D-вимірних гармонічних осциляторів при $T \to \infty$ теплоємність системи C/N дорівнює D. Енерґія системи при великих температурах є лінійною функцією температури.

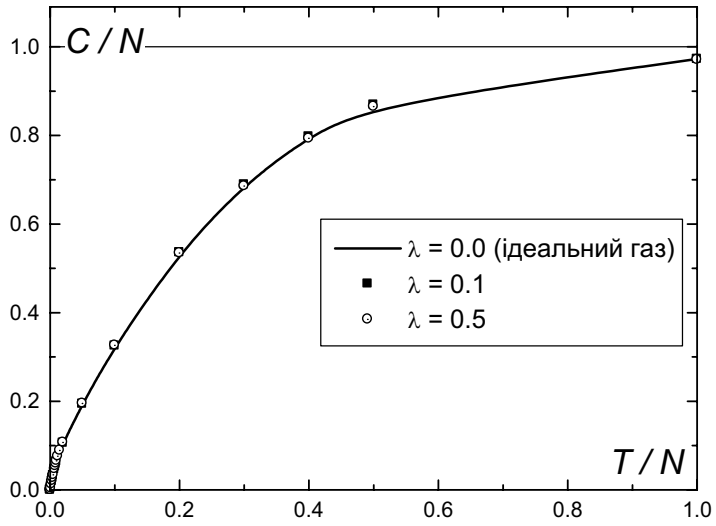


Рис. 3.10. Температурна поведінка теплоємності в системі слабковзаємодіючих одновимірних гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле.

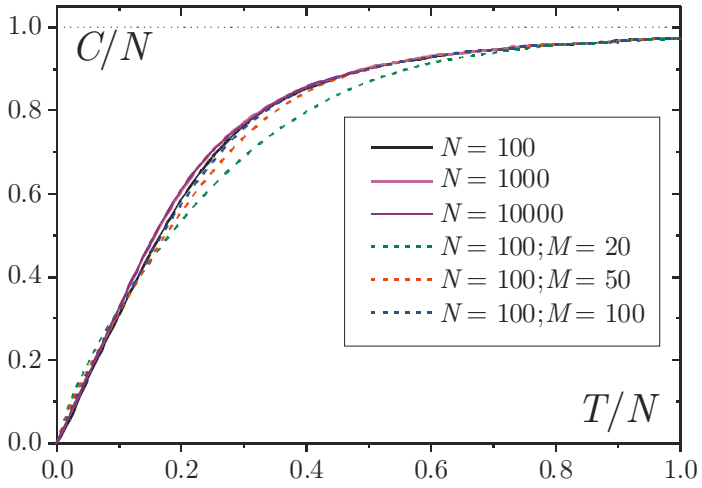


Рис. 3.11. Температурна поведінка теплоємності системи невзаємодіючих одновимірних гармонічних осциляторів з різними параметрами.

На рис. 3.11 наведено для ілюстрації результати розрахунку теплоємності ідеальної системи осциляторів, що підпорядковуються статистиці Бозе (суцільні лінії) та дробовій статистиці Джентіле (штрихові лінії) при різних значеннях N та M.

3.6. Висновки до розділу 3

Підхід наближеного вторинного квантування Боголюбова узагальнено на випадок слабковзаємодіючого бозе газу в гармонічній пастці. Внаслідок цього задачу про діагоналізацію гамільтоніана зведено до системи нелінійних матричних рівнянь типу Ріккаті. Розв'язки для модельної одновимірної системи отримано пертурбативним способом та чисельно розраховано температурні залежності конденсатної фракції й енергії.

Запропоновано спосіб отримання ефективного гамільтоніана бозе-системи в гармонічній пастці. Наближення, що полягає в заміні недіагональних добутків операторів породження–знищення, $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{j}} \to f_{\mathbf{kj}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{j}}$

тощо, дало змогу діагоналізувати гамільтоніан простими математичними способами та розрахувати спектр елементарних збуджень. При цьому множники $f_{\mathbf{kj}}$ було пов'язано з числами заповнення. Числові розрахунки продемонстровано на прикладі одновимірної системи. Також показано, як пропонований підхід можна застосувати до двосортових бозонних сумішей.

Досліджено термодинамічні функції ідеального бозе-газу в гармонічному потенціалі у загальному випадку D-вимірного простору із дробовим $1 < D < 2$, що може відповідати пористому середовищу. Встановлено поведінку теплоємності в околі критичної температури, зокрема вивчено вплив дискретності спектра та скінченності кількості частинок у системі. Числові розрахунки проведено для вимірності $D = \ln 8/\ln 3$, яка відповідає так званому килимкові Сєрпінського.

Розглянуто систему одновимірних слабковзаємодіючих гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле. Аналітично проаналізовано низькотемпературну границю хімічного потенціалу та поправки, пов'язані зі взаємодією. Чисельно розраховано температурні залежності хімічного потенціалу, енергії та теплоємності ідеальної системи та системи зі слабкою взаємодією. Виявлено незначне зростання температурної залежності хімічного потенціалу в області низьких температур за наявності слабкої міжчастинкової взаємодії. Відповідні результати можна застосовувати при аналізі фізичних систем, для яких дробова статистика Джентіле виникає ефективно, зокрема внаслідок скінченної кількості частинок [83] або врахування міжчастинкових взаємодій.

РОЗДІЛ 4

СТАТИСТИКА ПОЛІХРОНАКОСА З КОМПЛЕКСНИМ ПАРАМЕТРОМ

4.1. Вступ

Протягом останніх десятиліть було запропоновано низку модифікацій звичайних статистик Бозе–Айнштайна та Фермі–Дірака. Квантовомеханічні узагальнення включають еніони [31, 334, 335], а також так звані q-деформовані алґебри [129, 336]. Підходи, що ґрунтуються на статистичній механіці, представлено, наприклад, у працях [141, 142, 337].

У цьому розділі розглянуто узагальнення статистики Поліхронакоса [126, 202, 204]. Параметр статистики вважатимемо комплексним числом [86]. Взагалі кажучи, комплекснозначні фізичні величини можуть ефективно виникати в різних фізичних системах, насамперед у зв'язку з дисипативними процесами, що найкраще демонструє комплексний показник заломлення у класичній фізиці. Поняття комплексного хімічного потенціалу виникло в квантовій хромодинаміці [338, 339] і згодом було застосоване також в деяких інших областях [340, 341], зокрема для вивчення розпаду бозе-конденсату [342]. Поняття комплексної температури використовували в працях [343, 344], а деякі аспекти застосування комплекснозначної енерґії відображено в [345, 346]. За допомогою комплексного зовнішнього потенціалу можна описувати взаємодію лазерного світла з атомами, які рухаються в кристалі [347, 348], також комплексні потенціали використовують для аналізу

порушення $\mathcal{PT}$-симетрії [349]. У праці [350] було використано уявні доданки в дискретному нелінійному рівнянні Шрьодінґера для опису бозе-конденсату в оптичних ґратках з витіканням. Автори праці [351], вивчаючи деформований газ p,q-бозонів, запропонували пов'язати комплексні параметри деформації з міжчастинковими взаємодіями. Переважно саме параметри дробових статистик, пов'язаних із q-деформованими алґебрами, покладають комплексними [170, 200, 352]. За певних умов такі статистики [178] безпосередньо пов'язані зі статистикою Джентіле [121], в якій числа заповнення обмежені деяким скінченним числом $d > 1$. Отже, розмаїття реальних систем, для яких використовують комплекснозначні фізичні величини, дає підстави розвивати й інші підходи.

Дозволивши параметрові статистики вийти за межі дійсних значень, ми суттєво збагатимо розмаїття явищ у таких системах. Ця задача має не лише чисто академічний чи математичний інтерес. За її допомогою для опису складних фізичних процесів можна застосовувати досить прості математичні методи. Зокрема, передбачені кілька фазових переходів можуть бути математичною моделлю каскадних фазових переходів [353–355] або двох фазових переходів у рідкому гелії [356].

У наступних підрозділах буде розраховано термодинамічні функції системи D-вимірних ізотропних гармонічних осциляторів, які підкоряються статистиці Поліхронакоса з комплексним параметром, та докладно проаналізовано особливості їх поведінки в різних температурних областях.

Результати цього розділу опубліковано у статтях [86, 88, 89].

4.2. Вихідні вирази

У статистиці Поліхронакоса [126, 202] вираз для чисел заповнення j-го рівня з енергією ε_j має вигляд

$$n_j = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_j/T} - \alpha}, \tag{4.1}$$

де z — активність, а T — температура системи. Варто зауважити, що таку ж форму для чисел заповнення *a priori* запропонували Ачар'я та Нараяна Свамі для опису еніонів [199].

З метою узагальнення параметр статистики $\alpha = e^{i\pi\nu} = \alpha' + i\alpha''$ вважатимемо комплексним числом. Зміна в діапазоні значень $\nu = 0 \div 1$ забезпечує гладкий перехід між бозонною та ферміонною границями, водночас дозволяючи уникнути точки $\alpha = 0$, що відповідає класичній статистиці Больцмана, див. рис. 4.1 [86].

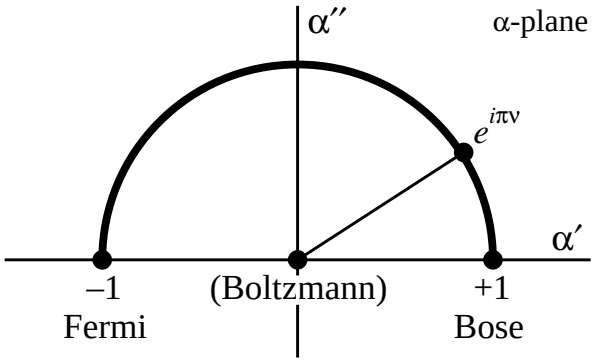


Рис. 4.1. Ілюстрація значень комплексного параметра статистики.

Зрозуміло, що загальнішим був би підхід, у якому комплексний параметр статистики має вигляд $\alpha = a + ib$ (порівн. [170, 352]), проте саме одиничне коло є зручним способом зображення фізично цікавих границь $\alpha \to \pm 1$, які відповідають статистикам Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака. До того ж, це скорочує кількість параметрів до одного ν замість пари a, b.

Особливу увагу в подальших розрахунках приділено "бозонній"

стороні значень параметра статистики $0 \leq \nu \leq 1/2$ та зокрема границі $\nu \to 0$, яка відповідає статистиці Бозе–Айнштайна.

Розрахунки зроблено за такою простою схемою.

Вираз для кількості частинок N має вигляд

$$N = \sum_j g_j n_j = \sum_j \frac{g_j}{z^{-1} e^{\varepsilon_j / T} - \alpha}, \tag{4.2}$$

де підсумовування відбувається за всіма енерґетичними рівнями, а g_j — виродження j-го рівня. Спектр елементарних збуджень ε_j вважатимемо дійсним. Оскільки N — також дійсне число ($\operatorname{Im} N = 0$), то активність $z = z' + iz''$ мусить бути комплексною.

Енерґію задано виразом

$$E = \sum_j \varepsilon_j g_j n_j = \sum_j \frac{\varepsilon_j g_j}{z^{-1} e^{\varepsilon_j / T} - \alpha} = \mathcal{E} + i\Gamma, \tag{4.3}$$

у якому $z = z(N, T)$ визначається як розв'язок рівняння (4.2). Потрібно зауважити, що лише такі значення параметра статистики ν та інших величин мають фізичний сенс, коли виконується умова $\Gamma \ll \mathcal{E}$. В іншому випадку система стає суттєво нерівноважною, що робить увесь подальший розгляд некоректним.

Дійсна й уявна частини теплоємності дорівнюють:

$$\mathcal{C} = \frac{d\mathcal{E}}{dT}, \qquad \Theta = \frac{d\Gamma}{dT}. \tag{4.4}$$

Особливості температурної поведінки фізичних величин яскравіше виражені на кривих питомої теплоємності, тому саме на неї в подальшому звернемо особливу увагу.

4.3. Бозонна і ферміонна границі

Бозонну границю визначає умова $\nu \to 0$, отже, $\alpha = e^{i\pi\nu} = 1 + i\pi\nu + \ldots$. Нехай для визначеності спектр ε_j є дійсним і хімічний

потенціал $\mu = \mu' + i\mu''$, де $\mu', \mu'' \in \mathbb{R}$. У границях, які ми розглядаємо, уявна частина μ'' — мала величина. Зауважмо, що перетворення у цьому підрозділі зручніше проводити з хімічним потенціалом μ замість активності $z = e^{\mu/T}$.

Розкладаючи вираз (4.2) для кількості частинок N у ряд за малими величинами ν та μ'', у першому порядку отримаємо:

$$N = \sum_j \frac{g_j}{e^{(\varepsilon_j - \mu')/T} - 1} + i \sum_j \frac{g_j}{\left(e^{(\varepsilon_j - \mu')/T} - 1\right)^2} \left(\pi\nu + \frac{\mu''}{T} e^{(\varepsilon_j - \mu')/T} \right). \quad (4.5)$$

Відкидаючи уявну частину, легко зауважити, що μ' — це ніщо інше як хімічний потенціал системи N бозонів зі спектром ε_j, тобто $\mu' = \mu_{\text{Bose}}$, де

$$N = \sum_j \frac{g_j}{e^{(\varepsilon_j - \mu_{\text{Bose}})/T} - 1}. \quad (4.6)$$

Після нескладних розрахунків з умови $\operatorname{Im} N = 0$ отримаємо такий вираз для μ'':

$$\mu'' = -\pi\nu T \frac{p}{N + p}, \qquad \text{де} \quad p = \sum_j \frac{g_j}{\left(e^{(\varepsilon_j - \mu')/T} - 1\right)^2}. \quad (4.7)$$

Якщо ж спектр є комплексним, $\varepsilon_j = \epsilon_j + i\gamma_j$, а частинки підкоряються звичайній статистиці Бозе, то малу дисипативну поправку γ_j можна отримати подібним до викладеного вище способом. Справді, прирівнюючи енергію бозе-системи з комплексним спектром до енергії системи, яка підкоряється визначеній дробовій статистиці, для достатньо великих значень j отримаємо:

$$\gamma_j \sim \pi\nu T. \quad (4.8)$$

Ферміонну границю визначає умова $\nu \to 1$. Нехай $\nu = 1 - \bar{\nu}$, тобто $\alpha = e^{i\pi(1-\bar{\nu})} = -1 + i\pi\bar{\nu} + \dots$. Подальші перетворення збігаються зі зробленими у бозонній границі з точністю до заміни ν на $\bar{\nu}$. Крім того,

зрозуміло, що замість хімічного потенціалу бозе-системи дійсна частина μ' природно визначатиметься його аналогом для фермі-розподілу, $\mu' = \mu_{\text{Fermi}}$, де

$$N = \sum_j \frac{g_j}{e^{(\varepsilon_j - \mu_{\text{Fermi}})/T} + 1}, \tag{4.9}$$

а знак в означенні величини p відповідно зміниться:

$$p = \sum_j \frac{g_j}{\left(e^{(\varepsilon_j - \mu')/T} + 1\right)^2}.$$

Варто зауважити, що перехід між бозонною і ферміонною границями можна робити і в нижній півплощині $\operatorname{Im}\alpha < 0$, при цьому ферміонна границя буде $\nu \to -1$. Для визначеності, однак, в подальшому розгляді без втрати загальності обмежуватимемося проаналізованим випадком $\operatorname{Im}\alpha \geq 0$.

4.4. Система двовимірних осциляторів з нефіксованою кількістю частинок

Якщо кількість частинок у системі не зберігається, що, наприклад, відповідає елементарним збудженням, які можуть вільно породжуватися або знищуватися, то хімічний потенціал дорівнює нулеві. Для комплекснозначного хімічного потенціалу змодифікуємо цю умову так: $\operatorname{Re}\mu = 0$. Таке спрощення дозволяє відразу застосувати схему розрахунків, описану вище. Насамперед, з рівняння, яке пов'язує кількість частинок N і хімічний потенціал $\mu = i\mu''$, маємо

$$N = \operatorname{Re} N + i \operatorname{Im} N = \sum_j \frac{g_j}{e^{(\varepsilon_j - i\mu'')/T} - (\cos\pi\nu + i\sin\pi\nu)}, \tag{4.10}$$

де параметр статистики записано явно у вигляді $\alpha = \alpha' + i\alpha'' = \cos\pi\nu + i\sin\pi\nu$. Вимагаючи, як зазначено раніше, $\operatorname{Im} N = 0$, отри-

маємо співвідношення між уявною частиною хімічного потенціалу μ'' і параметром статистики ν.

Поки що всі вирази отримано в загальному вигляді, без конкретизації фізичної системи. Далі результати обчислень буде продемонстровано на прикладі двовимірної системи ізотропних гармонічних осциляторів. Без втрати загальності в цій задачі можна знехтувати дискретністю енергетичних рівнів і замінити підсумовування за рівнями на інтегрування, ввівши відповідну густину станів. Для аналізованої системи густина станів $g(\varepsilon) \propto \varepsilon$. Після нескладних перетворень з умови $\operatorname{Im} N = 0$ отримаємо:

$$\int_0^\infty \frac{\left(e^{\varepsilon/T} \sin \frac{\mu''}{T} + \sin \pi\nu\right) \varepsilon \, d\varepsilon}{e^{2\varepsilon/T} + 2e^{\varepsilon/T} \left(\sin \pi\nu \sin \frac{\mu''}{T} - \cos \pi\nu \cos \frac{\mu''}{T}\right) + 1} = 0. \qquad (4.11)$$

Розв'язки цього рівняння зручно зобразити графічно, див. рис. 4.2.

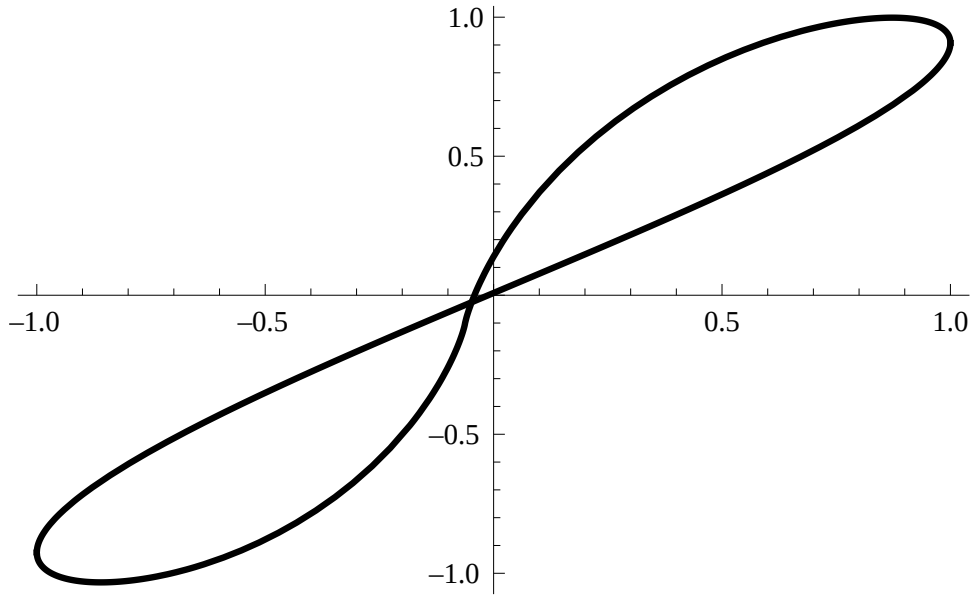


Рис. 4.2. Графічне розв'язування рівняння (4.11). Величина $\operatorname{Im} N$ (вертикальна вісь) зображена як функція $\sin \frac{\mu''}{T}$ (горизонтальна вісь) для $\nu = 0.02$. Два розв'язки відповідають двом різним можливим знакам величини $\cos \frac{\mu''}{T}$ залежно від значення температури T.

Дійсна частина $\mathcal{E}$ енергії $E = \mathcal{E} + i\Gamma$, яку в загальному вигляді визначає формула (4.3), у нашому випадку стає такою:

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{\left(e^{\varepsilon/T}\cos\frac{\mu''}{T} - \cos\pi\nu\right)\varepsilon^2\,d\varepsilon}{e^{2\varepsilon/T} + 2e^{\varepsilon/T}\left(\sin\pi\nu\sin\frac{\mu''}{T} - \cos\pi\nu\cos\frac{\mu''}{T}\right) + 1}. \qquad (4.12)$$

Для спрощення за одиницю енергії і температури взято $\hbar\omega$, де ω — частота осцилятора, а наступним кроком покладено $\hbar\omega = 1$.

Температурну залежність енергії $\mathcal{E}$ зображено на рис. 4.3 у порівнянні з фермі- та бозе-системами з тими самими значеннями параметрів.

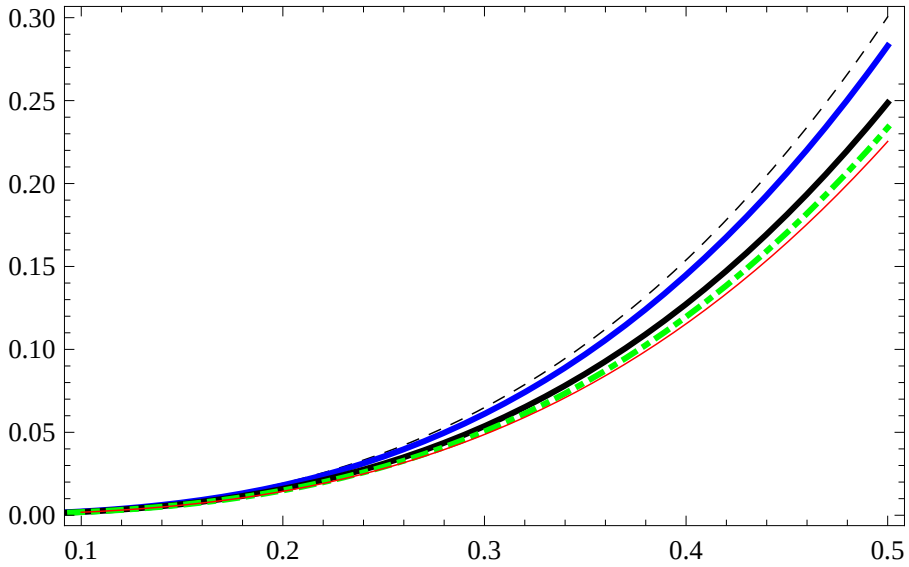


Рис. 4.3. Енергія (4.12) (вертикальна вісь) як функція температури T (горизонтальна вісь) для різних значень параметра статистики ν. Відповідність ліній (згори донизу): бозе-система (чорна штрихова, тонка); $\nu = 0.2$ (синя суцільна, товста); $\nu = 0.5$ (чорна суцільна, товста); $\nu = 0.7$ (зелена штрихова, товста); фермі-система (червона суцільна, тонка). Одиниці умовні.

Як бачимо з рис. 4.3, розрахована енергія модельної двовимірної системи ізотропних гармонічних осциляторів дає підстави стверджувати, що запропонована статистика Поліхронакоса з комплексним параметром забезпечує плавну інтерполяцію між статистиками Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака.

4.5. Одновимірні гармонічні осцилятори

У цьому підрозділі розглядатимемо систему одновимірних гармонічних осциляторів з частотою ω. Виродження j-го рівня дорівнює одиниці, $g_j = 1$. Спектр елементарних збуджень буде

$$\varepsilon_j = \hbar\omega j, \qquad j = 0, 1, 2, 3, \dots \ . \tag{4.13}$$

Як і раніше, величину $\hbar\omega$ використовуватимемо також як одиницю температури.

Одновимірні системи осциляторів можна фізично реалізувати у сильно анізотропних гармонічних пастках [14] або в оптичних ґратках [357, 358].

З метою отримання результатів ув аналітичному вигляді замінимо в рівняннях (4.2)–(4.3) суму на інтеґрал, увівши функцію густини станів $g(\varepsilon)$: $\sum\limits_j \ \longrightarrow \ \int d\varepsilon\, g(\varepsilon)$. Точність такого наближення зростає, якщо кількість частинок у системі є великою і якщо температура значно перевищує відстань між рівнями, $T \gg \hbar\omega$. Чисельне порівняння результатів, отриманих з використанням точного підсумовування, з результатами інтеґрування вказує на дуже добре узгодження вже при кількості частинок $N = 1000$.

Для одновимірної системи гармонічних осциляторів густина станів $g(\varepsilon) = \mathrm{const}$, тому вона еквівалентна, наприклад, до системи вільних частинок в зовнішньому одновимірному гармонічному потенціалі (у напівкласичному наближенні [310]) або до двовимірної системи вільних частинок у скриньці.

В аналізованому випадку $g(\varepsilon) = 1/\hbar\omega$. Кількість частинок тоді дорівнює

$$N = \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - \alpha} = -\frac{T}{\hbar\omega\alpha} \ln(1 - z\alpha), \tag{4.14}$$

що для активності дає

$$z = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\hbar\omega N\alpha/T}\right). \tag{4.15}$$

Енергія дорівнює

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\hbar\omega}\int_0^\infty \frac{\varepsilon d\varepsilon}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - \alpha} = \frac{T^2}{\hbar\omega\alpha}\,\mathrm{Li}_2(z\alpha) = \\ &= \frac{T^2}{\hbar\omega\alpha}\,\mathrm{Li}_2\left(1 - e^{-\hbar\omega N\alpha/T}\right), \end{aligned} \tag{4.16}$$

де $\mathrm{Li}_s(x)$ — полілогарифм (2.58):

$$\mathrm{Li}_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^s}.$$

Це означення у вигляді ряду справедливе для всіх комплексних s і комплексних x з $|x| < 1$; для інших значень x використовують певне аналітичне продовження.

За допомогою очевидної властивості

$$\frac{d\,\mathrm{Li}_s(x)}{dx} = \frac{1}{x}\,\mathrm{Li}_{s-1}(x)$$

і беручи до уваги, що $\mathrm{Li}_1(x) = -\ln(1-x)$, для теплоємності отримаємо

$$C + i\Theta = \frac{dE}{dT} = N\frac{\hbar\omega N\alpha/T}{1 - e^{\hbar\omega N\alpha/T}} + N\frac{2T}{\hbar\omega N\alpha}\,\mathrm{Li}_2\left(1 - e^{-\hbar\omega N\alpha/T}\right). \tag{4.17}$$

Як і треба очікувати для екстенсивних величин, $E \propto N$ і $C \propto N$, що не є очевидним із виразів (4.16) та (4.17). Щоб забезпечити екстенсивність енергії та теплоємності, потрібно взяти до уваги термодинамічну границю. Відповідна умова для системи одновимірних гармонічних осциляторів має вигляд $\omega N = \mathrm{const}$. Такий результат можна отримати різними способами [14, 83], див. також [311]. Найпростіша інтерпретація цієї умови для термодинамічної границі така. Для D-вимірної системи в зовнішньому гармонічному потенціалі з частотою ω класичні точки повороту утримують частинки в межах певної характерної

довжини $r \propto 1/\omega$. Щоб забезпечити сталість середньої концентрації N/r^D, потрібно забезпечити виконання умови $N\omega^D = \text{const}$.

Тому в аналізованому випадку

$$\frac{T}{\hbar\omega} = \frac{NT}{\hbar\omega N} = \frac{NT}{\text{const}}. \qquad \text{і} \qquad \frac{\hbar\omega N}{T} = \frac{\text{const}}{T},$$

отже, умови $E \propto N$ та $C \propto N$ виконано.

4.5.1. Критична температура і поведінка термодинамічних функцій. На розрахованих температурних залежностях енергії та теплоємності було виявлено розриви. Вони пов'язані з $\text{Li}_2(z\alpha)$, якщо уявна частина арґумента функції змінює знак.

Справді, при обчисленні інтеґрала натрапляємо на синґулярність виду "1/0", коли:

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon/T} - z\alpha = 0 = e^{\varepsilon/T} - 1 + e^{-\hbar\omega N\alpha/T} = \\ = e^{\varepsilon/T} - 1 + e^{-\frac{\hbar\omega N}{T}\alpha'} \left(\cos\frac{\hbar\omega N}{T}\alpha'' - i\sin\frac{\hbar\omega N}{T}\alpha'' \right), \end{aligned} \tag{4.18}$$

якщо

$$\frac{\hbar\omega N}{T}\alpha'' = \pi n \quad \text{та} \quad \cos\pi n = (-1)^n < 0.$$

Таким чином, множина значень критичних температур визначається так:

$$T_c^{(k)} = \hbar\omega N \frac{\alpha''}{(2k+1)\pi}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots , \tag{4.19}$$

див. рис. 4.4. Для спрощення в подальших перетвореннях індекси "(k)" не буде виписано.

Щоб оцінити внесок синґулярності в термодинамічні функції, можна застосувати таку процедуру. Нехай синґулярність відповідає такій енергії ε_0, для якої виконується умова $e^{\varepsilon_0/T} = z\alpha$. Тоді енергію E

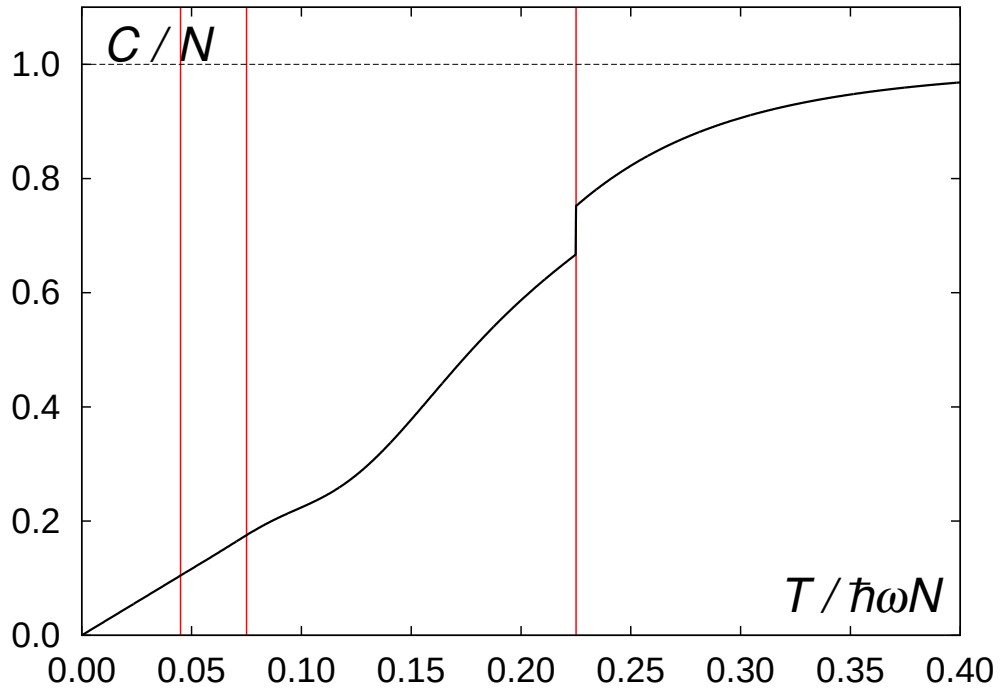


Рис. 4.4. Дійсна частина питомої теплоємності C/N при $\nu = 0.25$. Вертикальними лініями показано критичні температури. Крайня права лінія відповідає $k = 0$.

можна подати у вигляді:

$$E = \frac{z}{\hbar\omega}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - z\alpha} = \frac{z}{\hbar\omega}\int\limits_0^{\varepsilon_0-\Delta} \frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - z\alpha} + \frac{z}{\hbar\omega}\int\limits_{\varepsilon_0+\Delta}^\infty \frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - z\alpha} + \tag{4.20}$$

$$+ \frac{z}{\hbar\omega}\int\limits_{\varepsilon_0-\Delta}^{\varepsilon_0+\Delta} \frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - e^{\varepsilon_0/T}},$$

де Δ — мале додатне число. У границі $\Delta \to 0$ перші два доданки дають гладку функцію температури E_{smooth}, а останній доданок достатньо виписати лише в першому порядку за $(\varepsilon - \varepsilon_0)$:

$$E = E_{\text{smooth}}(T) + \frac{zT}{\hbar\omega}\, e^{-\varepsilon_0/T} \int\limits_{\varepsilon_0-\Delta}^{\varepsilon_0+\Delta} \frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0}. \tag{4.21}$$

Значення ε_0 дійсне в точці $T = T_c$, але стає комплексним, щойно T відхиляється від критичної точки. Знак уявної частини визначає вираз

$\sin\frac{N}{T}\alpha''$, див. (4.18). Таким чином, знаменник $(\varepsilon-\varepsilon_0)$ потрібно замінити на $(\varepsilon-\varepsilon_0\mp i\eta)$ для $T=T_c\pm 0$, де $\eta\to+0$. За допомогою формул Сохоцького [359, p. 75–76] отримаємо

$$\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_0\mp i\eta}=\text{v. p.}\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_0}\pm i\pi\delta(\varepsilon-\varepsilon_0), \tag{4.22}$$

де "v. p." позначає головне значення, а $\delta(\varepsilon-\varepsilon_0)$ — це дельта-функція Дірака.

Отже, в околі критичних точок енергія дорівнюватиме:

$$E(T_c\pm 0)=E_{\text{smooth}}(T_c)\pm i\pi\frac{T_c}{\hbar\omega}z(T_c)\varepsilon_0 e^{-\varepsilon_0/T_c}. \tag{4.23}$$

Для дійсної частини матимемо

$$\Delta\mathcal{E}(T_c)=\mathcal{E}(T_c+0)-\mathcal{E}(T_c-0)=-2\pi\frac{T_c}{\hbar\omega}z''(T_c)\varepsilon_0 e^{-\varepsilon_0/T_c}. \tag{4.24}$$

Беручи до уваги означення критичної температури (4.19) і записуючи параметр статистики у вигляді $\alpha=\cos\pi\nu+i\sin\pi\nu$, після простих перетворень отримаємо такі вирази для стрибків значень дійсних частин енергії і теплоємності:

$$\frac{1}{N}\frac{\Delta\mathcal{E}(T_c)}{\hbar\omega N} = \frac{2\sin^3\pi\nu}{(2k+1)^2\pi}\ln\left(1+e^{-(2k+1)\pi\cot\pi\nu}\right), \tag{4.25}$$

$$\frac{1}{N}\Delta C(T_c) = \frac{4\sin^2\pi\nu}{(2k+1)}\ln\left(1+e^{-(2k+1)\pi\cot\pi\nu}\right). \tag{4.26}$$

У бозонній границі $\nu\to 0$ матимемо:

$$\frac{1}{N}\frac{\Delta\mathcal{E}(T_c)}{\hbar\omega N} = \frac{2\pi^2\nu^3}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)/\nu}, \tag{4.27}$$

$$\frac{1}{N}\Delta C(T_c) = \frac{4\pi^2\nu^2}{(2k+1)}e^{-(2k+1)/\nu}. \tag{4.28}$$

Ці стрибки — скінченні для всіх $\nu>0$, однак найвиразнішим є той, якому відповідає $k=0$, а наступні значення дуже швидко спадають

при $k > 0$, як показано в табл. 4.1. Варто зазначити, що для $\nu \gtrsim 0.35$ осциляції функції $C(T)$ в низькотемпературній області зростають і спричиняють появу нефізичних результатів з від'ємною теплоємністю.

Таблиця 4.1. Стрибки питомої теплоємності C/N при критичних температурах. Зрозуміло, що значення 10^{-14} і менші не можна спостерігати експериментально, однак вони наведені з метою демонстрації дуже швидкого спадання ΔC, коли $\nu \to 0$ і/або k зростає.

ν	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
0.01	1.5×10^{-46}	7.5×10^{-134}	6.6×10^{-221}
0.05	2.4×10^{-10}	4.7×10^{-28}	1.7×10^{-45}
0.10	2.4×10^{-5}	3.2×10^{-14}	7.7×10^{-23}
0.15	1.7×10^{-3}	2.6×10^{-9}	6.7×10^{-15}
0.20	1.8×10^{-2}	1.1×10^{-6}	1.1×10^{-10}
0.25	8.5×10^{-2}	5.4×10^{-5}	6.0×10^{-8}
0.30	2.5×10^{-1}	9.3×10^{-4}	5.8×10^{-6}
0.34	5.0×10^{-1}	5.7×10^{-3}	1.1×10^{-4}

Низько- і високотемпературні границі теплоємності легко розраховувати, використовуючи розклади у формулах (4.16) або (4.17). Спостережувана на рис. 4.5 та 4.6 в низькотемпературній області лінійна залежність $C \propto T$ є такою:

$$\frac{C + i\Theta}{N} = \frac{2T}{\hbar\omega N\alpha}\,\mathrm{Li}_2(1) = \frac{T}{\hbar\omega N}\frac{\pi^2}{3}(\cos\pi\nu - i\sin\pi\nu), \qquad (4.29)$$

де використано зв'язок між полілогарифмом і дзета-функцією Рімана: $\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2) = \pi^2/6$.

Різне прямування до асимптотичного значення $C/N \to 1$ (знизу при $\nu < 1/4$ і згори при $\nu > 1/4$) визначається такою граничною поведінкою питомої теплоємності:

$$\frac{C + i\Theta}{N} = 1 - \frac{\cos 2\pi\nu}{36}\left(\frac{\hbar\omega N}{T}\right)^2 - i\,\frac{\sin 2\pi\nu}{36}\left(\frac{\hbar\omega N}{T}\right)^2, \qquad (4.30)$$

де залежний від температури доданок у дійсній частині змінює знак у точці $\nu = 1/4$, а уявна частина залишається від'ємною для всіх ν, як показано на рис. 4.5 і 4.6.

При $\nu = 1/4$ відхилення дійсної частини теплоємності від асимптотичного значення має вигляд:

$$\frac{C}{N} = 1 - \frac{1}{1200}\left(\frac{\hbar\omega N}{T}\right)^4 . \tag{4.31}$$

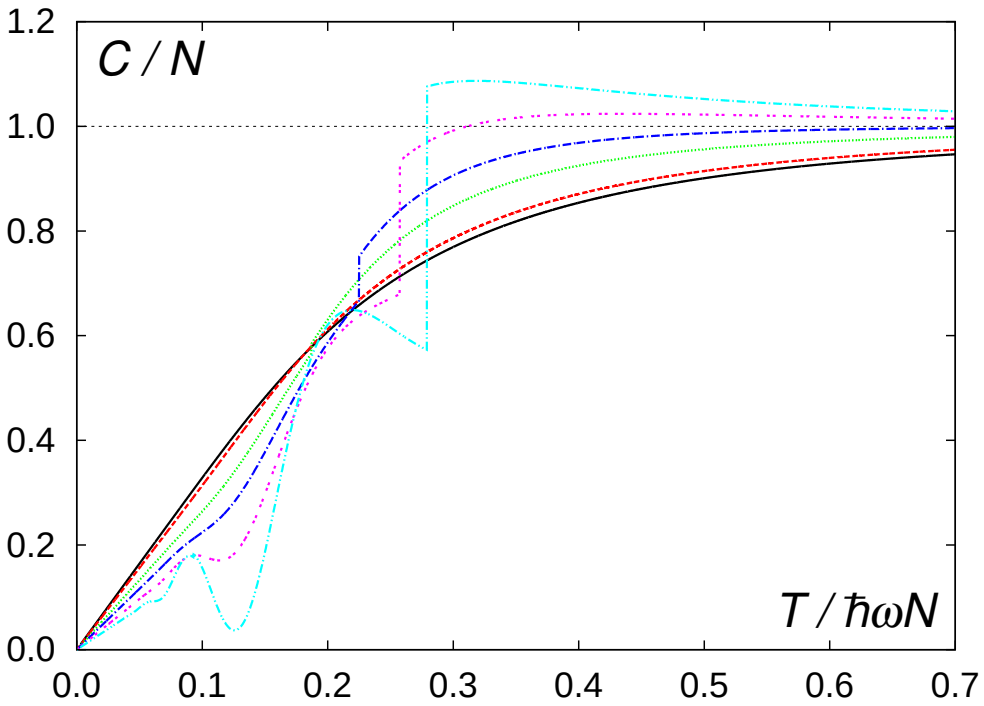


Рис. 4.5. Дійсна частина питомої теплоємності C/N для різних значень параметра статистики: $\nu = 0.0$ (чорна, ——); 0.1 (червона, − − −); 0.2 (зелена, ⋯); 0.25 (синя, — · —); 0.3 (бузкова, -- --); 0.34 блакитна, – ·· –).

4.5.2. Можливості експериментальної перевірки. Оскільки вже енергія як функція температури має розриви, то можна стверджувати, що точки $T_c^{(k)}$ відповідають фазовим переходам першого роду. Цікаво оцінити принципову можливість експериментальної перевірки цього ефекту.

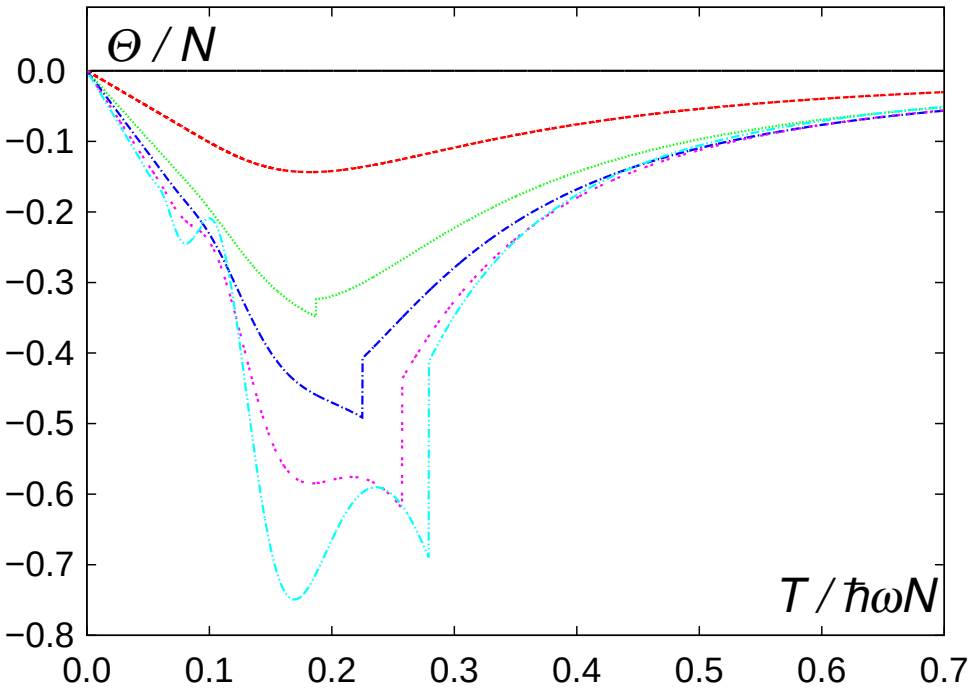


Рис. 4.6. Уявна частина питомої теплоємності C/N для різних значень параметра статистики: $\nu = 0.0$ (чорна, ——); 0.1 (червона, − − −); 0.2 (зелена, ⋯); 0.25 (синя, — · —); 0.3 (бузкова, - - - -); 0.34 (блакитна, – ·· –).

Як вже згадувалося в підрозділах 4.1 і 4.2, комплексний параметр статистики можна отримати внаслідок зовнішнього впливу на систему лазером або через ефективне врахування дисипації елементарних збуджень. Це означає, що варто очікувати малих значень ν, тобто $\nu \ll 1$. Отже, лише найбільша критична температура, що відповідає $k = 0$,

$$T_c = \hbar\omega N \frac{\sin \pi\nu}{\pi}, \tag{4.32}$$

виявляється релевантною для аналізу, оскільки стрибки теплоємності стають експериментально неспостережуваними, якщо $k > 1$, див. табл. 4.1.

Відтворюючи сталу Больцмана k_B, щоб отримати значення T_c в кельвінах,

$$k_\mathrm{B} T_c = \hbar\omega N \frac{\sin \pi\nu}{\pi}, \tag{4.33}$$

можна таким способом зробити просту оцінку. Припустимо, що точність експериментального вимірювання теплоємності становить 0.01%, що відповідає $\nu = 0.10 \div 0.15$ (див. табл. 4.1). Нехай також частота зовнішнього гармонічного потенціалу-пастки дорівнює $\omega = 1\,\text{кГц}$, а кількість частинок $N = 10^4$. За таких параметрів отримаємо критичну температуру $T_c \sim 10^{-5}\,\text{K}$. Це означає, що відповідний ефект можна буде спостерігати експериментально, щойно вдасться приготувати систему, яку можна було б описувати статистикою Поліхронакоса з комплексним параметром.

Цікаво з наведених вище результатів отримати певні оцінки щодо однорідної двовимірної системи. Для частинок з нульовим спіном і масою m на площі S густину станів легко розрахувати у вигляді $g(\varepsilon) = mS/2\pi\hbar^2 = \text{const}$, що можна порівняти з результатом для осциляторів $g(\varepsilon) = 1/\hbar\omega$ і, як наслідок, встановити таку ефективну відповідність:

$$\omega N = \frac{2\pi\hbar}{m^2}\,\frac{mN}{S}. \tag{4.34}$$

Отриманий вираз для критичної температури, як виявляється, має структуру, подібну до температури переходу Костерліца–Таулеса T_{KT} [360]:

$$k_{\text{B}}T_c = \frac{\pi\hbar^2}{2m^2}\rho_2\frac{2\sin\pi\nu}{\pi} \qquad \text{порівняно з} \qquad k_{\text{B}}T_{\text{KT}} = \frac{\pi\hbar^2}{2m^2}\rho_{2\text{s}}, \tag{4.35}$$

де $\rho_2 = mN/S$ — двовимірна густина, а $\rho_{2\text{s}}$ — густина надплинної компоненти. Враховуючи значення двовимірної концентрації $\simeq 8{\cdot}10^{18}\ \text{м}^{-2}$, яке відповідає нормальній густині об'ємного гелію 0.146 г/см^3 [361], для критичної температури матимемо $T_c \lesssim 1$ K. Треба зазначити, що ця оцінка справедлива для ідеального однорідного бозе-газу з параметрами рідкого гелію-4. Щоб застосувати описаний підхід до реалістичних планарних систем, потрібно виходити з вивчення фононів,

тобто збуджень з лінійною дисперсією. Це означає необхідність вивчення двовимірної осциляторної задачі, а в ширшому сенсі — й задачі в просторі з довільною вимірністю $D > 1$, про що детальніше йтиметься в наступних підрозділах.

4.6. Термодинамічні функції D-вимірних осциляторів

У цьому і наступних підрозділах розглянемо систему D-вимірних ізотропних гармонічних осциляторів, які підкоряються статистиці Полі-хронакоса з комплексним параметром. Як і раніше, активність z визначається кількістю частинок N з рівняння

$$N = \sum_j g_j n_j = \sum_j \frac{g_j}{z^{-1} e^{\varepsilon_j / T} - \alpha}, \tag{4.36}$$

де g_j — виродження j-го рівня. Отриману залежність $z = z(T, N)$ можна далі використати для розрахунку енергії

$$\mathcal{E}(T, N) = \sum_j g_j \varepsilon_j n_j = \sum_j \frac{g_j \varepsilon_j}{z^{-1} e^{\varepsilon_j / T} - \alpha} \tag{4.37}$$

та інших термодинамічних функцій.

Для системи ізотропних гармонічних осциляторів у D-вимірному просторі виродження j-го енергетичного рівня буде [84, 318]:

$$\varepsilon_j = \hbar\omega j, \qquad g_j = \frac{\Gamma(j + D)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(D)}, \qquad j = 0, 1, 2, 3, \dots\ , \tag{4.38}$$

де вимірність простору D з міркувань загальності може бути дробовою. Зокрема, як уже зазначалося, дробові вимірності застосовують для моделювання пористих середовищ [270, 271, 362], вони також ефективно виникають внаслідок врахування зовнішніх потенціалів [310].

Щоб спростити аналіз, зручно замінити в рівняннях (4.36) і (4.37) підсумовування на інтеґрування, ввівши густину станів $g(\varepsilon)$:

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - \alpha}, \tag{4.39}$$

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{\varepsilon g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - \alpha}. \tag{4.40}$$

Чисельне розв'язування рівнянь (4.36)–(4.37) та (4.39)–(4.40) показує, що така заміна приводить лише до незначного температурного зсуву певних характерних точок термодинамічних функцій, а якісно поведінка не залежить від того, який підхід використано — дискретний чи неперервний.

Переходячи від сум до інтеґралів, важливо виокремити внесок від основного стану $\varepsilon = 0$ в явному вигляді, подібно до стандартного аналізу явища бозе-конденсації у тривимірному ідеальному газі. Справді, для вимірності простору $D > 1$ функція густини станів

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(D)}\,\frac{1}{(\hbar\omega)^D}\,\varepsilon^{D-1} \tag{4.41}$$

зникає в точці $\varepsilon = 0$, тоді як відповідний доданок у сумі — скінченний:

$$N_0 = \frac{z}{1 - z\alpha}. \tag{4.42}$$

Варто зауважити, що така процедура не була потрібна в одновимірному випадку, розглянутому в попередніх підрозділах, див. також [88].

Інтеґрали в (4.39)–(4.40) можна виразити за допомогою полілогарифма:

$$N = \frac{z}{1 - z\alpha} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \mathrm{Li}_D(z\alpha), \tag{4.43}$$

$$\mathcal{E} = \hbar\omega\frac{D}{\alpha}\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D+1} \mathrm{Li}_{D+1}(z\alpha). \tag{4.44}$$

Диференціюючи енергію за температурою, отримаємо теплоємність у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{d\mathcal{E}}{dT} = \\ &= \frac{D}{\alpha}\left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^D \left[\frac{\partial z/\partial T}{z} T^{D+1}\,\mathrm{Li}_D(z\alpha) + (D+1)T^D\,\mathrm{Li}_{D+1}(z\alpha)\right]. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Це рівняння можна переписати через N та E:

$$\mathcal{C} = \frac{\partial z}{\partial T}\frac{DT}{z}(N - N_0) + (D+1)\frac{\mathcal{E}}{T}, \tag{4.46}$$

звідки бачимо, що критична поведінка може бути пов'язана з температурними залежностями як енергії, так і активності.

Як і раніше, використовуватимемо такі позначення для дійсної й уявної частин енергії та теплоємності:

$$\mathcal{E} = E + i\Gamma; \qquad \mathcal{C} = C + i\Theta, \tag{4.47}$$

а також матимемо на увазі умову, що визначає термодинамічну границю для системи D-вимірних гармонічних осциляторів [14, 83]:

$$\omega^D N = \mathrm{const}, \tag{4.48}$$

з якої відразу видно, що вирази (4.44), (4.45) визначають екстенсивні величини $\mathcal{E}, \mathcal{C} \propto N$, як і треба було очікувати.

4.6.1. Високотемпературна границя. Оскільки при $T \to \infty$ значення N_0 нехтовно мале, а арґумент полілогарифма в (4.43) задовольняє умову $|z\alpha| \ll 1$, то

$$N = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \mathrm{Li}_D(z\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \left(z\alpha + \frac{(z\alpha)^2}{2^D} + \ldots\right). \tag{4.49}$$

Беручи до уваги лише перший доданок ряду, можна легко отримати високотемпературну поведінку активності у такому вигляді:

$$z = N\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^D. \tag{4.50}$$

Ця величина — дійсна. Для з'ясування першого незникаючого внеску від уявної частини активності потрібно взяти два доданки в ряді для полілогарифма в (4.49), що дасть у результаті:

$$z'' = -\frac{\alpha''}{2^D}\left[N\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^D\right]^2. \tag{4.51}$$

З високотемпературної поведінки активності (4.50) відразу отримаємо енергію та теплоємність у цій границі:

$$\mathcal{E} = E = DNT, \qquad \mathcal{C} = C = DN. \tag{4.52}$$

Це — класичні вирази для енергії і теплоємності системи D-вимірних гармонічних осциляторів. Як і треба було очікувати, у класичній границі відсутній вплив статистики.

Першу поправку до класичних результатів можна знайти, обертаючи ряд для полілогарифма, див. формулу (4.61) в наступних розділах. Внаслідок цього отримаємо

$$z\alpha = N\alpha\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^D - 2^{-D}\left[N\alpha\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^D\right]^2 + \dots. \tag{4.53}$$

Підставивши цей вираз у (4.44), після нескладних перетворень матимемо:

$$\mathcal{E} = DNT\left[1 - 2^{-D-1}\alpha\frac{N(\hbar\omega)^D}{T^D} + \dots\right]. \tag{4.54}$$

Цей ряд є аналогом віріального розкладу. Порівнюючи його з відповідними результатами для деяких інших типів дробової статистики [33],

можна встановити наближену відповідність між аналізованим узагальненням статистики Поліхронакоса та, наприклад, еніонами або статистикою Голдейна–Ву (див. також наступний розділ). Наприклад, беручи до уваги лише дійсну частину енергії E двовимірної системи і зіставляючи її з результатами для ідеального еніонного газу, другий віріальний коефіцієнт якого $b_2 = -(1 - 4\eta + 2\eta^2)/4$, де $\eta \in [0; 1]$ — параметр статистики, або з газом Голдейна–Ву з $b_2 = (2g - 1)/4$, де g — параметр статистики, бачимо такі співвідношення:

$$\alpha' = \cos \pi\nu \simeq 1 - \frac{(\pi\nu)^2}{2} \propto \begin{cases} 1 - 4\eta + 2\eta^2 & \text{для еніонів} \\ \\ 1 - 2g & \text{для статистики Голдейна–Ву} \end{cases} \tag{4.55}$$

Подібні зв'язки можна встановити і для деяких інших дробових статистик, включно з кількома моделями q-осциляторів [351, 363–365].

4.6.2. Область фазового переходу. Критична температура. Як продемонстрував одновимірний випадок, в аналізованій задачі відбуваються фазові переходи, пов'язані з комплекснозначністю параметра статистики [88]. З математичного погляду це пов'язано з синґулярністю в знаменнику інтеґралів у формулах (4.39), (4.40), якщо уявна частина величини $z\alpha$ дорівнює нулеві:

$$\mathrm{Im}(z\alpha) = 0. \tag{4.56}$$

Для температур достатньо віддалених від абсолютного нуля внесок основного стану стає несуттєвим і рівняння (4.43) зводиться до вигляду:

$$N\alpha = \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \mathrm{Li}_D(z\alpha). \tag{4.57}$$

Його розв'язки можна формально записати через обернену до поліло-

гарифма функцію $\mathrm{invLi}_D(w)$. Для активності відразу отримаємо:

$$z\alpha = \mathrm{invLi}_D\left[\alpha N\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^D\right]. \tag{4.58}$$

Отже, умова, з якої визначається критична температура $T_c^{(k)}$ (взагалі кажучи, це може бути набір, а не лише одне значення — як в одновимірному випадку) набуває такого вигляду:

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{invLi}_D\left[\alpha N\left(\frac{\hbar\omega}{T_c^{(k)}}\right)^D\right] = 0. \tag{4.59}$$

На жаль, для оберненого полілогарифма не існує виразу через елементарні чи відомі спеціальні функції, тому єдиним надійним способом аналізу цієї задачі залишається чисельне розв'язування. Однак за допомогою деяких наближених виразів для $\mathrm{invLi}_D(w)$ вдається отримати добрі оцінки критичної температури, як показано нижче.

