МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Васюта Василь Михайлович

УДК 530.145, 537.8

КВАНТОВІ СИСТЕМИ У ПРОСТОРІ ЗІ СПІНОВОЮ НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ

01.04.02 – теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2018

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі теоретичної фізики фізичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Ткачук Володимир Михайлович,
професор кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Гаврилик Олександр Михайлович,
завідувач відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Пелих Володимир Олександрович,
завідувач відділу диференціальних рівнянь і теорії функції Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

Захист відбудеться «30» березня 2018 р. о 15 год. 00 хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.09 при Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79005 Львів, вул. Кирила і Мефодія, 8, фізичний факультет, Велика фізична аудиторія.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий «_ _» лютого 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 35.051.09, А.А. Ровенчак
доктор фіз.-мат. наук, доцент

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Обґрунтування вибору теми дослідження. Наприкінці минулого століття майже одночасно в теоріях суперструн та квантової гравітації з'явилася ідея некомутативності операторів координат на малих (планківських) масштабах. Струнна аргументація гіпотези некомутативності координат викликала інтенсивні дослідження різноманітних фізичних систем в некомутативному просторі. Вже в перші роки після вищезгаданих публікацій було досліджено ряд задач з класичної та квантової механіки електродинаміки, теорії поля, тощо. Такі дослідження проводяться й надалі.

Також важливою прикладною задачею є пошук ефективних некомутативних моделей для різноманітних явищ у комутативному просторі. Так, наприклад, було знайдено зв'язок некомутативної теорії поля з теорією еніонів, теорією калібрувального поля, ядерними моделями.

Однак широкодосліджувана алгебра з канонічною некомутативністю володіє рядом проблем як фундаментального так і технічного характеру. Найбільшою з проблем є порушення інваріантності відносно поворотів (Лоренц-інваріантності) даної алгебри та, як наслідок, будь-яких фізичних теорій, побудованих у відповідному просторі. Крім того канонічна некомутативність веде до нелокальності, а також порушує мікропричинність, створюючи кореляцію між значеннями полів в точках, розділених просторовоподібним інтервалом. До технічних проблем можна віднести, наприклад, проблему впорядкування.

Тому останнім часом починають з'являтися все більше альтернативних до канонічної некомутативності алгебр, які намагаються вирішити одну чи більше вищезгаданих проблем, серед яких найбільша увагу приділяється відновленню інваріантності відносно поворотів.

Одним з таких напрямів є так звані алгебри зі спіновою некомутативністю координат, де вводяться некомутативні координати шляхом "змішування" звичайних координат з операторами спіну. В цьому контексті особливо цікавим є питання про дослідження впливу спінової некомутативності координат на відомі задачі та системи, а також порівняння ефектів спінової некомутативності з аналогічними ефектами, спричиненими канонічною некомутативністю.

Крім того фундаментальним питанням є спосіб побудови задачі в некомутативному просторі. Добре відомо, що при побудові гамільтоніана квантовомеханічної задачі чи функції Лагранжа деякого поля, з необхідністю виникає проблема впорядкування некомутативних операторів координат. В просторі з канонічною некомутативністю ця проблема традиційно вирішується або простою заміною комутативних координат на некомутативні, або введенням зіркового добутку Мояли. Певні варіанти спінової некомутативності дозволяють вирішити цю проблему в дещо інший спосіб.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та відповідно до держбюджетних тем Фф-110Ф "Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберга" (2013–2014 рр., номер держреєстрації 0112U001275), Фф-30Ф "Класичні і квантові системи з нестандартними комутаційними співвідношеннями і статистиками" (2016–2017 рр., номер держреєстрації 0116U001539) та проекту ДФФД Ф64 "Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів" (2015-2016 рр., номери держреєстрації 0115U004838, 0116U005055).

Мета і завдання дослідження. Головною метою дисертаційної роботи є знаходження впливу спінової некомутативності координат на поведінку квантових та класичних систем, побудова нових алгебр зі спіновою некомутативністю координат, в рамках яких спрощується дослідження фізичних систем, встановлення верхньої межі для параметра некомутативності, дослідження впливу спінової некомутативності на сингулярні потенціали.