Нехай обернений полілогарифм $\mathrm{invLi}_D(w)$ визначено так:

$$\mathrm{Li}_D(x) = w \quad \Rightarrow \quad \mathrm{invLi}_D(w) = x. \tag{4.60}$$

В околі точки $x = 0$ найпростішим способом є обертання степеневого ряду [366] для полілогарифма, що дає:

$$\mathrm{invLi}_D^{\{1\}}(w) = w - 2^{-D}w^2 + (2^{1-2D} - 3^{-D})w^3 + \ldots. \tag{4.61}$$

В околі точки $x = 1$ розклади в ряд виглядають по-різному залежно від D:

$$\mathrm{Li}_D(x) = \zeta(D) + \Gamma(1-D)(1-x)^{D-1} + \ldots, \quad 1 < D < 2, \tag{4.62}$$

$$\mathrm{Li}_2(x) = \zeta(2) - (x-1)\ln(1-x) + \ldots, \tag{4.63}$$

$$\mathrm{Li}_D(x) = \zeta(D) + (x-1)\zeta(D-1) + \ldots, \quad D > 2. \tag{4.64}$$

Розв'язки з точністю до першого після $\zeta(D)$ доданка будуть такими:

$$\mathrm{invLi}_D^{\{2\}}(w) = \begin{cases} 1 - \left[\dfrac{w-\zeta(D)}{\Gamma(1-D)}\right]^{1/(D-1)} & 1 < D < 2 \\ \\ 1 + \dfrac{w-\zeta(D)}{\zeta(D-1)} & D > 2. \end{cases} \tag{4.65}$$

У випадку $D = 2$ потрібно використовувати так звану W-функцію Ламберта, що буде зроблено трохи далі.

Для цілих n існують розклади при $|x| > 1$ [367]:

$$\mathrm{Li}_n(x) = (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^n x^j} - \frac{\ln^n(-x)}{n!} + \\ + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\mathrm{Li}_{2j}(-1) \ln^{n-2j}(-x)}{(n-2j)!}, \tag{4.66}$$

де $\mathrm{Li}_{2j}(-1) = \left(2^{1-2j} - 1\right) \zeta(2j)$. При $n = 2$ цей ряд набуває простої форми:

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\frac{\ln^2(-x)}{2} - \zeta(2) - \frac{1}{x} + \ldots, \tag{4.67}$$

звідки з урахуванням перших двох членів матимемо:

$$\mathrm{invLi}_2^{\{3\}}(w) = -e^{\sqrt{-2[w+\zeta(2)]}} \tag{4.68}$$

Вираз для $n = 3$ також має замкнену аналітичну форму, проте вона дуже громіздка.

Обернений полілогарифм можна також записати через W-функцію Ламберта [368], яка є багатозначною функцією, за допомогою якої розв'язують таке рівняння:

$$W(z)e^{W(z)} = z, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{4.69}$$

При цілих n ряд для $\mathrm{Li}_n(x)$ в околі точки $x = 1$ має вигляд [367], див. також [369, p. 30]:

$$\mathrm{Li}_n(x) = \zeta(n) + \frac{-\ln(-\ln x) + \psi(n) + \gamma}{(n-1)!} \ln^{n-1} x +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n-2}}^{\infty} \frac{\zeta(n-j)}{j!} \ln^j x, \tag{4.70}$$

де $\psi(n)$ — полігамма-функція, а $\gamma = 0.57721\ldots$ — це стала Ейлера–Маскероні. Якщо $n = 2$, то цей вираз спрощується до

$$\mathrm{Li}_2(x) = \zeta(2) - \ln x \ln[-\ln(x)] + \ln x + \ldots, \tag{4.71}$$

звідки отримуємо

$$\mathrm{invLi}_2^{\{4\}}(w) = \exp\left[-e^{W_k\left(-\frac{\zeta(2)+w}{e}\right)+1}\right], \tag{4.72}$$

причому значення k потрібно вибирати на підставі додаткових міркувань. Автори праці [368], наприклад, запропонували $k = -1$ для ідеального 4-вимірного бозе-газу.

Через функцію Ламберта також можна записати розв'язок рівняння (4.63):

$$\mathrm{invLi}_2^{\{2\}}(w) = 1 - \exp\left[W_k(w - \zeta(2))\right]. \tag{4.73}$$

Використовуючи розклад (4.61) з точністю до w^2 включно, після нескладних перетворень отримаємо такий вираз для T_c:

$$T_c = \hbar\omega \frac{(2N\cos\pi\nu)^{1/D}}{2}. \tag{4.74}$$

Якщо взяти ряд до w^3, то вийде досить громіздкий такий вираз:

$$N\left(\frac{\hbar\omega}{T_c}\right)^D = \\ = \frac{2^{-D}\sin 2\pi\nu - \sqrt{2^{-2D}\sin^2 2\pi\nu - 4\left(2^{1-2D} - 3^{-D}\right)\sin\pi\nu\sin 3\pi\nu}}{2\left(2^{1-2D} - 3^{-D}\right)\sin 3\pi\nu}. \tag{4.75}$$

Потрібно сказати, що за деяких значень параметра статистики ν звідси отримуємо комплексні значення критичної температури T_c, як показано в табл. 4.3–4.4. Це, однак, є виключно наслідком використаного

наближення — у задачі, яку ми розглядаємо, комплексні температури не використовуються.

З рівняння (4.68) для критичної температури отримуємо вираз:

$$N\left(\frac{\hbar\omega}{T_c}\right)^2 = \frac{\pi^2}{\sin^2\pi\nu}\left(\sqrt{\frac{5+\cos 2\pi\nu}{6}} - \cos\pi\nu\right). \tag{4.76}$$

Інші наведені вище наближення оберненого полілогарифма не вдається звести до замкненого виразу для критичної температури. З формул (4.65), (4.73) розв'язок рівняння

$$\operatorname{Im}\operatorname{invLi}_D^{\{2\}}\left[\alpha N\left(\frac{\hbar\omega}{T_c}\right)^D\right] = 0 \tag{4.77}$$

існує лише для $D \leq 2$. Якщо вимірність простору можна подати у вигляді $D = 1 + 1/n$, де n — натуральне число ($n > 1$), то (4.77) є алґебраїчним рівнянням n-го порядку відносно $1/T_c^D$. Зокрема, для $D = 3/2$ критична температура T_c збігається (4.97).

Нарешті, ще одне значення T_c можна отримати внаслідок чисельного розв'язування рівняння (4.72):

$$\operatorname{Im}\operatorname{invLi}_2^{\{4\}}\left[\alpha N\left(\frac{\hbar\omega}{T_c}\right)^2\right] = 0. \tag{4.78}$$

Порівняння значень критичної температури, отриманих з різних наближень, із точними результатами, розрахованими чисельно, наведено в табл. 4.2–4.5.

Як легко зауважити, для $D = 2$ кілька наближень дають задовільну оцінку за різних значень параметра статистики. Можна використовувати навіть найпростіший вигляд, заданий формулою (4.74).

Для $1 < D < 2$ рівняння (4.77) видається найбільш прийнятною оцінкою критичної температури. Дя вимірностей простору $D > 2$ можна використовувати вирази (4.74)–(4.75).

Таблиця 4.2. Оцінки критичної температури з різних наближень для оберненого полілогарифма, $D = 2$. Значення подано для $N = 1000$ в одиницях $\hbar\omega$.

ν	точно	р-ня (4.74)	(4.75)	(4.77)	(4.76)	(4.78)	(4.97)
0.05	22.5	22.2	19.8	17.4	23.0	22.4	24.5
0.10	20.9	21.8	19.5	17.1	22.0	20.8	24.0
0.20	18.2	20.1	18.4	16.3	20.1	17.8	22.2
0.25	17.0	18.8	17.6	15.7	19.1	16.4	20.7
0.30	15.8	17.1	16.6	15.0	18.0	15.0	18.9
0.40	13.5	12.4	14.1	13.2	15.4	11.9	13.7
0.50	11.2	0	10.9	11.1	12.2	8.9	0

Таблиця 4.3. Оцінки критичної температури з різних наближень для оберненого полілогарифма, $D = 1.1$. Значення подано для $N = 1000$ в одиницях $\hbar\omega$.

ν	точно	р-ня (4.74)	(4.75)	(4.77)	(4.97)
0.16	142	444	$\in \mathbb{C}$	136	55.4
0.20	152	413	$\in \mathbb{C}$	150	51.5
0.30	175	309	246	174	38.5
0.40	186	172	268	181	21.5
0.50	183	0	216	174	0

Таблиця 4.4. Оцінки критичної температури з різних наближень для оберненого полілогарифма, $D = 1.5$. Значення подано для $N = 1000$ в одиницях $\hbar\omega$.

ν	точно	р-ня (4.74)	(4.75)	(4.77) або (4.97)
0.10	52.7	76.8	$\in \mathbb{C}$	51.0
0.20	50.2	68.9	$\in \mathbb{C}$	45.8
0.30	46.8	55.7	50.0	37.0
0.40	42.3	36.3	47.5	24.1
0.50	36.8	0	38.6	0

Таблиця 4.5. Оцінки критичної температури з різних наближень для оберненого полілогарифма, $D = 3$. Значення подано для $N = 1000$ в одиницях $\hbar\omega$.

ν	точно	р-ня (4.74)	(4.75)	(4.97)
0.05	7.63	6.27	6.71	9.37
0.10	6.83	6.20	6.62	9.25
0.20	5.65	5.87	6.22	8.76
0.30	4.73	5.28	5.44	7.88
0.40	3.91	4.26	$\in \mathbb{C}$	6.36
0.50	3.19	0	$\in \mathbb{C}$	0

4.6.3. Критичне значення параметра статистики. Можна показати, що у границі малих ν уявна частина $\mathrm{Im}(z\alpha)$ залишається додатною для всіх значень температури, тобто не спостерігаємо ніякої критичної точки T_c в цьому разі. Розв'язки рівняння (4.43) вказують на існування певного критичного значення статистичного параметра ν_c, такого, що при $\nu < \nu_c$ не існує T_c, натомість для $\nu > \nu_c$ можна знайти температуру, при якій $\mathrm{Im}(z\alpha)$ перетворюється в нуль. Якщо параметр статистики менший за ν_c, то енергія й теплоємність залишаються неперервними за умови скінченності N, а вище за ν_c існують розриви, які відповідають за фазові переходи.

За фіксованою вимірності простору D значення ν_c прямує до нуля, коли кількість частинок N зростає. З іншого боку, за фіксованого N значення ν_c збільшується зі зменшенням D, див. табл. 4.6.

Значення критичного параметра статистики було отримано на підставі чисельних розрахунків. Найпростішою формулою, якою можна описати ці дані, є степенева залежність:

$$\nu_c = aN^b. \tag{4.79}$$

Обчислення для різних значень вимірності простору в діапазоні зна-

Таблиця 4.6. Критичні значення параметра статистики ν_c для різної кількості частинок N та вимірності простору D.

D	$N = 10^2$	$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
3.0	0.07355	0.02340	0.007241	0.001510	0.0002819
2.0	0.1013	0.03592	0.01256	0.004326	0.001471
1.5	0.1508	0.06674	0.03026	0.01389	0.006413
1.4	0.1687	0.07994	0.03936	0.01982	0.01012
1.3	0.1912	0.09781	0.05279	0.02947	0.01680
1.2	0.2199	0.1223	0.07280	0.04538	0.02915
1.1	0.2566	0.1560	0.1028	0.07171	0.05198

чень $N = 10^2 \div 10^6$ дали такі результати:

$$D = 1.1 : \qquad \nu_c = (0.60 \pm 0.04) N^{-0.19 \pm 0.01}, \tag{4.80}$$

$$D = 1.5 : \qquad \nu_c = (0.76 \pm 0.01) N^{-0.35 \pm 0.003}, \tag{4.81}$$

$$D = 2.0 : \qquad \nu_c = (0.81 \pm 0.01) N^{-0.45 \pm 0.002}, \tag{4.82}$$

$$D = 3.0 : \qquad \nu_c = (0.75 \pm 0.03) N^{-0.50 \pm 0.01}. \tag{4.83}$$

Отримані значення показника b можуть вказувати на складнішу залежність ν_c від кількості частинок порівняно з простою моделлю (4.79), наприклад $N \ln N$ або й інші комбінації.

Незважаючи на те, що поки не вдалося знайти аналітично виразу для ν_c, виявляється можливим проаналізувати запропоновану статистику в бозонній границі малих ν з метою перевірки твердження про неперервність термодинамічних функцій.

Рівняння (4.43), що пов'язує активність, температуру і кількість частинок, у головному порядку дає

$$N\alpha = \frac{z\alpha}{1 - z\alpha} + \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D). \tag{4.84}$$

У границі $\nu \to 0$ параметр статистики дорівнює $\alpha \simeq 1 + i\pi\nu$, а

низькотемпературну залежність активності можна подати як

$$z = 1 + \Delta z = 1 + \Delta z' + i\Delta z'', \qquad \Delta z' < 0, \tag{4.85}$$

де $\Delta z'$ і $\Delta z''$ — малі поправки до дійсної й уявної частин z відповідно. Отже,

$$z\alpha = 1 + \Delta z' + i\Delta z'' + i\pi\nu, \tag{4.86}$$

$$\frac{z\alpha}{1 - z\alpha} = -\frac{1}{\Delta z' + i(\Delta z'' + \pi\nu)}. \tag{4.87}$$

Для дійсної й уявної частин рівняння Eq. (4.84) отримаємо:

$$N - \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D) = -\frac{\Delta z'}{(\Delta z')^2 + (\Delta z'' + \pi\nu)^2}, \tag{4.88}$$

$$\pi\nu N = \frac{\Delta z'' + \pi\nu}{(\Delta z')^2 + (\Delta z'' + \pi\nu)^2}. \tag{4.89}$$

Розв'язки мають вигляд:

$$\Delta z' = -\frac{1}{\left[N - \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D)\right] + (\pi\nu N)^2 / \left[N - \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D)\right]}, \tag{4.90}$$

$$\Delta z'' + \pi\nu = \frac{\pi\nu N}{\left[N - \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D)\right]^2 + (\pi\nu N)^2} = \mathrm{Im}(z\alpha). \tag{4.91}$$

Порівняння цих виразів із точними розрахунками показано на рис. 4.7, де видно дуже добре узгодження в низькотемпературній області.

Як можна зауважити, у цьому наближенні уявна частина $\mathrm{Im}(z\alpha)$ залишається додатною, отже, ніякої критичної температури в бозонній границі $\nu \to 0$ немає. Це підтверджують і чисельні розрахунки, які дають гладкі залежності термодинамічних функцій від температури при $\nu < \nu_c$.

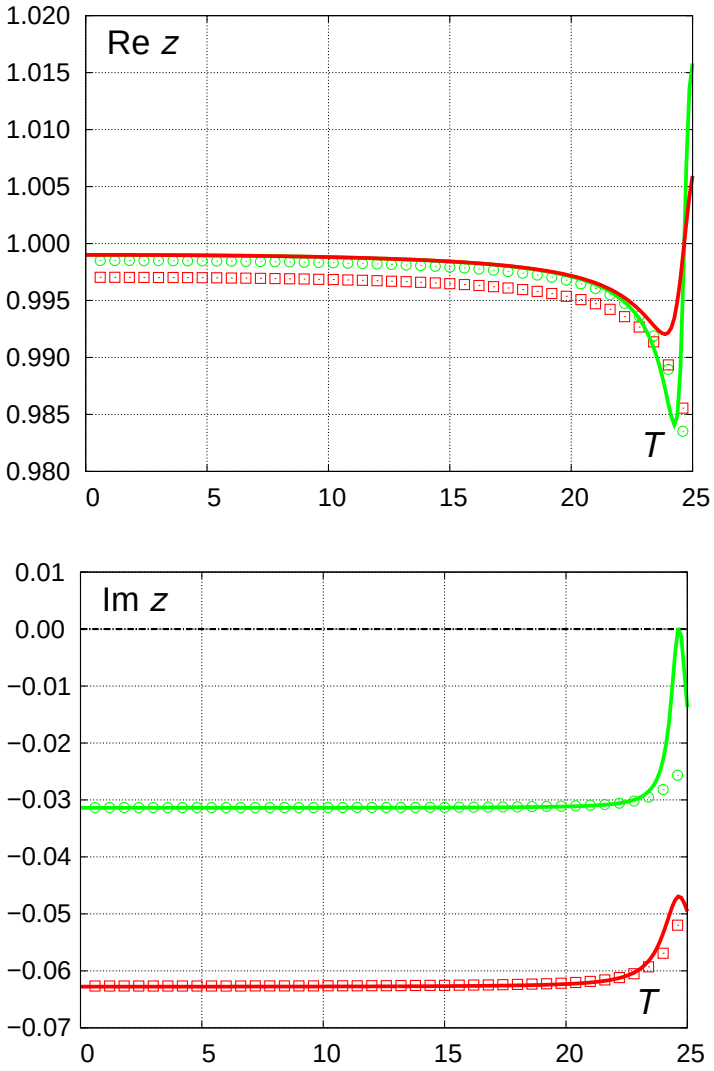


Рис. 4.7. $\mathrm{Re}\, z$ (вгорі) та $\mathrm{Im}\, z$ (внизу) двовимірної системи порівняно з наближеннями (4.90) і (4.91). Дані розраховано для $N = 1000$, $\nu = 0.01$ (зелені кружечки) і $\nu = 0.02$ (червоні квадратики). Наближення показано зеленою та червоною лініями, відповідно.

4.6.4. Поведінка термодинамічних функцій. На рис. 4.8 показано температурні залежності уявної і дійсної частин величини $z\alpha$ в околі точки переходу для значень параметра статистики безпосередньо нижче і вище критичним ν_c у двовимірному просторі. Результати для деяких інших просторових вимірностей наведено на рис. 4.9. Цікаво зауважити, що обчислення з дискретним підсумовуванням (4.36), (4.37) замість неперервного підходу з інтеґруванням приводять лише до зсу-

ву температурних залежностей, зберігаючи якісно таку саму картину. Цей зсув пропорційний до $N^{-1/D}$, пор. аналіз для бозе-систем у праці [370].

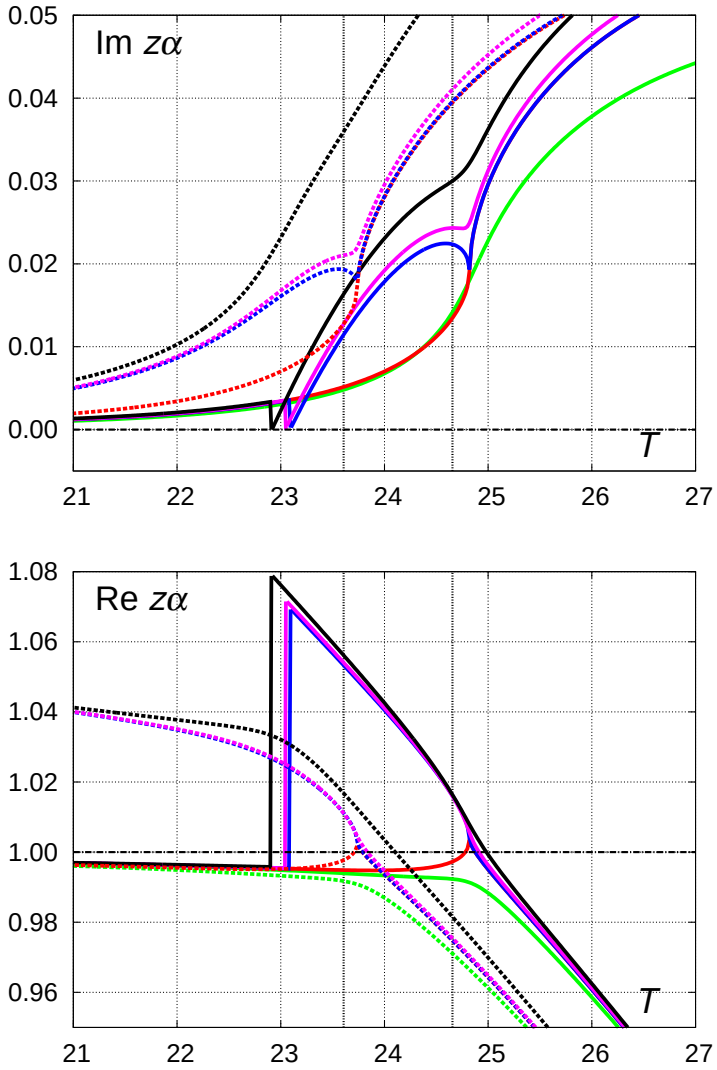


Рис. 4.8. Уявна (вгорі) і дійсна (внизу) частини $z\alpha$ для двовимірної системи з $N = 1000$ при значеннях параметра статистики ν, близьких до критичного $\nu_c = 0.035917\ldots$. Температуру T подано в одиницях $\hbar\omega$. Штрихові лінії відповідають дискретним підсумовуванням. Вертикальними лініями позначено температури бозе-конденсації без урахування скінченності кількості частинок ($T \simeq 24.7$) та з її врахуванням ($T \simeq 23.6$). Відповідність кольорів: зелений — $\nu = 0.03$; червоний — $\nu \to \nu_c - 0$; синій — $\nu \to \nu_c + 0$; бузковий — $\nu = 0.037$; чорний — $\nu = 0.04$. Тут і далі вертикальні лінії, що з'єднують різні гілки графіків при критичних температурах, показано для кращої візуалізації.

В околі T_c можна використати таке наближення:

$$z\alpha = 1 + x + iy, \tag{4.92}$$

так що

$$\frac{z\alpha}{1 - z\alpha} = -1 - \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}, \tag{4.93}$$

де x, y — малі величини. Подібним способом для полілогарифма отримаємо:

$$\mathrm{Li}_D(z\alpha) = \mathrm{Li}_D(1 + x + iy) = \zeta(D) + \Delta' + i\Delta'', \tag{4.94}$$

де Δ', Δ'' позначають малі поправки до дійсної й уявної частин, відповідно; $\Delta', \Delta'' \propto x^{D-1}$ або $\Delta' \propto x \ln x$ для $D = 2$.

При $T \to T_c$ поправка $y \to 0$, тому в цьому випадку з рівняння (4.43), відкидаючи нехтовно малу одиницю в (4.93), отримаємо:

$$N\alpha' + \frac{1}{x} = \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D), \qquad N\alpha'' = \frac{y}{x^2}. \tag{4.95}$$

Отже, в головному наближенні дійсна частина $\mathrm{Re}(z\alpha)$ буде

$$\mathrm{Re}(z\alpha) = 1 + x = 1 + \frac{1}{\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D) - N\alpha'}, \tag{4.96}$$

тоді як $\mathrm{Im}(z\alpha) = y$ залишається малою додатною величиною. Цей розв'язок правильно відтворює спостережувану зміну знака поправки x, див. рис. 4.10. Також звідси бачимо, що для критичної температури можна взяти грубе наближення у вигляді:

$$T_c = \hbar\omega \left(\frac{N\alpha'}{\zeta(D)}\right)^{1/D}. \tag{4.97}$$

Очевидно, що розв'язок, який визначається рівнянням (4.96), дає добре наближення лише для температур, що задовольняють умову

$$\left| \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D) - N\alpha' \right| > 1. \tag{4.98}$$

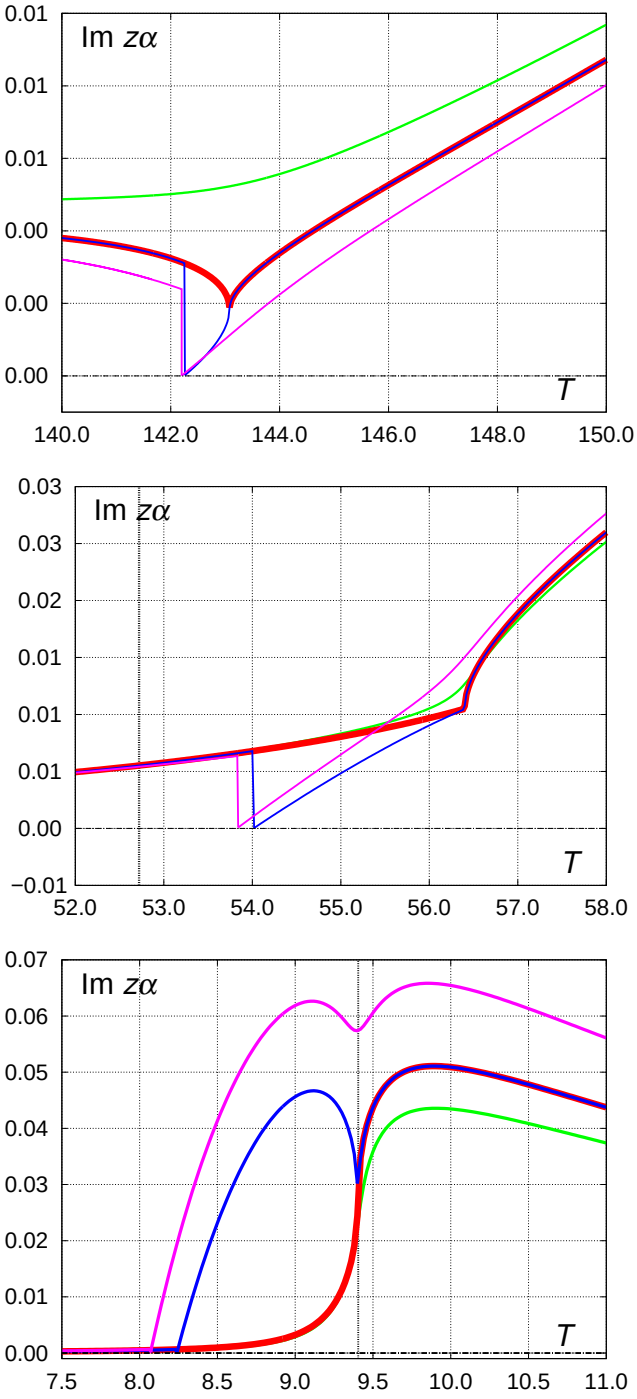


Рис. 4.9. Величина $\mathrm{Im}(z\alpha)$ для $D = 1.1$ (вгорі), $D = 1.5$ (посередині), та $D = 3$ (внизу) при значеннях параметра статистики ν, близьких до критичного ν_c. Кількість частинок $N = 1000$. Відповідність кольорів: зелений — $\nu < \nu_c$; червоний — $\nu \to \nu_c - 0$; синій — $\nu \to \nu_c + 0$; бузковий —$\nu > \nu_c$. Вертикальні лінії, що не збігаються з сіткою, позначають температури бозе-конденсації.

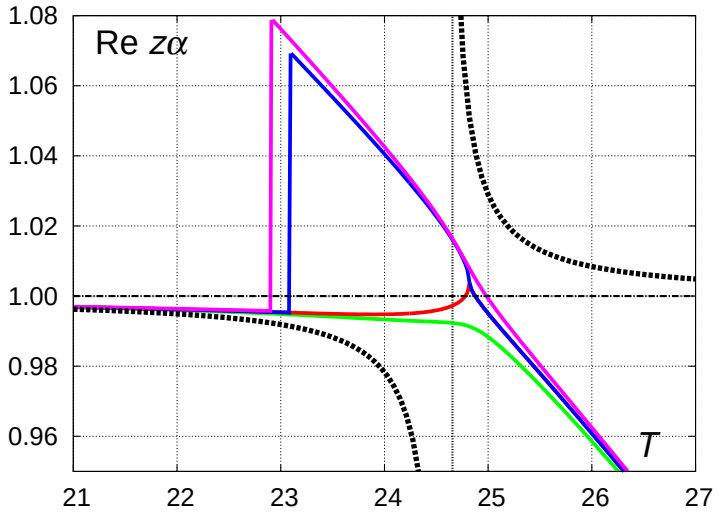


Рис. 4.10. Величина $\mathrm{Re}(z\alpha)$ в околі критичного параметра статистики ν_c при $D = 2$ порівняно з аналітичним наближенням з рівняння (4.96) [чорні пенктирні лінії]. Інші кольори — як на рис. 4.8.

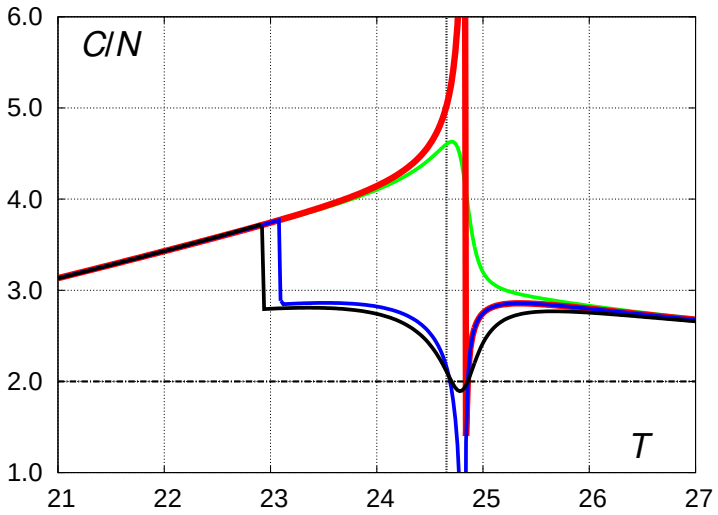


Рис. 4.11. Дійсна частина питомої теплоємності C/N для $D = 2$ при значеннях статистичного параметра ν близьких до критичного ν_c. Відповідність кольорів як на рис. 4.8.

Розрив функції z приводить до розриву на температурній залежності енергії, звідки маємо натяк на критичну точку, що відповідає фазовому переходу першого роду.

Як видно з рис. 4.8, при критичному значенні параметра статистики

ν_c на температурній залежності $\mathrm{Im}(z\alpha)$ є пік при певній температурі $T_p > T_c$. Він повинен відповідати іншому фазовому переходові, цього разу вже другого роду, див. рис. 4.11.

Треба також взяти до уваги, що гранична бозе-система ($\nu = 0$) має єдиний фазовий перехід — бозе-конденсацію — у границі $N \to \infty$ при температурі

$$T_{\mathrm{BEC}} = \hbar\omega \left(\frac{N}{\zeta(D)} \right)^{1/D}, \tag{4.99}$$

де $D > 1$. Проте, лише для $D > 3/2$, що відповідає умові $D > 3$ у випадку однорідної системи, спостерігаємо розрив на кривій $C(T)$ (пік при $D = 3$), порівн. рис. 4.12–4.13.

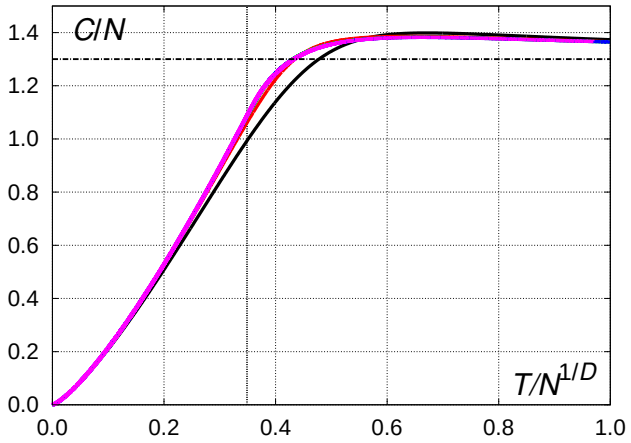


Рис. 4.12. Питома теплоємність бозе-системи осциляторів у просторах вимірності $D = 1.3$ з різною кількістю частинок N. Чорні лінії — $N = 10^2$; червоні — $N = 10^3$, зелені — $N = 10^4$, сині — $N = 10^5$, бузкові — $N = 10^6$.

Отже, для вимірностей простору $D > 1$ повинна існувати ще третя точка переходу, оскільки в означеній дробовій статистиці у границі $N \to \infty$ критичний параметр $\nu_c \to 0$. Ця проблема ще вимагає окремого детального аналізу. Цікаво зауважити, що про аналог конденсації Бозе–Айнштайна у системах зі звичайною статистикою Поліхронакоса (з дійсним параметром) повідомляли у праці [202].

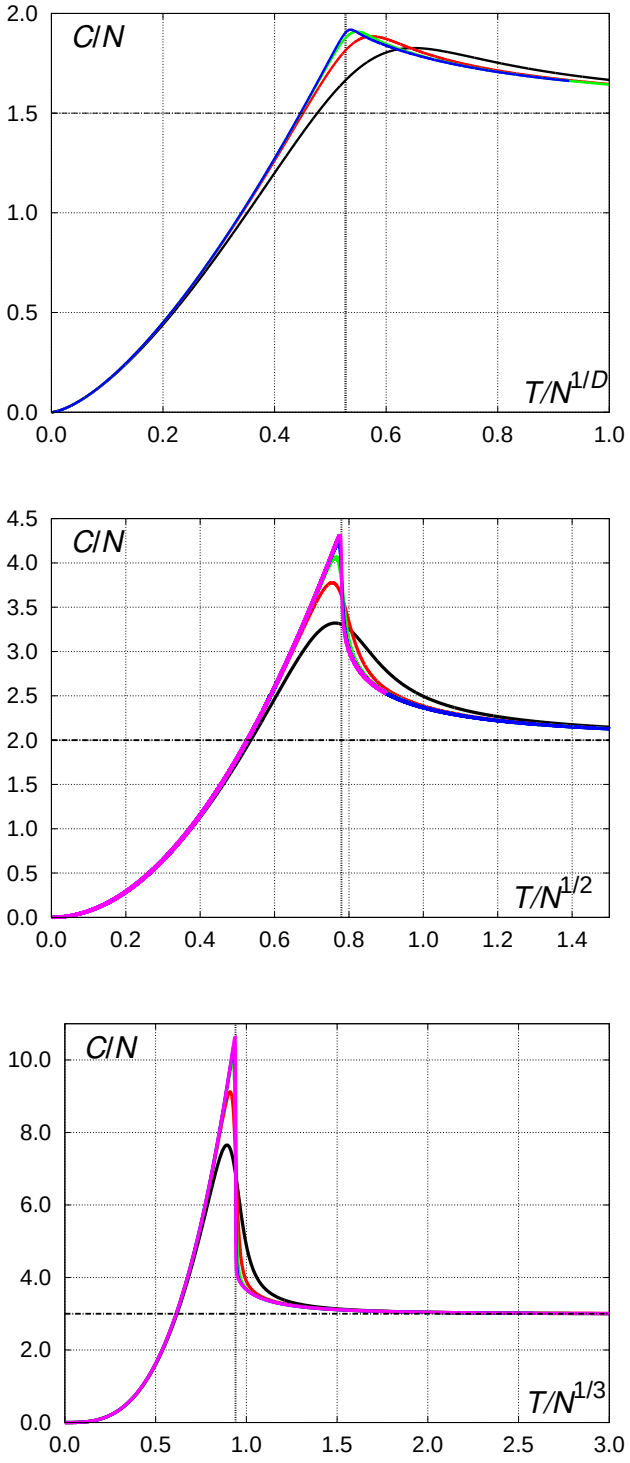


Рис. 4.13. Питома теплоємність бозе-системи осциляторів у просторах різної вимірності D з різною кількістю частинок N: $D = 3/2$ (вгорі), $D = 2$ (посередині), $D = 3$ (внизу). Для двох останніх випадків у границі $N \to \infty$ маємо розрив з $C|_{T\to T_c-0} > C|_{T\to T_c+0}$. Чорні лінії — $N = 10^2$; червоні — $N = 10^3$, зелені — $N = 10^4$, сині — $N = 10^5$, бузкові — $N = 10^6$.

4.6.5. Низькотемпературна область і узагальнення результатів. В низькотемпературній області активність залишається майже сталою, причому $z\alpha$ близьке до одиниці, а полілогарифм можна замінити на дзета-функцію Рімана

$$\mathrm{Li}_D(z\alpha) \simeq \zeta(D) \tag{4.100}$$

з точністю до поправок порядку $1/N$ у дійсній і уявній частині.

Тому енергія з доброю точністю набуде вигляду:

$$\mathcal{E} = (\alpha' - i\alpha'')\hbar\omega D \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D+1} \zeta(D), \tag{4.101}$$

а будь-які суттєві відхилення від цього наближення можливі лише в безпосередньому околі критичної температури.

Низькотемпературна поведінка теплоємності аналізованої системи відтворює результати для D-вимірного ідеального бозе-газу гармонічних осциляторів з точністю до множника α^*:

$$\mathcal{C} = (\alpha' - i\alpha'')D(D+1) \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D} \zeta(D). \tag{4.102}$$

На рис. 4.14 показано дійсну частину питомої теплоємності для $D = 2$, $N = 1000$ у широкому діапазоні температур, включно з високотемпературною областю (вище від температури фазового переходу) і областю низьких температур. Уявну частину питомої теплоємності наведено на рис. 4.15. Результати для деяких інших вимірностей простору показано на рис. 4.16.

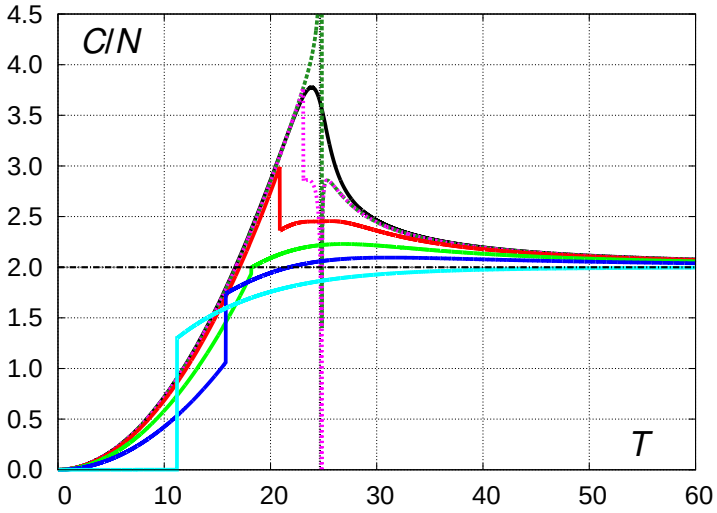


Рис. 4.14. Дійсна частина питомої теплоємності C/N двовимірної системи, $N = 1000$, для різних значень параметра статистики. Чорна лінія — $\nu = 0.0$; червона — $\nu = 0.1$; світло-зелена — $\nu = 0.2$; синя — $\nu = 0.3$; блакитна — $\nu = 0.5$. Пунктирні лінії відповідають значенням, близьким до ν_c: $\nu = 0.03591 < \nu_c$ (темно-зелена) і $\nu = 0.03592 > \nu_c$ (бузкова).

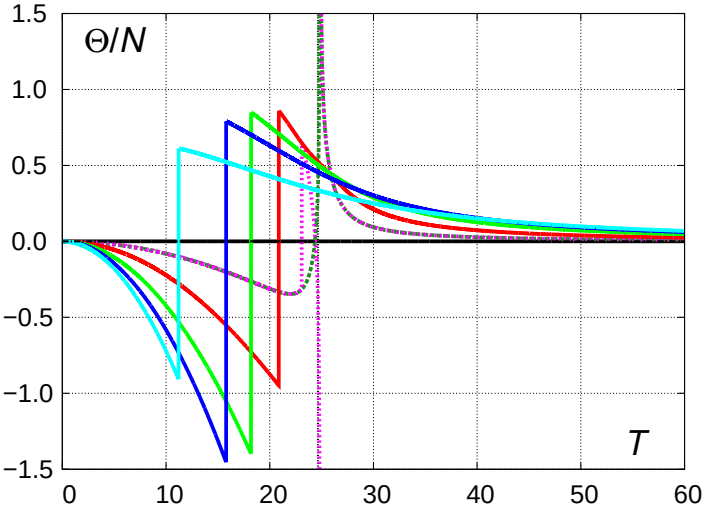


Рис. 4.15. Уявна частина питомої теплоємності C/N двовимірної системи, $N = 1000$, для різних значень параметра статистики. Кольори як на рис. 4.14.

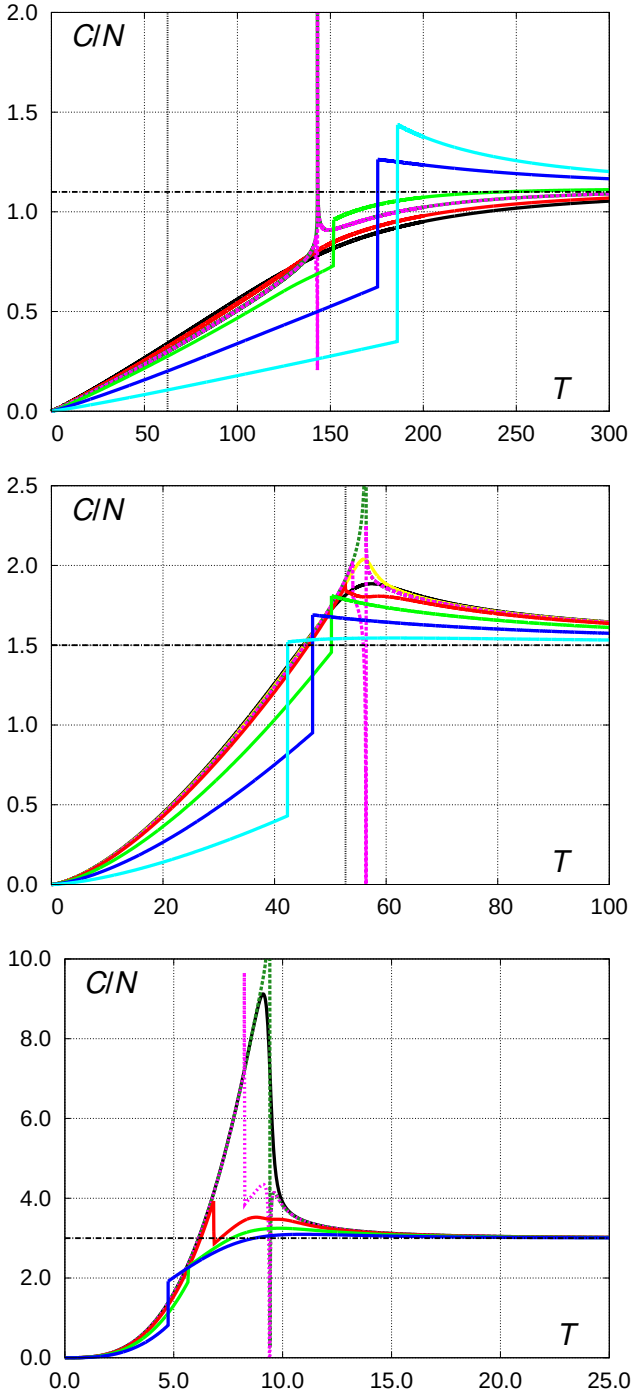


Рис. 4.16. Дійсна частина питомої теплоємності C/N D-вимірної системи, $N = 1000$, для різних значень параметра статистики. Верхній графік — $D = 1.1$, середній — $D = 1.5$, нижній — $D = 3$. Чорна лінія — $\nu = 0.0$; червона — $\nu = 0.1$; світло-зелена — $\nu = 0.2$; синя — $\nu = 0.3$; блакитна — $\nu = 0.5$. Пунктирні лінії відповідають значенням, близьким до ν_c: $\nu =< \nu_c$ (темно-зелена) і $\nu > \nu_c$ (бузкова).

Зрозуміло, що фізично цікавими є лише ті системи, де уявна частина енергії мала, а отже розсіювання все ще дозволяє трактувати систему як майже рівноважну. З рівняння (4.101) видно, що у низькотемпературній області відповідна умова $|\Gamma/E| \ll 1$ виконується, якщо $\pi\nu \ll 1$, тоді як для високих температур уявна частина енергії прямує до нуля, див. підрозділ 4.6.1. Як демонструє рис. 4.17, відношення $|\Gamma/E|$ насправді контролюється низькотемпературною поведінкою енергії, порівн. вираз (4.101), отже,

$$\left|\frac{\Gamma}{E}\right| \lesssim \frac{\alpha''}{\alpha'} = \tan \pi\nu. \tag{4.103}$$

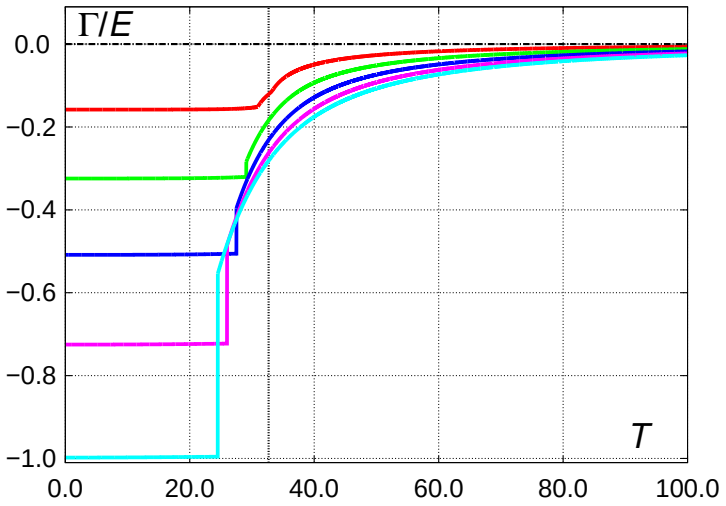


Рис. 4.17. Відношення уявної частини енергії до дійсної Γ/E при $D = 1.8$ для різних значень параметра статистики. Відповідність кольорів (лінії впорядковано згори донизу): червоний — $\nu = 0.05$, зелений — $\nu = 0.1$, синій — $\nu = 0.15$, бузковий — $\nu = 0.2$, блакитний — $\nu = 0.25$.

4.7. Висновки до розділу 4

У цьому розділі зроблено докладний аналіз термодинамічних властивостей системи D-вимірних ізотропних гармонічних осциляторів, які підкоряються статистиці Поліхронакоса з комплексним параметром.

Окремо досліджено задачу в одновимірному просторі, в якій усі результати можна отримати аналітично, та випадок $D > 1$, де потрібно робити чисельні розрахунки.

У високотемпературній границі, як і потрібно очікувати, отримано класичні результати, які не залежать від параметра статистики ν. Зі зниженням температури в системі передбачено існування фазового переходу першого роду за температури T_c, що визначається з умови $\mathrm{Im}(z\alpha) = 0$. В одновимірному випадку це приводить до множини значень критичних температур $T_c^{(k)}$, з яких лише найвища $T_c^{(0)}$ відповідає фазовому переходу, який у принципі можна спостерігати експериментально в межах досяжних точностей вимірювань [88].

У просторі з $D > 1$ відповідний фазовий перехід відбувається лише тоді, коли значення ν більше за деяке критичне ν_c, що визначається кількістю частинок і вимірністю простору. У таких системах критична температура T_c зменшується зі зростанням значення параметра статистики ν для більшості проаналізованих вимірностей простору. Це співвідношення змінюється лише з наближенням до $D = 1$ (у розрахунках $D = 1.1$). Відповідні аналітичні оцінки можна зробити на підставі рівняння (4.77).

Якщо $\nu = \nu_c$, то з неаналітичності температурної поведінки активності можна зробити висновок про існування ще одного фазового переходу (другого роду) при температурі $T_p > T_c$.

У низькотемпературній границі спостерігаємо бозе-подібну поведінку термодинамічних функцій з точністю до множника $\alpha^* = e^{-i\pi\nu}$. На підставі цієї границі можна також встановити умову застосовності запропонованої статистики у вигляді $\pi\nu \ll 1$, яка забезпечує малі значення уявної частини енергії системи.

Деякі питання на даний момент залишаються відкритими. Зокре-

ма, до них належить послідовне аналітичне вивчення критичного значення параметра статистики та поведінки термодинамічних функцій в околі точки фазового переходу. З першим безпосередньо пов'язане означення критичної температури T_p передбаченого переходу за типом бозе-конденсації. Са́ме з'ясування аналітичних властивостей ν_c дозволить прояснити деталі цього фазового переходу. Окрім того, уточнення поведінки термодинамічних функцій поблизу T_c вимагає точніших виразів для оберненого полілогарифма.

Можливості експериментальної перевірки явищ, передбачених у цій роботі, впираються в проблему приготування реальної фізичної системи, яку може описувати запропонована статистика Поліхронакоса з комплексним параметром.

Як уже було зазначено, явища, описані в цьому розділі, мають стосунок до реальних фізичних систем з малою дисипацією. Насамперед, це можуть бути бозони в зовнішньому потенціалі, форма якого визначає ефективну вимірність простору D [310]: бозе-система з квадратичним спектром в S-вимірному просторі, поміщена в зовнішній потенціал $V(r) \propto r^\eta$, через функцію густини станів еквівалентна до системи гармонічних осциляторів у просторі з ефективною вимірністю $D = S(1+2/\eta)/2$. В експериментах найчастіше застосовують гармонічні пастки ($\eta = 2$), отже $D = S$, і тому найбільший інтерес становлять випадки $D = 3$ та особливо $D = 2$.

До такої ж умови $D = S$ приводять і системи з лінійним спектром, який відповідає, наприклад, фононній гілці спектру елементарних збуджень рідкого гелію-4. На додаток, зміну значення $2 < D < 3$ можна розглядати як плавний перехід між плоскою й об'ємною геометріями для моделювання плівок різної товщини з метою вивчення процесів та критичних явищ у гелієвих плівках [263, 361, 371] або поверхневих

електронних системах [372].

Дробова просторова вимірність $2 < S < 3$ також слугує як модель пористого середовища [271], а тому бозонні системи з квадратичним енергетичним спектром відповідають гармонічним осциляторам з $1 < D < 3/2$.

Окрім того, виявляється можливим встановити наближену відповідність між запропонованою статистикою та деякими іншими типами статистик, зокрема з еніонами, статистикою Голдейна–Ву, а також q-деформованими бозонами.

РОЗДІЛ 5

ДВОПАРАМЕТРИЧНІ ДРОБОВІ СТАТИСТИКИ

5.1. Вступ

Після відкриття дробового квантового ефекту Голла [136], для пояснення цього явища було запропоновано низку теорій. Зокрема, моделі збуджень із дробовим зарядом розглядали Лафлін [137], Галперін [138], Аровас *та ін.* [140]. Еніони вважали за можливих кандидатів у такі квазічастинки [138, 140].

Узагальнений принцип Паулі, запропонований Голдейном [141], і подальше виведення функції розподілу в такій новій статистиці, яке здійснив Ву [142], започаткували вивчення так званої *дробової виключної статистики* (ДВС; англ. *fractional exclusion statistics — FES*). Виявилося, що вона описує еніони на найнижчому рівні Ландау [143], проте повної відповідності між ДВС та еніонною статистикою встановити не вдається.

Опис еніонів в межах статистичної механіки поки що не можна вважати повним. Труднощі виникають навіть у системі невзаємодіючих еніонів через присутність статистичної взаємодії [373]. Питання знаходження виразу для функції розподілу в еніонній статистиці залишається відкритим: вдається встановити певну наближену відповідність з кількома відомими типами дробової статистики на підставі виразу для другого віріального коефіцієнта, але всі вони не дають коректного

результату вже на рівні третього віріального коефіцієнта [33, Chap. 5]. Тому двопараметрична статистика видається доброю альтернативою для побудови точнішої статистико-механічної моделі. Варто зауважити, що двопараметричні узагальнення статистики недостатньо широко відображені в літературі. Переважно вони ґрунтуються на так званих q-деформаціях комутаційних співвідношень між операторами породження і знищення, порівн. [351, 374–378]. Деякі узагальнення, що мають спільні риси із запропонованими в цьому розділі, коротко проаналізував Каніадакіс [379], проте на підставі дещо інших міркувань.

Розглянуту в цьому розділі двояку модифікацію статистики отримують так. Насамперед, до підрахунку кількості мікростанів використано підходи Поліхронакоса [126] та ДВС Голдейна–Ву [141, 142]. Це приводить до зміни форми функції розподілу порівняно зі статистикою Бозе або Фермі і дає один параметр моделі. Наступним кроком виконано деформацію ґіббсівського множника, що забезпечує другий параметр статистики. З цією метою можна використати q-експоненту Цалліса. Справді, неекстенсивну статистичну механіку Цалліса [147] застосовують зокрема до систем із далекосяжними взаємодіями [148] — а саме така статистична взаємодія присутня в системі еніонів [31]. Зауважмо, однак, що деформація експоненти тут феноменологічна і на додаток також розглянуто так звану неповну статистику [208, 209].

Так звані неекстенсивні узагальнення статистик Бозе–Айнштайна та Фермі–Дірака відомі досить давно [205, 206, 380, 381]. Проте тут варто звернути увагу на тривале термінологічне непорозуміння щодо неекстенсивності та неадитивності, про яке детально сказано в [382]. Вживаючи надалі термін “неекстенсивність” та похідні від нього матимемо на увазі переважно неадитивну природу ентропії і пов’язані з нею q-експоненти Цалліса. На загал, однак, терміни *неекстенсивна*

статистика та *неадитивна статистика*, продовжують співіснувати у науковій літературі як взаємозамінні, порівн. [383].

Результати цього розділу опубліковано у статтях [72, 76, 87, 90, 91].

5.2. Віріальне і кластерне розвинення

Для зручності викладу варто нагадати зв'язок між віріальним і кластерним розвиненнями у статистичній механіці для конкретного випадку двовимірної системи.

Рівняння стану двовимірної системи у границі малих густин і високих температур можна записати у вигляді такого віріального розвинення:

$$\frac{p}{T} = \rho_2 \left[1 + b_2\, \rho_2 \lambda^2 + b_3\, (\rho_2 \lambda^2)^2 + \ldots\right], \tag{5.1}$$

де p — тиск, T — абсолютна температура, $\rho_2 = N/V_2$ — двовимірна густина (концентрація) системи, причому тут N — кількість частинок, а V_2 — площа, яка виступає аналогом об'єму. Величина

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{1/2}$$

— довжина теплової хвилі де Бройля частинки з масою m. Множники b_j — знерозмірені j-ті віріальні коефіцієнти.

З іншого боку, велику статистичну суму Ξ можна записати у вигляді кластерного розвинення, тобто ряду за активністю $z = e^{\mu/T}$, де μ — хімічний потенціал [33, Ch. 4]:

$$\frac{1}{A} \ln \Xi = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{B}_\ell z^\ell. \tag{5.2}$$

Коефіцієнти розкладу $\mathcal{B}_\ell$ називають кластерними інтеґралами. За їх допомогою можна розрахувати віріальні коефіцієнти завдяки термодинамічним співвідношенням, що пов'язують тиск і густину з великою

статистичною сумою, а саме:

$$\frac{p}{T} = \frac{1}{V_2} \ln \Xi(z, V_2, T), \tag{5.3}$$

і

$$\rho_2 = \frac{N}{V_2} = z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{V_2} \ln \Xi \right)_{V_2,T}. \tag{5.4}$$

Застосовуючи кластерне розвинення (5.2) до рівняння стану (5.3), отримаємо:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{B}_\ell z^\ell = \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell \right) \left[1 + b_2 \lambda^2 \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell \right) + \dots \right]. \tag{5.5}$$

Звідси відразу маємо зв'язок:

$$b_2 \lambda^2 = -\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2}, \tag{5.6}$$

і для вищих віріальних коефіцієнтів можна аналогічно отримати результати, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z [384]:

$$b_3 \lambda^4 = -2 \frac{\mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_1^3} + 4 \frac{\mathcal{B}_2^2}{\mathcal{B}_1^4}, \tag{5.7}$$

$$b_4 \lambda^6 = -3 \frac{\mathcal{B}_4}{\mathcal{B}_1^4} + 18 \frac{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_1^5} - 20 \frac{\mathcal{B}_2^3}{\mathcal{B}_1^6}, \tag{5.8}$$

$$\dots .$$

Щоб знайти вираз для функції розподілу (чисел заповнення) еніонів n_j, такий що

$$N = \sum_j g_j n_j, \tag{5.9}$$

де сума пробігає за всіма можливими рівнями енергії з виродженнями g_j, перепишемо це рівняння у вигляді:

$$\frac{N}{V_2} = \frac{1}{V_2} \sum_j g_j n_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell. \tag{5.10}$$

Оскільки функціональна залежність n_j від енергії рівня ε_j невідома, ми розглядатимемо кілька модифікацій статистики, перевіряючи придатність моделі для опису еніонів на підставі виразів для другого і третього віріальних коефіцієнтів. Перед цим, однак, проаналізуємо однопараметричні дробові статистики.

5.3. Зв'язок між різними типами дробової статистики

5.3.1. Віріальне розвинення для еніонів. Для подальшого викладу корисно пригадати віріальне розвинення ідеального двовимірного газу зі статистикою Фермі або Бозе:

$$\frac{p}{T} = \rho_2 \left(1 \pm \frac{1}{4}\,\rho_2 \lambda^2 + \ldots\right), \tag{5.11}$$

де верхній знак відповідає ферміонам, а нижній — бозонам, тобто другі віріальні коефіцієнти будуть відповідно:

$$b_2^{\mathrm{F}} = +\frac{1}{4}, \qquad b_2^{\mathrm{B}} = -\frac{1}{4}. \tag{5.12}$$

Зобразивши велику статистичну суму через статистичні суми Z_N системи N частинок

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N, \qquad Z_0 \equiv 1, \tag{5.13}$$

із кластерного розвинення (5.2) матимемо:

$$\mathcal{B}_1 = \frac{Z_1}{V_2}, \qquad \mathcal{B}_2 = \frac{2Z_2 - Z_1^2}{2V_2}, \qquad \ldots, \tag{5.14}$$

де враховано розклад логарифма $\ln(1+x) = x - x^2/2 \pm \ldots$, або для другого віріального коефіцієнта:

$$b_2 = -\frac{V_2}{\lambda^2}\frac{2Z_2 - Z_1^2}{2Z_1^2}. \tag{5.15}$$

Ідеальний еніонний газ можна розглядати як взаємодіючий бозе-газ. Зважаючи на те, що одночастинкова статистична сума Z_1 не залежить від статистики, перепишемо b_2 у вигляді:

$$b_2(\alpha) = b_2(0) - \frac{V_2}{\lambda^2}\frac{Z_2(\alpha) - Z_2(0)}{Z_1^2}, \tag{5.16}$$

де $b_2(0)$, $Z_2(0)$ відповідають ідеальному бозе-газові, а параметр $\alpha \in [0;1]$. Варто зазначити, що усі ці вирази мають сенс лише в термодинамічній границі $V_2 \to \infty$.

Задачу далі зручно розглядати, помістивши систему в осцилляторний потенціал із частотою ω як реґулятор. Одночастинкову статистичну суму легко рахуємо, зважаючи на спектр $E_n = (n+1)\hbar\omega$, причому виродження n-го рівня дорівнює $n+1$:

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{-(n+1)\beta\hbar\omega} = \frac{1}{4\sinh^2\frac{\beta\hbar\omega}{2}}. \tag{5.17}$$

У двочастинковій задачі перейдемо до системи центра мас, записавши зовнішній потенціал як

$$\omega^2(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2) = 2\omega^2\mathbf{R}^2 + \frac{\omega^2}{2}\mathbf{r}^2, \tag{5.18}$$

де радіус-вектор центра мас $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1)/2$, а $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — відносна віддаль.

У двочастинковій статистичні сумі можна виділити внесок центра мас:

$$Z_2 = Z_1\tilde{Z}_2, \tag{5.19}$$

причому Z_1 тут уже відповідає одночастинковій задачі з частотою $\omega_{\text{c.m.}}^2 = 2\omega^2$, див. (5.18). Зважаючи на те, що енерґетичний спектр задачі двох еніонів має дві гілки,

$$\begin{aligned} &E_n^{(1)} = (2n+1+\alpha)\hbar\omega \quad \text{з виродженням } n+1, \\ &E_n^{(2)} = (2n+1-\alpha)\hbar\omega \quad \text{з виродженням } n, \text{ де } n = 0,1,2,3\ldots, \end{aligned} \tag{5.20}$$

отримаємо статистичну суму:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)e^{-(2n+1+\alpha)\beta\hbar\omega}+ne^{-(2n+1-\alpha)\beta\hbar\omega}\right]= \\ &= \frac{\cosh(1-\alpha)\beta\hbar\omega}{2\sinh^2\beta\hbar\omega}. \qquad (5.21)\end{aligned}$$

Вираз (5.16) можна тепер переписати так:

$$b_2(\alpha)=b_2(0)-\frac{V_2}{\lambda^2}\frac{\tilde{Z}_2(\alpha)-\tilde{Z}_2(0)}{Z_1}. \qquad (5.22)$$

Далі для спрощення перейдемо до термодинамічної границі, що відповідає $\omega\to 0$. Враховуючи, що з одночастинкової задачі можна встановити зв'язок між статистичною сумою $Z_1=V_2/\lambda^2$ і частотою зовнішнього потенціалу, матимемо з (5.17):

$$\frac{V_2}{\lambda^2}=\frac{1}{\beta^2\hbar^2\omega^2}=\frac{2}{\beta^2\hbar^2 2\omega^2}=2Z_1, \qquad (5.23)$$

де через Z_1 вже позначено відповідник у двочастинковій задачі. Треба зазначити, що внаслідок реґуляризації осциляторним потенціалом у кластерних коефіцієнтах потрібно робити перехід $\mathcal{B}_\ell\to\ell\mathcal{B}_\ell$ [33, Chap. 4].

Після елементарних перетворень, беручи до уваги другий віріальний коефіцієнт ідеального бозе-газу (5.12) $b_2(0)=-1/4$, остаточно матимемо для другого ідеального еніонного газу:

$$b_2(\alpha)=-\frac{1}{4}(1-4\alpha+2\alpha^2). \qquad (5.24)$$

Цікаво, що для $\alpha=1$ отримуємо правильну ферміонну границю (5.12) $b_2(1)=+1/4$.

Для вищих віріальних коефіцієнтів аналітичні результати не відомі через складність задачі $N\geq 3$ еніонів [385]. Варто відзначити, наприклад, таке точне співвідношення симетрії для третього віріального

коефіцієнта [33, 386, 387]:

$$b_3(\alpha) = b_3(1-\alpha). \tag{5.25}$$

Отримані вирази для віріальних коефіцієнтів можна використати з метою встановлення відповідності між еніонною статистикою та іншими видами дробових статистик. Виявляється, що жодне із описаних узагальнень квантової статистики не дає точної відповідності [33], і вдається зіставити лише деякі види статистик з певною точністю.

Наприклад, ідеальний двовимірний газ, що підкоряється статистиці Джентіле з $d \geq 2$, має другий віріальний коефіцієнт (1.40), (5.12)

$$b_2^{\mathrm{G}} = b_2^{\mathrm{B}} = -\frac{1}{4}, \tag{5.26}$$

що ніяк не вдається зіставити з віріальним коефіцієнтом еніонів (5.24) $b_2(\alpha) = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2)$, за винятком хіба що тривіального значення $\alpha = 0$.

З рівняння (1.50) другий віріальний коефіцієнт ідеального двовимірного газу зі статистикою Голдейна–Ву дорівнює:

$$b_2^{\mathrm{HW}} = \frac{1}{4}(2g - 1). \tag{5.27}$$

Порівнюючи його з другим віріальним коефіцієнтом еніонів (5.24), отримаємо зв'язок між параметрами статистик g та α:

$$g = 2\alpha - \alpha^2. \tag{5.28}$$

Подібно до цього, зіставляючи віріальний розклад еніонів із результатом для статистики Поліхронакоса (1.55)

$$b_2^{\mathrm{P}} = -\frac{1}{4}|\gamma|, \tag{5.29}$$

де взято до уваги бозоноподібний тип статистики з $\gamma < 0$, отримаємо зв'язок між параметрами γ й α:

$$\gamma = 4\alpha - 2\alpha^2 - 1. \tag{5.30}$$

Проте наведені результати не дають змоги повністю ототожнити статистику еніонів ні зі статистикою Голдейна–Ву, ні зі статистикою Поліхронакоса: вже третій віріальний коефіцієнт у них не буде збігатися [33, Chap. 5].

Також не вдається знайти повну аналогію статистик, описаних у розділі 1.3. Так, у високотемпературній границі рівняння стану у статистиці Джентіле має лише бозоноподібну поправку, на відміну від статистик Голдейна–Ву чи Поліхронакоса [201]. Наближено можна зіставляти статистики на підставі значень аналога рівня Фермі, що не забезпечує відповідності в усьому температурному інтервалі. Цікаво, що в певному наближенні все ж можна знайти відповідність статистики Голдейна–Ву і статистики Джентіле на підставі поведінки чисел заповнення [185].

5.3.2. Розклади за параметром статистики. Зв'язок між різними типами дробової статистики можна встановити, досліджуючи малі відхилення від певної традиційної статистики (Бозе або Фермі). Для визначеності далі відштовхуватимемося від статистики Бозе. Нехай аналізована система характеризується одночастинковим спектром ε_j, а G_j означає виродження j-го рівня. Хімічний потенціал відповідної бозе-системи μ_{B} пов'язаний з кількістю частинок N і температурою T так:

$$N = \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j - \mu_{\text{B}})/T} - 1}. \tag{5.31}$$

Розгляньмо далі систему, що підкоряється статистиці Поліхронакоса (1.54), у якій параметр $\gamma = a - 1$, де $a \to 0$. Хімічний потенціал такої системи μ_{P} визначає рівняння

$$N = \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j - \mu_{\text{P}})/T} - 1 + a}, \tag{5.32}$$

і його можна записати, увівши мале відхилення від хімічного потенціалу бозе-системи:

$$\mu_{\rm P} = \mu_{\rm B} + \Delta\mu_{\rm P}. \tag{5.33}$$

Розкладаючи далі вираз під сумою в рівнянні (5.32) в ряд за малими величинами a та $\Delta\mu_{\rm P}$ з точністю до лінійних поправок, отримаємо:

$$\begin{aligned} N &= \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j-\mu_{\rm P})/T}-1+a} = \\ &= \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j-\mu_{\rm B})/T}-1} + \\ &+ \sum_j \frac{G_j}{\left[e^{(\varepsilon_j-\mu_{\rm B})/T}-1\right]^2}\left\{\frac{\Delta\mu_{\rm P}}{T}\,e^{(\varepsilon_j-\mu_{\rm B})/T}-a\right\}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Звідси, з урахуванням (5.31), матимемо:

$$\frac{\Delta\mu_{\rm P}}{T} = a\frac{P}{N+P}, \qquad \text{де} \quad P=\sum_j \frac{G_j}{\left[e^{(\varepsilon_j-\mu_{\rm B})/T}-1\right]^2}, \tag{5.35}$$

див. також [86].

Подібним способом можна встановити поправку до хімічного потенціалу системи з аналогом бозе-статистики в підході Цалліса (1.72):

$$\begin{aligned} N &= \sum_j \frac{G_j}{e_q^{(\varepsilon_j-\mu_{\rm Ts})/T}-1} = \\ &= \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j-\mu_{\rm B})/T}-1} = \\ &+ \sum_j \frac{G_j e^{(\varepsilon_j-\mu_{\rm B})/T}}{\left[e^{(\varepsilon_j-\mu_{\rm B})/T}-1\right]^2}\left\{\frac{\Delta\mu_{\rm Ts}}{T}-\left(\frac{\varepsilon_j-\mu_{\rm B}}{T}\right)^2\frac{q-1}{2}\right\}, \end{aligned} \tag{5.36}$$

де $q\to 1$, а хімічний потенціал

$$\mu_{\rm Ts} = \mu_{\rm B} + \Delta\mu_{\rm Ts}. \tag{5.37}$$

Такі самі розклади можна записати для бозе-системи зі спектром $\varepsilon_j + \Delta\varepsilon_j$, де мала поправка $\Delta\varepsilon_j$ може бути, наприклад, спричинена

взаємодією. Відповідний хімічний потенціал μ буде мало відрізнятися від μ_{B}:

$$\mu = \mu_{\text{B}} + \Delta\mu, \tag{5.38}$$

причому

$$\begin{aligned} N &= \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j+\Delta\varepsilon_j-\mu)/T}-1} = \\ &= \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j-\mu_{\text{B}})/T}-1} + \sum_j \frac{G_j e^{(\varepsilon_j-\mu_{\text{B}})/T}}{\left[e^{(\varepsilon_j-\mu_{\text{B}})/T}-1\right]^2}\frac{\Delta\mu-\Delta\varepsilon_j}{T}. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Беручи до уваги останній результат і порівнюючи його з виразами (5.34) і (5.36), можна говорити про те, що взаємодіючій бозе-системі з певною точністю вдається поставити у відповідність системи із дробовими статистиками, параметри яких пов'язані з поправкою до спектра $\Delta\varepsilon_j$. Для отримання цього зв'язку, вимагатимемо, наприклад, щоб енергії різних систем, розраховані через числа заповнення n_j у відповідних статистиках, збігалися:

$$E = \sum_j \epsilon_j G_j n_j = E_{\text{B}} + \Delta E, \tag{5.40}$$

де E_{B} — енергія бозе-системи зі спектром ε_j:

$$E_{\text{B}} = \sum_j \frac{\varepsilon_j G_j}{e^{(\varepsilon_j-\mu_{\text{B}})/T}-1}, \tag{5.41}$$

ϵ_j — одночастинковий спектр (у розглянутих випадках він дорівнює просто ε_j або $\varepsilon_j + \Delta\varepsilon_j$), а ΔE — це й буде поправка, вирази для якої потрібно зіставляти. Через громіздкість остаточні результати тут не наведено, однак описаний ланцюжок міркувань є достатнім для їх отримання, а також для поширення на деякі інші типи статистик.

5.4. Двопараметричні модифікації статистики

Розглядатимемо модифікації дробової статистики на підставі таких двох загальних виразів. Перший,

$$n_j^{\mathrm{P}} = \frac{1}{z^{-1}X(\varepsilon_j) + Y}, \tag{5.42}$$

узагальнює стандартну статистику Бозе (Фермі), яка визначається $X(\varepsilon_j) = e^{\varepsilon_j/T}$ і $Y = -1$ ($Y = +1$), а також дробову статистику Поліхронакоса з $Y = -\gamma = \mathrm{const} \neq \pm 1$.

Другу модифікацію отримаємо на підставі статистики Голдейна–Ву:

$$n_j^{\mathrm{HW}} = \frac{1}{w[z^{-1}X(\varepsilon_j)] + g}, \tag{5.43}$$

де функція $w(\xi)$ є розв'язком такого трансцендентного рівняння:

$$w^g(1+w)^{1-g} = \xi, \tag{5.44}$$

яке отримують з виразу для кількості мікростанів квантової багаточастинкової системи, що є простою інтерполяцією між бозонами і ферміонами [142].

На додаток до параметра γ у статистиці Поліхронакоса (5.42) та параметра g у статистиці Голдейна–Ву (5.43) другий параметр моделі можна ввести, деформуючи експоненту у залежності X в рівняннях (5.42)–(5.43). Розглядатимемо дві такі деформації: q-експонента Цалліса e_q^x замість звичайної e^x (як у неекстенсивній/неадитивній статистиці) і заміна e^x на e^{qx}, відома в неповній статистиці [208, 209].

Хоча, як уже було сказано, сама деформація ґіббсівського множника $X = e^{\varepsilon_j/T}$ за допомогою параметра q тут є феноменологічною, можна навести певне фізичне обґрунтування цієї процедури. Справді, далекосяжна статистична взаємодія в системі еніонів [31] може спричиняти неадитивність, яку враховують в межах підходу Цаллі-

са [147, 382, 388]; з іншого боку, між статистикою Цалліса і неповною статистикою можна встановити певну відповідність [389].

q-експонента Цалліса визначається виразом [388]:

$$e_q^x = [1+(1-q)x]^{1/(1-q)} \qquad \text{для} \;\; 1+(1-q)x \geq 0 \qquad (5.45)$$
$$\text{і} \quad e_q^x = 0 \;\; \text{в іншому випадку.}$$

Властивості цієї та інших споріднених функцій добре описано в працях [206, 390, 391].

У неповній статистиці нормування ймовірностей p_i записують у вигляді [208, 209]:

$$\sum_i p_i^q = 1 \qquad \text{замість} \qquad \sum_i p_i = 1. \qquad (5.46)$$

Легко бачити, що обидва випадки модифікацій зводяться до стандартних експонент, якщо $q = 1$.

При малих z розклади рівнянь (5.42) і (5.43) мають вигляд:

$$n_j^{\mathrm{P}} = \sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell-1}\frac{Y^{\ell-1}}{X^\ell}\,z^\ell = \frac{1}{X}z - \frac{Y}{X^2}z^2 + \frac{Y^2}{X^3}z^3 \mp \ldots, \quad (5.47)$$

$$n_j^{\mathrm{HW}} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\Gamma[g(m+1)]}{m!\Gamma[g(m+1)-m]}\frac{z^{m+1}}{X^{m+1}} =$$
$$= \frac{1}{X}z - \frac{(2g-1)}{X^2}z^2 + \frac{(3g-2)(3g-1)}{2!\,X^3}z^3 \mp \ldots, \qquad (5.48)$$

де для функції w у статистиці Голдейна–Ву використано розклади з [392].

З метою спрощення замінимо в рівняннях (5.9)–(5.10) підсумовування за рівнями на інтеґрування за енерґіями, ввівши функцію густини станів $G(\varepsilon)$, яка для двовимірного ідеального газу частинок з масою m дорівнює $G(\varepsilon) = mV_2/2\pi\hbar^2 = \mathrm{const}$:

$$\sum_j \ldots = \int_0^\infty d\varepsilon\, G(\varepsilon)\ldots. \qquad (5.49)$$

Використовуючи різні вирази для функції X, можна безпосередньо розрахувати кластерні інтеґрали $\mathcal{B}_\ell$ з розкладів (5.47)–(5.48), що своєю чергою дає віріальні коефіцієнти на підставі співвідношень (5.6)–(5.8).

5.4.1. Неповна статистика Поліхронакоса. Для цього типу статистики, яку позначатимемо скороченням IPS (від англ. *incomplete Polychronakos statistics*), величина $X(\varepsilon) = e^{q\varepsilon/T}$, $Y = -\gamma$ дає для кластерних інтеґралів:

$$\mathcal{B}_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \qquad \mathcal{B}_2\lambda^2 = \frac{\gamma}{4q}, \qquad \mathcal{B}_3\lambda^2 = \frac{\gamma^2}{9q}, \qquad \dots, \tag{5.50}$$

а другий та третій віріальні коефіцієнти дорівнюють:

$$b_2^{\mathrm{IPS}} = -\frac{\gamma q}{4}, \qquad b_3^{\mathrm{IPS}} = \frac{\gamma^2 q^2}{36}. \tag{5.51}$$

5.4.2. Неадитивна статистика Поліхронакоса. Для цієї модифікації використовуватимемо скорочення NAPS (від англ. *nonadditive Polychronakos statistics*). У цій статистиці $X(\varepsilon) = e_q^{\varepsilon/T}$, $Y = -\gamma$, що дає кластерні інтеґрали:

$$\mathcal{B}_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \qquad \mathcal{B}_2\lambda^2 = \frac{\gamma}{2(1+q)}, \qquad \mathcal{B}_3\lambda^2 = \frac{\gamma^2}{3(2+q)}, \qquad \dots, \tag{5.52}$$

звідки другий і третій віріальні коефіцієнти дорівнюють:

$$b_2^{\mathrm{NAPS}} = -\frac{\gamma q^2}{2(1+q)}, \qquad b_3^{\mathrm{NAPS}} = \gamma^2 q^4 \left[\frac{1}{(1+q)^2} - \frac{1}{3q(2+q)}\right]. \tag{5.53}$$

Зазначимо, що таку статистику у границях слабкої неадитивності $q \to 1$ і $\gamma \to 1$ можна застосувати для моделювання скінченної слабковзаємодіючої бозе-системи [90], яку буде проаналізовано в наступних розділах.

5.4.3. Неповна статистика Голдейна–Ву. Для цієї статистики використовуватимемо скорочення IHWS (від англ. *incomplete Haldane–*

Wu statistics). У цій статистиці $X(\varepsilon) = e^{q\varepsilon/T}$, звідки отримуємо кластерні інтеґрали

$$\mathcal{B}_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad \mathcal{B}_2\lambda^2 = -\frac{(2g-1)}{2!\cdot 2q}, \quad \mathcal{B}_3\lambda^2 = \frac{(3g-2)(3g-1)}{3!\cdot 3q}, \ \ldots, \tag{5.54}$$

а другий та третій віріальні коефіцієнти дорівнюють:

$$b_2^{\text{IHWS}} = \frac{(2g-1)q}{4}, \qquad b_3^{\text{IHWS}} = \frac{q^2}{36}. \tag{5.55}$$

5.4.4. Неадитивна статистика Голдейна–Ву. Для цієї статистики використовуватимемо скорочення NAHWS (від англ. *nonadditive Haldane–Wu statistics*). У цій статистиці $X(\varepsilon) = e_q^{\varepsilon/T}$, звідки маємо кластерні інтеґрали

$$\mathcal{B}_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \qquad \mathcal{B}_2\lambda^2 = -\frac{(2g-1)}{2(1+q)},$$

$$\mathcal{B}_3\lambda^2 = \frac{(3g-2)(3g-1)}{6(2+q)}, \ \ldots, \tag{5.56}$$

а другий та третій віріальні коефіцієнти дорівнюють:

$$b_2^{\text{NAHWS}} = \frac{2g-1}{2}\frac{q^2}{1+q},$$

$$b_3^{\text{NAHWS}} = q^4\left[\frac{(2g-1)^2}{(1+q)^2} - \frac{(3g-2)(3g-1)}{3q(2+q)}\right].$$

5.4.5. Зв'язок із еніонною статистикою. Щоб визначити дробову статистику, у якій функція розподілу найкраще підходить для опису еніонів, порівняємо отримані вище у кожній статистиці вирази для b_2 і b_3, що містять два параметри, із відповідними віріальними коефіцієнтами системи еніонів, у результаті чого будемо мати системи двох рівнянь. Їх розв'язки дозволять з'ясувати, яка з запропонованих чотирьох моделей є найбільш прийнятною.

Другий і третій віріальні коефіцієнти ідеального еніонного газу дорівнюють [385]:

$$b_2^{\text{anyon}} = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2), \quad b_3^{\text{anyon}} = \frac{1}{36} + \frac{\sin^2 \pi\alpha}{12\pi^2} + c_3 \sin^4 \pi\alpha, \tag{5.57}$$

$$c_3 = -(1.652 \pm 0.012) \cdot 10^{-5},$$

де статистичний параметр $\alpha \in [0; 1]$ забезпечує інтерполяцію між статистикою Бозе ($\alpha = 0$) і статистикою Фермі ($\alpha = 1$). Наведений тут вираз для другого віріального коефіцієнта є точним, тоді як у b_3^{anyon} відкинуто вищі гармоніки ($\sin^6 \pi\alpha$ тощо).

Для найпростішої з розглянутих моделей, неповної статистики Поліхронакоса, розв'язки системи

$$b_2^{\text{IPS}} = b_2^{\text{anyon}}, \qquad b_3^{\text{IPS}} = b_3^{\text{anyon}}$$

існують лише у тривіальних випадках $\alpha = 0, 1$, які відповідають статистикам Бозе та Фермі.

Ширший діапазон значень параметра α, однак не цілий відрізок $[0; 1]$, вдається відтворити за допомогою неадитивної статистики Поліхронакоса. З рівняння (5.53), розглядаючи границю $q \to \infty$, можна отримати умову, що визначає недосяжні значення еніонного статистичного параметра $\alpha \in (\alpha_1; \alpha_2)$ у такому вигляді:

$$\frac{b_3^{\text{anyon}}(\alpha_{1,2})}{\left[b_2^{\text{anyon}}(\alpha_{1,2})\right]^2} = \frac{4}{3}. \tag{5.58}$$

Числові значення кінців цього відрізка дорівнюють

$$\alpha_1 = 0.109\ldots; \qquad \alpha_2 = 0.584\ldots\ . \tag{5.59}$$

Отже, неадитивну статистику Поліхронакоса можна використовувати для моделювання еніонів з бозонного боку, $0 \leq \alpha < \alpha_1$, а також із

ферміонного боку, $\alpha_2 < \alpha \leq 1$. Відповідність між параметрами γ, q та α наведено в табл. 5.1.

Виявляється, що запропоновані модифікації статистики Голдейна–Ву краще підходять для моделювання еніонів, порівняно з проаналізованими вище модифікаціями статистики Поліхронакоса. Фізична причина цього може бути пов'язана з тим, що для опису деяких еніонних систем можна застосовувати саме (немодифіковану) ДВС, як було сказано у Вступі до цього розділу.

У неповній модифікації статистики Голдейна–Ву, див. (5.55), співвідношення між статистичними параметрами g та q й еніонним параметром α досить прості:

$$\begin{aligned} q &= \left(1 + \frac{3}{\pi^2}\sin^2\pi\alpha + 36c_3\sin^4\pi\alpha\right)^{1/2}, \\ 1 - 2g &= \frac{1}{q}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2). \end{aligned} \tag{5.60}$$

У неадитивній модифікації, див. (5.57), аналітичні вирази виявляються громіздкими, проте зв'язок між g, q та α легко встановити на підставі чисельних розрахунків, див. рис. 5.1, 5.2. Відповідність між значеннями параметрів g, q та α в обидвох модифікаціях статистики Голдейна–Ву наведено в табл. 5.1.

Точність запропонованих моделей можна оцінити, використовуючи четвертий віріальний коефіцієнт. Для еніонів він дорівнює [393]:

$$b_4^{\text{anyon}} = \frac{\sin^2\pi\alpha}{16\pi^2}\left(\frac{\ln(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}} + \cos\pi\alpha\right) + (c_4 + d_4\cos\pi\alpha)\sin^4\pi\alpha,$$

$$c_4 = -0.0053 \pm 0.0003; \qquad d_4 = -0.0048 \pm 0.0009.$$

Значення цього віріального коефіцієнта досить малі: вони лежать у діапазоні $-0.0006 < b_4^{\text{anyon}} < 0.0025$.

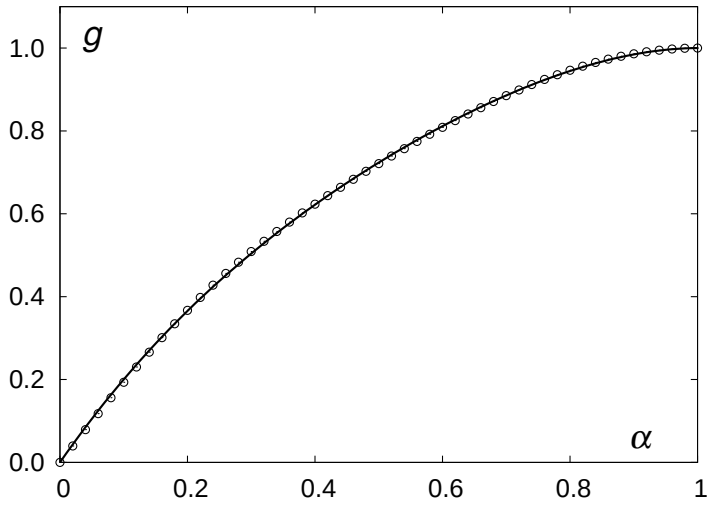


Рис. 5.1. Параметр g неадитивної статистики Голдейна–Ву (кружечки) та відповідне поліноміальне наближення (суцільна лінія) у вигляді: $f(\alpha) = a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + (1 - a_1 - a_2 - a_3)\alpha^4$ з такими значеннями коефіцієнтів: $a_1 = 2.21 \pm 0.01$, $a_2 = -2.26 \pm 0.05$, $a_3 = 1.88 \pm 0.09$.

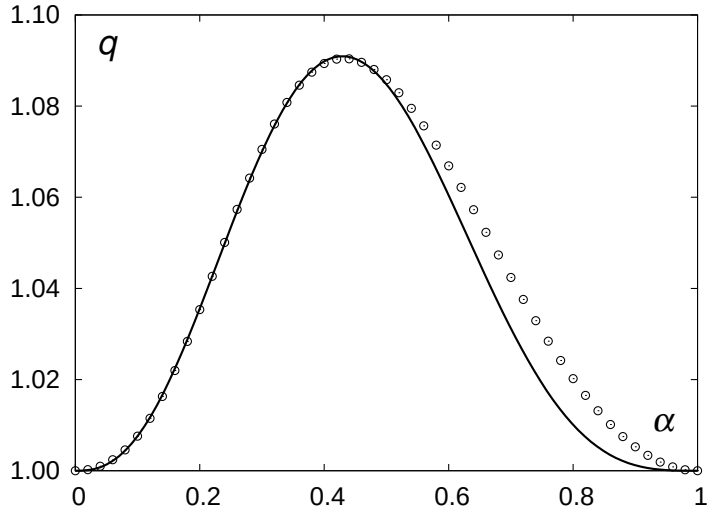


Рис. 5.2. Параметр q неадитивної статистики Голдейна–Ву (кружечки) та відповідне наближення (суцільна лінія), розраховане за даними на відрізку $\alpha \in [0; 0.5]$ у вигляді $f(\alpha) = 1 + b\sin^k(\pi\alpha^s)$ з такими значеннями параметрів: $b = 0.09096 \pm 0.00009$, $s = 0.820 \pm 0.001$, $k = 3.18 \pm 0.02$.

В неповній статистиці Голдейна–Ву $b_4^{\mathrm{IHWS}} = 0$ для всіх значень статистичних параметрів. У неадитивній модифікації $-0.0003 < b_4^{\mathrm{NAHWS}} < 0.0014$, тобто також є малими. Однак, поведінка четвертого віріально-

Таблиця 5.1. Залежність параметрів неадитивної статистики Поліхронакоса (NAPS), неповної (IHWS) та неадитивної (NAHWS) статистик Голдейна–Ву від еніонного параметра α.

α	NAPS		IHWS		NAHWS	
	γ	q	g	q	g	q
0.00	1.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
0.01	0.91469	1.03299	0.01997	1.00015	0.01994	1.00006
0.05	0.56672	1.26962	0.09899	1.00371	0.09847	1.00161
0.10	0.11697	3.42415	0.19440	1.01441	0.19349	1.00758
0.20	—	—	0.36681	1.05116	0.36709	1.03536
0.30	—	—	0.50913	1.09485	0.50903	1.07051
0.40	—	—	0.62401	1.12892	0.62325	1.08934
0.45	—	—	0.67349	1.13840	0.67369	1.09008
0.50	—	—	0.71898	1.14165	0.72115	1.08580
0.55	—	—	0.76133	1.13840	0.76612	1.07765
0.60	−0.10436	4.06034	0.80117	1.12892	0.80869	1.06690
0.65	−0.30776	1.87929	0.83888	1.11397	0.84859	1.05479
0.70	−0.48484	1.43495	0.87448	1.09485	0.88532	1.04241
0.80	−0.76642	1.13091	0.93761	1.05116	0.94643	1.02020
0.90	−0.94088	1.02760	0.98304	1.01441	0.98618	1.00524
0.95	−0.98517	1.00664	0.99566	1.00371	0.99652	1.00132
0.99	−0.99941	1.00026	0.99983	1.00015	0.99986	1.00005
1.00	−1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

го коефіцієнта між бозонною і ферміонною границями у цих статистиках некоректно відтворює еніонний b_4, див. рис. 5.3. Це означає, що відповідність між проаналізованими двопараметричними дробовими статистиками та еніонною статистикою залишається наближеною, хоча й із вищою точністю порівняно з однопараметричним випадком.

Для двовимірного ідеального газу справедливе таке термодинамічне співвідношення між внутрішньою енергією, тиском та об'ємом:

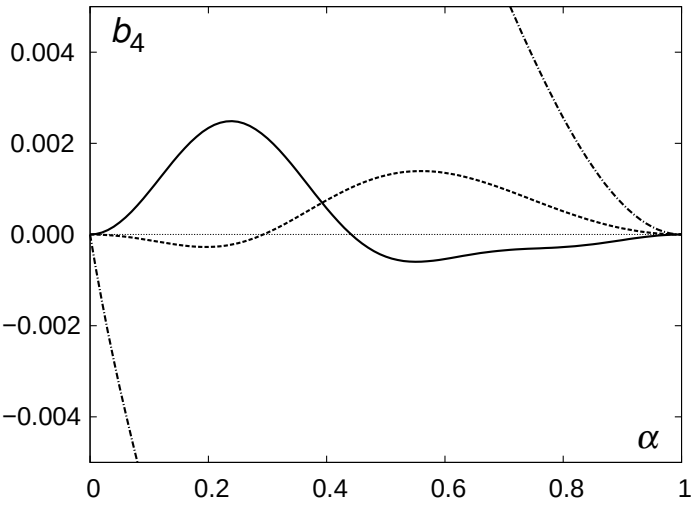


Рис. 5.3. Четвертий віріальний коефіцієнт вільних еніонів (суцільна лінія) порівняно з неадитивними модифікаціями статистик Поліхронакоса (штрих-пунктирна лінія) та Голдейна–Ву (штрихова лінія).

$E = PV_2$, порівн. [33]. Звідси відразу отримуємо питому теплоємність при сталому об'ємі у вигляді:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \sum_{\ell=1}^{\infty}(2-\ell)b_\ell\left(\rho_2\lambda^2\right)^{\ell-1}.$$

Поправка, пов'язана з четвертим віріальним коефіцієнтом, буде

$$\frac{C_V^{(4)}}{N} = -2b_4\left(\rho_2\lambda^2\right)^3.$$

З рис. 5.3 видно, що різниця між еніонним b_4 та його відповідником у неадитивній статистиці Голдейна–Ву становить $\Delta b_4 < 0.003$ для всіх значень параметра α, звідки маємо $\Delta C_V^{(4)}/N < 0.006\left(\rho_2\lambda^2\right)^3$. Зважаючи на те, що віріальне розвинення справедливе при $\left(\rho_2\lambda^2\right) \ll 1$, стає зрозуміло, що різниця між розрахованими питомими теплоємностями є значно меншою за 1%, а отже перебуває на межі точності експериментальних вимірювань, порівн. [394, p. 408]. Оскільки $b_4^{\mathrm{IHWS}} = 0$, то така оцінка залишається також справедливою у випадку неповної статистики Голдейна–Ву.

5.4.6. Бозонна границя статистики Голдейна–Ву з q-експонентою. Як згадувалося в розділі 1, у задачах, пов'язаних із так званими q-деформованими комутаторами $[A,B]_q = AB - qBA$, виникають деформовані експоненти, що відрізняються від експоненти Цалліса, див. (1.65). Щоб уникнути плутанини, для однієї з цих q-експонент використовуватимемо позначення:

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{[j]_q!}, \tag{5.61}$$

де q-факторіал та q-числа задано формулами (1.11)-(1.12). Загальний вигляд розкладу q-експоненти в ряд [132]:

$$\begin{aligned} E_q^x &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{(q-1)^n}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q-1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{q-1}{q^n-1}\frac{q-1}{q^{n-1}-1}\dots\frac{q-1}{q^2-1}\frac{q-1}{q-1}. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Таким чином, E_q^x можна записати як

$$E_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{(1+\dots+q^{n-1})(1+\dots+q^{n-2})\dots(1+q)1}.$$

У границі $q \to 1$ зобразимо функцію E_q^x у вигляді ряду:

$$E_q^x = f_x(x) + (q-1)f_1(x) + (q-1)^2 f_2(x) + \dots\ . \tag{5.63}$$

Підставивши $q = 1$, отримаємо вираз для $f_0(x)$:

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{n!} = e^x. \tag{5.64}$$

Можна також показати, що наступні члени розкладу дадуть такі коефіцієнтні функції:

$$f_1(x) = -\frac{x^2}{4}e^x, \tag{5.65}$$

$$f_2(x) = \frac{x^2}{8}\left(1+\frac{17}{9}x+\frac{59}{36}x^2+\frac{31}{36}x^3+\frac{17}{54}x^4+\right.$$
$$\left.+\frac{47}{540}x^5+\frac{83}{4320}x^6+\ldots\right). \qquad (5.66)$$

Наближення функції E_q^x у вигляді перших трьох членів розкладу, $E_q^x \simeq e^x + (q-1)f_1(x) + (q-1)^2 f_2(x)$, виявляється досить точним при $x \lesssim 1$, що добре демонструє див. рис. 5.4.

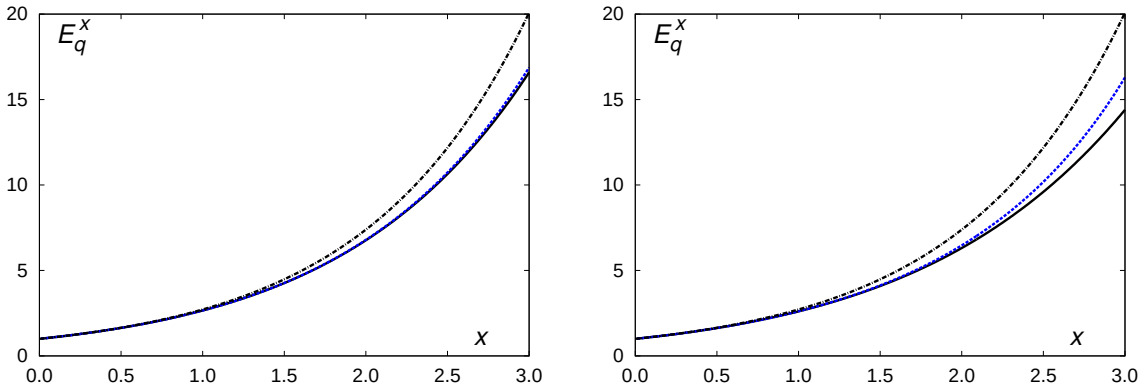


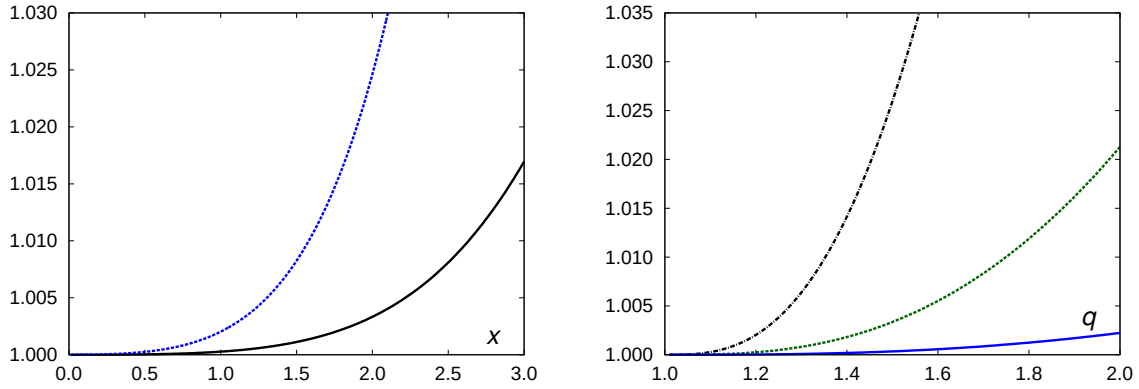
Рис. 5.4. Точне значення q-експоненти E_q^x (суцільна крива) порівняно з наближенням $e^x + (q-1)f_1(x) + (q-1)^2 f_2(x)$ (пунктирна крива). Для наочності також зображено звичайну експоненту e^x (штрих-пунктирна крива). Ліворуч — $q = 1.1$, праворуч — $q = 1.2$.

Відхилення в діапазоні арґумента $x \in [0;2]$ не перевищує трьох відсотків навіть за таких великих значень, як $q = 1.2$, див. рис. 5.5(а). Якщо q мало відрізняється від одиниці, то точність наближення є ще вищою, як показує рис. 5.5(б).

Модифіковану з цією експонентою статистику Голдейна–Ву визначимо так:

$$n_j^{q\mathrm{HW}} = \frac{1}{w[z^{-1}E_q^{\varepsilon_j/T}] + g}. \qquad (5.67)$$

Кластерні інтеґрали в цій статистиці після розкладу за малим параметром g та малим відхиленням $\theta = q-1$ можна отримати у вигляді



(а) (б)

Рис. 5.5. Відношення $\left[e^x + (q-1)f_1(x) + (q-1)^2 f_2(x)\right]/E_q^x$. Ліворуч (а) — значення $q = 1.1$ (суцільна крива), $q = 1.2$ (штрихова крива). Праворуч (б) — залежність від параметра q при $x = 0.2$ суцільна крива), $x = 0.5$ (пунктирна крива), $x = 1.0$ (штрих-пунктирна крива).

таких рядів:

$$\mathcal{B}_1\lambda^2 = 1 + \frac{\theta}{54} - 1.09945\,\theta^2, \tag{5.68}$$

$$\mathcal{B}_2\lambda^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - g + \frac{\theta}{64} - \frac{g\theta}{32} + \frac{\theta^2}{1728} - 0.181866\,\theta^2\right), \tag{5.69}$$

$$\mathcal{B}_3\lambda^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{3g}{2} - \frac{3\theta}{250} + \frac{27g\theta}{500} + \frac{3g^2}{2} - 0.0604558\,\theta^2\right), \tag{5.70}$$

$$\mathcal{B}_4\lambda^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{11g}{6} + \frac{\theta}{108} + \frac{11g\theta}{162} + 4g^2 - 0.0284194\,\theta^2\right). \tag{5.71}$$

Звідси з такою ж точністю матимемо віріальні коефіцієнти

$$b_2^{q\mathrm{HW}} = -\frac{1}{4} + \frac{g}{2} + 0.00144676\,\theta - 0.00289352\,g\theta - 0.459052\,\theta^2, \tag{5.72}$$

$$b_3^{q\mathrm{HW}} = \frac{1}{36} + 0.00145216\,\theta - 0.00798148\,g\theta + 0.225433\,\theta^2. \tag{5.73}$$

Прирівнюючи їх до віріальних коефіцієнтів еніонів з точністю до α^2,

$$b_2^{\mathrm{series}} = -\frac{1}{4} + \alpha - \frac{\alpha^2}{2}. \qquad b_3^{\mathrm{series}} = \frac{1}{36} + \frac{\alpha^2}{12}, \tag{5.74}$$

отримаємо зв'язок між парою параметрів g, θ та α. Водночас матимемо для четвертого віріального коефіцієнта такий вираз:

$$b_4^{q\mathrm{HW}} = -0.000301505\,\theta - 0.00111458\,g\theta - 0.0481931\,\theta^2. \qquad (5.75)$$

Порівняння результату в цій статистиці з еніонним, який у розглянутій границі є квадратичним за еніонним параметром,

$$b_4^{\mathrm{series}} = 0.1100216\alpha^2, \qquad (5.76)$$

показано на рис. 5.6.

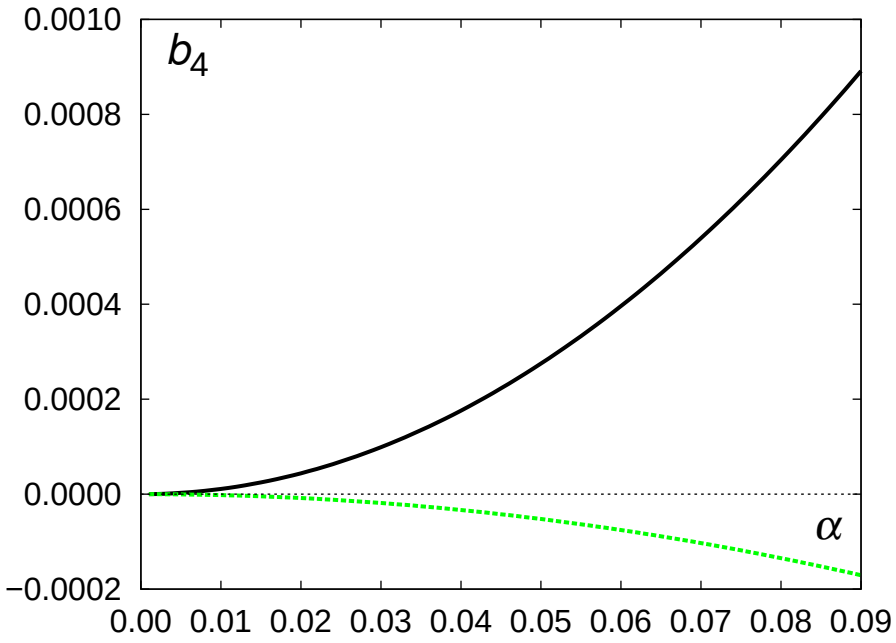


Рис. 5.6. Четвертий віріальний коефіцієнт у статистиці Голдейна–Ву з q-експонентою (5.61). Суцільна лінія — результат для еніонів, пунктирна лінія — квадратичне наближення за g, θ.

Як показує рис. 5.6, і в останній аналізованій статистиці четвертий віріальний коефіцієнт має знак, протилежний до еніонного b_4^{anyon}. Незважаючи на це, такі результати, подібно до отриманих у попередніх пунктах (див. також [91]), забезпечують відтворення термодинамічних

функцій еніонів з точністю, яка перевищує доступні експериментальні вимірювання [394].

Цікаво відзначити, що в лінійному за малими поправками наближенні відповідні результати збігаються. Справді, з рівнянь (5.72)–(5.75) відразу бачимо, що в такій границі $\theta = 0$, тоді $g = 2\alpha$, а

$$b_4^{q\mathrm{HW}} = b_4^{\mathrm{series}} = 0.$$

Як можна зауважити з рис. 5.3–5.6 при ближчому розгляді області $\alpha \to 0$, подібною поведінкою характеризується й неадитивна модифікація статистики Голдейна–Ву.

5.5. Слабконеадитивна статистика Поліхронакоса

У цьому й наступних підрозділах розглядатимемо двопараметричну модель дробової статистики, пов'язану з описом взаємодій та ефектів скінченної кількості частинок у системі бозонів. Відповідну ідеальну бозе-систему вважатимемо за вихідну, на її тлі й проводитимемо розрахунки. Особливий інтерес становлять слабковзаємодіючі скінченні системи бозонів [332, 395–398], крім того, варто також згадати деякі інші способи врахування впливу взаємодій [399–401].

Для аналізу оберемо модель, що ґрунтується на статистиці Поліхронакоса [126, 202], у якій звичайну експоненту в ґіббсівському факторі замінено на q-експоненту Цалліса. Як і в моделі еніонів, така заміна — чисто феноменологічна. При цьому, хоча й ефекти взаємодій можна враховувати через неекстенсивність/неадитивність [148], а параметр статистики Поліхронакоса пов'язаний зі способом обчислення кількості мікростанів, не потрібно очікувати, що ефекти взаємодій та скін-

ченності системи можна буде легко розділити, віднісши їх до різних модифікацій статистики. Зокрема, як показано в попередньому розділі, саме у статистиці Поліхронакоса мала уявна частина параметра дає змогу моделювати слабку дисипативну частину спектра бозе-системи [88, 89]. Різноманітні феноменологічні аспекти статистики Цалліса також відомі [402–404].

Отже, для чисел заповнення j-го рівня системи зі спектром елементарних збуджень ε_j матимемо вираз

$$n_j = \frac{1}{z^{-1}e_q^{\varepsilon_j/T} - \gamma}, \tag{5.77}$$

де T — температура, а z — активність; e_q^x позначає q-експоненту Цалліса (5.45).

Надалі розглядатимемо малі відхилення від розподілу Бозе, тому зобразимо параметри q та γ у вигляді:

$$q = 1 - b; \qquad \gamma = 1 + a, \tag{5.78}$$

де a та b — малі поправки. Відповідну статистику називатимемо *слабконеадитивною статистикою Поліхронакоса* (СНАСП).

Хоча й більш природною видається деформація експоненти у вигляді $e_q^{(\varepsilon_j-\mu)/T}$ замість $z^{-1}e_q^{\varepsilon_j/T}$ із використанням хімічного потенціалу μ, порівн. [205, 380], проте вирази з активністю z виявляються математично простішими для подальшого аналізу. У границі слабкої неадитивності $q \to 1$

$$e_q^{(\varepsilon_j-\mu)/T} = e_q^{\varepsilon_j/T} e_q^{-\mu/T} \left(1 + (1-q)\frac{\varepsilon_j \mu}{T^2}\right), \tag{5.79}$$

оскільки не існує простої факторизації q-експонент Цалліса [390]. Отже, активність у рівнянні (5.77) можна наближено пов'язати з хімічним потенціалом таким способом:

$$z^{-1} \simeq e_q^{-\mu/T} \left(1 + (1-q)\frac{\langle\varepsilon\rangle \mu}{T^2}\right), \tag{5.80}$$

де залежності від j у правій стороні вдалося уникнути заміною ε_j на енергію вихідної системи (див. нижче) на одну частинку $\langle\varepsilon\rangle = E/N$.

Нехай вихідною бозе-системою є ідеальний газ зі спектром ε_j і виродженням j-го рівня g_j. Активність $z_{\text{B}} = e^{\mu_{\text{B}}/T}$, де μ_{B} — хімічний потенціал, визначається з умови:

$$N = \sum_j \frac{g_j}{z_{\text{B}}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1}, \tag{5.81}$$

яку розумітимемо в термодинамічній границі.

Розрахунок термодинамічних функцій проведемо вже традиційним способом, описаним раніше. Насамперед, визначимо активність z як функцію температури T і кількості частинок N із рівняння

$$N = \sum_j g_j n_j. \tag{5.82}$$

Згодом підставимо її у вираз для енергії

$$E = \sum_j \varepsilon_j g_j n_j, \tag{5.83}$$

з якого теплоємність можна розрахувати як похідну за температурою:

$$C = \frac{dE}{dT}. \tag{5.84}$$

5.5.1. Розклади за малими поправками. Оскільки ми розглядаємо малі відхилення від вихідної ідеальної бозе-системи, то можна розкласти активності в ряд в околі z_{B}. Нехай

$$z = z_{\text{B}} + \Delta z_1 \tag{5.85}$$

для слабконеадитивної статистики і

$$z = z_{\text{B}} + \Delta z \tag{5.86}$$

для слабковзаємодіючої скінченної бозе-системи.

У лінійному за малими поправками наближенні числа заповнення у СНАСП будуть такими:

$$n_j = \frac{1}{(z_{\rm B}+\Delta z_1)^{-1}e^{\varepsilon_j/T}_{1-b}-(1+a)} = \tag{5.87}$$

$$= \frac{1}{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1} + a\frac{1}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1\right]^2} + \frac{b\varepsilon_j^2}{2T^2}\frac{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1\right]^2} +$$

$$+ \frac{\Delta z_1}{z_{\rm B}}\frac{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1\right]^2}.$$

Їх можна зіставити з числами заповнення бозе-системи зі взаємодією:

$$n_j = \frac{1}{(z_{\rm B}+\Delta z)^{-1}e^{(\varepsilon_j+\Delta\varepsilon_j)/T}-1} = \tag{5.88}$$

$$= \frac{1}{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1} - \frac{\Delta\varepsilon_j}{T}\frac{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1\right]^2} + \frac{\Delta z}{z_{\rm B}}\frac{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1\right]^2}.$$

Порівнюючи доданки з b у рівнянні (5.87) і з $\Delta\varepsilon_j$ в (5.88), можна припустити, що саме параметр неадитивності b є (в основному) відповідальним за ефективне врахування міжчастинкових взаємодій.

Наведені вище розклади запишемо в "макроскопічній" формі, використовуючи співвідношення

$$N = \sum_j g_j n_j = \sum_j \frac{g_j}{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1} \tag{5.89}$$

та допоміжне позначення

$$Q = \sum_j \frac{g_j}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1\right]^2}, \tag{5.90}$$

таким чином:

$$N = N + aQ + \frac{\Delta z_1}{z_{\rm B}}(N+Q) + \frac{b}{2T^2}\sum_j g_j\varepsilon_j^2\frac{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1\right]^2} \tag{5.91}$$

і

$$N = N + \frac{\Delta z}{z_{\rm B}}(N+Q) - \frac{1}{T}\sum_j g_j\Delta\varepsilon_j\frac{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1\right]^2}. \tag{5.92}$$

З іншого боку, для енергії слабковзаємодіючої бозе-системи маємо

$$\begin{aligned} E &= \sum_j (\varepsilon_j + \Delta\varepsilon_j) g_j n_j = \\ &= E_{\rm B} + \frac{\Delta z}{z_{\rm B}}(E_{\rm B} + D_{\rm B}) + \sum_j g_j \Delta\varepsilon_j \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T}(1-\varepsilon_j/T) - 1}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2}, \end{aligned} \tag{5.93}$$

де

$$E_{\rm B} = \sum_j \varepsilon_j g_j n_j = \sum_j \frac{g_j \varepsilon_j}{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1}, \tag{5.94}$$

$$D_{\rm B} = \sum_j \frac{g_j \varepsilon_j}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2}. \tag{5.95}$$

Енергію системи зі СНАСП визначає вираз:

$$\begin{aligned} E &= \sum_j \varepsilon_j g_j n_j = \\ &= E_{\rm B} + aD_{\rm B} + \frac{\Delta z_1}{z_{\rm B}}(E_{\rm B} + D_{\rm B}) + \frac{b}{2T^2} \sum_j g_j \varepsilon_j^3 \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2}. \end{aligned} \tag{5.96}$$

Щоб пов'язати параметри a, b з величинами, які характеризують скінченну слабковзаємодіючу бозе-систему (а саме, з поправкою до спектра $\Delta\varepsilon_j$ і поправкою до активності Δz), можна скористатися такою системою рівнянь:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad aQ + \frac{\Delta z_1}{z_{\rm B}}(N+Q) + \frac{b}{2} \sum_j g_j \left(\frac{\varepsilon_j}{T}\right)^2 \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2} = 0, \\ &\text{(ii)} \quad \frac{\Delta z}{z_{\rm B}}(N+Q) - \frac{1}{T} \sum_j g_j \Delta\varepsilon_j \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2} = 0, \\ &\text{(iii)} \quad aD_{\rm B} + \frac{\Delta z_1}{z_{\rm B}}(E_{\rm B} + D_{\rm B}) + \frac{b}{2} \sum_j g_j \varepsilon_j \left(\frac{\varepsilon_j}{T}\right)^2 \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2} = \end{aligned} \tag{5.97}$$

$$= \frac{\Delta z}{z_{\rm B}}(E_{\rm B} + D_{\rm B}) + \sum_j g_j \Delta\varepsilon_j \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T}(1 - \varepsilon_j/T) - 1}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2}.$$

Рівняння (ii) просто дозволяє пов'язати поправку Δz безпосередньо з $\Delta\varepsilon_j$ у лінійному наближенні. Тому насправді потрібно знайти ще одне рівняння, оскільки поправка до активності Δz_1 у СНАСП є третім невідомим параметром.