Для досягнення мети роботи поставлено наступні **задачі**: знайти спектр енергії гармонічного осцилятора та атома водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат, дослідити можливість падіння квантової частинки на притягальний центр обернено квадратичного потенціалу у просторі зі спіновою некомутативністю координат, побудувати нові алгебри зі спіновою некомутативністю, встановити верхню оцінку параметра спінової некомутативності виходячи зі сучасних експериментальних вимірювань.

Значна частина роботи присвячена дослідженню електромагнітного поля в просторі зі спіновою некомутативністю. Завданням цієї частини роботи є знаходження рівнянь поля в просторі зі спіновою некомутативністю, дослідження їх структури та їх розв'язання для певних задач.

Об'єктом дослідження є квантові та класичні системи у просторі зі спіновою некомутативністю координат.

Предметом дослідження є властивості та поведінка фізичних систем у просторі зі спіновою некомутативністю координат.

Методами дослідження є методи теорії збурень, метод представлення некомутативних координат через оператори, що задовільняють алгебру Гайзенберга, метод Ньотер, метод Боголюбова-Крилова.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній запропоновано два нових типи алгебр зі спіновою некомутативністю. Вперше знайдено вираз для мінімальної довжини у відповідних некомутативних просторах. Запропоновано новий альтернативний до зіркового добутку Мояли спосіб побудови некомутативних функцій. Також в роботі вперше точно розв'язано квантовий просторовий осцилятор та вперше в рамках теорії збурень розглянуто атом водню в просторі зі спіновою некомутативністю координат.

Вперше досліджено часову еволюцію квантової частинки в обернено квадратичному потенціалі. Вперше показано наявність квантової границі падіння для обернено квадратичного потенціалу, а саме – квантова частинка не падає на притягальний центр, якщо константа взаємодії менша за певне граничне значення. Вперше розглянуто обернено квадратичний потенціал у просторі зі спіновою некомутативністю координат і показано, що в такому просторі частинка замість падіння на центр утворюватиме зв'язані стани.

Вперше з першопринципів побудовано класичну електродинаміку в просторі зі спіновою некомутативністю координат. Знайдено точні рівняння електромагнітного поля у всіх порядках розкладу по параметру некомутативності.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, отримані у роботі, можуть бути використані для покращення верхньої оцінки параметра некомутативності шляхом їх порівняння з даними експериментальних вимірювань. Вирази для часу та умови падіння частинки на обернено квадратичний потенціал полегшать проектування експерименту для спостереження квантових ефектів падіння на центр. Запропонований у роботі метод побудови електродинаміки в просторі зі спіновою некомутативністю дає можливість побудови теорії довільного поля в просторі зі спіновою некомутативністю координат та знаходження відповідних точних рівнянь поля, які можна використати для пошуку нетривіальних непертурбативних польових конфігурацій (інстантонів, скірміонів, тощо). Крім того, наявність точних рівнянь електромагнітного поля в просторі зі спіновою некомутативністю відкриває широкі можливості для дослідження високоенергетичних процесів (випромінювання атома в сильному магнітному полі магнетарів, дисперсія високоенергетичних гамма-променів, тощо) та знаходження верхньої оцінки параметра некомутативності.

Особистий внесок здобувача. Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи проф. В. М. Ткачук. Всі викладені в дисертації оригінальні результати отримані автором самостійно або при його безпосередній участі. У роботах, виконаних зі співавтором – науковим керівником, здобувачеві належить:

- знаходження точного розв'язку гармонічного осцилятора у просторі зі спіновою некомутативністю координат [1]; розрахунок поправок до спектру атома водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат [2]; розрахунок мінімальної довжини у просторі з відповідною алгеброю.
- знаходження умов падіння на притягальний обернено квадратичний потенціал та розрахунок часу падіння [4].
- знаходження верхньої та нижньої оцінки енергії основного стану частинки в обернено квадратичному потенціалі у просторі з різними алгебрами зі спіновою некомутативністю координат [5,6].
- знаходження дії для електромагнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю координат, знаходження калібрувальних перетворень, знаходження рівнянь руху та їх розв'язок для наступних систем: поле точкового заряду в магнітному полі, взаємодія двох електромагнітних хвиль, дисперсія електромагнітної хвилі в зовнішньому електричному та магнітному полях [3].