Перед тим, як перейти до розрахунків термодинамічних функцій систем зі СНАСП, варто оцінити значення параметрів a, b для деяких модельних або реальних фізичних систем.

5.5.2. Тривимірні гармонічні осцилятори. Далі розглянемо систему тривимірних ізотропних гармонічних осциляторів з частотою ω. Така модель описує частинки в зовнішньому ізотропному гармонічному потенціалі. Для зручності перейдемо від підсумовування за станами до інтеґрування за правилом

$$\sum_j g_j \ldots = \int_0^\infty d\varepsilon\, g(\varepsilon) \ldots,$$

де густина станів

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{5.98}$$

Оскільки $g(0) = 0$, то внесок від основного стану $j = 0$ потрібно виписати явно для температур, що відповідають фазі бозе-конденсату.

Вираз (5.89) перетвориться на

$$N = n_0 + \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \int_0^\infty d\varepsilon\, \frac{\varepsilon^2/2}{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1} = n_0 + \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^3 {\rm Li}_3\left(z_{\rm B}\right). \tag{5.99}$$

Енерґія (5.94) дорівнює

$$E_{\rm B} = \hbar\omega \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^4 {\rm Li}_4\left(z_{\rm B}\right), \tag{5.100}$$

причому умова, що визначає термодинамічну границю для тривимірної системи гармонічних осциляторів, має вигляд [405]:

$$\omega N^{1/3} = \text{const}. \tag{5.101}$$

Поправку до спектру за рахунок міжчастинкових взаємодій з дельта-подібним потенціалом $\Phi(\mathbf{r}) = \lambda\delta(\mathbf{r})$, де $\lambda = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ — константа зв'язку, а m — маса атома, можна оцінити зверху таким виразом (порівн. [82] і розділ 3):

$$\Delta\varepsilon_j = \hbar\omega N \frac{\gamma}{j+1}, \tag{5.102}$$

де

$$\gamma = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{a_s}{a_{\text{ho}}}. \tag{5.103}$$

У наведених вище рівняннях a_s — це довжина розсіяння s-хвилі, а $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\omega}$.

Виконуючи інтеґрування в (5.97), можна звести рівняння до такого вигляду:

$$\begin{gathered} a\left[\text{Li}_2\left(z_{\text{B}}\right) - \text{Li}_3\left(z_{\text{B}}\right)\right] + \frac{\Delta z_1}{z_{\text{B}}}\,\text{Li}_2\left(z_{\text{B}}\right) + 6b\,\text{Li}_4\left(z_{\text{B}}\right) = 0, \\ a\left[\text{Li}_3\left(z_{\text{B}}\right) - \text{Li}_4\left(z_{\text{B}}\right)\right] + \frac{\Delta z_1}{z_{\text{B}}}\,\text{Li}_3\left(z_{\text{B}}\right) + 10b\,\text{Li}_5\left(z_{\text{B}}\right) = \\ = \frac{\Delta z}{z_{\text{B}}}\,\text{Li}_3\left(z_{\text{B}}\right) + \int_0^\infty d\xi\;\xi^2\,\frac{\Delta\varepsilon(\xi)}{T}\,\frac{z_{\text{B}}^{-1}e^{\xi}(1-\xi)-1}{\left[z_{\text{B}}^{-1}e^{\xi}-1\right]^2}, \end{gathered} \tag{5.104}$$

причому

$$\frac{\Delta z}{z_{\text{B}}} = \frac{1}{\text{Li}_2\left(z_{\text{B}}\right)} \int_0^\infty d\xi\,\xi^2\,\frac{\Delta\varepsilon(\xi)}{T}\,\frac{z_{\text{B}}^{-1}e^{\xi}}{\left[z_{\text{B}}^{-1}e^{\xi}-1\right]^2}. \tag{5.105}$$

Звідси отримаємо

$$aA(z_{\text{B}},T) + bB(z_{\text{B}},T) = \left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^2 N\frac{\gamma}{2}[X(z_{\text{B}},T) + Y(z_{\text{B}},T)], \tag{5.106}$$

де

$$A(z_{\mathrm{B}},T)=\frac{\mathrm{Li}_3\left(z_{\mathrm{B}}\right)}{\mathrm{Li}_2\left(z_{\mathrm{B}}\right)}-\frac{\mathrm{Li}_4\left(z_{\mathrm{B}}\right)}{\mathrm{Li}_3\left(z_{\mathrm{B}}\right)}, \tag{5.107}$$

$$B(z_{\mathrm{B}},T)=10\frac{\mathrm{Li}_5\left(z_{\mathrm{B}}\right)}{\mathrm{Li}_3\left(z_{\mathrm{B}}\right)}-6\frac{\mathrm{Li}_4\left(z_{\mathrm{B}}\right)}{\mathrm{Li}_2\left(z_{\mathrm{B}}\right)}, \tag{5.108}$$

$$X(z_{\mathrm{B}},T)=\frac{1}{\mathrm{Li}_2\left(z_{\mathrm{B}}\right)}\int_0^\infty d\xi\,\frac{\xi^2}{\xi+\hbar\omega/T}\,\frac{z_{\mathrm{B}}^{-1}e^{\xi}}{\left[z_{\mathrm{B}}^{-1}e^{\xi}-1\right]^2}, \tag{5.109}$$

$$Y(z_{\mathrm{B}},T)=\frac{1}{\mathrm{Li}_3\left(z_{\mathrm{B}}\right)}\int_0^\infty d\xi\,\frac{\xi^2}{\xi+\hbar\omega/T}\,\frac{z_{\mathrm{B}}^{-1}e^{\xi}(1-\xi)-1}{\left[z_{\mathrm{B}}^{-1}e^{\xi}-1\right]^2}. \tag{5.110}$$

Таким чином, параметри a,b виявляються залежними від температури. Однак коефіцієнтні функції в (5.106) достатньо гладкі, тому для розрахунків у певному температурному інтервалі значення T можна зафіксувати, як показано в наступному підрозділі.

З іншого боку, вдається безпосередньо показати, що у границі $T\to\infty$ активність прямує до нуля як

$$z_{\mathrm{B}}\Big|_{T\to\infty}=N\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^3. \tag{5.111}$$

Коефіцієнтні функції $A(z_{\mathrm{B}},T)$ та $B(z_{\mathrm{B}},T)$ у цій границі дорівнюють

$$A(z_{\mathrm{B}},T)=-\frac{1}{16}z_{\mathrm{B}},\qquad B(z_{\mathrm{B}},T)=4, \tag{5.112}$$

а для $X(z_{\mathrm{B}},T)$ та $Y(z_{\mathrm{B}},T)$ маємо

$$X(z_{\mathrm{B}},T),Y(z_{\mathrm{B}},T)\to\mathrm{const}. \tag{5.113}$$

Тому з рівняння (5.106) зрозуміло, що

$$-\frac{1}{16}aN\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^3+4b\propto\frac{1}{T^2}, \tag{5.114}$$

тобто у високотемпературній границі поведінка параметрів a та b така:

$$a\propto T^{\nu}\quad\text{де }\nu\le 0,\qquad b\propto\frac{1}{T^2}, \tag{5.115}$$

а отже при $T\to\infty$ потрібно очікувати класичних результатів, що не відчувають ніякого впливу деформації статистики.

5.5.3. Критична температура тривимірної системи. Рівняння, яке би доповнювало систему (5.106), можна знайти, наприклад, з означення критичної температури скінченної слабковзаємодіючої бозе-системи.

У термодинамічній границі критична температура T_c системи зі СНАСП, яка відповідає фазовому переходу, аналогічному до бозе-конденсації, визначається умовою, яка у тривимірному випадку має вигляд:

$$N = \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\xi^2/2}{(1+a)e^{\xi}_{1-b} - (1+a)}\, d\xi, \tag{5.116}$$

де взято до уваги критичне значення активності $z_c^{-1} = 1+a$. З точністю до лінійних поправок рівняння (5.116) стане:

$$N = \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^3 \zeta(3) \left[1 - a + b\,\frac{6\zeta(4)}{\zeta(3)}\right], \tag{5.117}$$

де $\zeta(s)$ — дзета-функція Рімана, $\zeta(s) = \mathrm{Li}_s(1)$. Критична температура вихідної ідеальної бозе-системи дорівнює

$$T_c^{\mathrm{B}} = \hbar\omega \left(\frac{N}{\zeta(3)}\right)^{1/3}, \tag{5.118}$$

тому для T_c легко отримуємо:

$$T_c = T_c^{\mathrm{B}} \left[1 + \frac{a}{3} - b\,\frac{2\zeta(4)}{\zeta(3)}\right]. \tag{5.119}$$

Зсув критичної температури скінченної бозе-системи N частинок визначає вираз [329, 370]:

$$\frac{\Delta T_c^{\mathrm{fin}}}{T_c^{\mathrm{B}}} = -\frac{1}{2}\frac{\zeta(2)}{[\zeta(3)]^{2/3}} N^{-1/3}, \tag{5.120}$$

а зсув, спричинений впливом міжчастинкових взаємодій, дорівнює [329]:

$$\frac{\Delta T_c^{\mathrm{int}}}{T_c^{\mathrm{B}}} = -1.33\frac{a_s}{a_{\mathrm{ho}}} N^{1/6}, \tag{5.121}$$

де, як і вище, довжина гармонічного осцилятора $a_{\rm ho} = \sqrt{\hbar/m\omega}$, а a_s — довжина розсіяння s-хвилі. Зазначмо, що в термодинамічній границі

$$\frac{a_s}{a_{\rm ho}} N^{1/6} \propto \left(\omega N^{1/3}\right)^{1/2} = \text{const} \tag{5.122}$$

не залежить від кількості частинок N.

Порівнюючи рівняння (5.119)–(5.121), отримаємо таке співвідношення, що пов'язує величини a, b з параметрами системи:

$$\frac{a}{3} - b\,\frac{2\zeta(4)}{\zeta(3)} = -\frac{1}{2}\frac{\zeta(2)}{[\zeta(3)]^{2/3}} N^{-1/3} - 1.33\frac{a_s}{a_{\rm ho}} N^{1/6}. \tag{5.123}$$

Для системи 5000 атомів Rb-87 [329] відношення $a_s/a_{\rm ho} \simeq 2.6 \cdot 10^{-3}$. Припустивши, що параметр a повністю відповідальний за ефекти скінченності кількості частинок, а параметр b — за вплив міжчастинкових взаємодій, з виразу (5.123) будемо мати такі значення:

$$a = -0.13, \qquad b = 0.022. \tag{5.124}$$

З іншого боку, розв'язуючи систему (5.106) разом з (5.123), отримаємо дещо інші значення:

$$a = -0.16, \qquad b = 0.0027. \tag{5.125}$$

Результати розрахунків питомої теплоємності C/N системи зі СНАСП з параметрами, що відповідають (5.125), показано на рис. 5.7.

Потрібно сказати, що гладку поведінку питомої теплоємності в околі критичної температури у випадку скінченної бозе-системи у запропонованому підході не вдається змоделювати правильно. Можливим розв'язком цієї проблеми є розгляд скінченної системи зі СНАСП, що би забезпечило відповідну залежність.

Кількість частинок n_0 в основному стані, який у системі зі СНАСП є аналогом бозе-конденсату, можна досить просто розрахувати як

$$\frac{n_0}{N} = 1 - \frac{1}{N}\frac{1}{1+a}\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\xi^2/2}{e^{\xi}_{1-b} - 1}\, d\xi. \tag{5.126}$$

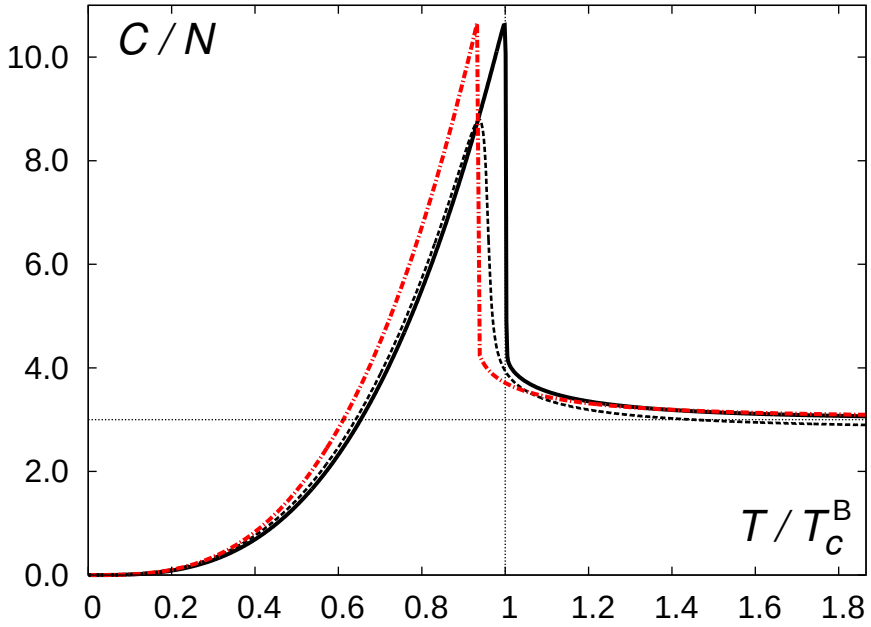


Рис. 5.7. Питома теплоємність ідеального бозе-газу тривимірних гармонічних осциляторів (суцільна лінія — термодинамічна границя, пунктирна лінія — $N = 5000$) порівняно з системою зі СНАСП (штрих-пунктирна лінія) у термодинамічній границі з параметрами (5.125). У термодинамічній границі на кривих C/N у критичній точці є розриви, але відповідні значення з'єднано лініями для кращої візуалізації.

Використовуючи параметри з (5.125), отримаємо таку температурну залежність для $N = 5000$:

$$\frac{n_0}{N} = 1 - \frac{1.45}{N}\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^3 . \tag{5.127}$$

На рис. 5.8 показано порівняння цього результату з вихідною бозе-системою. Форма залежностей дуже подібна до отриманих у праці [329, 406].

5.5.4. Теплоємність модельних систем зі СНАСП. Маючи оцінку значень параметрів статистики a та b, можна перейти до розрахунків термодинамічних функцій модельних систем зі СПАСП. Далі в

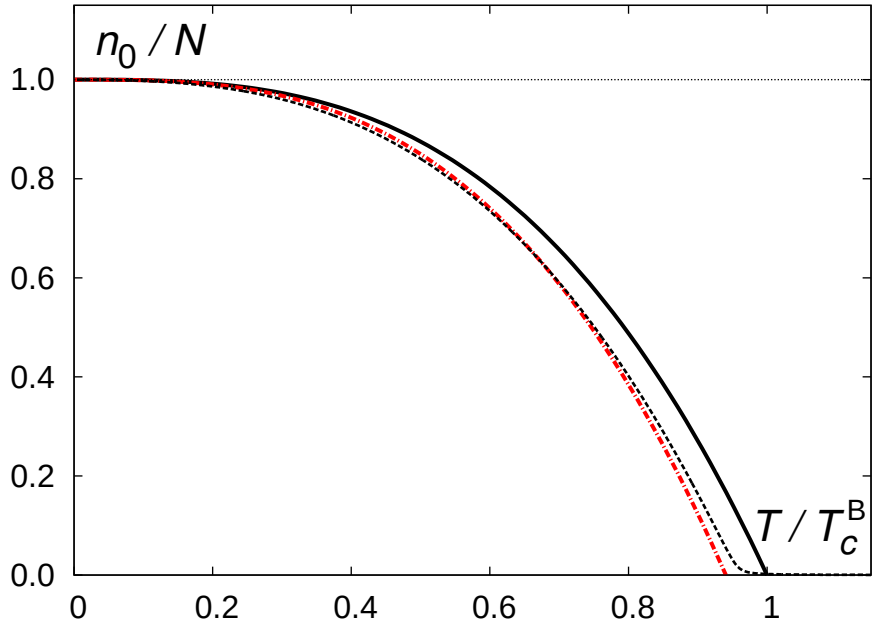


Рис. 5.8. Частка конденсату n_0/N ідеальної бозе-системи тривимірних гармонічних осциляторів (суцільна лінія — термодинамічна границя, пунктирна лінія — $N = 5000$) порівняно з системою зі СНАСП (штрих-пунктирна лінія) у термодинамічній границі з параметрами, заданими формулою (5.125).

цьому підрозділі проаналізовано дві модифікації статистики. У першій параметри a, b не залежать від температури. У другій параметр a — сталий, однак $b = 2\eta T/\hbar\omega$, так що доданки, які містять b в рівнянні (5.87) і $\Delta\varepsilon_j$ в рівнянні (5.88) стають подібними за структурою.

Справді, якщо ми припустимо, що виконується друга модифікація статистики, то зсув спектра дорівнює

$$\Delta\varepsilon_j = -\frac{b\varepsilon_j^2}{2T} = -\eta\frac{\varepsilon_j^2}{\hbar\omega} = -\eta\hbar\omega j^2. \tag{5.128}$$

Цікаво, що така залежність відповідає задачам в межах підходу деформованих алґебр Гайзенберґа. А саме, гармонічний осцилятор з комутаційними співвідношеннями між координатою та імпульсом у вигляді

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta\hat{p}^2) \tag{5.129}$$

має спектр [407, 408]

$$\varepsilon_j = \hbar\bar{\omega} j + \frac{\beta}{2} j^2 + \text{const}, \tag{5.130}$$

де $\bar{\omega}$ позначає певну константу, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Однак, через надзвичайно малі оцінки значень β вплив на термодинамічні властивості буде неспостережуваним.

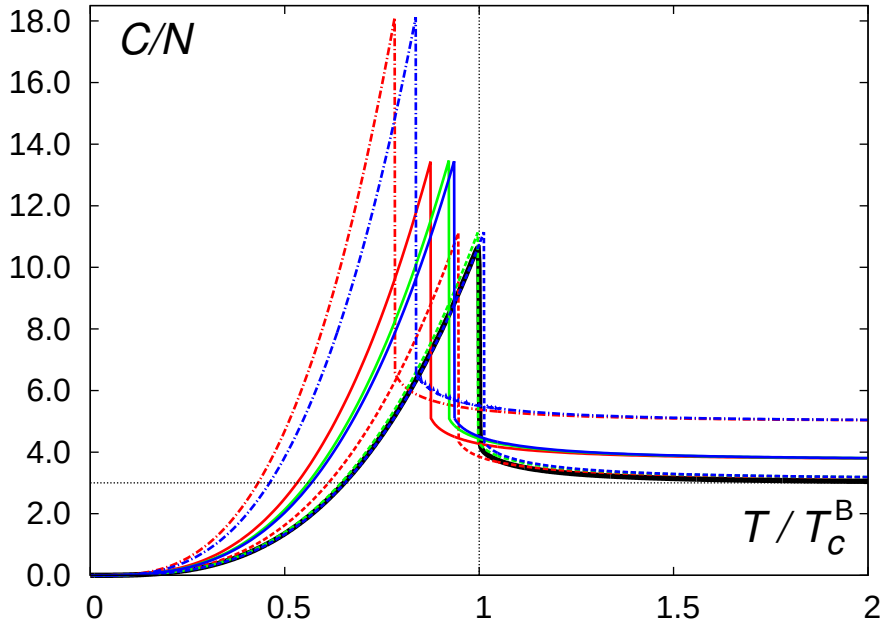


Рис. 5.9. Питома теплоємність модельної системи зі СНАСП при $b = \text{const}$ у термодинамічній границі для різних значень параметрів статистики. Штрих-пунктирні лінії — $b = 0.1$; суцільні лінії — $b = 0.05$; штрихові лінії — $b = 0.01$. Відповідність кольорів: червоний — $a = -0.1$, зелений — $a = +0.05$, синій — $a = +0.1$. Суцільна чорна лінія відповідає ідеальній бозе-системі.

Результати розрахунків теплоємності показано на рис. 5.9–5.10 у порівнянні з вихідною ідеальною бозе-системою. Значення параметрів статистики вибрано відповідно до оцінок, зроблених у попередньому підрозділі. Зауважмо, що модель з $b \propto T$ справедлива лише в обмеженому температурному інтервалі, оскільки система перестає бути *слабко*неадитивною, коли $T \to \infty$.

Водночас цікаво зазначити, що поведінка теплоємності, наведена на рис. 5.10 (тобто в моделі $b \propto T$), якісно відповідає результатам отриманим раніше у праці [72] для гелію-4. Це є ще одним підтвердженням можливості використання запропонованої моделі для вивчення бозе-систем зі взаємодією.

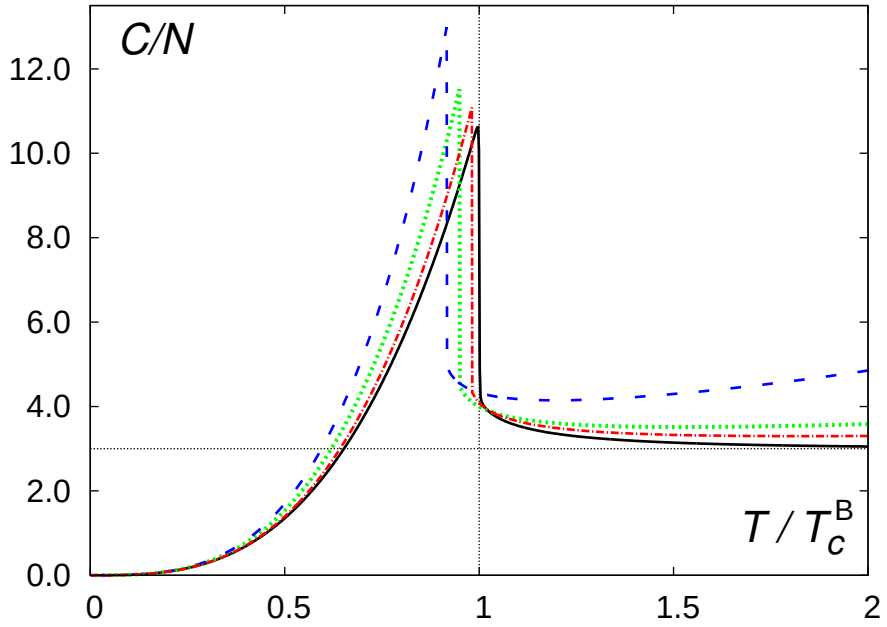


Рис. 5.10. Питома теплоємність модельної системи зі СНАСП при $b = 2\eta T/\hbar\omega$ у термодинамічній границі для різних значень параметрів статистики. Червона штрих-пунктирна лінія — $a = 0, \eta = 0.0005$; зелена пунктирна — $a = -0.05, \eta = 0.001$; синя штрихова — $a = -0.01, \eta = 0.0025$. Суцільна чорна лінія відповідає ідеальній бозе-системі.

У моделі з $b = \text{const}$ асимптотичне значення питомої теплоємності при $T \to \infty$ можна визначити так. Активність прямує до нуля у цій границі, тому рівняння (5.99) у випадку задачі про гармонічні осцилятори, яку ми розглядаємо, спрощується до вигляду:

$$N = \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^3 \frac{z}{2} \int_0^\infty d\xi \, \frac{\xi^2}{e^{\xi}_{1-b}}. \tag{5.131}$$

Застосовуючи співвідношення [390]

$$\left[e_q^{f(x)}\right]^p = e_{1-(1-q)/p}^{pf(x)}, \tag{5.132}$$

цей інтеґрал можна розрахувати за допомогою

$$\int_0^\infty d\xi\, \xi^{k-1} e_{1+b}^{-\xi} = \frac{b^{-k}\Gamma(1/b-k)\Gamma(k)}{\Gamma(1/b)}. \tag{5.133}$$

Енерґія в цій границі дорівнюватиме

$$E = \hbar\omega \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^4 \frac{z}{2} \int_0^\infty d\xi\, \frac{\xi^3}{e_{1-b}^{\xi}}. \tag{5.134}$$

Після нескладних перетворень для z отримаємо

$$z = N \left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^3 \frac{(1-6b+11b^2-6b^3)}{2}, \tag{5.135}$$

а вираз для теплоємності буде

$$\left.\frac{C}{N}\right|_{T\to\infty} = \frac{3}{1-4b}, \tag{5.136}$$

тобто параметр a не входить у високотемпературну границю теплоємності.

5.6. Висновки до розділу 5

У цьому розділі було розглянуто двопараметричні моделі дробової статистики. Одним із їх застосувань є визначення функціональної форми виразу для чисел заповнення вільних еніонів. Показано, що наближену відповідність із еніонною статистикою можна встановити у випадку неадитивної статистики Поліхронакоса та неадитивної й неповної статистик Голдейна–Ву. У цих випадках досягнуто правильної поведінки другого й третього віріального коефіцієнтів, а різниця в четвертому віріальному коефіцієнті спричиняє незначну поправку в рівнянні стану.

Для обидвох модифікацій статистики Голдейна–Ву зв'язок між параметрами g, q та еніонним параметром α існує в усьому діапазоні зміни останнього $\alpha \in [0; 1]$, на відміну від неадитивної статистики Поліхронакоса.

Отже, видається слушним шукати вирази для еніонної функції розподілу серед модифікацій статистики Голдейна–Ву. Серед можливих узагальнень — різноманітні вирази для q-експонент [409] та $\varkappa$-деформовані експоненти [379, 410]. Аналіз q-деформованих статистик Бозе та Фермі [172, 411] із впровадженням додаткових параметрів також виглядає можливим.

Оскільки віріальний розклад справедливий за високих температур / малих густин, певний інтерес також становить аналіз співвідношень між запропонованими двопараметричними моделями статистики та еніонами в низькотемпературній області за допомогою інших підходів, що вимагає додаткових досліджень.

Двопараметричну модифікацію статистики Поліхронакоса у границі слабкої неадитивності (СНАСП) також було застосовано до моделювання слабковзаємодіючої скінченної бозе-системи. Показано, що параметри такої статистики можна пов'язати з ефектами взаємодій та поправками на скінченність кількості частинок.

Спрощену модель СНАСП було використано для опису системи 5000 атомів Rb-87 у тривимірній гармонічній пастці. Питому теплоємність C/N системи тривимірних гармонічних осциляторів було також розраховано за різних значень параметрів статистики a, b з метою демонстрації температурної залежності C/N в температурній області, що включає точку фазового переходу, аналогічного до бозе-конденсації.

Можна очікувати, що СНАСП слугуватиме альтернативною математичною моделлю бозе-систем зі слабкими міжчастинковими взаємо-

діями та/або скінченною кількістю частинок. Коректне відтворення критичної поведінки в околі точки фазового переходу вимагає додаткової перевірки на підставі експериментальних спостережень. Після незначних модифікацій запропоновану модель можна використовувати для ефективного опису інших споріднених систем, зокрема осциляторів у нижчих просторових розмірностях, що відповідає системам у дво- та одновимірних пастках.

Серед інших фізичних систем, для яких застосовною виглядає розглянута двопараметрична статистика, — частинки у просторах з мінімальною довжиною, що відповідають деформованій алґебрі Гайзенберґа. Крім того, можна очікувати ефективного опису систем із далекосяжними взаємодіями та іншою складною поведінкою, пов'язаною з неадитивністю ентропії.

РОЗДІЛ 6

ПІДХІД СТАТИСТИЧНОЇ МЕХАНІКИ ДО ЗАДАЧІ ПРО РОЗБИТТЯ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

6.1. Вступ

Задача про розбиття цілих чисел, яка походить ще з робіт Ляйбніца [412] й Ейлера [413], знайшла застосування не лише в математиці, але й у різних галузях фізики. У математиці — це, зокрема, комбінаторика та теорія ймовірностей, в той час як у фізиці відповідні задачі належать до теорії кристалів, теорії перколяції, квантової статистики тощо, див. [414] та посилання там.

Розбиттям натурального числа n називають спосіб його запису як суми натуральних чисел (їх називають частинами), де порядок доданків несуттєвий. Кількість розбиттів називають *функцією розбиття* і позначають $p(n)$ [415, Ch. 1].

Наприклад, розглянемо числа від 1 до 5. Їх можна подати так:

$$
\begin{aligned}
1 \quad &: \quad 1, \\
2 \quad &: \quad 2 = 1 + 1, \\
3 \quad &: \quad 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1, \\
4 \quad &: \quad 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1, \\
5 \quad &: \quad 5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = \\
&\qquad = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.
\end{aligned}
$$

Отже, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$. Насправді, функція $p(n)$ швидко зростає: $p(10) = 42$, $p(100) = 190\,569\,292$, а $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$ [366, p. 836].

Описані розбиття називають *простими, одновимірними* або *лінійними*. У 1917 році Гарді і Рамануджан [416, 417] навели асимптотичну оцінку кількості розбиттів натуральних чисел при великих n у вигляді:

$$p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}\,n} \exp\left\{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right\}. \tag{6.1}$$

Ці автори також отримали асимптотичний розклад функції $p(n)$. Через двадцять років Радемахер вивів збіжний ряд для $p(n)$ [418].

Якщо натуральне число n записувати як суму s-тих степенів натуральних чисел, наприклад,

$$5 = 2^2 + 1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$$

то узагальненням введеної функції $p(n)$ буде деяка $p^s(n)$: $p^2(5) = 2$.

$$p(n) \equiv p^1(n).$$

Хоча порядок доданків у сумі не має значення (перестановка не дає нового розбиття), для зручності їх записують у незростаючому порядку, як і показано у наведених прикладах.

Розглянуті розбиття цілих чисел називають *необмеженими*. Однак, на частини розбиття можна накладати різні обмеження: вимагати, щоб вони були парними/непарними, перебували в певному інтервалі значень тощо. Найпростішим є обмеження на кількість частин $\leq N$, і саме такі *обмежені розбиття* ми далі позначатимемо $p_N(n)$.

Асимптотичний вираз для кількості розбиттів числа n на щонайбільше N частин вперше отримали Ердьош і Ленер [419] у вигляді:

$$\ln \frac{p_N(n)}{p(n)} = -\frac{\sqrt{6n}}{\pi}\, e^{-\pi N/\sqrt{6n}}. \tag{6.2}$$

Поняття розбиттів можна узагальнити на багатовимірні випадки, про що детальніше буде сказано у відповідних підрозділах. Результати цього розділу опубліковано у працях [75, 83, 85, 92, 99].

6.2. Фізична аналогія та метод розрахунку

На зв'язок між фізичною задачею і розбиттями натуральних чисел вперше вказали Бор і Калькар у 1937 році [420], розглядаючи розрахунок густини енергетичних рівнів важких ядер. Того ж року Ван Лір і Уленбек зауважили зв'язок між обчисленням кількості мікростанів бозе- та фермі-систем і деякими задачами про розбиття [421]. Досить ґрунтовну бібліографію про співвідношення фізичних задач і розбиттів можна знайти за адресою `http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin//zeta/partitioning.htm`. Короткий огляд містить також праця [422].

Вивчення розбиттів натуральних чисел із використанням підходів статистичної механіки до ансамблів квантових частинок здійснювали Олак і Котарі [423], Темперлі [424], Нанда [425], Дутта [426, 427] та багато інших. Останнім часом особливу увагу звертали на флюктуації у квантових ансамблях та вплив скінченності системи [58–60, 83], див. також серію праць Ґроссмана і Гольгауса [428–430]. Плоскі розбиття пов'язані з задачами теорії кристалів, випадковими блуканнями на ґратці та різними задачами статистичної фізики [414].

Використаний тут підхід переважно ґрунтується на праці [58]. Головна ідея полягає в аналогії між підрахунком кількості мікростанів квантової системи бозонних гармонічних осциляторів і кількістю розбиттів натуральних чисел, яка є досить прозорою. Розгляньмо для

простоти перший нетривіальний випадок розбиття числа $n = 3$:

$$3, \qquad 2+1, \qquad 1+1+1.$$

Отже, як зазначено у Вступі, $p(3) = 3$.

Далі розглянемо систему одновимірних квантових гармонічних осциляторів з частотою ω, які підкоряються статистиці Бозе. Спробуймо підрахувати, скількома способами можна розподілити енергію $E = 3\hbar\omega$ у цій системі. Кожен осцилятор може перебувати на енергетичних рівнях $\varepsilon_j = \hbar\omega(j + 1/2)$, де $1/2$ від основного стану можна відкинути для зручності:

$$\varepsilon_j = \hbar\omega j, \qquad j = 0, 1, 2, 3 \ldots . \tag{6.3}$$

Є такі можливості отримати $E = 3\hbar\omega$:

- перевести одну частинку у збуджений стан із $j = 3$;
- перевести одну частинку у стан із $j = 2$, а другу — у стан із $j = 1$. Зауважмо, що квантові частинки нерозрізнювальні!
- перевести усі три частинки у стани з $j = 1$.

Решта частинок системи перебуватиме в основному стані з $j = 0$. Можливість того, що декілька частинок перебувають в одному стані, забезпечує статистика Бозе. Ці міркування проілюстровано на рис. 6.1.

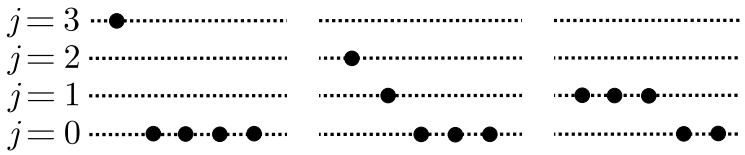


Рис. 6.1. Усі можливі реалізації стану з енергією $E = 3\hbar\omega$ в системі гармонічних осциляторів.

Таким чином, довільність порядку доданків у розбитті еквівалентна нерозрізнювальності квантових частинок. Кількість однакових частин

може досягати довільного значення, як і заповнення квантового стану в бозе-статистиці. Більш того, очевидною є відповідність між необмеженими розбиттями і бозе-системою з безмежною кількістю частинок, а також між обмеженими розбиттями (з обмеженою кількістю частин) і скінченною системою бозонів.

Деякі інші типи розбиттів також можна пов'язати з фізичними задачами. Зокрема, розбиття на неповторювані доданки (*англ.* distinct partitions) відповідають фермі-системам. Приклад такого розбиття числа 5:

$$5 \ : \quad 5 = 4 + 1 = 3 + 2.$$

Якщо всі частини не перевищують деякого s, то такі розбиття відповідають системі зі статистикою Джентіле [83]. Приклад для числа 5 наведено нижче:

$$5 \qquad : \quad 1+1+1+1+1 = 2+1+1+1 =$$
$$= 3+1+1 \neq \cancel{4+1} = 2+2+1 = 3+2 \neq \cancel{5} \qquad \text{для } s = 3.$$

Можна також розглядати розбиття на степені натуральних чисел, скажімо так:

$$5 \ : \quad 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 2^2 + 1^2,$$

що відповідає системі вільних бозонів, оскільки тоді спектр $\varepsilon_j \propto j^2$.

Щоби пов'язати статистико-механічну задачу з її відповідником у теорії чисел, використовуватимемо такий метод. Статистична сума $Z(\beta)$ виражається через кількість мікростанів $\Gamma(E)$ як перетворення Лапласа [58, 429, 431]:

$$Z(\beta) = \int_0^\infty \Gamma(E)\, e^{-\beta E}\, dE,$$

$$\Gamma(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} Z(\beta)\, e^{\beta E}\, d\beta, \tag{6.4}$$

де $\beta = 1/T$ — обернена температура.

Після низки перетворень, використовуючи метод перевалу, для кількості мікростанів отримаємо

$$\Gamma(E) = \frac{\mathrm{e}^{S(\beta_0)}}{\sqrt{2\pi S''(\beta_0)}}, \tag{6.5}$$

де ентропія дорівнює

$$S(\beta) = \beta E + \ln Z(\beta), \tag{6.6}$$

а β_0 — стаціонарна точка,

$$S'(\beta_0) = 0. \tag{6.7}$$

Із цього виразу можна отримати оцінку кількості розбиттів натурального числа n, розглядаючи статистичні суми відповідної фізичної системи з подальшою заміною енергії E на n:

$$E \to n, \qquad \Gamma(E) \to p(n). \tag{6.8}$$

У наступних підрозділах цей підхід буде застосовано до лінійних і плоских розбиттів, як необмежених, так і обмежених, а також для оцінки асимптотики кількості багатовимірних розбиттів.

6.3. Необмежені розбиття

6.3.1. Одновимірний випадок. У випадку одновимірних гармонічних осциляторів зі статистикою Бозе статистична сума системи з безмежною кількістю частинок дорівнює

$$Z(\beta) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega j}}. \tag{6.9}$$

Для простоти надалі вважатимемо одиницю вимірювання енергії і температури $\hbar\omega = 1$.

Ентропія цієї системи буде

$$S(\beta) = \beta E + \ln Z(\beta) = \beta E - \sum_{j=1}^{\infty} \ln\left(1 - e^{-\beta j}\right). \tag{6.10}$$

За допомогою формули Ейлера–Маклорена [366, p. 16]

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \int_1^{\infty} f(x)\,dx + \frac{f(1)}{2} - \frac{1}{12}\,f'(1) + \ldots, \tag{6.11}$$

отримаємо у границі $\beta \to 0$ (саме вона нас цікавить, оскільки ми сподіваємося знайти асимптотичний вираз для великих значень енергії $E \gg 1$ або, відтворюючи одиниці, $E \gg \hbar\omega$):

$$S(\beta) = \frac{\pi^2}{6\beta} + \frac{1}{2}\ln\beta - \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(E - \frac{1}{24}\right)\beta + \ldots. \tag{6.12}$$

Варто відзначити появу $1/24$ біля енергії: така дрібна поправка виникає у формулі, що уточнює головну асимптотику [417, 418]. У границі великих E (або еквівалентно — великих n) її можна відкинути.

Стаціонарна точка, що задовольняє умову $S'(\beta_0) = 0$, дорівнює

$$\beta_0 = \frac{\pi}{\sqrt{6E}}. \tag{6.13}$$

Отже, за допомогою $S''(\beta_0) = \dfrac{2\sqrt{6}}{\pi}E^{3/2}$ отримаємо:

$$\Gamma(E) = \frac{1}{4\sqrt{3}\,E}e^{\pi\sqrt{2E/3}}, \quad \text{звідки} \quad p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}\,n}e^{\pi\sqrt{2n/3}}, \tag{6.14}$$

що точно відтворює результат Гарді і Рамануджана.

6.3.2. Двовимірний випадок. У двовимірній задачі виведення лише незначно відрізняється від одновимірного. Потрібно розглядати двовимірну систему ізотропних гармонічних осциляторів. Із врахуванням кратності виродження j-ого енергетичного рівня отримаємо для

ентропії

$$S(\beta) \;=\; \beta E + \ln Z(\beta) = \beta E - \sum_{j=1}^{\infty} j \ln\left(1 - e^{-\beta j}\right) =$$

$$= \; \beta E + \frac{\zeta(3)}{\beta^2} + \frac{1}{12}\ln\beta - \frac{1}{6} + \ldots\,. \tag{6.15}$$

У цьому випадку стаціонарна точка дорівнює

$$\beta_0 = \left(\frac{2\zeta(3)}{E}\right)^{1/3}, \tag{6.16}$$

де $\zeta(x)$ — дзета-функція Рімана.

Враховуючи, що $S''(\beta_0) = \dfrac{3}{[2\zeta(3)]^{1/3}} E^{4/3}$, отримаємо кількість мікростанів:

$$\mathit{\Gamma}^{\mathrm{2D}}(E) = \frac{[2\zeta(3)]^{7/36}}{\sqrt{6\pi}} E^{-25/36} \exp\left\{\frac{3}{2}[2\zeta(3)]^{1/3} E^{2/3} - \frac{1}{6}\right\}. \tag{6.17}$$

Отже,

$$p^{\mathrm{2D}}(n) = \frac{[2\zeta(3)]^{7/36}}{\sqrt{6\pi}} n^{-25/36} \exp\left\{\frac{3}{2}[2\zeta(3)]^{1/3} n^{2/3} - \frac{1}{6}\right\}. \tag{6.18}$$

Цей результат дещо відрізняється від формули Райта [432]:

$$p^{\mathrm{2D}}_{\mathrm{Wright}}(n) = \frac{[2\zeta(3)]^{7/36}}{\sqrt{6\pi}} n^{-25/36} \exp\left\{\frac{3}{2}[2\zeta(3)]^{1/3} n^{2/3} + c\right\}, \tag{6.19}$$

де

$$c = \zeta'(-1) = -0.165421\ldots \quad \text{порівняно з} \quad -\frac{1}{6} = -0.166666\ldots\,. \tag{6.20}$$

Щоб відтворити правильне значення c, потрібно підсумувати асимптотичний ряд у формулі Ейлера–Маклорена [433]:

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \int_1^{\infty} f(x)\,dx + \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\, f^{(2k-1)}(1) + R, \tag{6.21}$$

де B_{2k} — числа Бернуллі, а R — залишковий член. Для зручності у цьому виразі відкинуто доданки, які відповідають значенням функції

Таблиця 6.1. Значення доданків асимптотичного ряду для двовимірних розбиттів.

k	значення
2	-0.0013889
3	$+0.0001984$
4	-0.0000992
5	$+0.0001052$
6	-0.0001918

$f(x)$ і її похідних на безмежності, оскільки вони дорівнюють нулеві в аналізованому випадку.

Підсумовуючи знакозмінний асимптотичний ряд, достатньо зупинитися на доданку з найменшим абсолютним значенням ($k = 4$ у табл. 6.1). Отже, з точністю до членів із B_6 і B_8, отримаємо замість $-1/6$ такі результати для константи c:

$$-\frac{139}{840} = -0.165476\ldots$$

$$\text{порівняно з} \quad c = \zeta'(-1) = -0.165421\ldots.$$

$$-\frac{1667}{10\,080} = -0.165377\ldots$$

Насправді, точного значення $c = \zeta'(-1)$ можна досягти в межах моделі двовимірних гармонічних осциляторів, однак це вимагає використання значно складнішого підходу, як показав Нанда [425].

6.3.3. Поправка до головної асимптотики. Враховуючи на один доданок більше в розкладі ентропії

$$S(\beta) \simeq S(\beta_0) + \frac{1}{2!}S''(\beta_0)(\beta-\beta_0)^2 + \frac{1}{3!}S'''(\beta_0)(\beta-\beta_0)^3, \qquad (6.22)$$

отримаємо для кількості мікростанів за допомогою методу перевалу такий результат [75]:

$$\Gamma(E) = \\ = \frac{e^{S(\beta_0)}}{2\pi} \frac{2S''(\beta_0)}{\sqrt{3}\,|S'''(\beta_0)|} \exp\left\{\frac{[S''(\beta_0)]^3}{3[S'''(\beta_0)]^2}\right\} K_{1/3}\left(\frac{[S''(\beta_0)]^3}{3[S'''(\beta_0)]^2}\right), \quad (6.23)$$

де $K_\nu(x)$ — функція Макдоналда (модифікована функція Бесселя другого роду).

Отже, уточнена асимптотика лінійних розбиттів буде такою:

$$p_{\rm corr}(n) = \frac{1}{18\sqrt[4]{6}\,n^{3/4}} e^{\frac{28}{27}\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} K_{1/3}\left(\frac{1}{27}\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right). \quad (6.24)$$

Порівняно з асимптотикою Гарді і Рамануджена (6.1), вказаний вираз у компактному вигляді забезпечує кращу оцінку (з відхиленням $< 1\%$) навіть для малих значень $n > 20$, див. рис. 6.2.

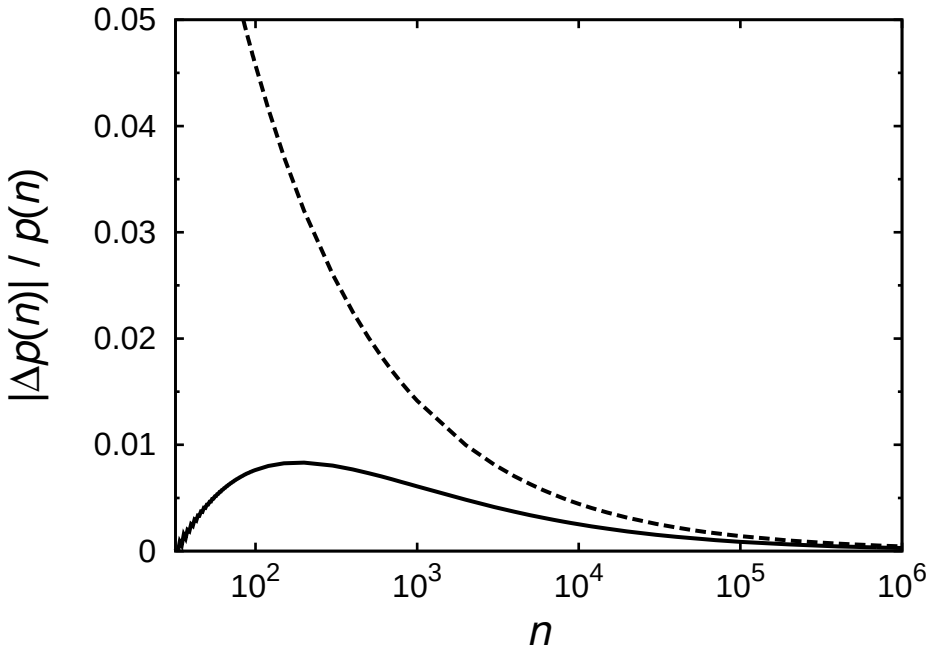


Рис. 6.2. Порівняння відносних похибок різних оцінок кількості одновимірних розбиттів. Суцільна крива — результат (6.24), штрихова крива — головна асимптотика (6.1).

У двовимірному випадку відповідна поправка до головної асимптотика Райта (6.19) для плоских розбиттів набуде вигляду

$$p^{\mathrm{2D}}_{\mathrm{corr}}(n) = \\ = \frac{[2\zeta(3)]^{13/16}}{4\sqrt{3}\,\pi}\, n^{-13/36} e^{\frac{25}{16}[2\zeta(3)]^{1/3} n^{2/3} + c}\, K_{1/3}\left(\frac{[2\zeta(3)]^{1/3}\, n^{2/3}}{16}\right). \quad (6.25)$$

Однак, на відміну від одновимірної задачі, ця поправка дає точніші оцінки лише за малих значень $n < 17$. Відносна похибка для $n = 50$ становить $+1.81\%$ для головної асимптотики (6.19) і -2.72% для поправки (6.25), для $n = 100$ відповідні похибки становлять $+1.13\%$ і -1.98%, для $n = 1000$ — $+0.24\%$ і -0.54% тощо. Область малих значень n проілюстровано на рис. 6.3.

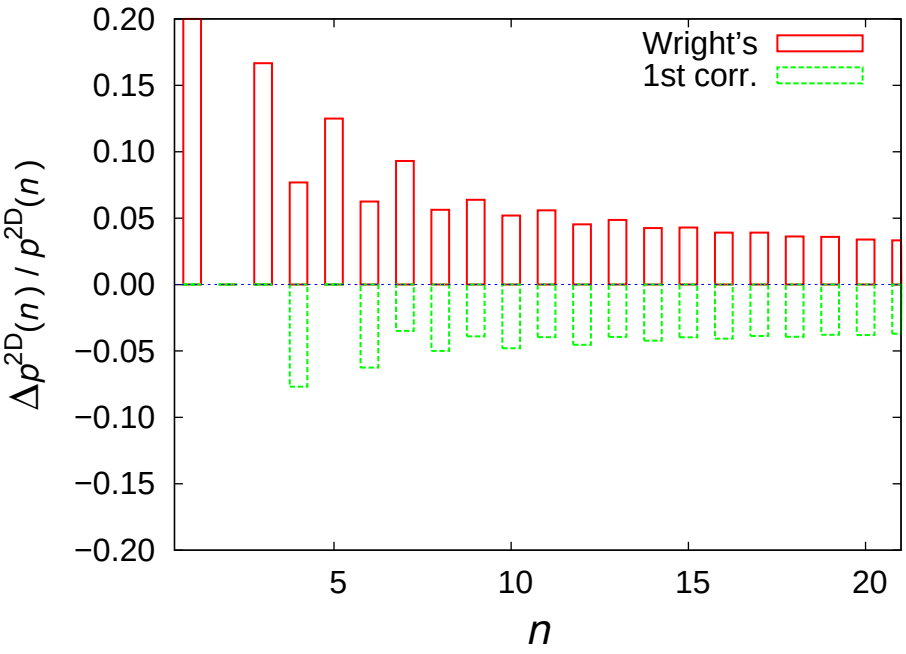


Рис. 6.3. Порівняння відносних похибок різних оцінок кількості плоских розбиттів. Суцільними контурами з додатними значеннями показано головну асимптотику Райта (6.19), штрихові з від'ємними — поправка, задана формулою (6.25).

Зауважмо, що використання методу перевалу не дозволяє отримати подальші уточнення кількості розбиттів. Це пов'язано з асимптоти-

чних характером відповідних рядів: уже доданки $\sim (\beta-\beta_0)^4$ приводять до розбіжних інтеґралів у розрахунках $\Gamma(E)$.

6.4. Двовимірні розбиття цілих чисел з обмеженою кількістю частин

Так звані двовимірні або плоскі розбиття — це особливий тип розбиттів цілих чисел. Плоским розбиттям натурального n називають двовимірний масив невід'ємних цілих n_{ij}, що задовольняють умову незростання за рядками і стовпцями:

$$n = \sum_{i,j>0} n_{ij}, \qquad \text{де} \quad n_{i_1 j_1} \geq n_{i_2 j_2} \tag{6.26}$$

для довільних $i_1 \leq i_2$, $j_1 \leq j_2$ [415, p. 176]. Наприклад, усі 13 плоских розбиттів числа 4 мають вигляд [434]:

$$4,\quad 3\,1,\quad \begin{matrix}3\\1\end{matrix},\quad 2\,2,\quad \begin{matrix}2\\2\end{matrix},\quad 2\,1\,1,\quad \begin{matrix}2\,1\\1\end{matrix},\quad \begin{matrix}2\\1\\1\end{matrix},\quad 1\,1\,1\,1,\quad \begin{matrix}1\,1\,1\\1\end{matrix},\quad \begin{matrix}1\,1\\1\,1\end{matrix},\quad \begin{matrix}1\,1\\1\\1\end{matrix},\quad \begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}.$$

Нульових елементів зазвичай не пишуть, а решту ненульових називають частинами. Кількість різних плоских розбиттів числа n позначатимемо $p^{\mathrm{2D}}(n)$, тобто $p^{\mathrm{2D}}(4) = 13$.

Подібно до задачі про одновимірні (звичайні, лінійні) розбиття [58, 423, 425, 429], задача розрахунку кількості плоских розбиттів може бути пов'язана з підрахунком кількості мікростанів системи двовимірних квантових гармонічних осциляторів зі статистикою Бозе–Айнштайна [75, 425].

На розбиття цілих чисел можна накладати різні обмеження щодо кількості чи значень частин, а у випадку багатовимірних — ще й фор-

ми [415, 435, 436]. Це відповідає вивченню дробової статистики чи аналізові впливу скінченності кількості частинок у квантових ансамблях [83, 182, 429]. Цікаво, що задача про плоскі розбиття з єдиним обмеженням на кількість частин не знайшла відображення в літературі. Один з можливих підходів до неї викладено нижче.

6.4.1. Загальні результати для скінченної системи N частинок. Статистична сума Z_N скінченної системи N бозонних гармонічних осциляторів задовольняє таке рекурентне співвідношення [429, 437]:

$$Z_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} B_k(x) Z_{N-k}(x), \qquad Z_0(x) \equiv 1, \tag{6.27}$$

де $x = \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}$, β — обернена температура, а ω — частота осцилятора. У D-вимірному просторі

$$B_k(x) = \frac{1}{(1-x^k)^D}. \tag{6.28}$$

У замкненому вигляді вираз для Z_N існує лише в одновимірному випадку:

$$Z_N^{\mathrm{1D}}(x) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-x^k}. \tag{6.29}$$

Цим результатом можна скористатися для перевірки пропонованого методу.

Розв'язати рівняння (6.27) можна за допомогою інтеґрального перетворення. Щоб уникнути проблем, пов'язаних із переходом від підсумовування до інтеґрування, найзручніше скористатися якимось дискретним перетворенням.

Застосуємо так зване Z-перетворення, визначене для функції $f(N)$

так [438, Chap. 13]:

$$\mathfrak{Z}[f(N)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)s^{-n} = \tilde{f}(s). \tag{6.30}$$

Воно є дискретним аналогом перетворення Лапласа. Розв'язування рівняння (6.27) вимагатиме використання таких властивостей Z-перетворення:

$$\mathfrak{Z}[Nf(N)] = -s\frac{d\tilde{f}(s)}{ds}, \tag{6.31}$$

$$\mathfrak{Z}[f(N) * g(N)] = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s), \tag{6.32}$$

де конволюцію визначено як

$$f(N) * g(N) = \sum_{n=0}^{N} f(n)g(N-n). \tag{6.33}$$

Зручною для безпосереднього застосування Z-перетворення буде така форма рівняння (6.27):

$$NZ_N(x) = \sum_{k=0}^{N} B_k(x)Z_{N-k}(x), \qquad B_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0. \tag{6.34}$$

При цьому виявляється простішим розглядати поправку до статистичної суми порівняно з безмежною системою $Z_\infty(x)$:

$$Z_N(x) = Z_\infty(x)y_N(x), \tag{6.35}$$

де функція $y_N(x)$ має очевидну границю:

$$\lim_{N\to\infty} y_N(x) = 1. \tag{6.36}$$

Для перетворення цієї поправки легко отримати:

$$-s\frac{d\tilde{y}(s|x)}{ds} = \tilde{B}(s|x)\tilde{y}(s|x), \tag{6.37}$$

або

$$\tilde{y}(s|x) = C\exp\left\{-\int^{s}\frac{\tilde{B}(s')}{s'}\,ds'\right\}, \tag{6.38}$$

де сталу інтеґрування C можна знайти з (6.36).

6.4.2. Перевірка підходу в одновимірному просторі. Усі результати для одновимірної задачі про розбиття добре відомі [58, 429, 439]. Нижче отримаємо їх на підставі запропонованого підходу.

Підсумовування у перетворенні $B_N(x)$ легко зробити у першому порядку за x:

$$\tilde{B}^{1\mathrm{D}}(s|x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^{-k}}{1-x^k} \simeq \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k}(1+x^k) = \frac{s-2x+sx}{(s-1)(s-x)}, \quad (6.39)$$

звідки

$$\tilde{y}^{1\mathrm{D}}(s|x) = C\frac{s^2}{(s-1)(s-x)}, \quad (6.40)$$

і далі знаходимо обернене перетворення:

$$y_N^{1\mathrm{D}}(x) = \mathfrak{Z}^{-1}\left[C\frac{s^2}{(s-1)(s-x)}\right] = C\frac{x^{N+1}-1}{x-1}. \quad (6.41)$$

З рівняння (6.36) стала інтеґрування $C = 1-x$, що дає в головному наближенні:

$$y_N^{1\mathrm{D}}(x) = 1 - x^{N+1}. \quad (6.42)$$

Цей результат правильно відтворює точний вираз (6.29). Справді,

$$Z_\infty^{1\mathrm{D}}(x) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-x^k} \prod_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}, \quad (6.43)$$

тобто

$$y_N^{1\mathrm{D}}(x) = \prod_{k=N+1}^{\infty} (1-x^k) = \exp \sum_{k=N+1}^{\infty} \ln\left(1-x^k\right). \quad (6.44)$$

Знову ж у головному наближенні, беручи до уваги, що $x < 1$ і N — велике, отримаємо:

$$y_N^{1\mathrm{D}}(x) = \exp\left(-x^{N+1}\right) = 1 - x^{N+1} \pm \ldots. \quad (6.45)$$

Пригадаємо тут, що кількість одновимірних розбиттів $p^{1\mathrm{D}}(n) \equiv p(n)$ натурального числа n дорівнює кількості мікростанів $\Gamma(E)$ системи з

енергією $E = \hbar\omega n$. Візьмемо до уваги вираз (6.5) і врахуємо, що для скінченної системи N частинок, яка відповідає розбиттям зі скінченною кількістю частин, ентропія дорівнює $S_N = \beta E + \ln Z_\infty + \ln y_N$. Тоді з рівняння (6.35) матимемо

$$p_N(n) = p(n) y_N(\mathrm{e}^{-\beta_0}), \tag{6.46}$$

де стаціонарна точка $\beta_0 = \pi/\sqrt{6n}$ [58, 75]. Оскільки n велике, то β_0 — мала величина, й арґумент $x = \mathrm{e}^{-\beta_0}$ близький до одиниці, але $x < 1$. Тому підсумовування у формулі (6.44) треба виконувати точніше, а саме:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \ln(1 - x^k) \simeq - \sum_{k=N+1}^{\infty} x^k = -\frac{x^{N+1}}{1-x}.$$

При $N \gg 1$ отримаємо такий поправлений вираз (6.45):

$$y_N^{\mathrm{1D}}(x) = \exp\left(-\frac{x^N}{1-x}\right) \simeq \exp\left(-\frac{x^N}{\beta_0}\right). \tag{6.47}$$

Тобто, головна поправка до кількості обмежених розбиттів буде [58, 423]

$$p_N(n) = p(n) \exp\left\{-\frac{\sqrt{6n}}{\pi}\, \mathrm{e}^{-\pi N/\sqrt{6n}}\right\}, \tag{6.48}$$

що правильно відтворює класичний результат Ердьоша і Ленера [419] про асимптотичну поведінку кількості розбиттів натурального n на щонайбільше N частин.

Цей підхід ми далі поширимо на вищі розмірності простору. Варто зауважити, що вираз для $\tilde{y}^{\mathrm{1D}}(s)$ можна отримати безпосередньо у границі $x \to 1$, але вже обернене перетворення $\mathfrak{Z}^{-1}[\tilde{y}^{\mathrm{1D}}(s)]$ аналітично зробити не вдається. Саме цей факт і вимагав додаткових кроків, описаних вище.

6.4.3. Результати для плоских розбиттів. У двовимірному просторі $B_k^{\rm 2D}(x)$ дорівнює:

$$B_k^{\rm 2D}(x) = \frac{1}{(1-x^k)^2}, \tag{6.49}$$

звідки наближено матимемо

$$\tilde{B}^{\rm 2D}(s|x) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k}(1+2x^k) = \frac{s-3x+2sx}{(s-1)(s-x)}. \tag{6.50}$$

Розв'язок рівняння (6.37) буде

$$\tilde{y}^{\rm 2D}(s|x) = C\frac{s^3}{(s-1)(s-x)^2}, \tag{6.51}$$

а його обернене Z-перетворення:

$$y_N^{\rm 2D}(x) = \mathfrak{Z}^{-1}[\tilde{y}^{\rm 2D}(s|x)] = C\frac{(N+1)x^{N+2}-(N+2)x^{N+1}+1}{(x-1)^2}, \tag{6.52}$$

де $C=(x-1)^2$, що в границі великих N і малих x дає:

$$y_N^{\rm 2D}(x) = 1 - Nx^N \tag{6.53}$$

Подібний вираз можна отримати для системи N ізотропних двовимірних осциляторів, записуючи статистичну суму у вигляді:

$$\ln Z_N^{\rm 2D}(x) = -\sum_{k=1}^{N} k\ln(1-x^k), \tag{6.54}$$

де взято до уваги k-кратне виродження k-го рівня. Прямуючи верхню межу до безмежності, відтворимо твірну функцію МакМагона для плоских розбиттів [440]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{\rm 2D}(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^n)^n}. \tag{6.55}$$

Порівнюючи рівняння (6.53)–(6.54) і діючи за аналогією з одновимірним випадком, щоб перейти до границі $\beta\to 0$, можемо отримати

для $y_N^{\mathrm{2D}}(x)$:

$$\begin{aligned} y_N^{\mathrm{2D}}(x) &= \exp \sum_{k=N+1}^{\infty} k \ln(1-x^k) \simeq \exp\left(-\sum_{k=N+1}^{\infty} kx^k\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{x^{N+1}[N(1-x)+1]}{(1-x)^2}\right). \end{aligned} \tag{6.56}$$

Для $N\beta_0 \gg 1$ матимемо таку асимптотику:

$$y_N^{\mathrm{2D}}(x) = \exp\left(-\frac{Nx^N}{1-x}\right) \simeq \exp\left(-\frac{Nx^N}{\beta_0}\right), \tag{6.57}$$

де стаціонарна точка

$$\beta_0 = \left(\frac{2\zeta(3)}{n}\right)^{1/3}. \tag{6.58}$$

Отже, для обмежених плоских розбиттів будемо мати таку асимптотичну поведінку:

$$p_N^{\mathrm{2D}}(n) = p^{\mathrm{2D}}(n) \exp\left\{-\frac{Nn^{1/3}}{[2\zeta(3)]^{1/3}} \mathrm{e}^{-N[2\zeta(3)/n]^{1/3}}\right\}. \tag{6.59}$$

Цей вираз є одним із головних результатів роботи в цьому розділі. Він дає оцінку кількості плоских розбиттів числа n на щонайбільше N частин.

Умову для кількості частин N безпосередньо отримуємо під час виведення у вигляді:

$$0.75n^{1/3} \ll N < n, \tag{6.60}$$

де 0.75 є наближеним значенням $[2\zeta(3)]^{-1/3}$.

Результати деяких обчислень за допомогою рівняння (6.59) наведено в таблиці 6.2. Точні значення необмежених плоских розбиттів $p^{\mathrm{2D}}(n)$ можна знайти в [442], тоді як асимптотична залежність від n має вигляд [432, 443]:

$$p^{\mathrm{2D}}(n) = \frac{[2\zeta(3)]^{7/36}}{\sqrt{6\pi}}\, n^{-25/36} \exp\left\{\frac{3}{2}[2\zeta(3)]^{1/3} n^{2/3} + c\right\}, \tag{6.61}$$

Таблиця 6.2. Кількість обмежених плоских розбиттів.

n, N	$p^{\mathrm{2D}}(n)$	$p_N^{\mathrm{2D}}(n)$				відносна		
		точно	обчисл. 1	обчисл. 2	обчисл. 3	похибка, %		
$n = 10,\ N = 9$	500	458	474	498	497	3.5	8.8	8.7
$n = 15,\ N = 14$	6879	6703	6791	7082	7073	1.3	5.7	5.5
$n = 20,\ N = 19$	75278	74651	75003	77574	77478	0.5	3.9	3.8
$N = 18$		74161	74898	77435	77339	1.0	4.4	4.3

Точні значення взято з [441]. Колонка 'обчисл. 1' відповідає точному $p^{\mathrm{2D}}(n)$ з [442]; значення в колонках 'обчисл. 2' і 'обчисл. 3' отримано на підставі $p^{\mathrm{2D}}(n)$ з (6.61), де константи c взято з [75] і [432, 443], відповідно.

де $c = \zeta'(-1) = -0.165421\ldots$. У праці [75] ми отримали значення $c = -1/6 = -0.166666\ldots$, яке дає кращі результати для $n \leq 7573$, але не забезпечує правильної поведінки при $n \to \infty$.

Як видно з таблиці 6.2, для обмежених плоских розбиттів оцінки за виразом (6.59) дають добру точність, принаймні в діапазоні $n = 10 \div 20$. Дещо більші значення похибок (4–9%) в основному пов'язані з похибкою асимптотичного виразу (6.61) для кількості необмежених плоских розбиттів. Як і варто було очікувати, спостерігається монотонне спадання відносної похибки зі зростанням n, щонайменше для співвідношення $N/n = 9/10$.

6.4.4. Числова оцінка кількості обмежених плоских розбиттів для проміжних значень $N \sim n^{2/3}$. Числовий аналіз рекурентного співвідношення (6.27) для $Z_N(x)$ у двовимірному випадку було зроблено для $n = 100 \div 10\,000$. За значення арґумента взято $x = e^{-\beta_0}$ зі стаціонарною точкою, яка відповідає цій задачі, $\beta_0 = [2\zeta(3)/n]^{1/3}$. Результати деяких обчислень наведено в табл. 6.3.

Таблиця 6.3. Розв'язки рекурентного рівняння (6.27) для $\ln Z_N$ у двовимірному випадку.

N \ n	100	200	500	1000	2000	5000	10000
10	13.50490	17.20871	22.46359	26.62624	30.90153	36.67638	41.11207
20	17.11408	23.66709	33.53210	41.58209	49.96198	61.38032	70.19437
30	18.09474	26.52429	40.27325	51.91522	64.22143	81.14853	94.28280
50	18.30640	28.02642	47.03409	64.86995	84.45795	111.98343	133.58019
100		28.13457	49.79461	75.97533	109.82935	161.18825	202.85769
200			49.81234	76.99794	119.32409	203.58562	280.20762
300				76.99798	119.40093	213.60298	316.40845
500						214.27879	334.40026
$N \to n$	18.30884	28.13458	49.81234	76.99798	119.40094	214.27879	334.64773

Як легко зауважити, значення Z_N швидко наближаються до асимптотичних результатів, що відповідають границі $N \to n$. Це суттєво ускладнює числовий аналіз рекурентного співвідношення (6.27) у випадку, розглянутому в попередньому пункті.

Отримані результати можна перенести на проблему підрахунку плоских розбиттів. Виявляється, що з доброю точністю отримані дані за проміжних значень $N \sim n^{2/3}$ описує формула:

$$\ln \frac{p_N^{\mathrm{2D}}(n)}{p^{\mathrm{2D}}(n)} = -An^{2/3}N^{-1/3} \exp\left\{-kN^{3/2}/n + b\, n^{1/3} \ln N\right\}. \qquad (6.62)$$

Константи A, b та k було розраховано як параметри підгонки у вигляді:

$$A = 1.075 \pm 0.008, \qquad b = 0.0060 \pm 0.0002, \qquad k = 2.26 \pm 0.2. \quad (6.63)$$

Цікаво, що обчислене значення k близьке до $k = 2\zeta(3) = 2.40411\ldots$, звідки відповідний множник можна подати у вигляді $k/n = \beta_0^3$.

Отже, ми отримали другу асимптотику кількості обмежених пло-

ских розбиттів

$$\ln \frac{p_N^{\mathrm{2D}}(n)}{p^{\mathrm{2D}}(n)} \sim -\left(\frac{n^2}{N}\right)^{1/3} \exp\left\{-\frac{2\zeta(3)N^{3/2}}{n}\right\} \tag{6.64}$$

для кількості частин $N \sim n^{2/3}$.

6.5. Зв'язок між дробовою статистикою і скінченною бозе-системою в одновимірному випадку

У цьому підрозділі запропоновано опис бозонної систем зі скінченною кількістю частинок за допомогою моделі, яка є математично простішою. До певної міри такий підхід має спільні риси зі знаходженням бозонно-ферміонної еквівалентності ідеальних газів [444] або в газі Тонкса–Жірардо [445], який експериментально отримано у 2004 році [446, 447]. Еніонно-ферміонна відповідність також застосовується до аналізу ультрахолодних газів [44].

Застосовуватимемо дробову статистику Джентіле, у якій максимальне заповнення енергґетичного рівня обмежене деяким числом M [33, 121, 127]. Якщо встановити відповідність між кількістю частинок N в реальній бозе-системі та параметром M у модельній, то поставлену задачу можна вважати розв'язаною.

Для спрощення розглядатимемо одновимірну систему. Фізично це відповідає бозонам у високоасиметричній гармонічній пастці. До цієї ж системи застосовано підхід канонічного та великого канонічного ансамблю, а згодом узагальнено отримані результати для системи зі степеневим енергґетичним спектром $\varepsilon_m \propto m^s$.

6.5.1. Мікроканонічний підхід. Запишемо вираз для кількості мікростанів системи одновимірних осциляторів з енергією $E = \hbar\omega n$ (6.14), відновивши розмірність:

$$\Gamma(E) = \frac{1}{4\sqrt{3}\,E/\hbar\omega}\, e^{\pi\sqrt{2/3}\,\sqrt{E/\hbar\omega}}. \tag{6.65}$$

Використовуючи ентропію $S = \ln\Gamma$ з означення температури $\dfrac{1}{T} = \dfrac{dS}{dE}$ отримаємо таке рівняння стану:

$$E = \frac{\pi^2}{6}\hbar\omega\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^2. \tag{6.66}$$

Оскільки енергія E є екстенсивною величиною, $E \propto N$, де N — кількість частинок, то термодинамічна границя $\omega N = \text{const}$ відразу випливає з наведеного вище рівняння. Цей результат також можна отримати на підставі інших міркувань [14].

Вираз для скінченної системи N частинок отримуємо на підставі задачі про обмежені розбиття на щонайбільше N доданків [58], кількість яких асимптотично дорівнює [419], порівн. стор. 226:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{fin}}(E) \;&=\; \frac{1}{4\sqrt{3}\,E/\hbar\omega}\, e^{\pi\sqrt{2/3}\,\sqrt{E/\hbar\omega}} \times \\ &\qquad \times \exp\left\{-\frac{\sqrt{6}}{\pi}\,\sqrt{E/\hbar\omega}\, e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}\frac{N}{\sqrt{E/\hbar\omega}}}\right\}.\end{aligned} \tag{6.67}$$

Результат, до якого зводиться дробова статистика, розглянув Срівацан та ін. [182]. Він відповідає кількості розбиттів числа n, де кожен доданок трапляється щонайбільше M разів:

$$\Gamma_{\text{frac}}(E) = \frac{1}{4\sqrt{3}\,E/\hbar\omega}\, e^{\pi\sqrt{2/3}\,\sqrt{E/\hbar\omega}\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{1/2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{1/2}. \tag{6.68}$$

Легко бачити, що $\Gamma(E)$ з виразу (6.65) є головним множником і в рівняннях (6.67) та (6.68). Відповідні ентропії дорівнюють

$$S_{\text{fin}} = \ln\Gamma_{\text{fin}} = \ln\Gamma + \Delta S_{\text{fin}} \qquad \text{і} \qquad S_{\text{frac}} = \ln\Gamma_{\text{frac}} = \ln\Gamma + \Delta S_{\text{frac}}.$$

Порівнюючи поправки ΔS_{fin} та ΔS_{frac}, можна встановити умову еквівалентності, яка пов'язує параметр максимального заповнення M і кількість частинок N:

$$M \sim \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\frac{N}{\sqrt{E/\hbar\omega}}\right). \tag{6.69}$$

6.5.2. Підхід канонічного і великого канонічного ансамблів. Безпосередніми викладками легко показати, що у випадку визначеної дробової статистики Джентіле заповнення енергетичного рівня ε дорівнює [33, 121, 127]

$$f_M(\varepsilon,\mu,T) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}-1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(\varepsilon-\mu)/T}-1}, \tag{6.70}$$

де μ — хімічний потенціал, а T — температура.

Хімічний потенціал і кількість частинок $\mathcal{N}$ пов'язані співвідношеннями:

$$\mathcal{N} = \sum_{j=0}^{\infty} f_M(\varepsilon_j,\mu,T), \tag{6.71}$$

а енергія E дорівнює

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j f_M(\varepsilon_j,\mu,T). \tag{6.72}$$

Однак, у випадку скінченної системи значно простіше застосувати канонічний ансамбль. Як уже сказано раніше, статистична сума N нерозрізнювальних одновимірних осциляторів дорівнює [429]:

$$Z_N = \prod_{j=1}^{N}\left(1-e^{\hbar\omega j/T}\right)^{-1}, \tag{6.73}$$

звідки можна розрахувати енергію системи E_N. У границі великих N головний доданок задається виразом

$$E_N - E_{\text{Bose}} \sim \hbar\omega\frac{Ne^{-\hbar\omega N/T}}{e^{\hbar\omega/T}-1}, \tag{6.74}$$

де E_{Bose} — енергія безмежної бозонної системи.

Для випадку дробової статистики використовуватимемо великий канонічний ансамбль. Активність $z = e^{\mu/T}$ зобразимо як $z = z_{\text{Bose}} + \Delta z$ де z_{Bose} задовольняє рівняння

$$\mathcal{N} = \sum_i \frac{1}{z_{\text{Bose}}^{-1} e^{\varepsilon_i/T} - 1}. \tag{6.75}$$

У границі великих M доданок $\Delta z \sim \dfrac{1}{M}$, звідки випливає поправка до енергії з рівняння (6.72):

$$E_M - E_{\text{Bose}} \sim \frac{1}{M}. \tag{6.76}$$

Порівнюючи вирази (6.74) та (6.76), отримаємо такий зв'язок між параметрами M та N:

$$M \sim \frac{1}{N} e^{\hbar\omega N/T}. \tag{6.77}$$

В експоненті температура T, пов'язана з енергією E через формулу (6.66). Таким чином, результат (6.77) відтворює мікроканонічний вираз (6.69) з точність до нехтівно малого множника $1/N$ — потрібно брати до уваги, що в логарифмах від (6.67) і (6.68) збережено лише головні доданки.

6.5.3. Степеневий енергетичний спектр. Далі розглянемо загальний степеневий енергетичний спектр $\varepsilon = am^s$ $(s > 0)$. Відповідним вибором енергетичних одиниць, можна досягнути значення $a = 1$. Насправді, для реальних фізичних систем реалізуються лише випадки $s = 1$ та $s = 2$ [182], однак інші значення можуть ефективно з'явитися в деяких екзотичних модельних системах або в густині станів системи в зовнішньому потенціалі в межах наближення WKB.

Для енерґетичного спектра $\varepsilon_m = m^s$ статистична сума

$$Z(\beta) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\beta m^s}\right)^{-1}. \tag{6.78}$$

Ентропія $S(\beta)$ після застосування формули Ейлера–Маклорена набуде вигляду

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \beta E + \ln Z(\beta) = \\ &= \beta E - \sum_{m=1}^{\infty} \ln\left(1 - e^{-\beta m^s}\right) = \beta E + \frac{C(s)}{\beta^{1/s}} + \frac{1}{2}\ln\beta + \ldots, \end{aligned} \tag{6.79}$$

де

$$C(s) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{s}\right)\zeta\left(1 + \frac{1}{s}\right), \tag{6.80}$$

$\Gamma(z)$ і $\zeta(z)$ — це, відповідно, гамма-функція Ейлера і дзета-функція Рімана.

Стаціонарна точка β_0 дорівнює

$$\beta_0 = \left(\frac{C(s)}{sE}\right)^{s/(s+1)} = \lambda_s E^{-s/(s+1)}. \tag{6.81}$$

Отже, для кількості мікростанів матимемо

$$\Gamma(E) = \frac{\lambda_s}{(2\pi)^{(s+1)/2}}\sqrt{\frac{s}{s+1}}E^{-\frac{3s+1}{2(s+1)}}\exp\left[\lambda_s(s+1)E^{\frac{1}{s+1}}\right]. \tag{6.82}$$

Замінюючи E на n можна отримати добре відому формулу Гарді–Рамануджана [417] для кількості розбиттів цілого n на суму s-тих степенів.

Якщо кількість частинок N у системі є скінченою, то до наведеної вище формули потрібно знайти поправку. У цьому випадку статистична сума дорівнює

$$\ln Z_N(\beta) = -\sum_{m=1}^{N} \ln\left(1 - e^{-\beta m^s}\right), \tag{6.83}$$

і для ентропії маємо

$$S_{\text{fin}}(\beta) = \beta E - \sum_{m=1}^{N} \ln\left(1 - e^{-\beta m^s}\right). \tag{6.84}$$

Після простих перетворень, отримаємо:

$$S_{\text{fin}}(\beta) = S(\beta) - \frac{1}{s\beta^{1/s}}\Gamma\left(\frac{1}{s}, \beta N^s\right), \tag{6.85}$$

де $\Gamma(a,x)$ — це неповна Γ-функція. Отже,

$$\mathit{\Gamma}_{\text{fin}}(E) = \mathit{\Gamma}(E)\exp\left[-\frac{1}{s\beta_0^{1/s}}\Gamma\left(\frac{1}{s}, \beta_0 N^s\right)\right]. \tag{6.86}$$

Застосовуючи асимптотичний розклад $\Gamma(a,x)$ [366, рівняння 6.5.32], остаточно будемо мати:

$$\mathit{\Gamma}_{\text{fin}}(E) = \mathit{\Gamma}(E)\exp\left[-\frac{1}{s\beta_0}N^{1-s}e^{-\beta_0 N^s}\right]. \tag{6.87}$$

Замінюючи E на n, отримаємо результат для обмежених розбиттів

$$\mathit{\Gamma}_{\text{fin}}(n) \;=\; \mathit{\Gamma}(n)\exp\left[-\frac{1}{\lambda_s s}n^{s/(s+1)}N^{1-s}e^{-\lambda_s N^s n^{-s/(s+1)}}\right], \tag{6.88}$$

див. також (17) з [431]. Для цієї функції традиційно використовують позначення $p_N^s(n)$, однак треба зазначити, що для задачі розбиттів цілих чисел значення s повинно бути цілим. Для $s = 1$ отриманий вираз зводиться до результату Ердьоша і Ленера [419], див. також (6.67).

Вираз для дробової статистики візьмемо безпосередньо з [182]:

$$\begin{aligned}\mathit{\Gamma}_{\text{frac}}(n) \;&=\; \frac{\lambda_s}{(2\pi)^{(s+1)/2}}\sqrt{\frac{s}{s+1}}\left(1 - \frac{1}{(M+1)^{1/s}}\right)^{s/(s+1)} \times \\ &\times\; n^{-\frac{3s+1}{2(s+1)}} \times \\ &\times\; \exp\left[\lambda_s\left(1 - \frac{1}{(M+1)^{1/s}}\right)^{s/(s+1)}(s+1)n^{\frac{1}{s+1}}\right]\end{aligned} \tag{6.89}$$

Щоб отримати зв'язок між параметрами M та N, можна знову розглянути ентропії $S_{\text{frac}} = \ln \mathit{\Gamma}_{\text{frac}}$ і $S_{\text{fin}} = \ln \mathit{\Gamma}_{\text{fin}}$:

$$S_{\text{frac}} - S = -\frac{1}{s\beta_0} N^{1-s} e^{-\beta_0 N^s},$$

$$S_{\text{fin}} - S = -\frac{s\lambda_s}{1+s} M^{-1/s}, \tag{6.90}$$

де $S = \ln \Gamma$.

Відкидаючи константи, отримаємо:

$$M^{1/s} \sim n^{\frac{1-s}{1+s}} N^{s-1} \exp\left\{\lambda_s n^{-\frac{s}{1+s}} N^s\right\}. \tag{6.91}$$

У цьому загальному випадку цікаво знайти зв'язок між енергією E та температурою T з означення $\dfrac{1}{T} = \dfrac{dS}{dE}$:

$$\frac{1}{T} = \lambda_s E^{-\frac{s}{1+s}} \quad \Rightarrow \quad E^{\frac{s}{1+s}} = \lambda_s T. \tag{6.92}$$

Отже, головний внесок дасть

$$M \sim \exp\left(\frac{sN^s}{T}\right), \tag{6.93}$$

що не суперечить частковому результату (6.77).

6.6. Багатовимірні розбиття цілих чисел

Для означення багатовимірних розбиттів вимога про незростаючий порядок в усіх напрямках стає важливою. У D-вимірному випадку натуральне число n зображають як суму натуральних $n_{i_1 \ldots i_D}$:

$$n = \sum_{i_1, \ldots, i_D \geq 0} n_{i_1 \ldots i_D}, \tag{6.94}$$

де $n_{i_1 \ldots i_D} \geq n_{j_1 \ldots j_D}$ щоразу, коли $i_1 \leq j_1$, $i_2 \leq j_2$, $\ldots$, $i_D \leq j_D$ [415, p. 179].

Скориставшись фізичною аналогією між кількістю мікростанів багатобозонної системи і кількістю розбиттів натуральних чисел, розглядатимемо D-вимірну систему бозонів з енергетичним спектром у такому вигляді:

$$\varepsilon(m_1,\ldots,m_D) = m_1^{s_1} + \ldots + m_D^{s_D}. \tag{6.95}$$

Різні степені можуть відповідати певним геометріям зовнішніх потенціалів, наприклад, частинка, що рухається вільно вздовж осі z ($s_3 = 2$), перебуваючи при цьому у двовимірній осциляторній пастці в напрямках x та y ($s_1 = s_2 = 1$).

Щоб отримати $\Gamma(E)$, скористаємося підходом, викладеним у попередніх підрозділах, відповідно до праць [58, 83].

Для енергетичного спектра (6.95) статистична сума

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \prod_{\text{all the energies}} \left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right)^{-1} = \\ &= \prod_{m_1=1}^{\infty} \cdots \prod_{m_D=1}^{\infty} \left[\left(1 - e^{-\beta(m_1^{s_1}+\ldots+m_D^{s_D})}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{6.96}$$

Як і раніше, для кількості мікростанів $\Gamma(E)$ з (6.4) матимемо:

$$\Gamma(E) = \frac{\exp[S(\beta_0)]}{\sqrt{2\pi S''(\beta_0)}}. \tag{6.97}$$

Ентропія $S(\beta) = \beta E + \ln Z(\beta)$ після застосування формули Ейлера–Маклорена набуде вигляду

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \beta E - \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_D=1}^{\infty} \ln\left[1 - e^{-\beta(m_1^{s_1}+\ldots+m_D^{s_D})}\right] = \\ &= \beta E + \frac{C}{\beta^{1/\sigma}} + \frac{1}{2^D}\ln\beta + \ldots, \end{aligned} \tag{6.98}$$

де останнє перетворення зроблено в границі $\beta \to 0$. Тут $C = C(s_1,\ldots,s_D)$ — константа зі складною залежністю від степенів

$s_1, \ldots, s_D$. Для наших оцінок її явний вигляд не буде суттєвим. Параметр σ визначається так:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{s_1} + \ldots + \frac{1}{s_D}. \tag{6.99}$$

Поява множника $1/2^D$ пов'язана з D-вимірним узагальненням формули підсумовування, оскільки область зміни індексів є прямокутною, див. [366, p. 892], а внесок у першу поправку до інтеґрального доданка дає лише найнижча точка $m_1 = \ldots = m_D = 1$.

Для стаціонарної точки β_0, $S'(\beta_0) = 0$, отримаємо

$$\beta_0 = \left(\frac{C}{\sigma E}\right)^{\sigma/(\sigma+1)} = \lambda E^{-\sigma/(\sigma+1)}. \tag{6.100}$$

Отже, кількість мікростанів буде

$$\mathit{\Gamma}(E) \sim E^{-\frac{1}{\sigma+1}\left(\frac{1}{2}+(2^{-D}+1)\sigma\right)} \exp\left[\lambda(\sigma+1)E^{\frac{1}{\sigma+1}}\right]. \tag{6.101}$$

Замінюючи E на n, матимемо вираз для кількості розбиттів:

$$p(s_1, \ldots, s_D; D|n) \;\sim\; n^{-\frac{1}{\sigma+1}\left(\frac{1}{2}+(2^{-D}+1)\sigma\right)} \exp\left[\lambda(\sigma+1)n^{\frac{1}{\sigma+1}}\right], \tag{6.102}$$

$$\sigma = \left(\frac{1}{s_1} + \ldots + \frac{1}{s_D}\right)^{(-1)}.$$

Таким чином, поведінку головної асимптотики функції $p(s_1, \ldots, s_D; D|n)$ повністю визначає параметр σ. Якщо всі s_i рівні, $s_1 = \ldots = s_D = s$, то

$$\sigma = s/D.$$

Зокрема, для простих багатовимірних розбиттів ($s = 1$) отримаємо:

$$p(D|n) \sim n^{-\frac{1}{D+1}\left(\frac{D}{2}+2^{-D}+1\right)} \exp\left[\mathrm{const}\, n^{\frac{D}{D+1}}\right]. \tag{6.103}$$

Рівняння (6.103) правильно відтворює головну асимптотику в експоненті [448]. Оскільки плоскі (двовимірні, $D = 2$) розбиття вивчені більш детально порівняно з вищими випадками, то цікаво порівняти відомі результати з отриманими тут.

З рівняння (6.103) маємо:

$$p(2|n) \sim n^{-3/4} \exp\left(\text{const}\, n^{2/3}\right). \tag{6.104}$$

Правильна поведінка, відповідно до Райта [432, 449]:

$$p(2|n) \sim n^{-25/36} \exp\left(\text{const}\, n^{2/3}\right), \tag{6.105}$$

вона відрізняється від нашого результату лише передекспонентним множником. Вираз (6.104) дає близьку оцінку для кількості плоских розбиттів:

$$n^{-3/4} = n^{-0.75\ldots}, \qquad \text{тоді як} \qquad n^{-25/36} = n^{-0.694\ldots}.$$

Для тривимірних розбиттів ($D = 3$) [450] оцінка (6.103) є також правильною, принаймні в головному наближенні.

6.7. Висновки до розділу 6

На підставі аналогії між підрахунком кількості мікростанів квантової багаточастинкової системи і задачею про розбиття в теорії чисел отримано низку результатів. Зокрема, встановлено еквівалентність між одновимірною бозе-системою зі скінченною кількістю частинок і системою, що описується дробовою статистикою Джентіле. Зроблено узагальнення на випадок степеневого енергґетичного спектра.

Квантово-статистичний підхід використано для оцінки кількості обмежених плоских розбиттів натурального числа n за умови, що кількість частин не перевищує деякого скінченного N. Відповідна

теоретико-числова задача пов'язана з підрахунком мікростанів ідеального двовимірного бозе-газу. Отриманий вираз для кількості обмежених плоских розбиттів дає добре узгодження між розрахованими і точними значеннями при $n = 10 \div 20$.

Також встановлено вирази для багатовимірних розбиттів цілих чисел в загальному випадку різних степенів. Принаймні у головному наближенні результати збігаються з відомими асимптотиками, розрахованими за допомогою різних методів теорії чисел.

РОЗДІЛ 7

СТАТИСТИКА БОЗЕ В ЗАДАЧІ КЛАСИФІКАЦІЇ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

7.1. Вступ

Для пояснення емпіричних законів у суспільних та гуманітарних науках Парето [451], Еступ [452], Ціпф [453, 454] та інші вчені використовували базові принципи поведінки людини, див. зокрема історичний огляд [455]. До таких понять належить принцип найменшого зусилля (англ. *principle of least effort*), який у формулюванні Ціпфа [454] має очевидні алюзії на принцип найменшої дії у фізиці.

Самі підходи статистичної фізики можна застосовувати для різних систем, що назагал складаються з багатьох одиниць, тому тексти для таких досліджень виявляються добрим матеріалом. Використання фізичних методів досить поширене у лінгвістиці [64, 65, 456–458], їх також успішно застосовують у різних галузях суспільних наук, наприклад, у вивченні транспортних мереж [459], розподілу міських територій [460, 461], і навіть у моделях прояву насильства [462].

Кількісний аналіз великих за обсягом текстів дозволив виявити певні закономірності різних текстових параметрів. Встановлені таким чином емпіричні співвідношення, зокрема, закон Ціпфа, справедливі також в інших галузях. Їх виявили при вивченні розподілу нуклеотидів у геномі та інших задачах біології [61–63, 463], а також, як щойно було зазначено, в суспільних науках [68–70, 460–462, 464].

У цьому розділі ми аналізуватимемо кількісну поведінку текстів на підставі виявленої аналогії з бозе-системою в підході великого канонічного ансамблю. Буде продемонстровано можливість присвоєння текстові певного нового набору параметрів, які характеризують його частотну структуру, причому один із них можна умовно назвати "температурою".

До поняття "температура тексту" зверталися різні автори з різних поглядів. Так, Мандельброт [465] запропонував термін "інформаційна температура текстів" для параметра в ранґово-частотному розподілі (відомому зараз як закон Ціпфа–Мандельброта). Такий параметр стосується "доброго" чи "поганого" вживання слів, особливо рідкісних для певного тексту [466]. "Температуру" як міру комунікативної здатності увів Космідіс [467]. Нещодавно, Міяджіма і Ямамото [468] використали класичний розподіл Больцмана для визначення "температури тексту" на підставі частотної інформації про найбільш частотні слова.

У цьому розділі запропоновано новий підхід, що полягає у введенні низки параметрів, за якими можна проводити класифікацію текстів. Зокрема, від методики [468] він відрізняється використанням для аналізу низькочастотної лексики, структура якої, взагалі кажучи, відзначається стабільнішою поведінкою.

Результати цього розділу опубліковано у працях [77, 78, 95–98].

7.2. Ранґово-частотний розподіл

Аналізуватимемо тексти на рівні слова. Оскільки саме поняття "слово" не має однозначної дефініції, порівн. [469], ми обмежимося так званим "орфографічним словом", яке є буквено-цифровою послідосністю між двома пробілами або розділовими знаками. Різні словоформи, напри-

клад, ‘рука’ і ‘руки’, ‘писати’ і ‘писала’ тощо вважатимемо для спрощення різними словами.

Щоб отримати ранґово-частотний розподіл, потрібно спочатку укласти частотний список із заданої вибірки (тексту). Далі, слово із найбільшою частотою отримує **ранґ 1**, наступне за частотою — **ранґ 2** і так далі. Словам із однаковими частотами присвоюють послідовні значення ранґів, у межах яких упорядкування може бути довільним.

Вивчення ранґово-частотних розподілів було започатковано в аналізі текстів, і хоча подібні закономірності виявили згодом у різних галузях, тексти й надалі залишаються найдоступнішим матеріалом, що характеризується високим розмаїттям.

Типовий ранґово-частотний розподіл має форму, зображену на рис. 7.1.

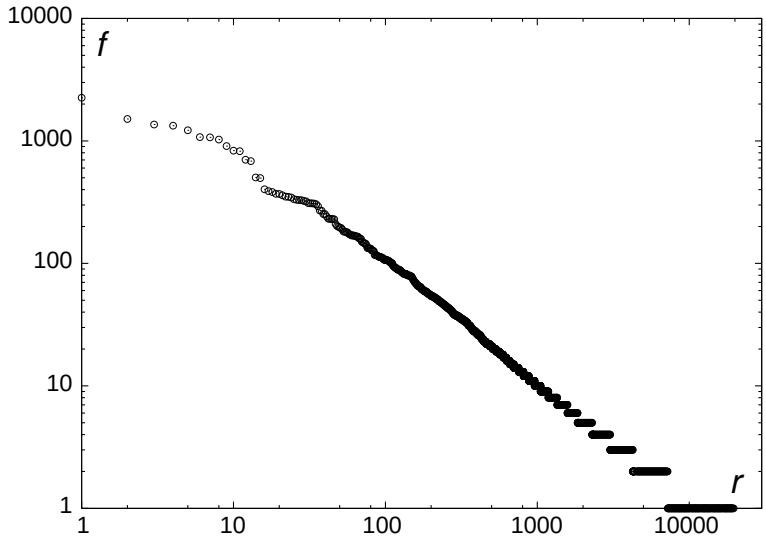


Рис. 7.1. Типовий ранґово-частотний розподіл. Абсолютні частоти f показано як функцію від ранґу r для орфографічних слів на матеріалі роману Івана Франка “Перехресні стежки”. Дані отримано під час попередньої стадії укладання частотного словника цього роману [470].

Горизонтальні плато в області великих ранґів / малих частот означають велику кількість слів, які мають однакові частоти. Найдовше

плато відповідає частоті 1. Такі слова відомі як *гапакс леґомена* (*hapax legomena*) — цей термін походить із досліджень Біблії.

Гапакс леґомена — це множина давньогрецького терміна *гапакс леґоменон* (ἅπαξ λεγόμενον), що приблизно перекладається як '[щось] сказане [лише] один раз'. Тобто, цей термін відповідає словам, які трапилися в досліджуваному тексті лише раз.

Приклади з Біблії включають [471]: **לילית** 'Ліліт' (слово неясного значення) або **עֲצֵי־גֹפֶר** 'дерево ґофер' (із нього було збудовано Ноїв ковчег). Інші часто згадувані приклади: *αὐτόγυον*, вид плуга (з поеми Гесіода *Ἔργα καὶ Ἡμέραι* "Роботи і дні", 433); *honorificabilitudinitatibus* 'стан бути в змозі досягти почестей' (Шекспір, *Loves Labours Lost* "Марні зусилля кохання", дія 5, сцена 1 [472, p. 372]).

Для великих текстових вибірок приблизно від 40 до 60 відсотків слів є гапаксами, ця пропорція залежить від обсягу тексту [473, p. 72]. Відносна кількість *гапакс леґомена* незначно зростає зі збільшенням довжини тексту. Залежність багатьох величин від обсягу тексту N добре описує степеневий закон [474], до них зокрема належить і кількість гапаксів,

$$N_{\text{hapax}} = aN^b.$$

Потрібно зауважити, однак, що для статистичних досліджень тексти мають бути достатньо довгими.

Справді, навіть у такому довгому реченні, що складається з двадцяти чотирьох слів, усі вони — гапакси, за винятком самого терміна "гапакси", який трапляється тут двічі.

7.3. Фізична аналогія

Ранґово-частотні залежності мають риси, дуже подібні до розподілу Бозе у статистичній фізиці [77, 78]. Щоб продемонструвати це, зіставмо номер енерґетичного рівня j з абсолютною частотою у певному списку. Тобто елементи (слова) з частотою 1 займатимуть перший рівень $j = 1$, з частотою 2 — другий рівень $j = 2$ і т. д. Заселеність рівня N_j буде відповідати кількості різних одиниць із частотою j. Оскільки таке число може набувати будь-яких значень (зокрема як завгодно великих), то можливим видається використання для опису відповідної частотної структури функції розподілу Бозе. Найнижчий енерґетичний рівень відповідає *гапакс леґомена* — елементам, що трапилися в досліджуваному матеріалі лише один раз. У такій схемі вони є аналогом бозе-конденсату.

7.3.1. Функція розподілу й енерґетичний спектр. Функція розподілу Бозе, що визначає числа заповнення j-го рівня, має вигляд

$$N_j = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_j/T} - 1}, \tag{7.1}$$

де z — активність, ε_j — енерґія j-го рівня, T — температура.

Як показали наші дослідження, для опису низькочастотної структури (тобто рівнів з малими значеннями j) добре підходить степеневий спектр

$$\varepsilon_j = (j-1)^\alpha. \tag{7.2}$$

Одиницю віднімаємо з міркувань зручності, забезпечуючи нульове значення енерґії першого рівня.

Зважаючи на природу частотних розподілів, для високих енерґетичних рівнів видається застосовною проста модель дуже слабкого зростання, $\varepsilon_j \propto \ln\ln j$ при $j \gg 1$, порівн. рис. 7.13. Однак, такий спектр

вимагає обмеження максимального значення рівня якимось значенням $j_{\max}$ з метою забезпечення збіжності виразу $\sum_j N_j$.

7.3.2. Параметри розподілу Бозе. Параметри функції розподілу (7.1) визначатимемо за таким двокроковим алгоритмом. Спочатку обчислюємо параметр z, який є аналогом активності у фізиці, виходячи з числа заповнення найнижчого рівня $j = 1$, тобто з кількості *гапакс леґомена*:

$$N_{\text{hapax}} \equiv N_1 = \frac{z}{1-z}. \tag{7.3}$$

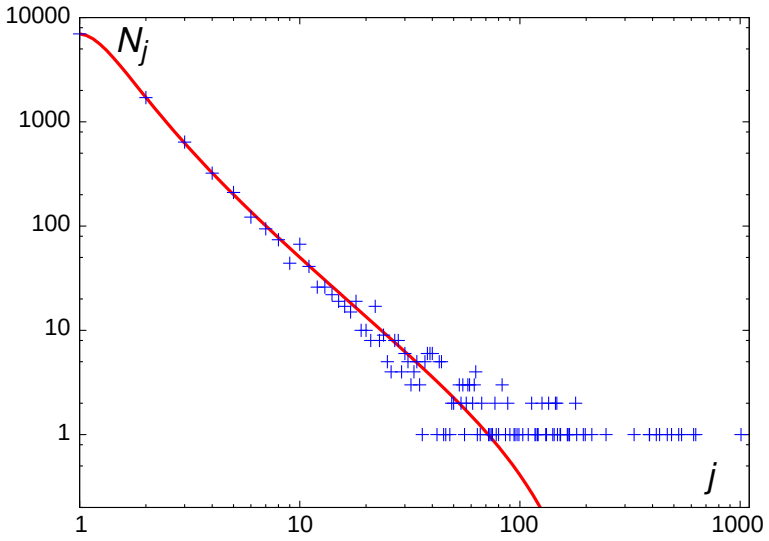


Рис. 7.2. Зіставлення теоретичної моделі зі спостережуваним значенням заповнення рівнів. Хрестики відповідають даним, отриманим на підставі перших 40 розділів роману Івана Франка "Перехресні стежки" (усього в романі 60 розділів). Суцільна лінія — функція (7.4), розрахована за першими 20 значеннями чисел заповнення N_j.

"Температуру" T й показник степеня α у рівнянні (7.2) далі обчислюємо одночасно, зіставляючи розраховані для реальної системи значення N_j з $j > 1$ з теоретичною моделлю

$$N_j = \frac{1}{z^{-1}e^{(j-1)^\alpha/T} - 1} \tag{7.4}$$

за двома параметрами, α та T. Приклад результатів таких розрахунків наведено на рис. 7.2. Ці обчислення, а також подібні подальші, зроблено за допомогою методу найменших квадратів з використанням нелінійного алгоритму Марквардта–Левенберґа, який реалізовано у процедурі `fit` середовища GnuPlot, версія 4.6.

Варто зазначити, що в нашому випадку параметр T — безрозмірний, як і енергії ε_j. Так означені величини відрізняються, наприклад, від використаних у праці [468], де розподіл певного стандартного тексту взято з метою встановлення точки відліку температури в кельвінах.

Стан зі значенням $T = 0$ відповідає ситуації, коли всі частоти дорівнюють одиниці, тобто цілий текст складається зі самих лише *гапакс леґомена*. Це може бути дуже короткий текст, обсягом одне або кілька речень, як демонструє приклад наприкінці підрозділу 7.2.

Для розрахунків параметрів розподілу Бозе використано значення чисел заповнення перших 10–20 рівнів, оскільки, як уже зазначалося, степеневий спектр (7.2) при великих значеннях j потрібно модифіковувати, щоб коректно відобразити частотну структуру на середніх і великих частотах (див. рис. 7.2). Детальніше про верхню межу номера рівня j ітиметься в наступних підрозділах.

Отриманий таким способом параметр T дуже точно масштабується як N^β ($\beta < 1$). Ця властивість може бути пов'язана з означенням "термодинамічної границі" в аналізованій задачі. Пригадаймо, що для системи N бозонів у D-вимірному гармонічному потенціалі з частотою ω термодинаміна границя визначається умовою $\omega N^{1/D} = \text{const}$ при $N \to \infty, \omega \to 0$ [311]. Оскільки ω (або $\hbar\omega$, якщо сталу Планка $\hbar$ не вважати рівною одиниці) є природною одиницею енергії осцилятора, то степеневого масштабування величин, пов'язаних за змістом з енергією, можна очікувати і для систем зі степеневим спектром.

Виявляється, що для достатньо довгих текстів відношення $\ln T / \ln N$, де N — довжина тексту (загальна кількість слів), несуттєво змінюється зі зміною N. Цей факт дозволяє використовувати параметр $\tau = \ln T / \ln N$ для порівняльних[1] лінгвістичних досліджень.

7.4. Перші результати

На початковому етапі, щоби перевірити, як працює запропонована модель, було проаналізовано кілька текстів англійською (германська мова), українською (слов'янська мова), а також ґвінейською манінка́ (писемністю нко; мова родини манде, Західна Африка). Таке розмаїття пов'язане з потребою з'ясувати на підставі суттєво різного мовного матеріалу, які риси у поведінці параметрів є універсальними, а які — навпаки, можуть допомогти у класифікації текстів (чи у перспективі — інших складних систем).

На рис. 7.3 зображено поведінку "температури" англійського тексту ("Мобі Дік" Германа Мелвілла) і двох українських ("Перехресні стежки" Івана Франка і "Собор" Олеся Гончара).

У таблиці 7.1 показано числові значення параметра T, розрахованого на підставі зростаючої частки розділів від початку кожного тексту. Дані про статтю з ґвінейської газети " Yélén` " ("Світло") наведено для порівняння.

Зважаючи на великий обсяг кожного з текстів, значення параметра z в усіх випадках виявляється близьким до одиниці. Для більш наочного розділення за цією характеристикою можна ввести інший параметр

[1] Взагалі кажучи, правильним мовознавчим терміном тут буде "контрастивний", а "порівняльний" стосується радше дослідження лінгвістичних явищ з погляду їх зміни в часі, історичних зв'язків, однак ці термінологічні нюанси не мають безпосереднього впливу на досліджувану задачу та описані тут результати.

μ, за аналогією з хімічним потенціалом, за допомогою співвідношення $z = e^{\mu/T}$.

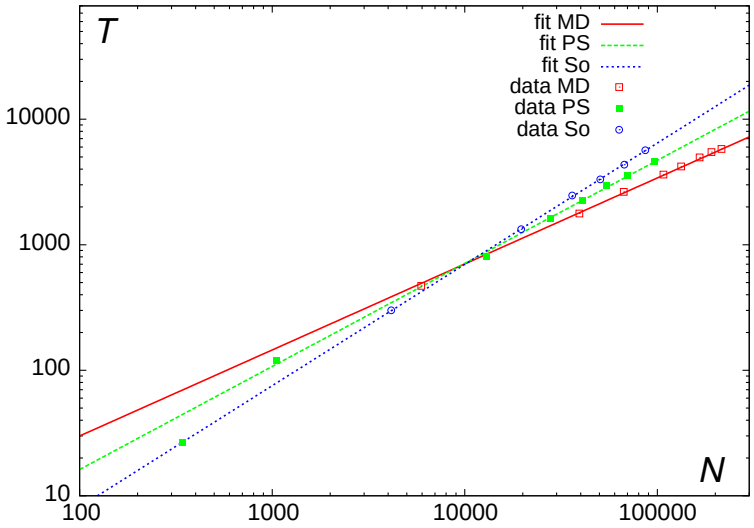


Рис. 7.3. Поведінка "температури" зі зростанням обсягу тексту. MD — "Мобі Дік", PS — "Перехресні стежки", So — "Собор". Прямими зображено результати лінійної підгонки даних, які позначено відповідними символами в легенді.

Розрахунки вказують на повільне спадання значень показника α зі збільшенням обсягу аналізованої системи. Таку поведінку можна інтерпретувати за допомогою аналогії з впливом на систему зовнішнього потенціалу. Справді, у квазікласичному наближенні [310] зменшення значень показника в степеневому енергетичному спектрі ефективно відповідає послабленню "крутості" потенціальної кривої. Таким чином, якщо довжина тексту зростає, то вплив зовнішніх чинників на нього стає слабшим.

В одновимірному випадку степеневому енергетичному спектрові $\varepsilon_p \propto p^\alpha$ відповідає густина станів

$$g(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1}. \tag{7.5}$$

З іншого боку, система невзаємодіючих частинок у зовнішньому степеневому потенціалі $U(x) \propto x^\eta$ у квазікласичному наближенні [310]

Таблиця 7.1. Параметри “енерґетичного спектра” і “температури” текстів.

N	α	T	$\ln T/\ln N$	T/N
Moby-Dick (ENG)				
5942	1.97	470.4	0.708	0.0792
39363	1.60	1773.3	0.707	0.0451
66916	1.56	2639.7	0.709	0.0394
107503	1.48	3622.3	0.707	0.0337
132968	1.48	4207.3	0.707	0.0316
165746	1.48	4968.4	0.708	0.0300
191040	1.47	5476.5	0.708	0.0287
215270	1.45	5791.3	0.706	0.0269
Перехресні стежки (UKR)				
343	1.57	26.6	0.562	0.0774
1052	2.03	119.1	0.687	0.1132
12949	1.68	812.0	0.708	0.0627
28010	1.73	1610.1	0.721	0.0575
40811	1.72	2270.7	0.728	0.0556
54361	1.70	2964.3	0.733	0.0545
70330	1.64	3597.4	0.734	0.0512
96083	1.57	4561.4	0.734	0.0475
ܝܠܝܢ *Yélén`* *(Світло)*, одна стаття (NKO)				
429	1.42	45.2	0.629	0.1053

має густину станів

$$g(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\frac{1}{\eta}-\frac{1}{2}}. \tag{7.6}$$

Зауважимо також, що системі у скриньці з вертикальними стінками відповідає $\eta = \infty$.

Остаточно, зіставляючи (7.5) і (7.6), отримаємо такий зв’язок:

$$\alpha = \frac{2\eta}{\eta + 2}, \tag{7.7}$$

звідки випливає зокрема $\alpha = 3/2$ для $\eta = 6$ і $\alpha = 1$ для $\eta = 2$.

З отриманих параметрів T та α можна зробити попередній висновок про те, що їх значення корелюють зі ступенем аналітичності мови. А саме, менші значення відповідають вищому ступеню аналітичності (менша словозміна), що засвідчує протиставлення англійської та української (обидві належать до індоєвропейських мов). На додаток, мале значення показника α в манінканському тексті дає підстави очікувати високого ступеня аналітичності цієї мови, що відповідає дійсності.

На завершення цього підрозділу на рис. 7.4 зображено результати розрахунку "температури" для низки коротких українських текстів різних жанрів [475]. Близькі значення вказують на слабку залежність цього параметра від жанру чи стилю. Докладніше дослідження можливості жанрової атрибуції вимагає застосування багатовимірного дискримінантного аналізу й виходить за рамки очікуваного простого застосування нашої моделі.

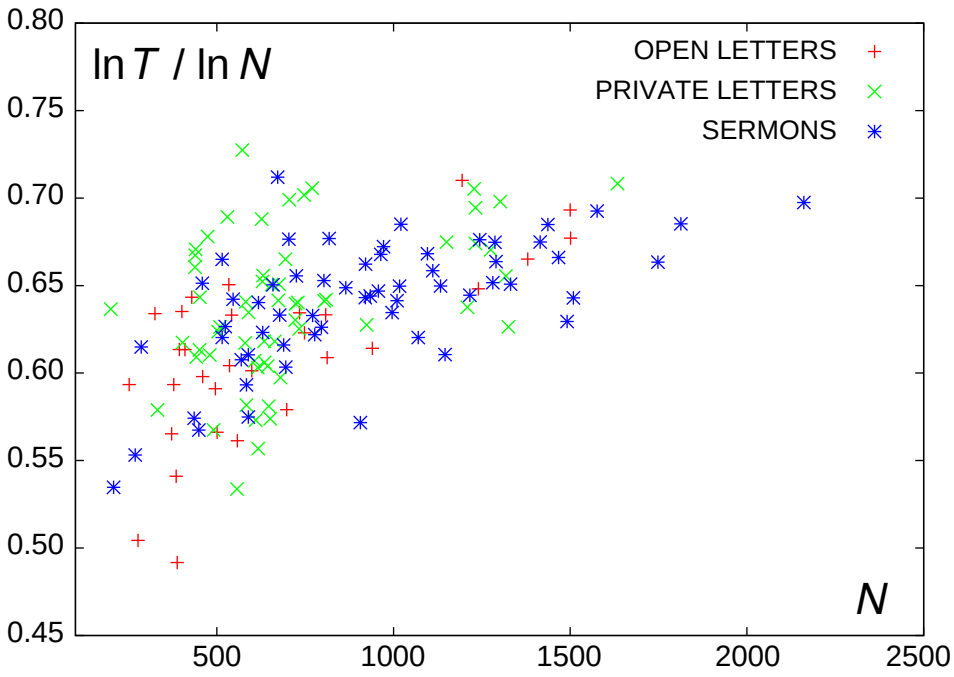


Рис. 7.4. Поведінка параметра $\ln T / \ln N$ для українських текстів різних жанрів: відкриті листи (open letters), приватні листи (private letters) і проповіді (sermons).

7.5. Вплив довжини тексту на значення параметрів

Варто відзначити, що розмір вибірки залишається проблемою, яку часто іґнорують в дослідженнях текстів, хоча в деяких працях можна натрапити на відповідний аналіз [476–478]. Зрозуміло, що надійність розрахованих параметрів буде нижчою для менших вибірок, і саме на підставі цього можна запропонувати певну "наївну" фізичну аналогію, яка пов'язана зі співвідношенням невизначеностей. Як відомо, цей принцип запропонував Гайзенберґ у 1927 році [479], а у вигляді відомої нерівності для невизначеностей координати $\Delta q = q - \langle q \rangle$ та імпульсу $\Delta p = p - \langle p \rangle$

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \tag{7.8}$$

він уперше з'явився у праці Кеннарда [480]. Використовуючи спрощене формулювання, *"що з більшою точністю ми можемо виміряти координату частинки, то з меншою точністю ми знатимемо її̈ імпульс, і навпаки"*, запропонуємо далі за аналогією підхід до задач іншого типу, припускаючи, що довжина тексту N відіграє роль однієї з величин у співвідношенні (7.8).