Результати статей, їхню інтерпретацію та застосовність використаних підходів співавтори обговорювали на паритетних засадах.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувач представляв особисто на таких конференціях та семінарах: Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика" (Львів, Україна, 2013); International Conference "Quantum Groups and Quantum Integrable Systems" (Київ, Україна, 2013); Week of Doctoral Students 2013 (Prague, Czech Republic, 2013); V Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" (Київ, Україна, 2013); Trans-European School of High Energy Physics (Басівка, Львівська обл., Україна, 2014); Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, Україна, 2014, 2015, 2017); Різдвяні дискусії (Львів, Україна, 2015, 2016, 2017); XXXV Max Born Symposium "The Planck Scale II" (Wroclaw, Poland, 2015); Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv (Zielona Góra, Poland, 2015); Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка (Львів, Україна, 2016, 2017); Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv (Lviv, Ukraine, 2016).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані у 6 журнальних статтях, матеріалах конференції, та 14 тезах конференцій.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, встановлено мету і завдання роботи, визначено об'єкт, предмет та методи дослідження, представлено наукову новизну та практичну цінність отриманих результатів. Відзначено особистий внесок здобувача, апробацію наукових результатів, публікацій, структуру та обсяг дисертації.

У **першому розділі** подано коротку історію ідеї некомутативності координат взагалі та спінової некомутативності зокрема, мотивацію дослідження систем в некомутативному просторі, а також висвітлено сучасний стан даної проблеми.

У **другому розділі** запропоновано дві нові алгебри зі спіновою некомутативністю.

Перша з цих алгебр, нерелятивістська, будується шляхом зсуву комутативних координат на тривимірний аналог вектора Паулі—Любанського

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \theta \boldsymbol{W} = \boldsymbol{r} + \frac{\theta}{4}[\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{p}] = \boldsymbol{r} + \frac{\theta}{2\hbar}[\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{p}], \tag{1}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}, \tag{2}$$

де **r**, **p** задовольняють недеформовану алгебру Гайзенберга, θ – параметр спінової некомутативності, $\boldsymbol{\sigma}$ – матриці Паулі. Повна алгебра операторів динамічних величин має вигляд

$$[X_i, X_j] = i\theta\varepsilon_{ijk}s_k + \frac{i\theta}{4\hbar}\varepsilon_{ijk}P_k(\boldsymbol{s},\boldsymbol{P}), \qquad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [P_i, P_j] = 0, \tag{3}$$

$$[s_i, s_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}s_k, \quad [X_i, s_j] = \frac{i\theta}{2}\left(s_iP_j - \delta_{ij}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{P})\right), \quad [P_i, s_j] = 0. \tag{4}$$

Побудована алгебра є інваріантною відносно поворотів. Крім того, в просторі з такою алгеброю присутня мінімальна довжина

$$\lambda_{min} = \sqrt{\min\langle R^2 \rangle} > 0, \tag{5}$$

яка в залежності від знаку параметра спінової некомутативності рівна

$$\lambda_{min}^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\hbar|\theta|, \quad \theta > 0, \tag{6}$$

$$\lambda_{min}^2 = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\hbar|\theta|, \quad \theta < 0. \tag{7}$$