Для зручності припустимо, що i-тий текст характеризується параметром x_i. Узагальнення на більшу кількість параметрів легко зробити безпосередньо. Нехай також існує певне "ідеальне" значення цього параметра x_0. Сформулюємо таку гіпотезу, навіяну наївною аналогією з принципом невизначеності: *відстань від x_i до ідеального значення параметра x_0 може бути більшою для коротших текстів і навпаки* [95]. Математичний запис матиме вигляд:

$$(x_i - x_0)^2 f(N_i) \leq a^2, \tag{7.9}$$

де N_i — обсяг i-тої вибірки, величина a — певна константа. Загальні

властивості функції $f(n)$ такі:

- $f(n \to \infty) \to \infty$ (більша вибірка повинна перебувати ближче до центру);
- $f(1) = 0$ (тобто текст, що містить лише одне слово, може мати довільне значення параметра);
- $f(n)$ є монотонною функцією свого арґумента.

Наведені властивості наштовхують на думку, що $f(n) \sim \ln n$ або якась подібна. Виявляється, що сам логарифм дає дуже слабку залежність від обсягу вибірки, тому зупинимося на функції комбінаторного типу, $f(n) \sim \ln n! \sim n \ln n$. Отже, нехай

$$f(N_i) = (N_i \ln N_i)^\gamma \,, \tag{7.10}$$

і для спрощення дослідимо далі випадок $\gamma = 1$.

Оцінимо значення a та x_0 так:

$$(x_i - x_0)^2 \le \frac{a^2}{f(N_i)} \quad \Rightarrow \quad \left\langle (x_i - x_0)^2 \right\rangle \le a^2 \left\langle \frac{1}{f(N_i)} \right\rangle, \quad \text{де } x_0 = \langle x_i \rangle,$$

тобто a^2 пов'язана з дисперсією x_i:

$$\sigma_x^2 = \left\langle (x_i - x_0)^2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad a^2 = \sigma_x^2 \left\langle \frac{1}{f(N_i)} \right\rangle^{-1}. \tag{7.11}$$

Операцію усереднення потрібно проводити з певною ваговою функцією w_i. Цілком природно обрати її у вигляді

$$w_i = N_i, \tag{7.12}$$

тобто текст обсягом kN даватиме внесок як k текстів обсягом N. Отже,

$$\Big\langle (\ldots) \Big\rangle = \frac{1}{\sum_i w_i} \sum_i (\ldots) w_i. \tag{7.13}$$

Розглянемо запропонований підхід на прикладі жанрової атрибуції наукових статей з різних галузей. У двопараметричній задачі область,

що відповідає певному жанрові, буде еліпсом

$$\frac{(x-x_0)^2}{2a^2/f(N_0)} + \frac{(y-y_0)^2}{2b^2/f(N_0)} \le 1, \tag{7.14}$$

де N_0 — певна характерна довжина тексту (у наведеному прикладі $N_0 = \bar{N}/2$, причому $\bar{N}$ — середня довжина за вибіркою).

На рис. 7.5 показано результати для наукових статей з гуманітарних і природничих наук. Атрибуцію виконано за параметром $d = m_2/(m_1 - 1)$, де m_1 — середня довжина слова у складах, а m_2 — т. зв. другий центральний момент, $m_2 = \dfrac{1}{N}\sum_i (x_i - m_1)^2$, та часткою чотирискладових слів p_4 [481, 482].

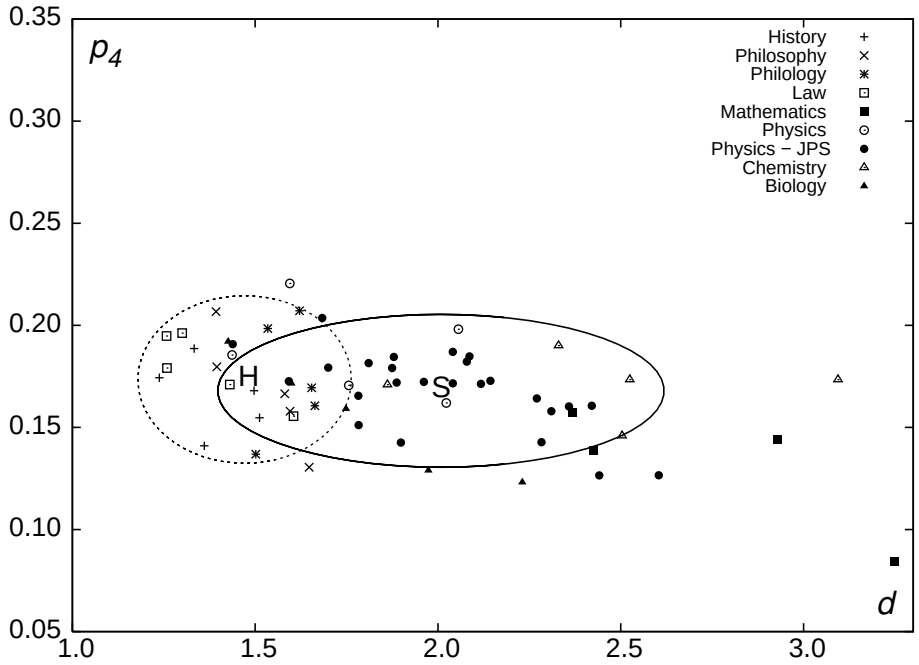


Рис. 7.5. Розміщення на площині $(d; p_4)$ наукових статей з різних дисциплін, включаючи фізичні тексти з "Журналу фізичних досліджень" (JPS), $f(N_i) = (N_i \ln N_i)$. Центри еліпсів позначено H (humanities, гуманітарні) та S (sciences, природничі), їх координати відповідно H (1.471; 0.1734), S (2.008; 0.1679).

Як показує рис. 7.5, запропонована гіпотеза добре підтверджується. Цікаво відзначити, зокрема, що фізичні тексти, які потрапили в "гуманітарний" еліпс, є насправді персоналіями, а не власне фізичними статтями.

7.6. Новела Антуана де Сент-Екзюпері

Наступним матеріалом досліджень було обрано переклади новели Антуана де Сент-Екзюпері “Маленький принц” різними мовами. Кілька прикладів ранґово-частотних залежностей для цього тексту показано на рис. 7.6.

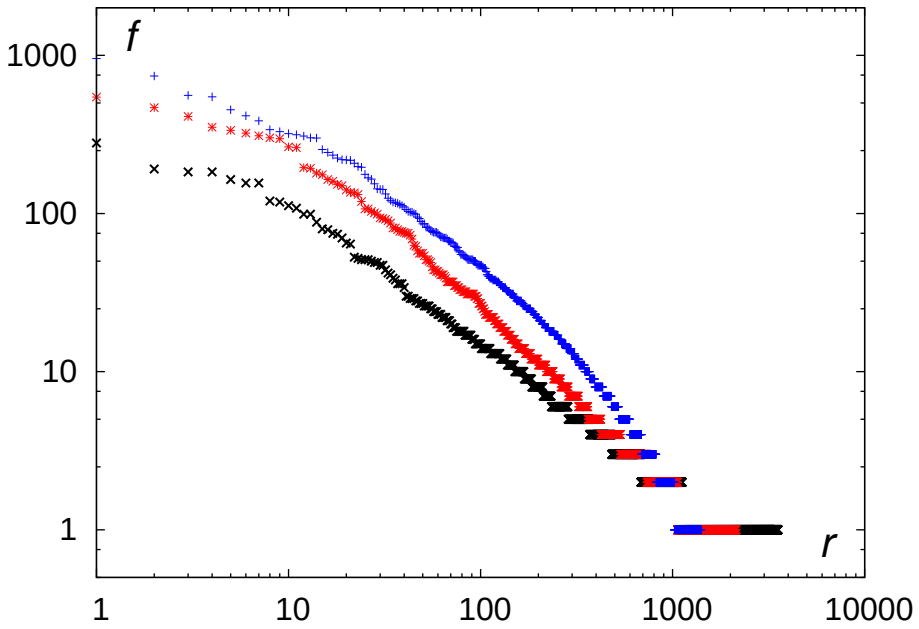


Рис. 7.6. Приклад ранґово-частотних розподілів перекладів “Маленького принца” китайською (+), англійською (∗) та українською (×) мовами.

“Маленький принц” (французька оригінальна назва *Le Petit Prince*) — відома новела-казка, яку Антуан де Сент-Екзюпері написав 1943 року. Від часу першої публікації цей твір переклали двома сотнями мов, наприклад, на сайті `http://www.patoche.org/lepetitprince/gallima.htm` подано перелік близько 240 різних мов, включно з деякими діалектами та штучними мовами (дані наведено станом на 2013 рік). Насправді, можна знайти дуже мало текстів, для яких існує таке розмаїття перекладів, причому значна частка з них фіґурує в електронному вигляді в мережі Інтернет. Зрозуміло, що значно більшу кількість

перекладів маємо для Біблії (чи точніше, Нового Заповіту) або для Загальної декларації прав людини (`http://unicode.org/udhr/`). І хоча ці два тексти досить специфічні за стилем, їх також можна розглядати як потенційний матеріал для подальших досліджень, як зокрема показано в підрозділі 7.9.

Цікаво відзначити, що новела “Маленький принц” завдяки великій кількості діалогів наближається за частотною поведінкою до розмовного стилю. Зокрема, наші підрахунки показують, що займенник ‘я’ виявляється найбільш частотним у французькому оригіналі та в українському перекладі, другим за частотою (після ‘the’) в англійському, також другим — у баманському [483], що є рисою, характерною саме для розмовного тексту, порівн. [484].

З метою аналізу новели ми обрали сорок мов, намагаючись, з одного боку, включити по декілька представників з однієї мовної родини, а з іншого — охопити різні родини. Також вибір визначався доступністю електронних текстів перекладу. Нижче подано аналізовані мови в алфавітному порядку: азербайджанська, англійська, арабська, бамана, баскська (еускара), білоруська, болгарська, в’єтнамська, вірменська, гінді, грецька, грузинська, есперанто, естонська, іврит, іспанська, італійська, каталонська, китайська, корейська, латвійська, литовська, ложбан, монгольська, морісьєн (маврикійська креольська), німецька, польська, португальська, російська, румунська, сербська, тайська, турецька, угорська, українська, фарсі, французька, хорватська, чеська, японська.

Джерелами електронних текстів стали такі сайти:

- `http://www.odaha.com/antoine-de-saint-exupery/maly-princ`
- `http://www.petit-prince.at/links.htm`
- `http://ukrlib.com.ua/books-zl/`

- http://www.lib.ru/EKZUPERY/
- http://olddreamz.com/bookshelf/prince/littleprince.html
- http://www.xiaowangzi.org.

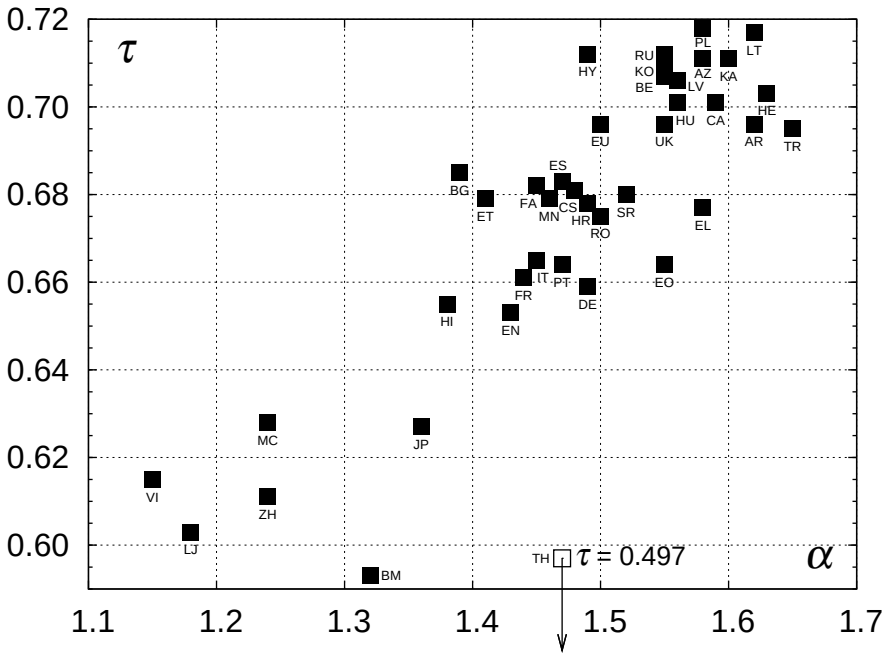


Рис. 7.7. Положення різних мов на площині $(\alpha;\tau)$. Мови позначено кодами ISO (якщо двобуквений код не визначено, то використано найближче за звучанням позначення): AR — арабська, AZ — азербайджанська, BM — бамана, BE — білоруська, BG — болгарська, CA — каталонська, CS — чеська, DE — німецька, EN — англійська, ES — іспанська, EU — баскська (еускара), FA — фарсі, FR — французька, EL — грецька, EO — есперанто, ET — естонська, HE — іврит, HI — гінді, HR — хорватська, HU — угорська, HY — вірменська, IT — італійська, JP — японська, KA — грузинська, KO — корейська, LJ — ложбан, LV — латвійська, LT — литовська, MC — маврикійська креольська (морісьєн), MN — монгольська, PL — польська, PT — португальська, RO — румунська, RU — російська, SR — сербська, TH — тайська, TR — турецька, UK — українська, VI — в'єтнамська, ZH — китайська.

Результати обчислень підсумовано на рис. 7.7 і в табл. 7.2. Поки що ми не будемо враховувати в аналізі аналога активності z, оскільки значення цього параметра близькі до одиниці завдяки достатньо великим обсягам текстів N, а, отже, й великою буде кількість гапаксів, через які визначається z, порівн. (7.3).

Як уже згадувалося в попередньому підрозділі, попередні дослідження [77] вказували на те, що значення параметрів температури і показника степеня α у спектрі корелюють зі ступенем аналітичності мови. Це спостереження вдалося підтвердити і на досліджуваному матеріалі.

З рис. 7.7 можна зауважити групування мов у кількох ділянках площини $(\alpha; \ln T / \ln N)$ (дані про тайський переклад до уваги не беремо, див. докладніше примітку до табл. 7.2). Отже, вдається виділити такі групи:

- бамана, в'єтнамська, китайська, ложбан, морісьєн і японська;
- англійська, гінді, італійська, німецька, португальська та французька;
- іспанська, монгольська, румунська, сербська, фарсі, хорватська, чеська;
- білоруська, польська, російська, українська, латвійська, литовська, каталонська, арабська, азербайджанська, грузинська, іврит, угорська, корейська та турецька (можна також зауважити певні підгрупи в межах цієї більшої групи).

Дещо окремо стоять такі мови: баскська, естонська, вірменська, грецька, есперанто і болгарська (у цій слов'янській мові словозміна суттєво збіднена порівняно з іншими, що й, очевидно, стало причиною її виокремлення з очікуваних груп). Самі слов'янські мови розділяються на дві групи. Одна з них включає білоруську, польську, російську та українську мови, інша складається з хорватської, сербської і – певною мірою неочікувано – чеської. Цікаво, що каталонська мова потрапила в область, яка відрізняється від тої, що випливає з її генеалогічних зв'язків.

Таблиця 7.2. Параметри енергетичного спектра і температури текстів

Мова	Оригінальна назва	N	N_{hapax}	α	T	$\tau = \ln T / \ln N$
Польська	Mały książe	11272	2025	1.58	814	0.718
Литовська	Mažasis princas	10899	2105	1.62	784	0.717
Російська	Маленький принц	12547	1915	1.55	831	0.712
Вірменська	Փոքրիկ իշխանը	13794	1727	1.49	885	0.712
Азербайджанська	Balaca Şahzadə	12557	2667	1.58	820	0.711
Грузинська	პატარა უფლისწული	10822	2519	1.60	741	0.711
Корейська	어린 왕자의	11282	3048	1.55	748	0.709
Білоруська	Маленькі прынц	12391	1989	1.55	785	0.707
Латвійська	Mazais princis	11527	1957	1.56	740	0.706
Іврит	הנסיך הקטן	12105	3454	1.63	742	0.703
Каталонська	El Petit Príncep	13954	1811	1.59	808	0.701
Угорська	Kis herceg	12041	2476	1.56	725	0.701
Арабська	الأمير الصغير	1001	3367	1.62	607	0.696
Баскська	Printze Txikia	11760	1957	1.50	683	0.696
Українська	Маленький принц	11553	2205	1.55	673	0.696
Турецька	Küçük prens	11697	3173	1.65	673	0.695
Болгарська	Малкия принц	12066	1609	1.39	625	0.685
Іспанська	El Principito	13735	1479	1.47	669	0.683
Фарсі	شازده کوچول	14214	2127	1.45	679	0.682
Чеська	Malý princ	11398	2158	1.48	581	0.681
Сербська	Mali Princ	12217	1945	1.52	599	0.680
Естонська	Väike prints	11901	2056	1.41	587	0.679
Хорватська	Mali Princ	12095	1958	1.49	587	0.678
Грецька	Ο μικρός πρίγκιπας	14447	1742	1.58	653	0.677
Румунська	Micul prinţ	13188	1708	1.50	603	0.675
Монгольська	Бяцхан хун тайж	11819	2029	1.46	585	0.669
Італійська	Il Piccolo Principe	12429	1734	1.45	528	0.665
Португальська	O Pequeno Príncipe	12646	1591	1.47	531	0.664
Есперанто	La Eta Princo	11808	1555	1.55	505	0.664
Французька	Le Petit Prince	13926	1684	1.44	546	0.661
Німецька	Der Kleine Prinz	14077	1554	1.49	544	0.659
Гінді	नन्हा राजकुमार	14014	1129	1.38	518	0.655
Англійська	The Little Prince	16905	1030	1.43	579	0.653
Морісьєн	Zistoir Ti-Prins	12553	747	1.24	375	0.628
Японська*	あのときの王子くん	19923	938	1.36	496	0.627
В'єтнамська	Hoàng Tử Bé	17694	535	1.15	410	0.615
Китайська**	小王子	22806	420	1.24	458	0.611
Ложбан	le cmalu noltru	17482	581	1.18	360	0.603
Бамана	Masadennin	16269	852	1.32	314	0.593
Тайська***	เจ้าชายน้อย	2656	2241	1.47	50	0.497

* Для словоподілу японського тексту використано програмні засоби UniDic, MeCab та ChaSen.

** Дані щодо китайського перекладу відповідають частотам ієрогліфів, а не слів.

*** У тайських текстах пробілами розділяють речення або їх частини. Тому відповідні дані займають окреме положення й наведені для подальших узагальнень.

Отримані дані можна вважати ще одним підтвердженням гіпотези про зв'язок між значеннями параметрів α й T та ступенем аналітичності мови.

Цікаво зауважити, що дві штучні мови, а саме есперанто і ложбан, займають дуже різні положення на площині $(\alpha;\ \tau)$. Це пов'язано з підходами до створення цих мов. Якщо ложбан ґрунтується на предикативній логіці і є високо аналітичною, навіть близькою до "машинної", мовою, то есперанто — мова переважно аґлютинативна, яка має спільні риси з природними.

Потрібно підкреслити, що близькі положення мов на рис. 7.7 в жодному разі не означають близької спорідненості. Натомість у такій ситуації можна стверджувати про подібність частотної структури текстів на рівні слів, що й пов'язано з аналітичністю чи синтетичністю мови.

7.7. Траєкторії текстів

Ще одним текстом, для якого вдалося знайти низку перекладів різними мовами, була новела-казка Льюїса Керрола "Аліса в Країні чудес" (*Alice's Adventures in Wonderland*).

Для розрахунків параметрів розподілу ми обмежилися рівнями $j_{\max} = 10$ у випадку "Маленького принца" та $j_{\max} = 15$ для "Аліси...". Такі верхні межі можна обґрунтувати на підставі вивчення частотних розподілів слів. Відповідні значення виявляються близьким до так званої k-точки [485] для аналізованих тут текстів. Саму k-точку визначають подібно до індекса Гірша, але в іншому "просторі" змінних, а саме: k-точка є розв'язком рівняння $N_j = j$ (з певним доозначенням, якщо перетин N_j і j не відповідає цілому числу j). Вважають, що ця точка розділяє різні типи лексики: високочастотні функціональні

(допоміжні) слова та низькочастотні повнозначні [469]. Таке розділення, однак, досить розмите [486]. Таблиці 7.3, 7.4 дають змогу оцінити, наскільки обрані значення $j_{\max}$ близькі до k-точок.

Таблиця 7.3. Спостережувані величини N_j для різних перекладів новели "Маленький принц". Найближчі до k-точок значення рівнів j виділено напівжирним курсивом та затінено сірим кольором.

j	кит.	ложбан	англ.	франц.	пол.	рос.	укр.
1	420	582	1032	1578	2025	1916	2207
2	213	221	359	399	574	571	513
3	140	124	206	176	261	271	216
4	92	84	115	107	122	146	115
5	78	69	65	71	95	96	81
6	43	45	39	44	52	39	54
7	51	53	37	40	37	38	27
8	41	25	27	28	33	43	28
9	20	21	22	18	24	24	18
10	20	23	19	***22***	***15***	18	19
11	23	27	20	***10***	***8***	***11***	***12***
12	17	17	***18***	12	15	11	***11***
13	17	16	***12***	14	10	7	10
14	18	***19***	13	3	15	8	14
15	***15***	***6***	7	12	3	6	5
16	11	10	7	7	9	4	4
17	10	7	6	4	6	7	6
18	16	5	6	9	4	6	9
19	9	9	6	5	6	4	3
20	8	6	4	4	2	6	4

Для вивчення залежності параметрів α й τ від довжини тексту N було отримано так звані траєкторії текстів для кожного перекладу: значення двох параметрів фіксує точку на площині, а їх зміна зі зростанням N визначає певну лінію, яку називатимемо траєкторією.

Виявилося, що стабільності у значеннях параметрів не вдається досягти відразу, поки довжина тексту досить мала. Назагал, як показує практика, для досліджень бажано мати тексти, у яких кількість слів перевищує кілька тисяч, і переклади "Маленького принца" перебувають досить близько до такої нижньої межі [78].

Таблиця 7.4. Спостережувані величини N_j для різних перекладів новели "Аліса в Країні чудес". Найближчі до k-точок значення рівнів j виділено напівжирним курсивом та затінено сірим кольором.

j	кит.	ложбан	англ.	франц.	пол.	рос.	укр.
1	460	939	1456	2070	3141	2709	3328
2	241	294	558	615	1000	1051	1142
3	146	172	312	305	468	474	524
4	86	118	187	183	225	292	243
5	97	91	117	110	127	171	140
6	72	60	71	84	98	110	77
7	57	57	55	57	65	59	67
8	32	37	59	52	59	52	40
9	30	29	29	32	40	27	32
10	37	36	46	34	27	30	34
11	32	31	27	20	20	26	29
12	36	25	33	23	17	17	***18***
13	22	23	17	22	18	18	***6***
14	25	22	18	20	***14***	***16***	11
15	***19***	19	***16***	17	11	***6***	12
16	***11***	***16***	***9***	***20***	11	7	6
17	18	7	12	***8***	11	9	5
18	16	15	9	3	6	11	8
19	15	12	8	8	10	4	7
20	12	12	8	7	5	3	9

На рис. 7.8 зображено траєкторії текстів для кількох перекладів російською мовою, які вдалося знайти в електронному вигляді: два "Маленького принца" та три "Аліси в країні чудес". Спостерігаємо якісну подібність у формах цих траєкторії, хоча існують відмінності у числових значеннях відповідних параметрів для різних текстів. Це підтверджує думку про вплив жанру на величини α й τ навіть у межах одної мови.

Водночас поведінка траєкторій вказує, що вплив перекладача (як автора) на значення параметрів є суттєво меншим, ніж вплив жанру. Ці спостереження будуть корисними в подальших дослідженнях можливостей атрибуції за α й τ чи спорідненими величинами.

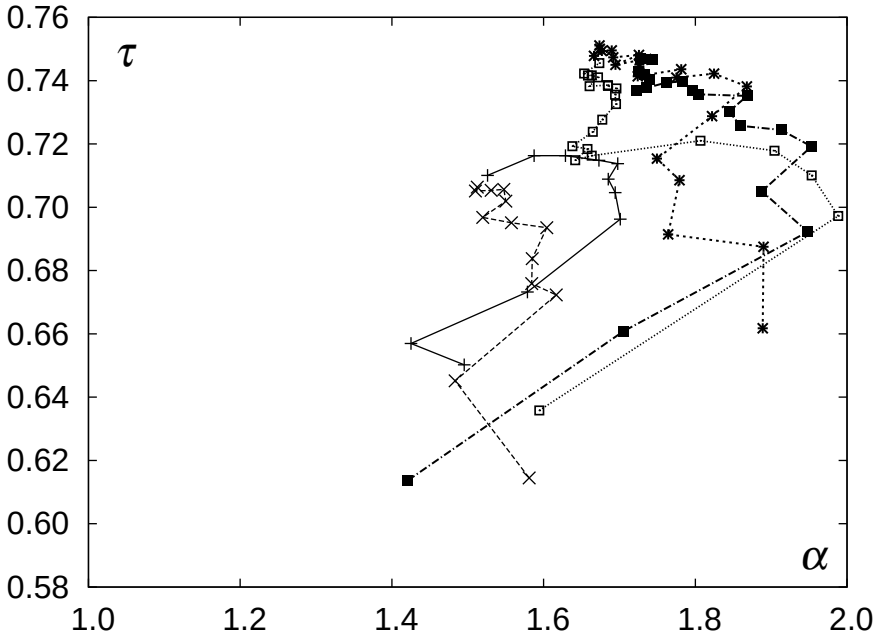


Рис. 7.8. Траєкторії російських перекладів “Маленького принца” (знаки $+$, $\times$) та “Аліси в країні чудес” (знаки $\square$, $\blacksquare$ та $*$). Перша точка відповідає першій 1000 слів, а кожна наступна розрахована з кроком також 1000.

7.8. Моделі з дробовою вимірністю простору і дробовою статистикою

Як показано в попередніх розділах, для низки мов, що характеризуються високим рівнем аналітичності (наприклад, в’єтнамська, гавайська, китайська, морісьєн, штучна мова ложбан) показник степеня у спектрі $\alpha = 1.1 \div 1.3$, тобто близький до одиниці. Це наштовхує на думку про те, що можна використати як модель систему гармонічних осциляторів зі спектром $\varepsilon_j = j - 1$, використавши в ролі другого параметра вимірність простору. Тобто замість дослідженого в попередніх підрозділах виразу (7.4) будемо аналізувати функцію

$$N_j = \frac{\Gamma(j-1+D)}{\Gamma(j)\Gamma(j+D)} \cdot \frac{1}{z^{-1}e^{(j-1)/T} - 1}, \tag{7.15}$$

де враховано виродження j-ого рівня (3.15).

Результати розрахунків наведено на рис. 7.9–7.11. Якість підгонки можна перевірити за допомогою так званого коефіцієнта детермінації R^2, який визначається так [487]:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_j \left(N_j^{\exp} - N_j\right)^2}{\sum_j \left(N_j^{\exp} - \langle N^{\exp} \rangle\right)^2}. \tag{7.16}$$

У цьому виразі $\langle N^{\exp} \rangle$ — це середнє значення спостережуваних величин $N_j^{\exp}$. У нашому випадку підсумовування відбувається від $j = 2$, оскільки $j = 1$ зафіксовано через z.

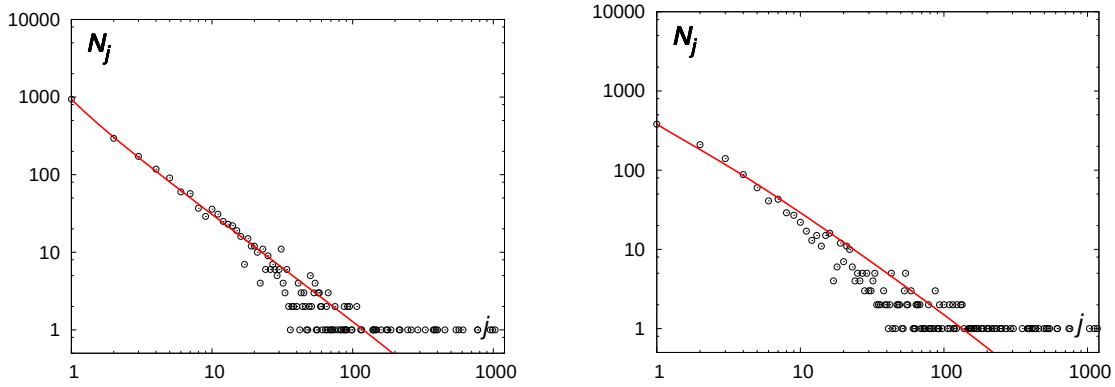


Рис. 7.9. Результати для перекладів “Аліси в Країні чудес” мовою ложбан (ліворуч) і гавайською (праворуч). Кружечками показано спостережувані значення, а лінія відповідає функції (7.15).

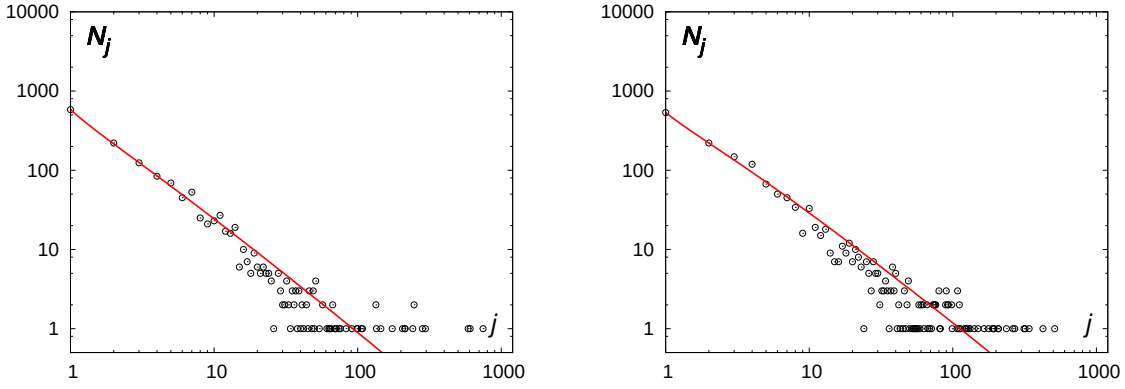


Рис. 7.10. Результати для перекладів “Маленького принца” мовою ложбан (ліворуч) і в’єтнамською (праворуч). Кружечками показано спостережувані значення, а лінія відповідає функції (7.15).

Обчислені значення R^2 виявляються дуже близькими до одиниці (зазвичай, $R^2 > 0.9$ вважають за прийнятну підгонку [487]). Наприклад, переклад “Аліси...” китайською та мовою ложбан дає $R^2 > 0.98$ і $R^2 > 0.99$, відповідно. Дещо нижчі значення спостерігаємо для англійського ($R^2 > 0.97$) і гавайського ($R^2 > 0.96$) перекладів цього тексту. В українського перекладу $R^2 > 0.94$, і таке порівняно низьке значення можна легко зауважити за поведінкою кривої на рис. 7.11 праворуч. Причина полягає в тому, що для мов із більш синтетичною граматикою показник α у спектрі $\varepsilon_j = (j-1)^\alpha$ значно відхиляється від одиниці [77, 78, 96], а отже модель гармонічних осциляторів дає гірший опис, порівн. результати для англійського та українського текстів на рис. 7.11. Модель (7.15) погано відтворює проміжні значення $j \gtrsim 5$.

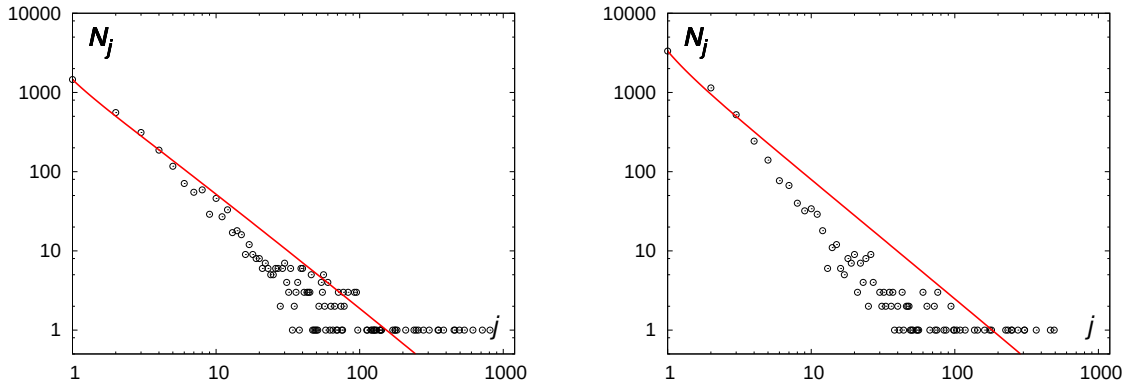


Рис. 7.11. Результати для перекладів “Аліси в Країні чудес” англійською (ліворуч) та українською (праворуч) мовами. Кружечками показано спостережувані значення, а лінія відповідає функції (7.15).

Розраховані просторові вимірності підсумовано в табл. 7.5.

Таким чином, ще одна запропонована модель опису частотної структури текстів, що ґрунтується на розподілі Бозе для системи гармонічних осциляторів у просторі з дробовою вимірністю $D = 0.5 \div 0.7$ добре підходить для мов із високим ступенем аналітичності. Варто також зазначити, що розраховані значення D слабко змінюються за-

Таблиця 7.5. Значення дробової вимірності простору для різних текстів. Результати отримано в інтервалі $D \pm \Delta D$.

Мова	Текст	D	ΔD
англійська	“Аліса в Країні чудес”	0.557	0.143
	“Маленький принц”	0.530	0.165
в’єтнамська	“Маленький принц”	0.595	0.088
гавайська	“Аліса в Країні чудес”	0.699	0.127
китайська	“Аліса в Країні чудес”	0.699	0.081
	“Маленький принц”	0.677	0.102
ложбан	“Аліса в Країні чудес”	0.649	0.028
	“Маленький принц”	0.563	0.080
морісьєн	“Маленький принц”	0.513	0.097
українська	“Аліса в Країні чудес”	0.501	0.303
	“Маленький принц”	0.416	0.195

лежно від розміру тексту, що робить цей параметр добрим показником для досліджень [98].

Для опису частотних даних можна також застосувати вирази з подібною до бозонної поведінкою при малих j, що ґрунтуються на дробових статистиках, наприклад, статистиці Поліхронакоса [126, 202]

$$N_j = \frac{g_j}{z^{-1}e^{\varepsilon_j/T} - \gamma}, \tag{7.17}$$

де активність z визначається умовою:

$$z^{-1} = \gamma + \frac{1}{N_1}. \tag{7.18}$$

Модифікуючи далі цю функцію розподілу за допомогою q-експоненти Цалліса (5.45), можна досягнути степеневої залежності при великих j, яка часто виникає в дослідженні складних систем.

Відповідний аналіз було проведено для українського перекладу “Аліси в Країні чудес” із функцією

$$N_j = \frac{1}{z^{-1}e_q^{(j-1)^\alpha/T} - 1}. \tag{7.19}$$

На рис. 7.12 показано результати розрахунків. Обчислення зроблено при фіксованому $q = 1.5$ через підгонку за двома параметрами, T та α. Можна зауважити, що для великих j спостерігаємо певне поліпшення опису частотних даних порівняно з (одновимірною) функцією (7.1) зі степеневим спектром $\varepsilon_j = (j-1)^\alpha$.

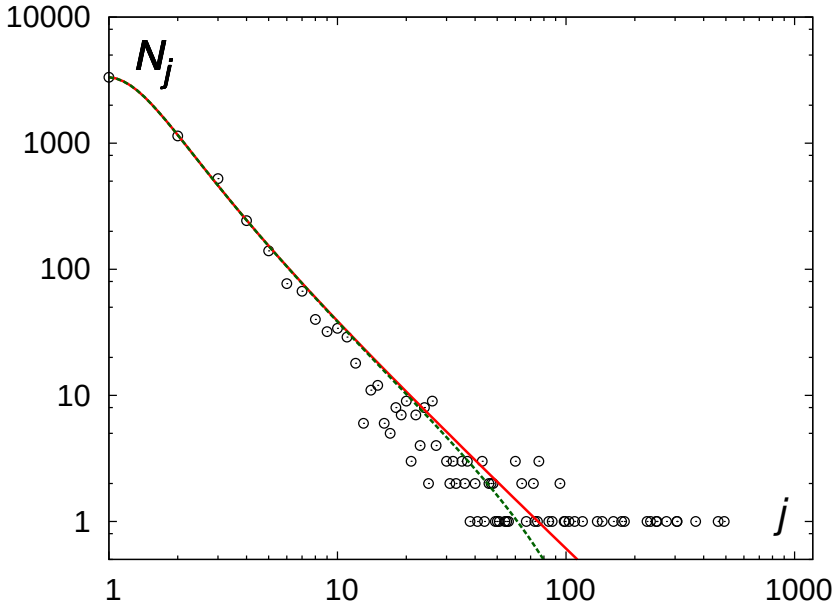


Рис. 7.12. Результати підгонки для українського перекладу “Аліси у Країні чудес”. Штрихова лінія — функція (7.1) зі степеневим спектром $\varepsilon_j = (j-1)^\alpha$, суцільна лінія — функція (7.19) при $q = 1.5$. В обох випадках параметри дорівнюють $T = 1787 \pm 22,\ \alpha = 1.74 \pm 0.02$.

Залежно від застосованих наближень та від значень параметрів, моделі, задані виразами (7.15) та (7.19) виявляються узагальненнями інших відомих наближень для N_j [469, 488], а саме

$$N_j = Aj^b \qquad \text{і} \qquad N_j = Aj^b e^{-cj},$$

параметри яких (A, b, c) пов’язані з z, D та T.

7.9. Можливості дослідження еволюції мов

Питання еволюції мов є дуже різнобічним, його вивчають різними методами: лінгвістичними, історичними, культурними, соціологічними тощо [489–492]. Також застосовують підходи природничих наук, включаючи еволюційну біологію [493] і фізику [467, 494, 495], а також міждисциплінарні дослідження [496–498].

Як вже було зазначено у вступі, порівняно з більшістю подібних досліджень, див. зокрема [468], розглянутий тут підхід ґрунтується на аналізі низькочастотної лексики, крім того, до уваги беруться лише частоти слів, а не самі слова чи їх основи, порівн. [499].

У цьому підрозділі зроблено простий аналіз, мета якого – показати, як певні параметри тексту змінюються з часом. Назагал знайти відповідний матеріал непросто: потрібен той самий текст, написаний тією самою мовою з великим часовим інтервалом, бажано декілька століть. Найвідповіднішими виявляються релігійні тексти, зокрема тут ми досліджуватимемо Євангеліє від Івана. Зважаючи на специфічний жанр, варто очікувати підтвердження загальних тенденцій у поведінці параметрів, тоді як їх значення можуть відрізнятися від розрахованих на художніх текстах, проаналізованих у попередніх підрозділах.

Для розрахунків взято лише рівні з $j = 2 \div 10$. Верхню межу 10 вибрано для простоти, однак її воно також виявляється близьким до k-точки (див. попередній підрозділ) для усіх аналізованих тут текстів.

Взагалі кажучи, можна ввести різні “сталі Больцмана” (або коефіцієнти пропорційності у спектрі елементарних збуджень) для різних мов або мовних родин. Однак, вплив від цього стає нехтовно малим за умови великих обсягів тексту: заміна T на kT приводить до параметра

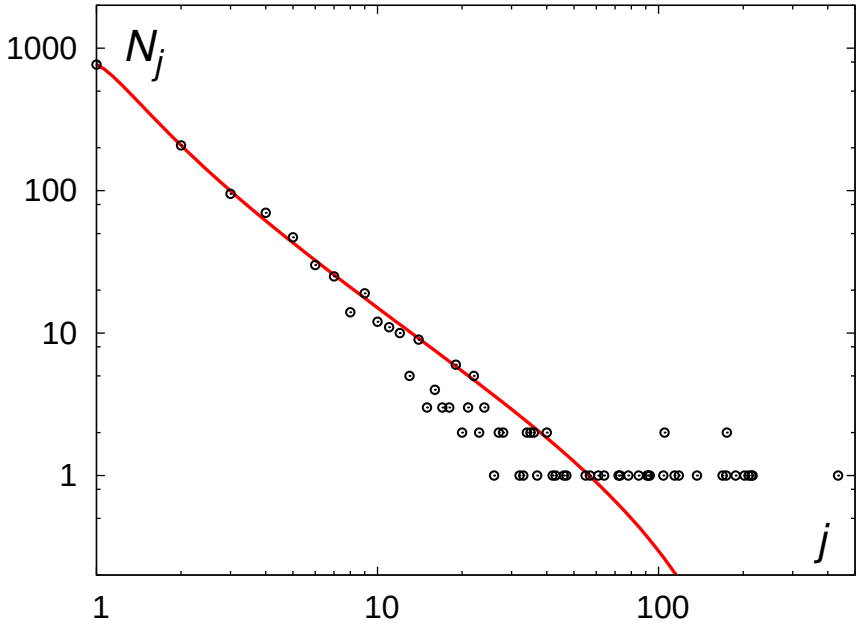


Рис. 7.13. Розрахунки за рівнянням (7.4), що відповідають частотним даним англосаксонського перекладу Євангелія від Івана

α у вигляді

$$\alpha = \ln kT / \ln N = \ln T / \ln N + \ln k / \ln N,$$

і останній доданок прямує до нуля, коли N — велике.

Розрахунки було зроблено для перекладів Євангелія від Івана тридцятьма мовами з різних родин. Електронні версії переважно взято з `http://unbound.biola.edu` та `http://gospelgo.com/bibles.htm`. Враховано лише перші дев'ять розділів (із 21), оскільки саме стільки доступно в електронному вигляді з англосаксонського перекладу `http://wordhord.org/nasb/john.html`. Результати обчислень показано на рис. 7.14 і в таблиці 7.6. Можна зауважити, що, як і в роботі [78], на площині $(\alpha; \tau)$ мови займають переважно смугу між лівою нижньою (малі α — малі τ) і правою верхньою областями (великі α — великі τ).

На рис. 7.14 кожну мову зображено точкою на площині α–τ, відповідні значення параметрів розраховано за перекладами Євангелія від

Івана (розділи 1–9). Стрілками показано зв'язки між мовами, спорідненими історично, однак їх не можна розглядати як прямі еволюційні зв'язки.

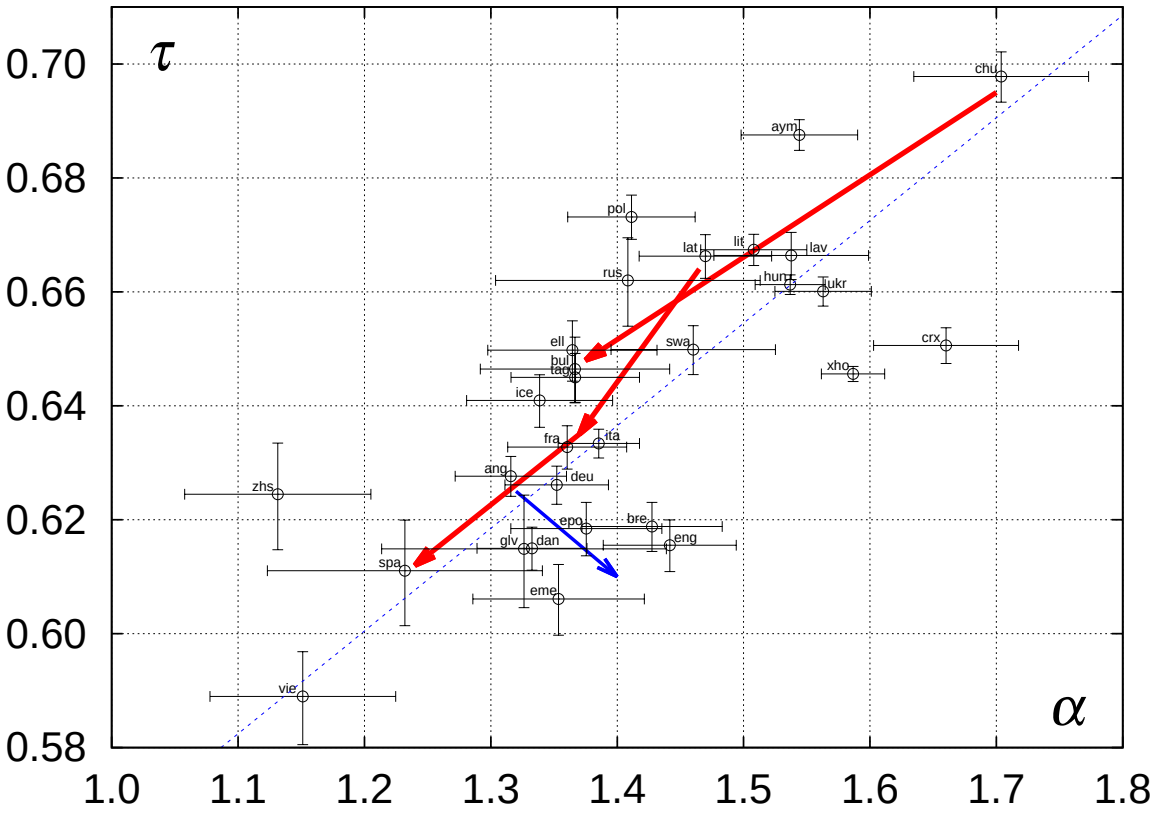


Рис. 7.14. Мови на площині $(\alpha;\tau)$. Стрілки вказують напрям еволюції мов. Пряма пунктирна лінія відповідає лінійному законові $\tau = 0.180\,\alpha + 0.384$. Коди мов розшифровано в таблиці 7.6

Розмаїття проаналізованих мов пов'язане з намірами залучити різні щодо значень α і τ типи граматики: ізолюючі, флективні, полісентетичні або інкорпоруючі мови. Включення кількох груп споріднених мов забезпечує дані для вивчення їх еволюції.

Як показують попередні спостереження [77, 78], менші значення τ й α відповідають вищому ступеню аналітичності (меншій словозміні), що добре демонструє розміщення слов'янських (з багатою словозміною) та германських (більш аналітичних) мов. Звідси можна припу-

стити, що еволюція відбувається від області "великі α — великі τ" до області "малі α — малі τ". Ця модель є дуже спрощеною і потребує додаткових матеріалів для уточнення в майбутньому.

Майже пряма лінія з'єднує староцерковнослов'янську мову з болгарською, проходячи між російською та українською — це відповідає досить складній граматиці давньої мови порівняно зі значно спрощеною в болгарській (напр., відсутність відмінювання іменників). Подібним чином, але під більшим кутом, можна провести лінію між латинською, французькою, італійською та іспанською мовами. З іншого боку, лінія між англосаксонською (староанглійською) та областю ранньої сучасної та сучасної англійської мов має протилежний нахил. Це можна розглядати як вказівку на складні історичні зв'язки між цими стадіями англійської, наприклад, зсув до більших значень α може бути пов'язаний із норманським (французьким) впливом на сучасну мову порівняно з кельтським в англосаксонській. Цікаво зазначити, що зменшення τ як міри синтетичності мови корелює з кількісними оцінками Дж. Г. Ґрінберга (1960) [500].

У таблиці 7.7 подано результати розрахунків, що ґрунтуються на повному тексті Євангелія від Івана. Можна зауважити, що "температура" T досить точно масштабується за законом:

$$T = tN^{\beta}, \tag{7.20}$$

де N — кількість слів від початку до певної точки тексту. Подібний вираз відомий для *hapax legomena*:

$$N_1 = aN^{b}. \tag{7.21}$$

Із природної вимоги про екстенсивність вільної енерґії Ґіббса

Таблиця 7.6. Параметри перекладів Євангелія від Івана різними мовами (перші дев'ять розділів).

Код	Мова	N	N_1	α	T	τ
ang	Англосаксонська (староанглійська)	8200	768	1.32 ± 0.04	286 ± 9	0.628
aym	Аймара	5841	1710	1.54 ± 0.05	389 ± 9	0.688
bre	Бретонська	9341	616	1.43 ± 0.06	336 ± 14	0.671
bul	Болгарська	7577	841	1.37 ± 0.07	322 ± 17	0.646
chu	Староцерковнослов'янська	6774	910	1.70 ± 0.07	471 ± 18	0.698
crx	Керріер	9510	1170	1.66 ± 0.06	387 ± 11	0.651
dan	Данська	8498	487	1.33 ± 0.04	261 ± 9	0.615
deu	Німецька	8724	621	1.35 ± 0.04	293 ± 9	0.626
ell	Грецька	8314	817	1.36 ± 0.07	352 ± 17	0.650
eme	Рання новоанглійська	9007	371	1.35 ± 0.07	249 ± 14	0.606
eng	Англійська	8889	390	1.44 ± 0.05	270 ± 11	0.616
epo	Есперанто	8319	611	1.38 ± 0.06	266 ± 11	0.618
fra	Французька	8694	668	1.36 ± 0.05	311 ± 11	0.633
hun	Угорська	7631	1184	1.54 ± 0.03	379 ± 6	0.661
glv	Ґельська менська	9513	495	1.33 ± 0.11	276 ± 25	0.620
ice	Ісландська	7929	795	1.34 ± 0.06	322 ± 13	0.630
ita	Італійська	8531	712	1.39 ± 0.03	331 ± 8	0.646
lat	Латинська	6816	842	1.47 ± 0.05	358 ± 12	0.666
lav	Латвійська	6975	925	1.54 ± 0.06	387 ± 14	0.666
lit	Литовська	6366	1117	1.51 ± 0.04	367 ± 9	0.667
mao	Маорійська	12007	215	1.05 ± 0.07	132 ± 9	0.520
pol	Польська	7129	904	1.41 ± 0.05	384 ± 13	0.673
rus	Російська	6901	954	1.41 ± 0.10	355 ± 24	0.662
spa	Іспанська	8166	687	1.23 ± 0.11	252 ± 21	0.626
swa	Суагілі	6554	1081	1.46 ± 0.07	312 ± 12	0.638
tag	Таґалоґ	9500	592	1.37 ± 0.05	289 ± 11	0.645
ukr	Українська	7445	903	1.56 ± 0.04	422 ± 10	0.660
vie	В'єтнамська	10162	269	1.15 ± 0.07	191 ± 14	0.589
xho	Кóса	5739	1651	1.59 ± 0.03	386 ± 5	0.646
zhs	Китайська*	12072	231	1.13 ± 0.07	222 ± 18	0.624

* Через відсутність поділу на слова у китайському письмі було проаналізовано частоту окремих ієрогліфів, а не слів.

$G = \mu N \sim N$ отримаємо для великих N

$$\mu = T \ln z = T \ln \frac{N_1}{N_1 + 1} \simeq -\frac{T}{N_1}. \tag{7.22}$$

Звідси отримаємо умову $\beta = b$. Як показує таблиця 7.7, це співвідношення виконується досить добре.

Таблиця 7.7. Параметр $\tau = \ln T / \ln N$ і показники масштабування "температури" (β) і кількості гапаксів (b).

Код	Мова	τ	β	b
eng	Англійська	0.616	0.406 ± 0.021	0.436 ± 0.015
epo	Есперанто	0.618	0.613 ± 0.030	0.566 ± 0.015
fra	Французька	0.633	0.487 ± 0.015	0.607 ± 0.013
ita	Італійська	0.646	0.550 ± 0.009	0.607 ± 0.011
lat	Латинська	0.666	0.691 ± 0.015	0.598 ± 0.013
mao	Маорі	0.520	0.331 ± 0.023	0.412 ± 0.018
pol	Польська	0.673	0.650 ± 0.020	0.555 ± 0.015
rus	Російська	0.662	0.690 ± 0.025	0.567 ± 0.012
spa	Іспанська	0.626	0.585 ± 0.013	0.597 ± 0.005
ukr	Українська	0.660	0.660 ± 0.033	0.605 ± 0.022
vie	В'єтнамська	0.589	0.408 ± 0.024	0.335 ± 0.017
xho	Кóса	0.646	0.809 ± 0.014	0.730 ± 0.006
zhs	Китайська	0.624	0.259 ± 0.018	0.288 ± 0.018

Хоча залежність між значеннями параметрів α і τ та типом граматики видається досить очевидною, залишаються деякі нез'ясовані питання. Насамперед, можна було б очікувати, що ізолюючі мови (в'єтнамська, китайська, маорі) будуть протиставлені полісинтетичним або інкорпоруючим (аймара і керріер), проте з цієї схеми випадає староцерковнослов'янська. Крім того, в запропонованій схемі немає змоги розрізнити флективні та аґлютинативні мови (прикладами останніх є

есперанто, суагілі, таґалоґ, угорська та кóса), які характеризуються проміжними значеннями параметрів α і τ.

7.10. Висновки до розділу 7

У цьому розділі на підставі аналогії між частотним розподілом слів у тексті та розподілом Бозе запропоновано новий набір параметрів для опису поведінки частот слів. Зокрема, з цією метою введено поняття "температури" тексту T. За результатами розрахунків для таких мов, як англійська, українська, а також ґвінейська манінка, встановлено кореляцію між типом граматики (рівнем аналітичності) мови та запропонованими параметрами.

Обчислення було поширено на деякі інші тексти. Проаналізовано переклади казки Антуана де Сент-Екзюпері "Маленький принц" чотирма десятками мов із різних мовних родин. Вибір цього твору пов'язаний із тим, що він є одним із найбільше перекладених секулярних текстів. Отримані дані підтвердили початкову гіпотезу про існування зв'язку між типом граматики певної мови і запропонованими параметрами. Відзначмо також, що окремої уваги потребує аналіз залежності параметрів від розміру системи N [95]. Для кожного перекладу розраховано параметр, пов'язаний із температурою $\tau = \ln T / \ln N$, та показник спектра α моделі.

Обчислення, зроблені для "Маленького принца", доповнено перекладами казки Льюїса Керрола "Аліса в Країні чудес". Вивчено поведінку величин T та α впродовж продукування тексту та на підставі рівнянь термодинаміки теоретично встановлено закономірності відповідних степеневих залежностей, які підтверджуються в більшості випадків. Виявлено також, що параметри текстів у межах однієї мови

показують значно меншу варіацію стосовно перекладача, ніж стосовно жанру. На даний момент ще немає можливості здійснювати атрибуцію текстів за мовою на підставі запропонованого набору параметрів, оскільки жанрові особливості потребують додаткового вивчення.

Показано можливість використання запропонованого методу для дослідження еволюції мов. З обчислених параметрів перекладу Євангелія від Івана для кількох мовних родоводів чітко прослідковується спрощення граматики з часом. У цьому напрямку також передбачено подальші дослідження із залученням більшої кількості текстів. Зокрема, для порівнянь можна використовувати латинські переклади деяких сучасних авторів, які з'явилися протягом XX–XXI століть.

Для мов із високим ступенем аналітичності (в'єтнамська, гавайська, китайська, ложбан, морісьєн) запропоновано альтернативний опис із використанням моделі гармонічних осциляторів у просторі з дробовою вимірністю. Додатково до температури параметром є вимірність простору, яка виявилася меншою за одиницю. Тут крім розподілу Бозе також проаналізовано деякі моделі, що ґрунтуються на дробовій статистиці.

Удосконалення описаного методу пов'язане не лише з потребою розширення "експериментальної бази" (текстів різних авторів різними мовами), але й із поглибленням окремих його деталей. Зокрема, потрібне уточнення форми спектра елементарних збуджень ε_j для великих значень рівня $j \gg 1$, яке би забезпечувало правильний опис відповідних чисел заповнення. Потрібно також дослідити можливості розрахунку інших параметрів у межах "термодинамічного підходу" (наприклад, аналогів енергії, теплоємності та ін., порівн. [467]).

Головними завданнями, які варто очікувати від запропонованого підходу, є автоматична атрибуція текстів, важлива для автоматично-

го опрацювання мови. У майбутньому можливі застосування подібних методів і в інших галузях, зокрема в генетиці та суспільних науках. Наприклад, попередній аналіз вказує на можливість класифікації діагнозів за певними частотними характеристиками електрокардіограм.

ВИСНОВКИ

Головні результати роботи можна підсумувати у вигляді таких тез.

Показано, як енергетичний спектр сильновзаємодіючої бозе-системи можна отримати за допомогою діагоналізації гамільтоніана. На підставі формалізму двочасових температурних функцій Ґріна у довгохвильовій границі для гелію-4 отримано правильний нахил фононної гілки без застосування поняття ефективної маси. Відповідні аналітичні вирази можна застосовувати насамперед для систем із відомим фур'є-зображенням потенціалу міжатомних взаємодій

У випадку слабковзаємодіючого бозе-газу отримано вирази для парного міжчастинкового потенціалу, що уточнюють δ-подібну залежність у борнівському наближенні теорії розсіяння. У моделі твердих сфер обчислено густину станів, критичну температуру та хімічний потенціал із використанням теорії ідеального газу на підставі спектра Боголюбова. За допомогою розкладу для двовимірного газу за параметром взаємодії ν_0 отримано результати, які можна узагальнити для довільної вимірності. Показано, що критична температура $T_c \propto -1/\ln \nu_0$ і прямує до нуля, а хімічний потенціал газу в пастці з точністю до лінійних за ν_0 доданків дорівнює хімічному потенціалові ідеального газу й відрізняється від нього доданками типу $\varrho^2\nu_0^2 \ln \varrho\nu_0$.

Ідею Боголюбова про наближене вторинне квантування узагальнено на випадок слабковзаємодіючого бозе-газу в гармонічній пастці. У результаті цього отримано систему рівнянь, що дають змогу діагоналізувати гамільтоніан і розрахувати спектр елементарних збуджень. Застосовуючи пертурбативний розв'язок, обчислено конденсатну фракцію та енергію модельної системи як функції температури, що підтверджує застосовність розвинутого підходу. Вперше запропоновано

процедуру побудови ефективного гамільтоніана цієї задачі, що дозволяє здійснити просту діагоналізацію.

Для бозе-системи у просторі з дробовою вимірністю (що відповідає пористому середовищу) проаналізовано відхилення від напівкласичного підходу та знайдено поправки, пов'язані з дискретністю енергетичних рівнів. Знайдені аналітичні залежності критичної температури корисні для вивчення впливу скінченності кількості частинок на фізичні властивості бозонної системи. Числовий аналіз показує, що дискретність енергетичних рівнів треба враховувати, аналізуючи безпосередній температурний окіл точки бозе-конденсації.

Розглянуто систему одновимірних гармонічних осциляторів, що підпорядковуються дробовій статистиці Джентіле. З використанням відомої функції розподілу для модельної системи зі слабкою взаємодією вперше розраховано температурні залежності хімічного потенціалу, енергії та теплоємності. Проаналізовано також вплив на них значень максимального заповнення рівня — параметра, що характеризує статистику.

Дробову статистику Поліхронакоса вперше узагальнено з використанням комплекснозначного параметра, який у бозонній та ферміонній границі можна пов'язати з дисипативною гілкою енергетичного спектра. Для одновимірної системи гармонічних осциляторів у такій статистиці розраховано термодинамічні функції, передбачено існування фазового переходу та зроблено оцінки про можливість експериментального вимірювання стрибків теплоємності. У випадку D-вимірної системи з'ясовано природу фазових переходів і зроблено аналітичні та числові оцінки критичних температур.

Двопараметричні дробові статистики вперше використано для моделювання ідеальної системи еніонів. Показано, що за допомогою мо-

дифікацій статистики Голдейна–Ву можна відтворити рівняння стану еніонів з точністю до третього віріального коефіцієнта включно в усьому інтервалі значень еніонного параметра $\alpha \in [0; 1]$, тоді як модифікації статистики Поліхронакоса дозволяють коректний опис лише на обмежених відрізках з боку бозонної і ферміонної границь. На підставі проведеного аналізу запропоновано продовжити пошуки моделей еніонів серед модифікацій статистики Голдейна–Ву. За допомогою слабконеадитивної дробової статистики Поліхронакоса також вперше вдалося врахувати вплив міжчастинкової взаємодії та скінченності кількості частинок у бозонних системах на термодинамічні функції та зокрема на значення критичної температури.

Методи аналізу бозонних систем поширено на суміжні задачі, що відкрило шлях до міждисциплінарних досліджень. Зокрема, розглянуто теоретико-числові задачі, відомі як розбиття натуральних чисел. Мікроканонічний розгляд бозе-системи зі степеневим спектром дав змогу оцінити кількість багатовимірних розбиттів на суму довільних степенів, причому отримані оцінки збігаються з відомими асимптотиками, розрахованими різними методами теорії чисел. Для одновимірних розбиттів отримано у простому компактному вигляді поправку до головної асимптотики Гарді–Рамануджана. Також вперше оцінено кількість обмежених двовимірних (плоских) розбиттів натуральних чисел зі скінченною кількістю частин.

Вперше вдалося встановити відповідність між дробовою (проміжною) статистикою Джентіле і бозе-системою зі скінченною кількістю частинок у випадку одновимірної гармонічної пастки. Запропонований підхід розширено на загальний степеневий енергетичний спектр.

На підставі аналогії між ранґово-частотним розподілом (на прикладі текстів) і функцією розподілу у статистиці Бозе–Айнштайна за-

пропоновано підхід для аналізу і класифікації складних систем. Запропоновано нові параметри для дослідження текстів та встановлено їх співвідношення з певними характеристиками мов. Такий набір параметрів має також перспективи застосування в біології (наприклад, при вивченні геномів) та суспільних науках у задачах, які дозволяють кількісний аналіз.

Результати роботи та подальші дослідження у відповідних напрямках важливі для інтерпретації експериментів у галузі фізики конденсованих систем, розробки нових технологій запису інформації та високоточних вимірювань, а також для отримання нових математично простих способів опису бозе- та фермі-систем із різними типами взаємодій, які є предметом інтенсивних експериментальних і теоретичних досліджень, які проводять у сучасних світових наукових центрах і лабораторіях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Bardeen J.* Superconductivity and other macroscopic quantum phenomena / J. Bardeen // Phys. Today. — 1990. — Vol. 43, No. 12. — P. 25–31.

[2] *Eisenstein J. P.* The fractional quantum Hall effect / J. P. Eisenstein, H. L. Stormer // Science. — 1990. — Vol. 248, No. 4962. — P. 1510–1516.

[3] *Ketterle W.* Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser / W. Ketterle // Rev. Mod. Phys. — 2002. — Vol. 74, No. 4. — P. 1131–1151.

[4] Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor / M. H. Anderson, J. N. Ensher, M. R. Matthews [et al.] // Science. — 1995. — Vol. 269. — P. 198–201.

[5] Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms / K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 75. — P. 3969–3973.

[6] Evidence of Bose–Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions / C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, R. G. Hulet // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 75, No. 9. — P. 1687–1690.

[7] Bose-Einstein condensation: Twenty years after / V. S. Bagnato, D. J. Frantzeskakis, P. G. Kevrekidis [et al.] // Rom. Rep. Phys. — 2015. — Vol. 67, No. 1. — P. 5–50.

[8] Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen / D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 81, No. 18. — P. 3811–3814.

[9] *Pethick C. J.* Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases /

C. J. Pethick, H. Smith. — Cambridge : Cambridge University Press, 2001. — xii, 402 p.

[10] *Боголюбов Н. Н.* К теории сверхтекучести / Н. Н. Боголюбов // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1947. — Т. 11, № 1. — С. 77–90.

[11] *Bassichis W. H.* Analysis of the Bogoliubov method applied to a simple boson model / W. H. Bassichis, L. L. Foldy // Phys. Rev. — 1964. — Vol. 133. — P. A935–A943.

[12] *Okumura M.* Proper treatment of the zero mode in quantum field theory for trapped Bose–Einstein condensation / M. Okumura, Y. Yamanaka // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 68. — Art. 013609. — 12 p.

[13] *Rogel-Salazar J.* The Gross–Pitaevskii equation and Bose–Einstein condensates / J. Rogel-Salazar // Eur. J. Phys. — 2013. — Vol. 34, No. 2. — P. 247–257.

[14] Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases / F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari // Rev. Mod. Phys. — 1999. — Vol. 71. — P. 463–512.

[15] *Andersen J. O.* Theory of the weakly interacting Bose gas / J. O. Andersen // Rev. Mod. Phys. — 2004. — Vol. 76. — P. 599–639.

[16] *Krauth W.* Quantum Monte Carlo calculations for a large number of bosons in a harmonic trap / W. Krauth // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77. — P. 3695–3699.

[17] *Pearson S.* Bose–Einstein condensation in one-dimensional power-law traps: A path-integral Monte Carlo simulation / S. Pearson, T. Pang, C. Chen // Phys. Rev. A. — 1998. — Vol. 58. — P. 1485–1489.

[18] *van Druten N. J.* Two-step condensation of the ideal Bose gas in highly anisotropic traps / N. J. van Druten, W. Ketterle // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 79. — P. 549–552.

[19] The 1D interacting Bose gas in a hard wall box / M. T. Batchelor, X. W. Guan, N. Oelkers, C. Lee // J. Phys. A. — 2005. — Vol. 38. — P. 7787–7806.

[20] *Вакарчук І. О.* Бозе-конденсат у двокомпонентній бозе-рідині / І. О. Вакарчук, В. С. Пастухов // Журн. фіз. дослідж. — 2008. — Т. 12, № 3. — Ст. 3002. — 8 с.

[21] *Ishino S.* Instability of overlapped vortices rotating in opposite directions in binary Bose–Einstein condensates / S. Ishino, M. Tsubota, H. Takeuchi // J. Low. Temp. Phys. — 2013. — Vol. 171, No. 3/4. — P. 429–435.

[22] *Li Jinbin.* Properties of two-component Bose–Einstein condensates with monopolar interaction / Jinbin Li, Yaxin Qiao // J. Low. Temp. Phys. — 2014. — Vol. 177, No. 3/4. — P. 165–177.

[23] *Mason P.* Number-conserving approaches to n-component Bose-Einstein condensates / P. Mason, S. A. Gardiner // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89, No. 4. — Art. 043617. — 22 p.

[24] Bound vortex states and exotic lattices in multicomponent Bose-Einstein condensates: The role of vortex-vortex interaction / D. S. Dantas, A. R. P. Lima, A. Chaves [et al.] // Phys. Rev. A. — 2015. — Vol. 91, No. 2. — Art. 023630. — 9 p.

[25] *Byrnes T.* Macroscopic quantum computation using Bose-Einstein condensates / T. Byrnes, Kai Wen, Y. Yamamoto // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85, No. 4. — Art. 040306. — 4 p.

[26] Optical tweezers for vortex rings in Bose-Einstein condensates / A. I. Yakimenko, Yu. M. Bidasyuk, O. O. Prikhodko [et al.] // Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 88, No. 4. — Art. 043637. — 5 p.

[27] Quantum turbulence by vortex stirring in a spinor Bose-Einstein condensate / B. Villaseñor, R. Zamora-Zamora, D. Bernal, V. Romero-Rochín // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89, No. 3. — Art. 033611. — 4 p.

[28] Generation and decay of two-dimensional quantum turbulence in a trapped Bose-Einstein condensate / G. W. Stagg, A. J. Allen, N. G. Parker, C. F. Barenghi // Phys. Rev. A. — 2015. — Vol. 91, No. 1. — Art. 013612. — 6 p.

[29] *Гриценко И.* Квантовая турбулентность: коэффициент сопротивления при колебаниях погруженного в He II кварцевого камертона / И. Гриценко, А. Цескис, Г. Шешин // Физ. низк. темп. — 2015. — Т. 41, № 4. — С. 338-342.

[30] *Leinaas J. M.* On the theory of identical particles / J. M. Leinaas, J. Myrheim // Nuovo Cim. — 1977. — Vol. 37B, No. 1. — P. 1–23.

[31] *Wilczek F.* Quantum mechanics of fractional-spin particles / F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 49, No. 14. — P. 957–959.

[32] *Canright G. S.* Fractional statistics: *alpha* to *beta* / G. S. Canright, M. D. Johnson // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — Vol. 27, No. 11. — P. 3579–3598.

[33] *Khare A.* Fractional Statistics and Quantum Theory / A. Khare. — 2nd edition. — Singapore : World Scientific, 2005. — xiv, 300 p.

[34] *Laughlin R. B.* The relationship between high temperature superconductivity and the fractional quantum Hall effect / R. B. Laughlin // Science. — 1988. — Vol. 242, No. 4878. — P. 525–533.

[35] *Treumann R. A.* Incomplete-exclusion statistical mechanics in violent relaxation / R. A. Treumann, W. Baumjohann // Astron. Astrophys. — 2013. — Vol. 558. — Art. A40. — 4 p.

[36] *Jeon Gun Sang.* Thermodynamic behavior of braiding statistics for certain fractional quantum Hall quasiparticles / Gun Sang Jeon, J. K. Jain // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 81, No. 3. — Art. 035319. — 7 p.

[37] Fractional excitations in cold atomic gases / J. Honer, J. C. Halimeh, I. McCulloch [et al.] // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 86, No. 5. —

Art. 051606(R). — 5 p.

[38] *Anghel D. V.* Fractional exclusion statistics applied to relativistic nuclear matter / D. V. Anghel, A. S. Parvan, A. S. Khvorostukhin // Physica A. — 2012. — Vol. 391. — P. 2313–2321.

[39] *Ebadi Z.* Infinite statistics condensate as a model of dark matter / Z. Ebadi, B. Mirza, H. Mohammadzadeh // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2013. — Vol. 2013, No. 11. — Art. 057. — 12 p.

[40] *Silverman M. P.* Dark matter as a cosmic Bose-Einstein condensate and possible superfluid / M. P. Silverman, R. L. Mallett // Gen. Rel. Grav. — 2002. — Vol. 34, No. 5. — P. 633–649.

[41] *Velten H.* Power spectrum for the Bose–Einstein condensate dark matter / H. Velten, E. Wamba // Phys. Lett. B. — 2012. — Vol. 709. — P. 1–5.

[42] *Bettoni D.* Dark matter as a Bose-Einstein condensate: the relativistic non-minimally coupled case / D. Bettoni, M. Colombo, S. Liberati // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2014. — Vol. 2014, No. 02. — Art. 004. — 22 p.

[43] *Batchelor M. T.* One-dimensional interacting anyon gas: Low-energy properties and Haldane exclusion statistics / M. T. Batchelor, X. W. Guan, N. Oelkers // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96, No. 21. — Art. 210402. — 4 p.

[44] *Girardeau M. D.* Anyon-fermion mapping and applications to ultracold gasses in tight waveguides / M. D. Girardeau // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97. — Art. 100402. — 4 p.

[45] *Polychronakos A. P.* Virial coefficients of non-Abelian anyons / A. P. Polychronakos // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84, No. 6. — P. 1268–1271.

[46] *You Yi-Zhuang.* Synthetic non-Abelian statistics by Abelian anyon condensation / Yi-Zhuang You, Chao-Ming Jian, Xiao-Gang Wen // Phys. Rev. B. — 2013. — Vol. 87, No. 4. — Art. 045106. — 7 p.

[47] *Mancarella F.* Statistical mechanics of an ideal gas of non-Abelian anyons / F. Mancarella, A. Trombettoni, G. Mussardo // Nucl. Phys. B. — 2013. — Vol. 867 [FS]. — P. 950–976.

[48] *Green H. S.* A generalized method of field quantization / H. S. Green // Phys. Rev. — 1953. — Vol. 90, No. 2. — P. 270–273.

[49] *Lundholm D.* Local exclusion principle for identical particles obeying intermediate and fractional statistics / D. Lundholm, J. P. Solovej // Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 88, No. 6. — Art. 062106. — 9 p.

[50] *Mandal S.* On the determination of the mutual exclusion statistics parameter / S. Mandal // Pramana – J. Phys. — 2013. — Vol. 81, No. 3. — P. 503–509.

[51] *Olemskoi A.* Generalization of multifractal theory within quantum calculus / A. Olemskoi, I. Shuda, V. Borisyuk // Europhys. Lett. — 2010. — Vol. 89, No. 5. — Art. 50007. — 6 p.

[52] *Livadiotis G.* Understanding kappa distributions: A toolbox for space science and astrophysics / G. Livadiotis, D. J. McComas // Space Sci. Rev. — 2013. — Vol. 175. — P. 183–214.

[53] *Ginsberg N. S.* Coherent control of optical information with matter wave dynamics / N. S. Ginsberg, S. R. Garner, L. V. Hau // Nature. — 2007. — Vol. 445. — P. 623–626.

[54] *Bloch I.* Quantum simulations with ultracold quantum gases / I. Bloch, J Dalibard, S. Nascimbène // Nature Phys. — 2012. — Vol. 8. — P. 267–276.

[55] *Teo J. C. Y.* Braiding statistics and congruent invariance of twist defects in bosonic bilayer fractional quantum Hall states / J. C. Y. Teo, A. Roy, Xiao Chen // Phys. Rev. B. — 2014. — Vol. 90, No. 15. — Art. 155111. — 6 p.

[56] Interferometry with bose-einstein condensates in microgravity / H. Müntinga, H. Ahlers, M. Krutzik [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110, No. 9. — Art. 093602. — 5 p.

[57] Interferometry with non-classical motional states of a Bose–Einstein condensate / S. van Frank, A. Negretti, T. Berrada [et al.] // Nature Commun. — 2014. — Vol. 5. — Art. 4009. — 6 p.

[58] *Tran M. N.* On the quantum density of states and partitioning an integer / M. N. Tran, M. V. N. Murthy, R. J. Bhaduri // Ann. Phys. — 2004. — Vol. 311. — P. 204–219.

[59] *Roccia J.* Level density of a Fermi gas and integer partitions: A Gumbel-like finite-size correction / J. Roccia, P. Leboeuf // Phys. Rev. C. — 2010. — Vol. 81. — Art. 044301. — 5 p.

[60] *Chatterjee S.* Fluctuations of the Bose–Einstein condensate / S. Chatterjee, P. Diaconis // J. Phys. A: Math. Theor. — 2014. — Vol. 47. — Art. 085201. — 23 p.

[61] *Jin Neng-zhi.* Frequency and correlation of nearest neighboring nucleotides in human genome / Neng-zhi Jin, Zi-xian Liu, Wen-yuan Qiu // Chin. J. Chem. Phys. — 2009. — Vol. 22, No. 1. — P. 27–33.

[62] Information weights of nucleotides in DNA sequences / M. R. Dudek, S. Cebrat, M. Kowalczuk [et al.] // Computat. Meth. Sci. Technol. — 2007. — Vol. 13. — P. 5–12.

[63] *Ogasawara O.* Zipf's law and human transcriptomes: an explanation with an evolutionary model / O. Ogasawara, Sh. Kawamoto, K. Okubo // Comptes Rendus Biologies. — 2003. — Vol. 326. — P. 1097–1101.

[64] *Kechedzhi K. E.* Rank distributions of words in correlated symbolic systems and the Zipf law / K. E. Kechedzhi, O. V. Usatenko, V. A. Yampol'skii // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 72. — Art. 046138. — 6 p.

[65] *Bernhardsson S.* Size-dependent word frequencies and translational invariance of books / S. Bernhardsson, L. E. Correa da Rocha, P. Minnhagen // Physica A. — 2010. — Vol. 389. — P. 330–341.

[66] Rank diversity of languages: Generic behavior in computational linguistics / G. Cocho, J. Flores, C. Gershenson [et al.] // PLoS ONE. — 2015. — Vol. 10, No. 4. — Art. e0121898. — 12 p.

[67] General three-state model with biased population replacement: Analytical solution and application to language dynamics / F. Colaiori, C. Castellano, Ch. F. Cuskley [et al.] // Phys. Rev. E. — 2015. — Vol. 91, No. 1. — Art. 012808. — 12 p.

[68] *Chakraborti Anirban.* Variational principle for the Pareto power law / Anirban Chakraborti, Marco Patriarca // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 103. — Art. 228701. — 4 p.

[69] Common ecology quantifies human insurgency / J. C. Bohorquez, S. Gourley, A. R. Dixon [et al.] // Nature. — 2009. — Vol. 462. — P. 911–914.

[70] *Blazhyevskyi L. F.* The path integral representation kernel of evolution operator in Merton–Garman model / L. F. Blazhyevskyi, V. S. Yanishevsky // Condens. Matter Phys. — 2011. — Vol. 14, No. 2. — Art. 23001. — 16 p.

[71] Interevent time distributions of human multi-level activity in a virtual world / O. Mryglod, B. Fuchs, M. Szell [et al.] // Physica A. — 2015. — Vol. 419. — P. 681–690.

[72] *Вакарчук І. О.* Кінетична енергія і теплоємність рідкого ^{4}He / І. О. Вакарчук, Р. О. Притула, А. А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2007. — Т. 11. — С. 259–267.

[73] *Ільків І. М.* Вплив слабкої взаємодії на властивості бозе-газу / І. М. Ільків, А. А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2007. — Т. 11, № 1. — С. 122–131.

[74] *Топілко М. І.* Термодинамічні функції одновимірних слабковзаємодіючих гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле / М. І. Топілко, А. А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2009. — Т. 13, № 2. — Ст. 2004. — 8 с.

[75] *Prokhorov D.* Asymptotic formulas for integer partitions within the approach of microcanonical ensemble / D. Prokhorov, A. Rovenchak // Condens. Matter Phys. — 2012. — Vol. 15, No. 3. — Art. 33001. — 9 p.

[76] *Горнецька М. Я.* Двопараметричні модифікації статистик еніонів / М. Я. Горнецька, А. А. Ровенчак // Укр. фіз. журн. — 2016. — Т. 61, № 2. — С. 174–183; *Hornetska M. Ya., Rovenchak A. A.* Two-parameter modifications of anyonic statistics // Ukr. J. Phys. — 2016. — Vol. 61, No. 2. — P. 168–177.

[77] *Rovenchak A.* Application of a quantum ensemble model to linguistic analysis / A. Rovenchak, S. Buk // Physica A. — 2011. — Vol. 390, No. 7. — P. 1326–1331.

[78] *Rovenchak A.* Defining thermodynamic parameters for texts from word rank-frequency distributions / A. Rovenchak, S. Buk // J. Phys. Stud. — 2011. — Vol. 15, No. 1. — Art. 1005. — 6 p.

[79] *Ровенчак А. А.* Міжатомні потенціали розрідженої багатобозонної системи / А. А. Ровенчак // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Фізика. — 2003. — № 14. — С. 16–19.

[80] *Rovenchak A. A.* Energy spectrum of an interacting Bose-system / A. A. Rovenchak // J. Low Temp. Phys. — 2005. — Vol. 138, No. 1/2. — P. 49–54.

[81] *Rovenchak A. A.* Extraction of interatomic potentials from structure of liquids / A. A. Rovenchak // Centr. Eur. J. Phys. — 2005. — Vol. 3, No. 1. — P. 47–60.

[82] *Rovenchak A. A.* Weakly-interacting bosons in a trap within approximate second quantization approach / A. A. Rovenchak // J. Low Temp. Phys. — 2007. — Vol. 148, No. 3/4. — P. 411–416.

[83] *Rovenchak A.* The relation between fractional statistics and finite bosonic systems in one-dimensional case / A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. — 2009. — Vol. 35, No. 5. — P. 510–513; Low Temp. Phys. —

2009. — Vol. 35, No. 5. — P. 400–403.

[84] *Rovenchak A.* Harmonically trapped bosons on the Sierpiński carpet / A. Rovenchak // Acta Phys. Pol. A. — 2010. — Vol. 118, No. 4. — P. 531–533.

[85] *Rovenchak A.* Partition function formalism in the problem of multidimensional integer partitions / A. Rovenchak // Computat. Meth. Sci. Technol. — 2010. — Vol. 16, No. 2. — P. 187–190.

[86] *Rovenchak A.* Polychronakos fractional statistics with a complex-valued parameter / A. Rovenchak // J. Phys.: Conf. Ser. — 2012. — Vol. 400. — Art. 012064. — 4 p.

[87] *Ровенчак А.* Дробові статистики: погляд з боку статистичної фізики / А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2013. — Т. 17, № 2. — Ст. 2001. — 15 с.

[88] *Rovenchak A.* Phase transition in a system of 1D harmonic oscillators obeying Polychronakos statistics with a complex parameter / A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. — 2013. — Vol. 39, No. 10. — P. 1141–1145; Low Temp. Phys. — 2013. — Vol. 39, No. 10. — P. 888–892.

[89] *Rovenchak A.* Complex-valued fractional statistics for D-dimensional harmonic oscillators / A. Rovenchak // Phys. Lett. A. — 2014. — Vol. 378, No. 3. — P. 100–108.

[90] *Rovenchak A.* Weakly nonadditive Polychronakos statistics / A. Rovenchak // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89, No. 5. — Art. 052116. — 7 p.

[91] *Rovenchak A.* Two-parametric fractional statistics models for anyons / A. Rovenchak // Eur. Phys. J. B. — 2014. — Vol. 87, No. 8. — Art. 175. — 6 p.

[92] *Rovenchak A. A.* Enumeration of plane partitions with a restricted number of parts / A. A. Rovenchak // Theor. Math. Phys. — 2014. — Vol. 181, No. 2. — P. 1428–1434.

[93] *Rovenchak A.* A note on the calculation of the long-wavelength limit of the bosonic excitation spectrum / A. Rovenchak // Z. Naturforsch. A. — 2015. — Vol. 70, No. 1. — P. 73–78.

[94] *Rovenchak A.* Effective Hamiltonian and excitation spectrum of harmonically trapped bosons / A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. — 2016. — Vol. 42, No. 1. — P. 49–55; Low Temp. Phys. — 2016. — Vol. 42, No. 1. — P. 36–41.

[95] *Rovenchak A.* A naïve conception of the uncertainty principle in the multiparametric attribution of texts / A. Rovenchak // Glottometrics. — 2011. — No. 21. — P. 65–72.

[96] *Rovenchak A.* Trends in language evolution found from the frequency structure of texts mapped against the Bose-distribution / A. Rovenchak // J. Quant. Ling. — 2014. — Vol. 21, No. 3. — P. 281–294.

[97] *Rovenchak A.* Where Alice meets Little Prince: Another approach to study language relationships / A. Rovenchak // Sequences in Language and Text / Ed. by George K. Mikros, Ján Mačutek. — Berlin ; Boston : Walter de Gruyter GmbH, 2015. — P. 217–230.

[98] *Rovenchak A.* Models of frequency spectrum in texts based on quantum distributions in fractional space dimensions / A. Rovenchak // 20th International Conference on Control Systems and Computer Science CSCS 2015: Proceedings, 27–29 May 2015, Bucharest, Romania / Ed. by I. Dumitrache, A. M. Florea, F. Pop, A. Dumitraşcu. — Vol. 2. — Los Alamitos, CA : IEEE Computer Society, 2015. — P. 645–649.

[99] *Rovenchak A.* Statistical mechanics approach in the counting of integer partitions / a. rovenchak. — E-print arXiv:1603.01049. — 2016. — 18 p.; to appear in Banach Center Publications, Vol. 109.

[100] *Ровенчак А. А.* Фізика бозе-систем / А. А. Ровенчак. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2015. — 128 с.

[101] *Rovenchak A.* An approximate second quantization approach for trapped weakly-interacting bosons / A. Rovenchak // International Symposium on Quantum Fluids and Solids QFS2006, Kyoto University, Kyoto, Japan, August 1-6, 2006. — PC16;

Rovenchak A. Fractional Statistics and Finite-size Bosonic System / A. Rovenchak // International Symposium on Quantum Fluids and Solids QFS2007, 01-06 August 2007. Kazan, Russia : Program and Abstracts. — P. 170;

Rovenchak A. Polychronakos fractional statistics with a complex-valued parameter / A. Rovenchak // LT26: The 26th International Conference on Low Temperature Physics, August 10-17, 2011, Beijing International Convention Center, Beijing, China. — P. 264;

Rovenchak A. Finite systems of 1D and 2D harmonic oscillators obeying fractional statistics with a complex parameter / A. Rovenchak // International Conference on Quantum Fluids and Solids 2012, 15th-21st August 2012, Lancaster University, UK : Conference Handbook. — P. 135;

Rovenchak A. Enumeration of plane partitions with a restricted number of parts / A. Rovenchak // 6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 23-25 September 2013, Zielona Góra, Poland : Book of abstracts. — P. 29.

[102] *Clausius R.* Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Forman der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie / R. Clausius // Ann. Phys. Chem. — 1865. — Bd. 125, No. 7. — S. 353–400.

[103] *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases / J. C. Maxwell // Phil. Trans. R. Soc. London. — 1867. — Vol. 157. — P. 49–88; Phil. Mag. Ser. 4. — 1868. — Vol. 35. — P.129–145; 185–217.

[104] *Boltzmann L.* Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen / L. Boltzmann // Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Cl. (Abt. 2). — 1871. — Bd. 63. — S. 397–418.

[105] *Boltzmann L.* Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht / L. Boltzmann // Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Cl. (Abt. 2). — 1871. — Bd. 63. — S. 679–711.

[106] *Boltzmann L.* Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den sätzen über das Wärmegleichgewicht / L. Boltzmann // Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Cl. (Abt. 2). — 1877. — Bd. 76. — S. 373–435. — цит. за: Wissenschaftliche Abhandlungen von Ludwig Boltzmann / herausg. von F. Hasenöhrl. — II. Band. — Leipzig : Barth, 1909. — S. 164–223.

[107] *Planck M.* Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum / M. Planck // Ann. Phys. — 1901. — Bd. 309. — S. 553–563.

[108] *Gibbs J. W.* On the equilibrium of heterogeneous substances / J. W. Gibbs // Trans. Connecticut Acad. Arts Sci. — 1874–1878. — Vol. 3. — P. 108–248; 343–520.

[109] *Gibbs J. W.* Elementary Principles in Statistical Mechanics / J. W. Gibbs. — New York : C. Scribner, 1902. — xviii, 207 p.

[110] *Bose.* Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese / Bose // Zs. Phys. — 1924. — Bd. 26, No. 1. — S. 178–181.

[111] *Einstein A.* Quantentheorie des einatomigen idealen Gases / A. Einstein // Sitzungsber. Preuss. Konigl. Akad. Wiss.: phys.-math. Klasse. — 1924. — S. 261–267.

[112] *Einstein A.* Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung / A. Einstein // Sitzungsber. Preuss. Konigl. Akad. Wiss.: phys.-math. Klasse. — 1925. — S. 3–14.

[113] *Pauli jr. W.* Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren / W. Pauli jr. // Zs. Phys. — 1925. — Bd. 31, No. 1. — S. 765–783.

[114] *Fermi E.* Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases / E. Fermi // Zs. Phys. — 1926. — Bd. 36, No. 11–12. — S. 902–912.

[115] *Dirac P. A. M.* On the theory of quantum mechanics / P. A. M. Dirac // Proc. R. Soc. London Ser. A. — 1926. — Vol. 112. — P. 661–677.

[116] *Uhlenbeck G. E.* Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons / G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit // Naturwiss. — 1925. — Bd. 13. — S. 953–952.

[117] *Uhlenbeck G. E.* Spinning electrons and the structure of spectra / G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit // Nature. — 1926. — Vol. 117. — P. 264–265.

[118] *Fierz M.* Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helvetica Physica Acta. — 1939. — Bd. 12. — S. 3–37.

[119] *Pauli W.* The connection between spin and statistics / W. Pauli // Phys. Rev. — 1940. — Vol. 58. — P. 716–722.

[120] *Schwinger J.* The theory of quantized fields. i / J. Schwinger // Phys. Rev. — 1951. — Vol. 82, No. 6. — P. 914–927.

[121] *Gentile G.* Osservazioni sopra le statistiche intermedie / G. Gentile // Nuovo Cim. — 1940. — Vol. 17. — P. 493–497.

[122] *Gentile j. G.* Le statistiohe intermedie e le proprietà dell'elio liquido / G. Gentile j. // Nuovo Cim. Nuova Ser. — 1942. — Vol. 19, No. 4. — P. 109–125.

[123] *Einbinder H.* Quantum statistics and the ℵ theorem / H. Einbinder // Phys. Rev. — 1948. — Vol. 74, No. 7. — P. 805–808.

[124] *Borsellino A.* Sulle ipotesi poste a fondamento delle statistiche intermedie / A. Borsellino // Nuovo Cim. Ser. IX. — 1947. — Vol. 4, No. 1–2. — P. 52–62.

[125] *Brillouin L.* Les statistiques quantiques et leurs applications / L. Brillouin. — Paris : Les Presses Universitaire de France, 1930. — Vol. 1. —

192 p. — Vol. 2. — P. [i–vi], 193–404.

[126] *Polychronakos A. P.* Probabilities and path-integral realization of exclusion statistics / A. P. Polychronakos // Phys. Lett. B. — 1996. — Vol. 365. — P. 202–206.

[127] *Исихара А.* Статистическая физика / А. Исихара. — Москва : Мир, 1973. — 471 с.

[128] *Балашова С. А.* Нестандартные алгебры операторов рождения — уничтожения и промежуточные квантовые статистики / С. А. Балашова, В. В. Курышкин, Э. Э. Энтральго // Физ. эл. част. ат. яд. — 1989. — Т. 20. — С. 965–987.

[129] *Biedenharn L. C.* The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the boson operators / L. C. Biedenharn // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — Vol. 22. — P. L873–L878.

[130] *Zagier D.* Realizability of a model in infinite statistics / D. Zagier // Commun. Math. Phys. — 1992. — Vol. 147. — P. 199–210.

[131] *Nešković P. V.* Quantum oscillators: Applications in statistical mechanics / P. V. Nešković, B. V. Urošević // Int. J. Mod. Phys. A. — 1992. — Vol. 7, No. 14. — P. 3379–3388.

[132] *Кац В. Г.* Квантовый анализ / В. Г. Кац, П. Чен. — Москва : Изд-во МЦНМО, 2005. — 127 с.

[133] *Fityo T. V.* Statistical physics in deformed spaces with minimal length / T. V. Fityo // Phys. Lett. A. — 2008. — Vol. 372. — P. 5872–5877.

[134] *Ando T.* Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system / T. Ando, Y. Matsumoto, Y. Uemura // J. Phys. Soc. Jpn. — 1975. — Vol. 39, No. 2. — P. 279–288.

[135] *Klitzing K. v.* New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance / K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 45, No. 6. — P. 494–497.

[136] *Tsui D. C.* Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit / D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48, No. 22. — P. 1559–1562.

[137] *Laughlin R. B.* Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations / R. B. Laughlin // Phys. Rev. Lett. — 1983. — Vol. 50, No. 18. — P. 1395–1398.

[138] *Halperin B. I.* Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized Hall states / B. I. Halperin // Phys. Rev. Lett. — 1984. — Vol. 52, No. 18. — P. 1583–1586.

[139] *Jain J. K.* Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect / J. K. Jain // Phys. Rev. Lett. — 1989. — Vol. 63, No. 2. — P. 199–202.

[140] *Arovas D.* Fractional statistics and the quantum Hall effect / D. Arovas, J. R. Schrieffer, F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. — 1984. — Vol. 53, No. 7. — P. 722–723.

[141] *Haldane F. D. M.* "Fractional statistics" in arbitrary dimension: A generalization of the Pauli principle / F. D. M. Haldane // Phys. Rev. Lett. — 1991. — Vol. 67, No. 8. — P. 937–940.

[142] *Wu Y.-S.* Statistical distribution for generalized ideal gas of fractional-statistics particles / Y.-S. Wu // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 73, No. 7. — P. 922–925.

[143] *Dasniéres de Veigy A.* Equation of state of an anyon gas in a strong magnetic field / A. Dasniéres de Veigy, S. Ouvry // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 72, No. 5. — P. 600–603.

[144] *Medvedev M. V.* Properties of particles obeying ambiguous statistics / M. V. Medvedev // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, No. 22. — P. 4147–4150.

[145] *Rényi A.* On measures of entropy and information / A. Rényi // Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Stati-

stics and Probability 1960. — Berkeley, CA, USA : University of California Press, 1961. — P. 547–561.

[146] *Daróczy Z.* Generalized information functions / Z. Daróczy // Information and Control. — 1970. — Vol. 16. — P. 36–51.

[147] *Tsallis C.* Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics / C. Tsallis // J. Stat. Phys. — 1988. — Vol. 52, No. 1–2. — P. 479–486.

[148] Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications / Ed. by S. Abe, Y. Okamoto. — Berlin : Springer, 2001. — IX, 277 p.

[149] *Curado E. M. F.* Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics / E. M. F. Curado, C. Tsallis // J. Phys. A: Math. Gen. — 1991. — Vol. 24. — P. L69–L72.

[150] *Tsallis C.* The role of constraints within generalized nonextensive statistics / C. Tsallis, R. S. Mendes, A. R. Plastino // Physica A. — 1998. — Vol. 261. — P. 534–554.

[151] *Башкиров А. Г.* Энтропия Реньи как статистическая энтропия для сложных систем / А. Г. Башкиров // Теор. мат. физ. — 2006. — Т. 149, № 2. — С. 299–317.

[152] *Olemskoi A. I.* Multifractal spectrum of phase space related to generalized thermostatistics / A. I. Olemskoi, V. O. Kharchenko, V. N. Borisyuk // Physica A. — 2008. — Vol. 387. — P. 1895–1906.

[153] *Машкевич С. В.* Квантовая и статистическая механика систем с дробной статистикой : Диссерт. . . . д-ра физ.-мат. наук: 01.04.02 / Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко. — Киев, 2005. — 320 с.

[154] *Jones V. F. R.* Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials / V. F. R. Jones // Ann. Math. Second Ser. — 1987. — Vol. 126, No. 2. — P. 335–388.

[155] *Fredenhagen K.* Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras / K. Fredenhagen, K. H. Rehren, B. Schroer // Commun. Math. Phys. — 1989. — Vol. 125, No. 2. — P. 201–226.

[156] *Вакарчук І. О.* Квантова механіка / І. О. Вакарчук. — 4-те вид. —

Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2012. — 872 с.

[157] *Lerda A.* Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics / A. Lerda. — Berlin ; New York : Springer, 1992. — viii, 138 p.

[158] *Wu Y.-S.* Multiparticle quantum mechanics obeying fractional statistics / Y.-S. Wu // Phys. Rev. Lett. — 1984. — Vol. 53, No. 2. — P. 111–114.

[159] *Mashkevich S. V.* Exact solutions of a many-anyon problem / S. V. Mashkevich // Int. J. Mod. Phys. A. — 1992. — Vol. 7, No. 32. — P. 7931–7942.

[160] *Mitra P.* Structure of multi-anyon wavefunctions / P. Mitra // Phys. Lett. B. — 1995. — Vol. 345, No. 4. — P. 473–476.

[161] *Sogo K.* Explicit construction of the second-quantized anyon operators / K. Sogo // J. Phys. Soc. Jpn. — 1995. — Vol. 64. — P. 2249–2251.

[162] *Wilczek F.* Magnetic flux, angular momentum, and statistics / F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48, No. 17. — P. 1144–1146.

[163] *Camino F. E.* Realization of a Laughlin quasiparticle interferometer: Observation of fractional statistics / F. E. Camino, W. Zhou, V. J. Goldman // Phys. Rev. B. — 2005. — Vol. 72, No. 7. — Art. 075342. — 8 p.

[164] Anyons in a weakly interacting system / C. Weeks, G. Rosenberg, B. Seradjeh, M. Franz // Nature Phys. — 2007. — Vol. 3. — P. 797–801.

[165] Statistically induced phase transitions and anyons in 1D optical lattices / T. Keilmann, S. Lanzmich, I. McCulloch, M. Roncaglia // Nature Commun. — 2011. — Vol. 2. — Art. 361. — 7 p.

[166] *Greenberg O. W.* Example of infinite statistics / O. W. Greenberg // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Vol. 64, No. 7. — P. 705–708.

[167] *Mohapatra R. N.* Infinite statistics and a possible small violation of

the Pauli principle / R. N. Mohapatra // Phys. Lett. B. — 1990. — Vol. 242, No. 3–4. — P. 407–411.

[168] *Greenberg O. W.* Particles with small violations of Fermi or Bose statistics / O. W. Greenberg // Phys. Rev. D. — 1991. — Vol. 43, No. 12. — P. 4111–4120.

[169] *Lavagno A.* q-deformed structures and generalized thermodynamics / A. Lavagno, A. M. Scarfone, P. Narayana Swamy // Rep. Math. Phys. — 2005. — Vol. 55, No. 3. — P. 423–433.

[170] *Algin A.* Non-extensive entropy of bosonic Fibonacci oscillators / A. Algin // J. Stat. Mech. — 2009. — No. 4. — Art. P04007. — 18 p.

[171] *Algin A.* A comparative study on q-deformed fermion oscillators / A. Algin // Int. J. Theor. Phys. — 2011. — Vol. 50, No. 5. — P. 1554–1568.

[172] *Algin A.* High-temperature behavior of a deformed Fermi gas obeying interpolating statistics / A. Algin, M. Senay // Phys. Rev. E. — 2012. — Vol. 85, No. 4. — Art. 041123. — 10 p.

[173] *R.-Monteiro M. A.* Highly deformed q-oscillator systems / M. A. R.-Monteiro, I. Roditi, L. M. C. S. Rodrigues // Mod. Phys. Lett. B. — 1993. — Vol. 7, No. 29–30. — P. 1897–1902.

[174] *Chang Z.* Thermodynamics of a deformed Bose gas / Z. Chang, S.-X. Chen // J. Phys. A: Math. Gen. — 2002. — Vol. 35. — P. 9731–9743.

[175] *Chakrabarti R.* A (p, q)-oscillator realization of two-parameter quantum algebras / R. Chakrabarti, R. Jagannathan // J. Phys. A: Math. Gen. — 1991. — Vol. 24. — P. L711–L718.

[176] *Burban I. M.* On $(p, q; \alpha, \beta, l)$-deformed oscillator and its generalized quantum Heisenberg–Weyl algebra / I. M. Burban // Phys. Lett. A. — 2007. — Vol. 366, No. 4–5. — P. 308–314.

[177] Thermodynamics of a free q-fermion gas / R. Dutt, A. Gangopadhyaya, A. Khare, U. P. Sukhatme // Int. J. Mod.

Phys. A. — 1994. — Vol. 9, No. 15. — P. 2687–2698.

[178] Statistics for q-commutator in the case of $q^{s+1} = 1$ / Y. Yang, S. Xie, W. Feng, X. Wu // Mod. Phys. Lett. A. — 1998. — Vol. 13, No. 11. — P. 879–886.

[179] *Müller H.* Zur Frage intermediärer Statistiken / H. Müller // Ann. Phys. (Berlin). — 1950. — Bd. 442, No. 7–8. — S. 420–424.

[180] *Guénault A. M.* Intermediate statistics / A. M. Guénault, D. K. C. MacDonald // Mol. Phys. — 1962. — Vol. 5, No. 5. — P. 525–530.

[181] *Sokolova E. S.* Chemical potential of the low-dimensional multi-subband Fermi gas / E. S. Sokolova, S. S. Sokolov, N. Studart // J. Phys.: Condens. Matter. — 2010. — Vol. 22. — Art. 465304. — 8 p.

[182] *Srivatsan C. S.* Gentile statistics and restricted partitions / C. S. Srivatsan, M. V. N. Murthy, R. K. Bhaduri // Pramana – J. Phys. — 2006. — Vol. 66, No. 3. — P. 485–494.

[183] *Dai W.-S.* Do bosons obey Bose–Einstein distribution: Two iterated limits of Gentile distribution / W.-S. Dai, M. Xie // Phys. Lett. A. — 2009. — Vol. 373. — P. 1524–1526.

[184] *Shen Y.* The relation between properties of Gentile statistics and fractional statistics of anyon / Y. Shen, Q. Ai, G. L. Long // Physica A. — 2010. — Vol. 389. — P. 1565–1570.

[185] About an alternative distribution function for fractional exclusion statistics / Q. A. Wang, L. Nivanen, A. Le Méhauté, M. Pezeril // Nuovo Cim. — 2003. — Vol. 118B, No. 6. — P. 635–640.

[186] *Kapur J. N.* A note on the relationships between some probability distributions, measures of entropy, measures of directed divergence and distributions of statistical mechanics / J. N. Kapur // Indian J. Pure Appl. Math. — 1983. — Vol. 14, No. 12. — P. 1433–1438.

[187] *Calogero F.* Solution of a three-body problem in one dimension / F. Calogero // J. Math. Phys. — 1969. — Vol. 10, No. 12. — P. 2191–

2196.

[188] *Calogero F.* Ground state of a one-dimensional N-body system / F. Calogero // J. Math. Phys. — 1969. — Vol. 10, No. 12. — P. 2197–2200.

[189] *Sutherland B.* Quantum many-body problem in one dimension: Ground state / B. Sutherland // J. Math. Phys. — 1971. — Vol. 12, No. 2. — P. 246–250.

[190] *Sutherland B.* Quantum many-body problem in one dimension: Thermodynamics / B. Sutherland // J. Math. Phys. — 1971. — Vol. 12, No. 2. — P. 251–256.

[191] *Murthy M. V. N.* Thermodynamics of a one-dimensional ideal gas with fractional exclusion statistics / M. V. N. Murthy, R. Shankar // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 73, No. 25. — P. 3331–3334.

[192] *Bhaduri R. K.* Fractional exclusion statistics and two dimensional electron systems / R. K. Bhaduri, M. V. N. Murthy, M. K. Srivastava // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 76, No. 2. — P. 165–168.

[193] An explicit realization of fractional statistics in one dimension / S. Sree Ranjani, P. K. Panigrahi, A. K. Kapoor, A. Khare // Ann. Phys. — 2009. — Vol. 324. — P. 1176–1183.

[194] Thermodynamics for fractional exclusion statistics / S. B. Isakov, D. P. Arovas, J. Myrheim, A. P. Polychronakos // Phys. Lett. A. — 1996. — Vol. 212. — P. 299–303.

[195] Thermodynamic properties of particles with intermediate statistics / G. S. Joyce, S. Sarkar, J. Spałek, K. Byczuk // Phys. Rev. B. — 1996. — Vol. 53, No. 3. — P. 990–993.

[196] *Aoyama T.* Specific heat of the ideal gas obeying the generalized exclusion statistics / T. Aoyama // Eur. Phys. J. B. — 2001. — Vol. 20. — P. 123–131.

[197] *Qin F.* Adiabatic sound velocity and compressibility of a trapped d-dimensional ideal anyon gas / F. Qin, J.-s. Chen // Phys. Lett. A. —

2012. — Vol. 376. — P. 1191–1196.

[198] *Быцко А. Г.* Статистика Халдейна–Ву и дилогарифм Роджерса / А. Г. Быцко // Зап. науч. сем. ПОМИ (С.-Петербург. отделен. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН). — 2002. — Vol. 291. — P. 64–77.

[199] *Acharya R.* Statistical mechanics of anyons / R. Acharya, P. Narayana Swamy // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — Vol. 27. — P. 7247–7263.

[200] *Chaichian M.* Statistics of q-oscillators, quons and relations to fractional statistics / M. Chaichian, R. Gonzalez Felipe, C. Montonen // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — Vol. 26. — P. 4017–4034.

[201] What is between Fermi–Dirac and Bose–Einstein statistics? / K. Byczuk, J. Spałek, G. S. Joyce, S. Sarkar // Acta Phys. Polon. B. — 1995. — Vol. 26, No. 12. — P. 2167–2184.

[202] *Mirza B.* Thermodynamic geometry of fractional statistics / B. Mirza, H. Mohammadzadeh // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 82, No. 3. — Art. 031137. — 10 p.

[203] *Ruppeiner G.* Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory / G. Ruppeiner // Rev. Mod. Phys. — 1995. — Vol. 67, No. 3. — P. 605–659; erratum: Rev. Mod. Phys. — 1996. — Vol. 68, No. 1. — P. 313.

[204] Condensation of an ideal gas with intermediate statistics on the horizon / S. Zare, Z. Raissi, H. Mohammadzadeh, B. Mirza // Eur. Phys. J. C. — 2012. — Vol. 72. — Art. 2152. — 12 p.

[205] *Büyükkılıç F.* A fractal approach to entropy and distribution functions / F. Büyükkılıç, D. Demirham // Phys. Lett. A. — 1993. — Vol. 181, No. 1. — P. 24–28.

[206] q-generalized Bose–Einstein condensation based on Tsallis entropy / Jincan Chen, Zhipeng Zhang, Guozhen Su [et al.] // Phys. Lett. A. — 2002. — Vol. 300, No. 1. — P. 65–70.

[207] *Wang Q. A.* Quantum gas distribution prescribed by factorization hypothesis of probability / Q. A. Wang // Chaos Solitons Fractals. — 2002. — Vol. 14. — P. 765–770.

[208] *Wang Q. A.* Extensive generalization of statistical mechanics based on incomplete information theory / Q. A. Wang // Entropy. — 2003. — Vol. 5. — P. 220–232.

[209] Understanding heavy fermion from generalized statistics / Y. Kaupp, S. Liraki, D. Tayurskii [et al.] // J. Low Temp. Phys. — 2008. — Vol. 150. — P. 660–666.

[210] *Landau L. D.* The theory of superfluidity of Helium II / L. D. Landau // J. Phys. (USSR). — 1941. — Vol. 5. — P. 71–90.

[211] *Landau L. D.* On the theory of supefluidity of Helium II / L. D. Landau // J. Phys. (USSR). — 1947. — Vol. 11. — P. 91.

[212] *Bijl A.* The lowest wave function of the symmetrical many particles system / A. Bijl // Physica. — 1940. — Vol. 7, No. 9. — P. 869–886.

[213] *Feynman R. P.* Atomic theory of the two-fluid model of liquid helium / R. P. Feynman // Phys. Rev. — 1954. — Vol. 94, No. 2. — P. 262–277.

[214] *Feynman R. P.* Energy spectrum of the excitations in liquid helium / R. P. Feynman, M. Cohen // Phys. Rev. — 1956. — Vol. 102, No. 5. — P. 1189–1204.

[215] *Jackson H. W.* Energy spectrum of elementary excitations in helium II / H. W. Jackson, E. Feenberg // Rev. Mod. Phys. — 1962. — Vol. 34, No. 4. — P. 686–693.

[216] *Sunakawa S.* Energy spectrum of the excitations in liquid helium II / S. Sunakawa, S. Yamasaki, T. Kebukawa // Progr. Theor. Phys. — 1969. — Vol. 41. — P. 919–941.

[217] *Vakarchuk I. A.* Microscopic theory of the energy spectrum of liquid He II / I. A. Vakarchuk, I. R. Yukhnovskii // Theor. Math. Phys. — 1980. — Vol. 42, No. 1. — P. 73–80.

[218] *Apaja V.* Soft excitation modes of quantum Bose fluids in the liquid-solid phase transition / V. Apaja, J. Halinen, M. Saarela // J. Low Temp. Phys. — 1998. — Vol. 113. — P. 909–914.

[219] *Kruglov V. I.* Roton excitation spectrum in liquid helium II / V. I. Kruglov, M. J. Collett // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87, No. 18. — P. 185302.

[220] *Pashitskii E. A.* Superfluid Bose liquid with a suppressed BEC and an intensive pair coherent condensate as a model of ^{4}He / E. A. Pashitskii, S. V. Mashkevich, S. I. Vilchynskyy // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 89, No. 7. — Art. 075301. — 4 p.

[221] *Adamenko I. N.* Application of the theory of continuous media to the description of thermal excitations in superfluid helium / I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, I. V. Tanatarov // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 67. — P. 104513.

[222] *Kruglov V. I.* Cluster model of roton excitations in liquid ^{4}He / V. I. Kruglov, M. J. Collett // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2008. — Vol. 41, No. 3. — P. 035305.

[223] Roton-phonon interactions in superfluid ^{4}He / B. Fåk, T. Keller, M. E. Zhitomirsky, A. L. Chernyshev // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109. — P. 155305.

[224] *Bobrov V. B.* Criterion of superfluidity, elementary excitations, and heat capacity singularity in superfluid helium / V. B. Bobrov, S. A. Trigger // Prog. Theor. Exp. Phys. — 2013. — P. 043I01.

[225] Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas / D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77, No. 3. — P. 420–423.

[226] *Stringari S.* Collective excitations of a trapped Bose-condensed gas / S. Stringari // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77, No. 12. — P. 2360–2363.

[227] Low energy excitation spectra of trapped Bose condensates / L. You,

W. Hoston, M. Lewenstein, M. Marinescu // Acta Phys. Polon. A. — 1998. — Vol. 93, No. 1. — P. 211-235.

[228] *Grossmann S.* On bose-Einstein condensation in harmonic traps / S. Grossmann, M. Holthaus // Phys. Lett. A. — 1995. — Vol. 208. — P. 188–192.

[229] *Haugerud H.* A more accurate analysis of Bose–Einstein condensation in harmonic traps / H. Haugerud, T. Haugset, F. Ravndal // Phys. Lett. A. — 1997. — Vol. 225. — P. 18–22.

[230] *Mullin W. J.* Bose-Einstein condensation in a harmonic potential / W. J. Mullin // J. Low Temp. Phys. — 1997. — Vol. 106, No. 5/6. — P. 615–641.

[231] *Gerbier F.* Quasi-1D Bose-Einstein condensates in the dimensional crossover regime / F. Gerbier // Europhys. Lett. — 2004. — Vol. 66, No. 6. — P. 771-777.

[232] *Parkins A. S.* The physics of trapped dilute-gas Bose–Einstein condensates / A. S. Parkins, D. F. Walls // Phys. Rep. — 1998. — Vol. 303. — P. 1–80.

[233] *Bloch I.* Many-body physics with ultracold gases / I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger // Rev. Mod. Phys. — 2008. — Vol. 80, No. 3. — P. 885–964.

[234] Production of two overlapping Bose-Einstein condensates by sympathetic cooling / C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, No. 4. — P. 586–589.

[235] *Papp S. B.* Tunable miscibility in a dual-species Bose-Einstein condensate / S. B. Papp, J. M. Pino, C. E. Wieman // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101, No. 4. — Art. 040402. — 4 p.