Інша алгебра – релятивістська, отримується за допомогою зсуву координат чотиривимірного простору на відповідні γ-матриці Дірака

$$X^\mu = x^\mu + i\theta\gamma^\mu, \tag{8}$$

$$P^\mu = p^\mu = i\partial^\mu, \tag{9}$$

де уявна одиниця в означенні координат додана для ермітовості просторових координат. Повна алгебра операторів динамічних величин має вигляд

$$[X^\mu, X^\nu] = 2i\theta^2\sigma^{\mu\nu}, \quad [X^\mu, P^\nu] = -i\eta^{\mu\nu}, \quad [P^\mu, P^\nu] = 0, \tag{10}$$

$$\left[X^\mu, \sigma^{\alpha\beta}\right] = 2\theta\left(\gamma^\alpha\eta^{\mu\beta} - \gamma^\beta\eta^{\mu\alpha}\right), \quad \left[P^\mu, \sigma^{\alpha\beta}\right] = 0, \tag{11}$$

$$\left[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\gamma\delta}\right] = i\left(\eta_{\alpha\gamma}\sigma_{\beta\delta} - \eta_{\beta\gamma}\sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\alpha\delta}\sigma_{\beta\gamma} + \eta_{\beta\delta}\sigma_{\alpha\gamma}\right). \tag{12}$$

Така алгебра є інваріантною відносно перетворень Лоренца, а також володіє мінімальною довжиною

$$\lambda_{min} = \sqrt{2}\theta. \tag{13}$$

Для цієї алгебри за допомогою вейлевого впорядкування операторів можна ввести операцію відображення з простору комутативних функцій у простір некомутативних функцій

$$f \to \tilde{f} = \int d^n k e^{ik_\mu X^\mu} F_k, \tag{14}$$

де $F_k = 1/(2\pi)^n \int d^n x e^{ikx} f(x)$ є Фур'є-компонентою функції $f(x)$. У випадку некомутативних координат (8) маємо

$$\tilde{f}(x) = \hat{T} f(x), \quad \hat{T} = e^{i\theta\gamma^\mu\partial_\mu}. \tag{15}$$

Побудовані таким чином функції некомутативних координат володіють рядом цікавих математичних властивостей. Зокрема для добутку двох некомутативних функцій маємо

$$\hat{T}(f)\hat{T}(g) = \hat{T}(fg) + i\theta^2\sigma^{\alpha\beta}\tilde{\partial}_\alpha f \tilde{\partial}_\beta g, \tag{16}$$

де $\tilde{\partial}_\alpha = sinc\left(\theta\sqrt{-\partial^2}\right)\partial_\alpha$, $sinc(x) = \sin(x)/x$. Таким чином, добуток двох некомутативних функцій не рівний некомутативному відповіднику добутку двох функцій, як це є зокрема для добутку Мояли. Але тим не менше, добуток таких некомутативних функцій є асоціативним

$$\left(\hat{T}(f)\hat{T}(g)\right)\hat{T}(h) = \hat{T}(f)\left(\hat{T}(g)\hat{T}(h)\right). \tag{17}$$

Добуток кількох однакових некомутативних функцій рівний некомутативному відповіднику звичайного добутку цих функцій

$$\left(\hat{T}(f)\right)^n = \hat{T}(f^n), \tag{18}$$

що у застосуванні до розкладу в ряд Тейлора складеної функції дає

$$\hat{T}(\varphi(f)) = \varphi\left(\hat{T}(f)\right). \tag{19}$$

Оператор $\hat{T}$ комутує з похідною, тому

$$\partial_\mu\hat{T}(f) = \hat{T}\left(\partial_\mu f\right). \tag{20}$$

Стосовно інтегрування некомутативних функцій, то можна показати, що інтеграл від однієї, добутку двох і трьох некомутативних функцій рівний відповідному інтегралу від однієї чи добутку кількох комутативних функцій. Нетривіальний вклад від некомутативності в інтеграл отримується при інтегруванні добутку чотирьох і більше некомутативних функцій.

У **третьому розділі** розглянуто вплив спінової некомутативності на такі добре вивчені квантові системи як гармонічний осцилятор та атом водню.