[236] Two atomic species superfluid / G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 89, No. 19. — Art. 190404. — 4 p.

[237] Dual-species Bose-Einstein condensate of ^{87}Rb and ^{133}Cs /

D. J. McCarron, H. W. Cho, D. L. Jenkin [et al.] // Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 84, No. 1. — Art. 011603(R). — 4 p.

[238] *Kasamatsu K.* Static and dynamic properties of multicomponent Bose–Einstein condensates of ytterbium atoms / K. Kasamatsu, M. Tsubota // J. Low Temp. Phys. — 2008. — Vol. 150. — P. 599–604.

[239] *Gross E. P.* Structure of a quantized vortex in boson systems / E. P. Gross // Nuovo Cim. Ser. 10. — 1961. — Vol. 20, No. 3. — P. 454–477.

[240] *Питаевский Л. П.* Вихревые нити в неидеальном бозе-газе / Л. П. Питаевский // Журн. эксп. теор. физ. — 1961. — Т. 40, № 2. — С. 646–651.

[241] *Lieb E. H.* Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state / E. H. Lieb, W. Liniger // Phys. Rev. — 1963. — Vol. 130, No. 4. — P. 1605–1616.

[242] *Lieb E. H.* Exact analysis of an interacting Bose gas. II. The excitation spectrum / E. H. Lieb // Phys. Rev. — 1963. — Vol. 130, No. 4. — P. 1616–1624.

[243] *Menotti C.* Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas / C. Menotti, S. Stringari // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 66, No. 4. — P. 043610.

[244] *Luo Yun-Wen.* Collective excitations of low dimensional trapped Bose-condensed gas / Yun-Wen Luo, Ji-Sheng Chen // Commun. Theor. Phys. — 2013. — Vol. 60, No. 6. — P. 673-676.

[245] *Hazzard K. R. A.* Hyperfine spectra of trapped bosons in optical lattices / K. R. A. Hazzard, E. J. Mueller // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 76, No. 6. — P. 063612.

[246] Strongly interacting array of Bose-Einstein condensates trapped in a one-dimensional optical lattice / M. Yamashita, Sh. Kato, A. Yamaguchi [et al.] // Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 87, No. 4. — P. 041604(R).

[247] *Stasyuk I. V.* Investigation of the bosonic spectrum of two-dimensional optical graphene-type lattices. superfluid phase / I. V. Stasyuk, O. V. Velychko, I. R. Dulepa // Ukr. J. Phys. — 2014. — Vol. 59, No. 10. — P. 993–1000.

[248] *Grech Ph.* The excitation spectrum for weakly interacting bosons in a trap / Ph. Grech, R. Seiringer // Commun. Math. Phys. — 2013. — Vol. 322. — P. 559–591.

[249] *Seiringer R.* Bose gases, Bose-Einstein condensation, and the Bogoliubov approximation / R. Seiringer // J. Math. Phys. — 2014. — Vol. 55, No. 7. — P. 075209.

[250] Excited states of exciton-polariton condensates in 2D and 1D harmonic traps / C. Trallero-Giner, M. V. Durnev, Y. Núñez Fernández [et al.] // Phys. Rev. B. — 2014. — Vol. 89, No. 20. — P. 205317.

[251] Observation of Bogoliubov excitations in exciton-polariton condensates / S. Utsunomiya, L. Tian, G. Roumpos [et al.] // Nature Phys. — 2008. — Vol. 4. — P. 700–705.

[252] *Rubo Yuri G.* Suppression of superfluidity of exciton-polaritons by magnetic field / Yuri G. Rubo, A. V. Kavokin, I. A. Shelykh // Phys. Lett. A. — 2006. — Vol. 358. — P. 227–230.

[253] *Deng Hui.* Exciton-polariton Bose-Einstein condensation / Hui Deng, Harmut Haug, Yoshihisa Yamamoto // Rev. Mod. Phys. — 2010. — Vol. 82. — P. 1489–1537.

[254] Room-temperature Bose–Einstein condensation of cavity exciton–polaritons in a polymer / J. D. Plumhof, T. Stöferle, L. Mai [et al.] // Nature Mater. — 2014. — Vol. 13, No. 3. — P. 247–252.

[255] *Fetter A. L.* Rotating trapped bose-einstein condensates / A. L. Fetter // Rev. Mod. Phys. — 2009. — Vol. 81, No. 2. — P. 647–691.

[256] *Tsubota M.* Quantum turbulence / M. Tsubota // J. Phys. Soc.

Jpn. — 2008. — Vol. 77, No. 11. — Art. 111006. — 12 p.

[257] *Kasamatsu K.* Quantised vortices in atomic Bose–Einsten condensates / K. Kasamatsu, M. Tsubota // Quantum Turbulence / Ed. by M. Tsubota, W. P. Halperin. — Elsevier, 2009. — Vol. 16 of *Progress in Low Temperature Physics*. — P. 351–403.

[258] *Paoletti M. S.* Quantum turbulence / M. S. Paoletti, D. P. Lathrop // Annu. Rev. Condens. Matter Phys. — 2011. — Vol. 2. — Art. 213–234.

[259] *Barenghi C.* Introduction to quantum turbulence / C. Barenghi, L. Skrbek, K. R. Sreenivasan // Proc. Natl. Acad. Sci. — 2014. — Vol. 111, Suppl. 1. — P. 4647–4652.

[260] *Ketterle W.* Bose–Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions / W. Ketterle, N. J. van Druten // Phys. Rev. A. — 1996. — Vol. 54. — P. 656–660.

[261] *Deng W.* Bose–Einstein condensation of finite number of confined particles / W. Deng, P. M. Hui // Solid Stat. Commun. — 1997. — Vol. 104. — P. 729–734.

[262] *Vakarchuk I. O.* Thermodynamics of the Bose-system with a small number of particles / I. O. Vakarchuk, A. A. Rovenchak // Condens. Matter Phys. — 2001. — Vol. 4. — P. 431–447.

[263] Sharp heat-capacity signature at the superfluid transition of helium films in porous glasses / D. Finotello, K. A. Gillis, A. Wong, M. H. W. Chan // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Vol. 61. — P. 1954–1957.

[264] *Chan M.* Helium in aerogel / M. Chan, N. Mulders, J. Reppy // Phys. Today. — 1996. — Vol. 49. — P. 30–37.

[265] Capture of superfluid helium by porous structures / R. E. Boltnev, I. B. Bykhalo, S. V. Ivashin [et al.] // J. Low Temp. Phys. — 2008. — Vol. 150. — P. 511–515.

[266] *Yamamoto K.* Heat capacity of liquid ^{4}He confined in a nanoporous glass / K. Yamamoto, Y. Shibayama, K. Shirahama // J. Low Temp.

Phys. — 2008. — Vol. 150. — P. 353–357.

[267] *Yamamoto K.* Thermodynamic evidence for nanoscale Bose–Einstein condensation in ^{4}He confined in nanoporous media / K. Yamamoto, Y. Shibayama, K. Shirahama // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100. — Art. 195301. — 4 p.

[268] Localized collective excitations in superfluid helium in vycor / R. M. Dimeo, P. E. Sokol, C. R. Anderson [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 81, No. 26. — P. 5860–5863.

[269] *Glyde H.R.* Bose-Einstein condensation measurements and superflow in condensed helium / H.R. Glyde // J. Low Temp. Phys. — 2013. — Vol. 172, No. 5/6. — P. 364–387.

[270] *Courtens E.* Experiments on the structure and vibrations of fractal solids / E. Courtens, R. Vacher // Proc. R. Soc. London. Ser. A. — 1989. — Vol. 423. — P. 55–69.

[271] *Kim S.-H.* The ideal Bose gas in non-integer dimensions and liquid ^{4}He in porous media / S.-H. Kim, Ch. K. Kim, K. Nahm // J. Phys.: Condens. Matter. — 1999. — Vol. 11. — P. 10269–10276.

[272] *Kim E.* Probable observation of a supersolid helium phase / E. Kim, M. H. W. Chan // Nature. — 2004. — Vol. 427, No. 6971. — P. 225–227.

[273] *Kim Duk Y.* Absence of supersolidity in solid helium in porous vycor glass / Duk Y. Kim, Moses H. W. Chan // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109, No. 15. — Art. 155301. — 5 p.

[274] Bose–Einstein condensation of photons in an optical microcavity / J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, M. Weitz // Nature. — 2013. — Vol. 468, No. 7323. — P. 545–548.

[275] *Kruchkov A.* Bose-Einstein condensation of light in a cavity / A. Kruchkov // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89, No. 3. — Art. 033862. — 9 p.

[276] *Georgescu I. M.* Quantum simulation / I. M. Georgescu, S. Ashhab,

F. Nori // Rev. Mod. Phys. — 2014. — Vol. 86, No. 1. — P. 153–185.

[277] *Barceló C.* Analogue gravity / C. Barceló, S. Liberati, M. Visser // Living Rev. Rel. — 2005. — Vol. 8. — Art. 12. — 133 p.

[278] Observation of isolated monopoles in a quantum field / M. W. Ray, E. Ruokokoski, K. Tiurev [et al.] // Science. — 2015. — Vol. 348, No. 6234. — P. 544–547.

[279] Coherent all-optical control of ultracold atoms arrays in permanent magnetic traps / A. Abdelrahman, T. Mukai, H. Häffner, T. Byrnes // Optics Express. — 2014. — Vol. 22, No. 3. — P. 3501–3513.

[280] *Pyrkov A. N.* Quantum teleportation of spin coherent states: beyond continuous variables teleportation / A. N. Pyrkov, T. Byrnes // New J. Phys. — 2014. — Vol. 16, No. 7. — Art. 073038. — 11 p.

[281] Quantum metrology: Dynamics versus entanglement / S. Boixo, A. Datta, M. J. Davis [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101, No. 4. — Art. 040403. — 4 p.

[282] Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology / M F. Riedel, P. Böhi, Yun Li [et al.] // Nature. — 2010. — Vol. 464, No. 7292. — P. 1170–1173.

[283] Quantum-enhanced measurements: Beating the standard quantum limit // Science. — 2004. — Vol. 306, No. 5700. — P. 1130–1336.

[284] *Jamison A. O.* Advances in precision contrast interferometry with Yb Bose-Einstein condensates / A. O. Jamison, B. Plotkin-Swing, S. Gupta // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 90, No. 6. — Art. 063606. — 7 p.

[285] *Боголюбов Н. Н.* Волновая функция нижнего состояния системы взаимодействующих бозе-частиц / Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев // Журн. эксп. теор. физ. — 1955. — Т. 28, № 2. — С. 129–139.

[286] *Rovenchak A. A.* Effective mass of atom and the excitation spectrum in liquid helium-4 at $T = 0$ K / A. A. Rovenchak // Fiz. Nizk.

Temp. — 2003. — Vol. 29, No. 2. — P. 145–148; Low Temp. Phys. — 2003. — Vol. 29, No. 2. — P. 105–107.

[287] *Quesne C.* Deformed algebras, position-dependent effective masses and curved spaces: an exactly solvable Coulomb problem / C. Quesne, V. M. Tkachuk // J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — Vol. 37, No. 14. — P. 4267–4281.

[288] *Bohm D.* A collective description of electron interactions: III. Coulomb interactions in a degenerate electron gas / D. Bohm, D. Pines // Phys. Rev. — 1953. — Vol. 92, No. 3. — P. 609–625.

[289] *Cowley R. A.* Inelastic scattering of thermal neutrons from liquid helium / R. A. Cowley, A. D. B. Woods // Can. J. Phys. — 1971. — Vol. 49, No. 2. — P. 177–200.

[290] *Robkoff H. N.* Structure-factor measurements in ^{4}He at saturated vapor pressure for $1.38 \leq T \leq 4.24$ K / H. N. Robkoff, R. B. Hallock // Phys. Rev. B. — 1981. — Vol. 24, No. 1. — P. 159–182.

[291] *Zubarev D. N.* Nonequilibrium Statistical Thermodynamics / D. N. Zubarev. — New York : Consultants Bureau, 1974. — 489 p.

[292] *Vakarchuk I. O.* A potential energy of interaction between helium atoms / I. O. Vakarchuk, V. V. Babin, A. A. Rovenchak // J. Phys. Stud. — 2000. — Vol. 4, No. 1. — P. 16–22.

[293] *Tang K. T.* An improved simple model for the van der Waals potential based on universal damping functions for the dispersion coefficients / K. T. Tang, J. P. Toennies // J. Chem. Phys. — 1994. — Vol. 80, No. 8. — P. 3726–3741.

[294] *Janzen A. R.* An accurate potential energy curve for helium based on *ab initio* calculations / A. R. Janzen, R. A. Aziz // J. Chem. Phys. — 1997. — Vol. 107, No. 3. — P. 914–919.

[295] Relativistic and quantum electrodynamics effects in the helium pair potential / M. Przybytek, W. Cencek, J. Komasa [et al.] // Phys.

Rev. Lett. — 2010. — Vol. 104. — Art. 183003. — 4 p.

[296] *Cleymans Jean.* Bose–Einstein condensation of kaons in dense nuclear matter / Jean Cleymans, Detlof W. von Oertzen // Phys. Lett. B. — 1990. — Vol. 249. — P. 511–513.

[297] *Rezaeian A. H.* Diquark Bose–Einstein condensation and nuclear matter / A. H. Rezaeian, H. J. Pirner // Nucl. Phys. A. — 2006. — Vol. 779. — P. 197–219.

[298] *Ceperley D. M.* Exact calculations of the ground state of model neutron matter / D. M. Ceperley, G. V. CHester // Phys. Rev. D. — 1976. — Vol. 13. — P. 3208–3213.

[299] *Strepparola E.* Ground-state structure and thermodynamics of Yukawa Bose fluids in dimensionality $D = 3$ and $D = 2$ / E. Strepparola, R. Nifosì, M. P. Tosi // J. Phys.: Condens. Matter. — 1998. — Vol. 10. — P. 11645–11658.

[300] *Halinen Jani.* Role of short- and long-range interactions in quantum Bose fluids / Jani Halinen, Vesa Apaja, Mikko Saarela // Physica B. — 2000. — Vol. 284–288. — P. 3–4.

[301] *McLaughlin I. L.* The structure factor of expanded liquid rubidium at long wavelengths / I. L. McLaughlin, W. H. Young // J. Phys. F: Met. Phys. — 1984. — Vol. 14. — P. 1–12.

[302] *Arlinghaus R. T.* The role of the pair potential in determining the structure factor of liquid rubidium / R. T. Arlinghaus, P. T. Cummings // J. Phys. F: Met. Phys. — 1987. — Vol. 17. — P. 797–807.

[303] *Singh R. N.* Effective pair potential, structure and heat capacity of undercooled liquid rubidium / R. N. Singh, R. P. Jaju, I. Ali // Physica B. — 2001. — Vol. 299. — P. 108–119.

[304] *Вакарчук И. А.* Матрицы плотности сверхтекучего гелия-4. I / И. А. Вакарчук // Теор. мат. физ. — 1989. — Vol. 80, No. 3. — P. 439–451.

[305] *Вакарчук И. А.* Матрицы плотности сверхтекучего гелия-4. II /

И. А. Вакарчук // Теор. мат. физ. — 1990. — Vol. 82, No. 3. — P. 438–449.

[306] *Vakarchuk I. O.* Representation of the short-range interactions in liquid helium via modified hard sphere potentials / I. O. Vakarchuk, A. A. Rovenchak // J. Phys. Stud. — 2001. — Vol. 5, No. 2. — P. 126–130.

[307] *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика / Р. Балеску. — Москва : Мир, 1978. — Т. 1. — 404 с.

[308] *Хуанг К.* Статистическая механика / К. Хуанг. — Москва : Мир, 1966. — 520 с.

[309] *Bagnato V.* Bose–Einstein condensation in an external potential / V. Bagnato, D. E. Pritchard, D. Kleppner // Phys. Rev. A. — 1987. — Vol. 35. — P. 4354–4358.

[310] *Bagnato V.* Bose–Einstein condensation in low-dimensional traps / V. Bagnato, D. Kleppner // Phys. Rev. A. — 1991. — Vol. 44, No. 11. — P. 7439–7441.

[311] *Posazhennikova A.* Colloquium: Weakly interacting, dilute Bose gases in 2D / A. Posazhennikova // Rev. Mod. Phys. — 2006. — Vol. 78. — P. 1111–1134.

[312] Bose–Einstein condensation in a harmonic trap: Effect of interactions on T_c // J. Stat. Phys. — 2003. — Vol. 110. — P. 903–910.

[313] *Mazzanti F.* Energy and structure of dilute hard- and soft-sphere gases / F. Mazzanti, A. Polls, Fabrocini A. // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 67. — Art. 063615. — 14 p.

[314] *Panda S.* Charged-boson fluid at zero-temperature in the fractional dimensional space / S. Panda, B. K. Panda // Eur. Phys. J. B. — 2010. — Vol. 76. — P. 187–196.

[315] *Yan Z.* Bose–Einstein condensation in trapped gas in n dimension / Z. Yan // Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 59.

[316] *Li M.* Density of states of particles in a generic power-law potentian

in any dimensional space / M. Li, L. Chen, Ch. Chen // Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 59. — P. 3109–3111.

[317] *Salasnich L.* Bose–Einstein Condensation in Exotic Trapping Potentials / L. Salasnich // Recent Research Developments in Physics / Ed. by M. Kawasaki, A. Ashgriz, R. Anthony. — India : Transworld Research Network, 2002. — Vol. 3, Part II. — P. 683–697.

[318] *Maslov V. P.* Nonstandard analysis, parastatistics, and fractals / V. P. Maslov // Theor. Math. Phys. — 2007. — Vol. 153, No. 2. — P. 1575–1581.

[319] *Bessis N.* Open perturbation and the Riccati equation: Algebraic determination of the quartic anharmonic oscillator energies and eigenfunctions / N. Bessis, G. Bessis // J. Math. Phys. — 1997. — Vol. 38, No. 11. — P. 5483–5492.

[320] *Mukaidani H.* Asymptotic expansions and a new numerical algorithm of the algebraic Riccati equation for multiparameter singularly perturbed systems / H. Mukaidani, T. Shimomura, K. Mizukami // J. Math. Analysis Appl. — 2002. — Vol. 267, No. 1. — P. 209–234.

[321] *Meini B.* Nonlinear matrix equations and structured linear algebra / B. Meini // Lin. Alg. Appl. — 2006. — Vol. 413, No. 2–3. — P. 440–457.

[322] *Colpa J. H. P.* Diagonalization of the quadratic boson Hamiltonian / J. H. P. Colpa // Physica. — 1978. — Vol. 93A. — P. 327–353.

[323] *Tsallis C.* Diagonalization methods for the general bilinear Hamiltonian of an assembly of bosons / C. Tsallis // J. Math. Phys. — 1978. — Vol. 19, No. 1. — P. 277–286.

[324] *Marinescu M.* Elementary excitation spectrum of a trapped weakly interacting Bose-Einstein condensate / M. Marinescu, A. F. Starace // Phys. Rev. A. — 1997. — Vol. 56, No. 1. — P. 570–574.

[325] *Yukalov V. I.* Basics of bose–einstein condensation / V. I. Yukalov //

Phys. Part. Nucl. — 2011. — Vol. 42, No. 3. — P. 460–513.

[326] *Titchmarsh E. C.* Some integrals involving hermite polynomials / E. C. Titchmarsh // J. London Math. Soc. — 1949. — Vol. s1-23, No. 1. — P. 15-16.

[327] *Lord R. D.* Some integrals involving hermite polynomials / R. D. Lord // J. London Math. Soc. — 1949. — Vol. s1-24, No. 2. — P. 101-112.

[328] *Bajpai S. D.* Some formule involving Hermite polynomial, confluent hypergeometric function and Meijer's G-function / S. D. Bajpai // Ann. Math. Siles. — 1992. — Vol. 6. — P. 13–20.

[329] *Giorgini S.* Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting bose gas / S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari // Phys. Rev. A. — 1996. — Vol. 54. — P. R4633–R4636.

[330] *Campbell R.* Interactions and collisions of discrete breathers in two-species Bose-Einstein condensates in optical lattices / R. Campbell, G.-L. Oppo, M. Borkowski // Phys. Rev. E. — 2015. — Vol. 91, No. 1. — P. 012909.

[331] Quantum degenerate mixtures of strontium and rubidium atoms / B. Pasquiou, A. Bayerle, S. M. Tzanova [et al.] // Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 88, No. 2. — P. 023601.

[332] *Van Schaeybroeck B.* Weakly interacting Bose mixtures at finite temperature / B. Van Schaeybroeck // Physica A. — 2013. — Vol. 392, No. 17. — P. 3806–3811.

[333] *Shen Y.* Intermediate-statistics quantum bracket, coherent state, oscillator, and representation of angular momentum [su(2)] algebra / Y. Shen, W.-Sh. Dai, M. Xie // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 75, No. 4. — Art. 042111. — 8 p.

[334] *Mashkevich S.* Virial coefficients of multispecies anyons / S. Mashkevich, J. Myrheim, K. Olaussen // Phys. Lett. A. — 2004. — Vol. 330. — P. 142–148.

[335] *Ponomarenko V. V.* Braiding of anyonic quasiparticles in charge transfer statistics of a symmetric fractional edge-state Mach-Zehnder interferometer / V. V. Ponomarenko, D. V. Averin // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 82. — Art. 205411. — 11 p.

[336] *Lavagno A.* Intermediate statistics as a consequence of deformed algebra / A. Lavagno, P. Narayana Swamy // Physica A. — 2010. — Vol. 389. — P. 993–1001.

[337] *Beciu M.* A note about fractional statistics / M. Beciu // Physica E. — 2009. — Vol. 41. — P. 786–787.

[338] *Barbour I. M.* Complex zeros of lattice partition functions / I. M. Barbour, D. S. Henty, E. G. Klepfish // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). — 1994. — Vol. 34. — P. 311–313.

[339] *Ipsen J. R.* Baryon number Dirac spectrum in QCD / J. R. Ipsen, K. Splittorff // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 86, No. 1. — Art. 014508. — 12 p.

[340] Singularity of the density of states in the two-dimensional Hubbard model from finite-size scaling of Yang-Lee zeros / E. Abraham, I. M. Barbour, P. H. Cullen [et al.] // Phys. Rev. B. — 1996. — Vol. 53, No. 12. — P. 7704–7713.

[341] *Chakraborty P. K.* On the electron energy spectrum in heavily doped non-parabolic semiconductors / P. K. Chakraborty, B. Nag, K. P. Ghatak // J. Phys. Chem. Solids. — 2003. — Vol. 64, No. 11. — P. 2191–2197.

[342] *Cragg G. E.* Complex chemical potential: Signature of decay in a Bose-Einstein condensate / G. E. Cragg, A. K. Kerman // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94, No. 19. — Art. 190402. — 4 p.

[343] *van Saarloos Wim.* Location of zeros in the complex temperature plane: Absence of Lee-Yang theorem / Wim van Saarloos, Douglas A. Kurtze // J. Phys. A: Math. Gen. — 1984. — Vol. 17, No. 6. — P. 1301–1311.

[344] *Matveev V.* Complex-temperature properties of the 2D Ising model with $\beta H = \pm i\pi/2$ / V. Matveev, R. Shrock // J. Phys. A: Math. Gen. — 1995. — Vol. 28. — P. 4859–4882.

[345] *Bailey T. K.* Complex energy eigenstates in quantum decay models / T. K. Bailey, W. C. Schieve // Nuovo Cim. A. — 1978. — Vol. 47, No. 2. — P. 231–250.

[346] *Bender Carl M.* Quantum effects in classical systems having complex energy / Carl M. Bender, Dorje C. Brody, Daniel W. Hook // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41, No. 35. — Art. 352003. — 15 p.

[347] *Chudesnikov D. O.* Bragg scattering on complex potential and formation of super-narrow momentum distributions of atoms in light fields / D. O. Chudesnikov, V. P. Yakovlev // Laser Phys. — 1991. — Vol. 1. — P. 110–119.

[348] Atom waves in crystals of light / M. K. Oberthaler, R. Abfalterer, S. Bernet [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77, No. 25. — P. 4980–4983.

[349] Observation of $\mathcal{PT}$-symmetry breaking in complex optical potentials / A. Guo, G. J. Salamo, D. Duchesne [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 103, No. 9. — Art. 093902. — 4 p.

[350] Avalanches of bose–Einstein condensates in leaking optical lattices / G. S. Ng, H. Hennig, R. Fleischmann [et al.] // New J. Phys. — 2009. — Vol. 11. — Art. 073045. — 14 p.

[351] *Gavrilik A. M.* Deformed gas of p, q-bosons: Virial expansion and virial coefficients / A. M. Gavrilik, A. P. Rebesh // Mod. Phys. Lett. B. — 2012. — Vol. 25, No. 5. — Art. 1150030. — 13 p.

[352] *Gupta R. K.* Planck distribution for a complex q-boson gas / R. K. Gupta, C. T. Bach, H. Rosu // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — Vol. 27. — P. 1427–1433.

[353] Cascade of phase transitions in $GdFe_3(BO_3)_4$ / R. Z. Levitin, E. A. Popova, R. M. Chtsherbov [et al.] // JETP Lett. — 2004. —

Vol. 79, No. 9. — P. 423–426.

[354] Cascade of magnetic field induced spin transitions in $LaCoO_3$ / M. M. Altarawneh, G.-W. Chern, N. Harrison [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109, No. 3. — Art. 037201. — 5 p.

[355] Anisotropic cascade of field-induced phase transitions in the frustrated spin-ladder system $BiCu_2PO_6$ / Yoshimitsu Kohama, Shuang Wang, Atsuko Uchida [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109, No. 16. — Art. 167204. — 5 p.

[356] *Полуэктов Ю. М.* О возможности двух фазовых переходов в жидком гелии / Ю. М. Полуэктов, А. С. Рыбалко // Физ. низк. темп. — 2013. — Т. 39, № 9. — С. 992–1000.

[357] Bloch oscillations and mean-field effects of Bose-Einstein condensates in 1D optical lattices / O. Morsch, J. H. Müller, M. Cristiani [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87, No. 14. — Art. 140402. — 4 p.

[358] Observation of dynamical instability for a Bose-Einstein condensate in a moving 1D optical lattice / L. Fallani, L. De Sarlo, J. E. Lye [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Vol. 93, No. 14. — Art. 140406. — 4 p.

[359] *Vladimirov V. S.* Equations of Mathematical Physics / V. S. Vladimirov. — New York : Marcel Dekker, 1971. — viii, 418 p.

[360] *Сивоконь В. Е.* Динамические фазовые переходы в двумерном электронном кристалле и двумерной гелиевой пленке / В. Е. Сивоконь, К. А. Наседкин // Физ. низк. темп. — 2012. — Т. 38, № 1. — С. 8–19.

[361] *Сивоконь В. Е.* Влияние сверхтекучего перехода на адсорбцию тонких гелиевых пленок / В. Е. Сивоконь // Физ. низк. темп. — 2006. — Т. 32, № 1. — С. 65–74.

[362] The effective thermal conductivity of porous media based on statistical self-similarity / J. Kou, F. Wu, H. Lu [et al.] // Phys. Lett. A. — 2009. — Vol. 374, No. 1. — P. 62–65.

[363] *R-Monteiro M. A.* Virial expansion for an ε-deformed system / M. A. R-Monteiro, I. Roditi, L. M. C. S. Rodrigues // Mod. Phys. Lett. B. — 1995. — Vol. 9, No. 10. — P. 607–610.

[364] *Rego-Monteiro M.* q-deformation and instability of the phonon spectrum in ^{4}He / M. Rego-Monteiro, L. M. C. S. Rodrigues, S. Wulck // Physica A. — 1998. — Vol. 259, No. 3–4. — P. 245–260.

[365] *Algin A.* Low-temperature thermostatistics of Tamm–Dancoff deformed boson oscillators / A. Algin, E. Ilik // Phys. Lett. A. — 2013. — Vol. 377, No. 31–33. — P. 1797–1803.

[366] Handbook of mathematical functions. Tenth printing / Ed. by M. Abramowitz, I. A. Stegun. — National Bureau of Standards, 1972. — XIV, 1046 p.

[367] Polylogarithm. — [Electronic resource]. — Available from: `http://functions.wolfram.com/ZetaFunctionsandPolylogarithms/PolyLog/`. — Cited on 26 June 2014.

[368] D-dimensional Bose gases and the Lambert W function / J. Tanguay, M. Gil, D. J. Jeffrey, S. R. Valluri // J. Math. Phys. — 2010. — Vol. 51. — Art. 123303. — 14 p.

[369] Higher Transcendental Functions / Ed. by A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger [et al.] ; based, in part, on notes left by Harry Bateman. — Malabar, FL : Krieger, 1981. — Vol. 1. — XIII, 302 p.

[370] Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in any-dimensional space / Mingzhe Li, Lixuan Chen, Jincan Chen [et al.] // Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 60, No. 5. — P. 4168–4170.

[371] *Bishop D. J.* Study of the superfluid transition in two-dimensional ^{4}He films / D. J. Bishop, J. D. Reppy // Phys. Rev. Lett. — 1978. — Vol. 40, No. 26. — P. 1727–1730.

[372] *Зуева Т. И.* Поверхностные электроны над жидким гелием / Т. И. Зуева, Ю. З. Ковдря, С. С. Соколов // Физ. низк. темп. — 2007. — Т. 33, № 1. — С. 3–11.

[373] *Engquist J.* Anyons, deformed oscillator algebras and projectors / J. Engquist // Nucl. Phys. B. — 2009. — Vol. 816 [FS]. — P. 356–375.

[374] *Dalton S. L.* Anyonic quon gas / S. L. Dalton, A. Inomata // Phys. Lett. A. — 1995. — Vol. 199. — P. 315–319.

[375] *Algin A.* High temperature behavior of a two-parameter deformed quantum group fermion gas / A. Algin, M. Arik, A. S. Arikan // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65, No. 2. — Art. 026140. — 5 p.

[376] *Algin A.* Fibonacci oscillators and two-parameter generalized thermostatistics / A. Algin // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2010. — Vol. 15. — P. 1372–1377.

[377] *Gavrilik A. M.* Deformed Bose gas models aimed at taking into account both compositeness of particles and their interaction / A. M. Gavrilik, Yu. A. Mishchenko // Ukr. J. Phys. — 2013. — Vol. 58, No. 12. — P. 1171–1177.

[378] *Gavrilik A. M.* Correlation function intercepts for $\tilde{\mu}, q$-deformed Bose gas model implying effective accounting for interaction and compositeness of particles / A. M. Gavrilik, Yu. A. Mishchenko // Nucl. Phys. B. — 2015. — Vol. 891. — P. 466–481.

[379] *Kaniadakis G.* Non-linear kinetics underlying generalized statistics / G. Kaniadakis // Physica A. — 2001. — Vol. 296. — P. 405–425.

[380] *F. Büyükkılıç D. Demirhan.* A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases / D. Demirhan F. Büyükkılıç, A. Güleç // Phys. Lett. A. — 1995. — Vol. 197, No. 3. — P. 209–220.

[381] Bose–Einstein and Fermi–Dirac distributions in nonextensive Tsallis statistics: an exact study / H. H. Aragão-Rêgo, D. J. Soares, L. S. Lucena [et al.] // Physica A. — 2003. — Vol. 317. — P. 199–208.

[382] *Tsallis C.* Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World / C. Tsallis. — New York : Springer,

2009. — xviii, 382 p.

[383] *Venkatesan R. C.* Generalized statistics variational perturbation approximation using q-deformed calculus / R. C. Venkatesan, A. Plastino // Physica A. — 2010. — Vol. 389, No. 6. — P. 1159–1172.

[384] *Borges P. F.* Generalized partition functions, interpolating statistics and higher virial coefficients / P. F. Borges, H. Boschi-Filho, C. Farina // Mod. Phys. Lett. A. — 1999. — Vol. 14, No. 18. — P. 1217–1226.

[385] *Mashkevich S.* The third virial coefficient of anyons revisited / S. Mashkevich, J. Myrheim, K. Olaussen // Phys. Lett. B. — 1996. — Vol. 382. — P. 124–130.

[386] *Sen D.* Spectrum of three anyons in a harmonic potential and the third virial coefficient / D. Sen // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Vol. 68, No. 20. — P. 2977–2980.

[387] *Sen D.* Some supersymmetric features in the spectrum of anyons in a harmonic potential / D. Sen // Phys. Rev. D. — 1992. — Vol. 46, No. 4. — P. 1846–1857.

[388] *Tsallis C.* What are the numbers that experiments provide? / C. Tsallis // Química Nova. — 1994. — Vol. 17, No. 6. — P. 468–471.

[389] Applying incomplete statistics to nonextensive systems with different q indices / L. Nivanen, M. Pezeril, Q. A. Wang, A. Le Méhauté // Chaos, Solitons and Fractals. — 2005. — Vol. 24. — P. 1337–1342.

[390] *Yamano T.* Some properties of q-logarithm and q-exponential functions in tsallis statistics / T. Yamano // Physica A. — 2002. — Vol. 305, No. 3–4. — P. 486–496.

[391] *Niven R. K.* The q-gamma and (q, q)-polygamma functions of Tsallis statistics / R. K. Niven, H. Suyari // Physica A. — 2009. — Vol. 388, No. 19. — P. 4045–4060.

[392] *Delves R. T.* Exact results in the theory of intermediate statistics / R. T. Delves, G. S. Joyce, I. J. Zucker // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1997. — Vol. 453. — P. 1177–1194.

[393] The fourth virial coefficient of anyons / A. Kristoffersen, S. Mashkevich, J. Myrheim, K. Olaussen // Int. J. Mod. Phys. A. — 1998. — Vol. 13, No. 21. — P. 3723–3747.

[394] Springer Handbook of Materials Measurement Methods / Ed. by H. Czichos, T. Saito, L. Smith. — Springer, 2006. — XXVI, 1207 p.

[395] The trapped two-dimensional Bose gas: From Bose–Einstein condensation to Berezinskii–Kosterlitz–Thouless physics / Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Cheneau [et al.] // New J. Phys. — 2008. — Vol. 10. — Art. 045006. — 22 p.

[396] *Wang Jian-Hui.* Thermodynamic properties of a finite Bose gas in a harmonic trap / Jian-Hui Wang, Yong-Li Ma // Chin. Phys. B. — 2010. — Vol. 19, No. 5. — Art. 050502. — 7 p.

[397] *Wang Jianhui.* Thermodynamics of finite Bose systems: An exact canonical-ensemble treatment with different traps / Jianhui Wang, Yongli Ma, Jizhou He // J. Low Temp. Phys. — 2011. — Vol. 162. — P. 23–33.

[398] *Daily K. M.* Occupation numbers of the harmonically trapped few-boson system / K. M. Daily, X. Y. Yin, D. Blume // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85, No. 5. — Art. 053614. — 14 p.

[399] Energy-level statistics of interacting trapped bosons / Barnali Chakrabarti, Anindya Biswas, V. K. B. Kota [et al.] // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 86, No. 1. — Art. 013637. — 11 p.

[400] Beyond mean-field ground-state energies and correlation properties of a trapped Bose–Einstein condensate / S. A. Sofianos, T. K. Das, B. Chakrabarti [et al.] // Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 87, No. 1. — Art. 013608. — 8 p.

[401] *Watabe S.* Comparative studies of many-body corrections to an interacting Bose-Einstein condensate / S. Watabe, Y. Ohashi // Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 88, No. 5. — Art. 053633. — 9 p.

[402] *Lavagno A.* Nonextensive nuclear liquid–gas phase transition /

A. Lavagno, D. Pigato // Physica A. — 2013. — Vol. 392, No. 20. — P. 5164–5171.

[403] *Bagci G. B.* Tsallis power laws and finite baths with negative heat capacity / G. B. Bagci, T. Oikonomou // Phys. Rev. E. — 2013. — Vol. 88, No. 4. — Art. 042126. — 5 p.

[404] *Wong Cheuk-Yin.* Tsallis fits to p_T spectra and multiple hard scattering in pp collisions at the LHC / Cheuk-Yin Wong, G. Wilk // Phys. Rev. D. — 2013. — Vol. 87, No. 11. — Art. 114007. — 19 p.

[405] Phase transition of a Bose gas in a harmonic potential / K. Damle, T. Senthil, S. N. Majumdar, S. Sachdev // Europhys. Lett. — 1996. — Vol. 36, No. 1. — P. 7–12.

[406] Bose-Einstein condensation in a dilute gas: Measurement of energy and ground-state occupation / J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77, No. 25. — P. 4984–4987.

[407] *Kempf A.* Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation / A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 52, No. 2. — P. 1108–1118.

[408] *Quesne C.* Harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in both position and momentum in a SUSYQM framework / C. Quesne, V. M. Tkachuk // J. Phys. A. — 2003. — Vol. 36. — P. 10373–10389.

[409] *Lavagno A.* Basic-deformed quantum mechanics / A. Lavagno // Rep. Math. Phys. — 2009. — Vol. 64, No. 1–2. — P. 79–91.

[410] *Kaniadakis G.* Theoretical foundations and mathematical formalism of the power-law tailed statistical distributions / G. Kaniadakis // Entropy. — 2013. — Vol. 15, No. 10. — P. 3983–4010.

[411] Bose–Einstein condensation of a two-dimensional harmonically trapped q-deformed boson system / Qi-Jun Zeng, Yong-Song Luo, Yuan-Guo Xu, Hao Luo // Physica A. — 2014. — Vol. 398. — P. 116–124.

[412] *Leibniz G. W.* Specimen de divulsionibus aequationum ad problemata indefinita in numeris rationalibus solvenda. 2. September 1674 / G. W. Leibniz // Leibniz G. W. Sämtliche Schriften und Briefe. Siebente Reihe: Mathematische Schriften / G. W. Leibniz. — Berlin : Akademie-Verlag, 1990. — Vol. Bd. 1: 1672–1676. Geometrie – Zahlentheorie – Algebra (1. Teil). — P. 740–755.

[413] *Eulero L.* De partitione numerorum / L. Eulero // Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae. — 1753. — Vol. 3. — P. 125–169.

[414] *Bogoliubov N. M.* Enumeration of plane partitions and the algebraic Bethe anzatz / N. M. Bogoliubov // Theor. Math. Phys. — 2007. — Vol. 150, No. 2. — P. 165–174.

[415] *Andrews G. E.* The Theory of Partitions / G. E. Andrews. — Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1976. — xiv, 255 p.

[416] *Hardy G. H.* Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n / G. H. Hardy, S. Ramanujan // C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. — 1917. — Vol. 164. — P. 35–38.

[417] *Hardy G. H.* Asymptotic formulæ in combinatory analysis / G. H. Hardy, S. Ramanujan // Proc. London Math. Soc. — 1918. — Vol. 17. — P. 75–115.

[418] *Rademacher H.* On the partition function $p(n)$ / H. Rademacher // Proc. London Math. Soc. (Ser. 2). — 1938. — Vol. 43. — P. 241–254.

[419] *Erdös P.* The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer / P. Erdös, J. Lehner // Duke Math. J. — 1941. — Vol. 8. — P. 335–345.

[420] *Bohr N.* On the transmutation of atomic nuclei by impact of material particles. I. General theoretical remarks / N. Bohr, F. Kalckar // Kgl. Danske Vid. Selskab. Math. Phys. Medd. — 1937. — Vol. 14, No. 10. — P. 1–40.

[421] *Van Lier C.* On the statistical calculation of the density of the energy

levels of the nuclei / C. Van Lier, G. E. Uhlenbeck // Physica. — 1937. — Vol. 4. — P. 531–542.

[422] *Debnath L.* Srinivasa Ramanujan (1887–1920) and the theory of partitions of numbers and statistical mechanics. A centennial tribute / L. Debnath // Int. J. Math. Math. Sci. — 1987. — Vol. 10. — P. 625–640.

[423] *Auluck F. C.* Statistical mechanics and the partitions of numbers / F. C. Auluck, D. S. Kothari // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1946. — Vol. 42. — P. 272–277.

[424] *Temperley H. N. V.* Statistical mechanics and the partition of numbers. I. The transition of liquid helium / H. N. V. Temperley // Proc. R. Soc. London A. — 1949. — Vol. 199. — P. 361–375.

[425] *Nanda V. S.* Partition theory and thermodynamics of multidimensional oscillator assemblies / V. S. Nanda // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1951. — Vol. 47. — P. 591–601.

[426] *Dutta M.* An essential statistical approach to thermodynamic problem II / M. Dutta // Proc. Natl. Inst. Scl. India A. — 1953. — Vol. 19. — P. 109–126.

[427] *Dutta M.* On new partition of numbers / M. Dutta // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1956. — Vol. 25. — P. 138–143.

[428] *Grossmann S.* Microcanonical fluctuations of a Bose system's ground state occupation number / S. Grossmann, M. Holthaus // Phys. Rev. E. — 1996. — Vol. 54. — P. 3495–3498.

[429] *Grossmann S.* Fluctuations of the particle number in a trapped Bose–Einstein condensate / S. Grossmann, M. Holthaus // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 79, No. 19.

[430] *Grossmann S.* From number theory to statistical mechanics: Bose–Einstein condensation in isolated traps / S. Grossmann, M. Holthaus // Chaos Solitons Fractals. — 1999. — Vol. 10. — P. 795–804.

[431] *Comtet A.* Level density of a Bose gas and extreme value statistics / A. Comtet, P. Leboeuf, S. N. Majumdar // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98. — Art. 070404. — 4 p.

[432] *Wright E. M.* Asymptotic partition formulae: I. Plane partitions / E. M. Wright // Quart. J. Math. — 1931. — Vol. 2. — P. 177–189.

[433] *Apostol T. M.* An elementary view of Euler's summation formula / T. M. Apostol // Am. Math. Mon. — 1999. — Vol. 106, No. 5. — P. 409–418.

[434] *Andrews G.* Macmahon's partition analysis xii: Plane partitions / G. Andrews, P. Paule // J. London Math. Soc. (2). — 2007. — Vol. 76. — P. 647–666.

[435] *Stanley R. P.* Theory and application of plane partitions / R. P. Stanley // Stud. Appl. Math. — 1971. — Vol. 50. — P. 167–188, 259–279.

[436] *Bogoliubov N. M.* Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model / N. M. Bogoliubov // J. Phys. A: Math. Gen. — 2005. — Vol. 38. — P. 9415–9430.

[437] *Borrmann P.* Recursion formulas for quantum statistical partition functions / P. Borrmann, G. Franke // J. Chem. Phys. — 1993. — Vol. 98, No. 3. — P. 2484–2485.

[438] *Bracewell R. N.* The Fourier transform and its application / R. N. Bracewell. — 3rd edition. — McGrow Hill, 2000. — xx, 616 p.

[439] *Weiss C.* Asymptotics of the number partitioning distribution / C. Weiss, M. Holthaus // Europhys. Lett. — 2002. — Vol. 59, No. 4. — P. 486–492.

[440] *MacMahon P. A.* Memoir on the theory of the partition of numbers — Part I / P. A. MacMahon // Phil. Trans. R. Soc. London A. — 1897. — Vol. 187. — P. 619–673.

[441] Triangle read by rows: T[n,k]= plane partitions of n containing k parts // On-line Encyclopedia of Integer Sequences. — [Electronic

resource]. — Available from: http://oeis.org/A091298. — Cited on 26 June 2014.

[442] Number of planar partitions of n // On-line Encyclopedia of Integer Sequences. — [Electronic resource]. — Available from: http://oeis.org/A000219. — Cited on 26 June 2014.

[443] *Mutafchiev L.* Asymptotic formula for the number of plane partitions of positive integers / L. Mutafchiev, E. Kamenov // Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. — 2006. — Vol. 59, No. 4. — P. 361–366.

[444] *Patton K. R.* Thermodynamic equivalence of certain ideal Bose and Fermi gases / K. R. Patton, M. R. Geller, M. P. Blencowe // Physica A. — 2005. — Vol. 357. — P. 427–435.

[445] *Girardeau M.* Relationship between systems of impenetrable bosons and fermions in one dimension / M. Girardeau // J. Math. Phys. — 1960. — Vol. 1. — P. 516–523.

[446] Tonks–Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice / B. Peredes, A. Widera, V. Murg [et al.] // Nature. — 1960. — Vol. 429. — P. 277–281.

[447] *Kinoshita T.* Observation of a one-dimensional Tonks-Girardeau gas / T. Kinoshita, T. Wenger, D. S. Weiss // Science. — 2004. — Vol. 305. — P. 1125–1128.

[448] *Bhatia D. P.* Asymptotic results for the number of multidimensional partitions of an integer and directed compact lattice animals / D. P. Bhatia, M. A. Prasad, D. Arora // J. Phys. A: Math. Gen. — 1997. — Vol. 30. — P. 2281–2285.

[449] *Almkvist G.* Asymptotic formulas and generalized Dedekind sums / G. Almkvist // Experimental Mathematics. — 1998. — Vol. 7. — P. 343–359.

[450] *Mustonen V.* Numerical estimation of the asymptotic behaviour of solid partitions of an integer / V. Mustonen, R. Rajesh // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — Vol. 36. — P. 6651–6659.

[451] *Pareto V.* Cours d'économie politique / V. Pareto. — Lausanne : Rouge, 1896–1897. — T. I. — VIII, 430 p.; T. II. — IV, 426 p.

[452] *Estoup J. B.* Gammes sténographiques : méthode & exercices pour l'acquisition de la vitesse / J. B. Estoup. — 4e édition. — Paris : Institut Sténographique de France, 1916. — 151 p.

[453] *Zipf G. K.* The psycho-biology of languages : An introduction to dynamic philology / G. K. Zipf. — Boston, Mass. : Houghton-Mifflin, 1935. — ix, 336 p.

[454] *Zipf G. K.* Human behavior and the principle of least effort : An introduction to human ecology / G. K. Zipf. — Cambridge, Mass. : Addison-Wesley, 1949. — xi, 573 p.

[455] *Petruszewycz M.* L'histoire de la loi d'Estoup-Zipf : documents / M. Petruszewycz // Math. Sci. Hum. — 1973. — Vol. 44. — P. 41–56.

[456] *Kanter I.* Markov processes: Linguistics and Zipf's law / I. Kanter, D. A. Kessler // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 74, No. 22. — P. 4559–4562.

[457] *Fontanari J. F.* Solvable null model for the distribution of word frequencies / J. F. Fontanari, L. I. Perlovsky // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 70. — Art. 042901. — 4 p.

[458] *Ferrer i Cancho R.* Decoding least effort and scaling in signal frequency distributions / R. Ferrer i Cancho // Physica A. — 2005. — Vol. 345. — P. 275–284.

[459] Public transport networks: empirical analysis and modeling / C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, V. Palchykov // Eur. Phys. J. B. — 2009. — Vol. 68. — P. 261–275.

[460] *Urzúa C. M.* A simple and efficient test for Zipf's law / C. M. Urzúa // Economics Letters. — 2000. — Vol. 66. — P. 257–260.

[461] *Knudsen Thorbjørn.* Zipf's law for cities and beyond: The case of Denmark / Thorbjørn Knudsen // Am. J. Econ. Sociol. — 2001. — Vol. 60, No. 1. — P. 123–146.

[462] *Gulten Timothy R.* Spatial and temporal patterns in civil violence: Guatemala, 1977–1986 / Timothy R. Gulten // Politics and the Life Sciences. — 2002. — Vol. 21, No. 1. — P. 26–36.

[463] *Bender M. L.* The genetic code and Zipf's law / M. L. Bender, Pritmohinder Gill // Current Anthropology. — 1986. — Vol. 27. — P. 280–283.

[464] *Блажиєвський Л.* Варіаційний метод в оптимізаційній задачі моделі minority game / Л. Блажиєвський, В. Янішевський // Журн. фіз. досл. — 2009. — Т. 13, № 2. — Ст. 2601. — 7 с.

[465] *Mandelbrot B.* An informational theory of the statistical structure of languages / B. Mandelbrot // Communication Theory / Ed. by W. Jackson. — New York : Academic, 1953. — P. 486–502.

[466] *de Campos Haroldo.* The informational temperature of the text / Haroldo de Campos, Jon M. Tolman // Poetics Today. — 1982. — Vol. 3. — P. 177–187.

[467] *Kosmidis K.* Statistical mechanical approach of human language / K. Kosmidis, A. Kalampokis, P. Argyrakis // Physica A. — 2006. — Vol. 366. — P. 495–502.

[468] *Miyazima S.* Measuring the temperature of texts / S. Miyazima, K. Yamamoto // Fractals. — 2008. — Vol. 16. — P. 25–32.

[469] Word frequency studies / I.-I. Popescu, G. Altmann, P. Grzybek [et al.]. — Berlin ; New York : Mouton de Gruyter, 2009. — xii, 278 p.

[470] *Бук С. Н.* Частотний словник роману "Перехресні стежки" / С. Н. Бук, А. А. Ровенчак // Стежками Франкового тексту (комунікативні, стилістичні та лексикографічні виміри роману "Перехресні стежки") / Ф. С. Бацевич (наук. ред), С. Н. Бук, Л. М. Процак [та ін.]. — Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. — С. 138–369.

[471] The Jewish Encyclopedia / E. G. Hirsch, I. M. Casanowicz, J. Jacobs, M. Schloessinger. — New York : Funk and Wagnalls,

1901–1906. — P. 226–229. — Available online at: http://www.jewishencyclopedia.com.

[472] The Complete Concordance to Shakspere / Compiler M. C. Clarke. — New York : Wiley and Putman, 1846. — vii, 860 p.

[473] *Kornai A.* Mathematical Linguistics / A. Kornai. — London : Springer, 2008. — xiii, 289 p.

[474] *Тулдава Ю. П.* Проблемы и методы квантитативно-системного исследования лексики / Ю. П. Тулдава. — Таллинн : Валгус, 1987. — 203 с.

[475] Project Description: Designing and Constructing a Typologically Balanced Ukrainian Text Database / E. Kelih, S. Buk, P. Grzybek, A. Rovenchak // Methods of Text Analysis: Omnibus volume. — Chernivtsi : ČNU, 2009. — P. 125–132.

[476] *Eder M.* Does size matter? Autorship attribution, short samples, big problem / M. Eder // Digital Humanities 2010: Conference abstracts. — London : Office for Humanities Communication, 2010. — P. 132–135.

[477] *Koppel M.* Authorship attribution in the wild / M. Koppel, J. Schler, Sh. Argamon // Language Resources and Evaluation. — 2011. — Vol. 45, No. 1.

[478] *Luyckx K.* The effect of author set size and data size in authorship attribution / K. Luyckx, W. Daelemans // Literary and Linguistic Computing. — 2011. — Vol. 26, No. 1.

[479] *Heisenberg W.* Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik / W. Heisenberg // Z. Phys. — 1927. — Bd. 43, No. 3–4. — S. 172–198.

[480] *Kennard E. Y.* Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen / E. Y. Kennard // Z. Phys. — 1927. — Bd. 44, No. 4–5.

[481] Classification of author and/or genre? The impact of word length / E. Kelih, G. Antić, P. Grzybek, E. Stadlober // Classification – The

Ubiquitous Challenge / Ed. by C. Weihs, W. Gaul. — Heidelberg : Springer, 2005. — P. 498–505.

[482] Word-length-related parameters of text genres in the Ukrainian language. A pilot study / S. Buk, O. Humenchyk, L. Mal'tseva, A. Rovenchak // Text and Language: Structures – Functions – Interrelations. Quantitative perspectives / Ed. by P. Grzybek, E. Kelih, J. Mačutek. — Wien : Praesens, 2010. — P. 13–19.

[483] *Rovenchak A. Masadennin* (*The Little Prince* in Bamana): Experimental online concordance with parallel French and English texts / A. Rovenchak, S. Buk // Mandenkan: Bulletin semestriel d'études linguistiques mandé. — 2013. — No. 50. — P. 117–130.

[484] *Бук С.* 3 000 найчастотніших слів розмовно-побутового стилю сучасної української мови / С. Бук. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2006. — 180 с.

[485] *Popescu I.-I.* Some aspects of word frequencies / I.-I. Popescu, G. Altmann // Glottometrics. — 2006. — No. 13. — P. 23–46.

[486] *Бук С.* Статистична структура роману Івана Франка "Борислав сміється" / С. Бук // Уч. зап. Таврич. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Филол. — 2010. — Т. 23 (62), № 3. — С. 114–118.

[487] *Mačutek J.* Evaluating goodness-of-fit of discrete distribution models in quantitative linguistics / J. Mačutek, G. Wimmer // J. Quant. Ling. — 2013. — Vol. 20, No. 3. — P. 227–240.

[488] *Tuldava J.* The frequency spectrum of text and vocabulary / J. Tuldava // J. Quant. Ling. — 1996. — Vol. 3, No. 1. — P. 38–50.

[489] *Botha R.* Pidgin languages as a putative window on language evolution / R. Botha // Language & Communication. — 2006. — Vol. 26. — P. 1–14.

[490] *Bickerton D.* Language evolution: A brief guide for linguists / D. Bickerton // Lingua. — 2007. — Vol. 117. — P. 510–526.

[491] *Christiansen M. H.* Language Evolution / M. H. Christiansen, S. Kirby // Encyclopedia of Neuroscience / Ed. by Larry R. Squire. — Oxford : Academic Press, 2009. — P. 321–327.

[492] *Steels L.* Modeling the cultural evolution of language / L. Steels // Physics of Life Reviews. — 2011. — Vol. 8. — P. 339–356.

[493] *Fitch W. T.* Evolutionary developmental biology and human language evolution: Constraints on adaptation / W. T. Fitch // Evol. Biol. — 2012. — Vol. 39, No. 4. — P. 613–637.

[494] *Baxter G. J.* Fixation and consensus times on a network: A unified approach / G. J. Baxter, R. A. Blythe, A. J. McKane // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101, No. 25. — Art. 258701. — 4 p.

[495] *Bakalis E.* Modeling language evolution: Aromanian, an endangered language in Greece / E. Bakalis, A. Galani // Physica A. — 2012. — Vol. 391. — P. 4963–4969.

[496] *Wallace R.* Information theory, scaling laws and the thermodynamics of evolution / R. Wallace, R. G. Wallace // J. Theor. Biol. — 1998. — Vol. 192. — P. 545–559.

[497] Simulating the Evolution of Language / Ed. by A. Cangelosi, D. Parisi. — London ; New York : Springer, 2002. — xii, 355 p.

[498] *Blanchard Ph.* Markov chains or the game of structure and chance: From complex networks, to language evolution, to musical compositions / Ph. Blanchard, J. R. Dawin, D. Volchenkov // Eur. Phys. J. Special Topics. — 2010. — Vol. 184. — P. 1–82.

[499] *Popescu I.-I.* Hapax legomena and language typology / I.-I. Popescu, G. Altmann // J. Quant. Ling. — 2008. — Vol. 15. — P. 370–378.

[500] *Greenberg J. H.* A quantitative approach to the morphological typology of language / J. H. Greenberg // Int. J. Am. Ling. — 1960. — Vol. 26. — P. 178–194.