Гамільтоніан тривимірного гармонічного осцилятора у просторі з алгеброю (3)-(4) має вигляд

$$H = \frac{p^2}{2m}\gamma^2 + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{m\omega^2\theta}{2\hbar}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{L}), \quad \gamma^2 = 1 + \frac{m\omega^2\theta^2}{8}. \qquad (21)$$

Спінова некомутативність ефективно змінює кінетичну енергію частинки та вмикає спін-орбітальну взаємодію в гармонічному осциляторі. Гамільтоніан (21) розв'язується точно, спектр та відповідні власні функції мають вигляд

$$E_{nlj} = \hbar\omega\gamma\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) - \frac{\hbar m\omega^2\theta}{4}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right), \qquad (22)$$

$$\psi(r,\theta,\varphi) = C_{nl}\rho^l e^{-\rho^2/2} L_n^{l+1/2}(\rho^2)\Omega_{ljm}(\theta,\varphi), \qquad (23)$$

де квантові числа пробігають значення $n, l = 0,1,2,\ldots$, $j = |l + 1/2|$, $\rho = r\sqrt{m\omega\gamma/\hbar}$, $L_n^{l+1/2}$ – приєднані поліноми Лаггера, Ω_{ljm} – сферичні спінори, стала нормування $C_{nl} = (-1)^n\left(\frac{m\omega\gamma}{\hbar}\right)^{3/4}\sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+l+3/2)}}$.

Атом водню у просторі зі спіновою некомутативністю не є точно розв'язуваною задачею. У просторі з нерелятивістським аналогом алгебри (10)-(12) з координатами $X_i = x_i + \theta s_i$ гамільтоніан атома водню записується у вигляді

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{e^2}{R}, \quad R = \sqrt{r^2 + 2\theta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) + 3\hbar^2\theta^2/4}. \qquad (24)$$

Аналізуючи гамільтоніан (24) в рамках теорії збурень, можна знайти перші поправки до енергетичних рівнів атома водню спричинені некомутативністю, які дорівнюють

$$\Delta E_{nj} = \frac{\hbar^2\theta^2 R_H}{a^2(2j+1\pm 1)\left(n + j \pm \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{9}{4(2j\pm 1)(2j\pm 1+2)} \pm \frac{2}{2j+1}\right), \qquad (25)$$

де R_H – стала Рідберга, a – радіус Бора, а квантові числа пробігають значення $n = 1,2,3,\ldots$, $j = l + 1/2$. Як видно з (25), при $j = 1/2$ та знакові "–", що відповідає рівням з $l = 0$, вираз для поправки до енергії стає нескінченним. Це пов'язано із незастосовністю звичайної теорії збурень для обчислення поправок до енергії s-рівнів.

Для коректного знаходження поправок до енергії s-рівнів нами було використано модифіковану теорію збурень [M.M. Stetsko, V.M. Tkachuk, Phys.Rev.A., 74, 012101 (2006)], ідея якої полягає у розкладі в ряд потенціалу деформованого атома водню в околі зміщеної відносно силового центру точки.

У рамках такої модифікованої теорії збурень поправки до енергії s-рівнів атома водню містять неаналітичну логарифмічну залежність від параметра спінової некомутативності

$$\Delta E_{ns} = -10R_H\frac{\hbar^2\theta^2}{a^2 n^3}\left(\ln\frac{\hbar\theta}{a} + D(n)\right), \qquad (26)$$

де чисельні значення констант $D(n)$ дорівнюють

$D(1) = 1.552\ldots$, $D(2) = 1.146\ldots$, $D(3) = 0.911\ldots$,
$D(4) = 0.746\ldots$, $D(5) = 0.620\ldots$, $D(6) = 0.516\ldots$,

На основі виразів (26) для поправок до енергії s-рівнів атома водню, та використовуючи експериментально виміряне значення для частоти двофотонного

$2s-1s$ переходу в атомі водню $f_{2s-1s}=2466061413187018(11)$Гц [A. Matveev, C.G. Parthey, K. Predehl *et al.*, Phys.Rev.Lett. 110, 230801 (2013)], у припущенні, що вплив некомутативності не перевищує точність експериментальних вимірювань отримуємо верхню оцінку для параметра спінової некомутативності

$$\hbar\theta \leq 2.5\cdot 10^{-19}\text{м}. \tag{27}$$

У **четвертому розділі** досліджується притягальний обернено квадратичний потенціал. Перша частина розділу присвячена часовій еволюції квантової частинки в оберенено квадратичному потенціалі в комутативному просторі. Аналіз еволюції в часі хвильової функції частинки в потенціалі $-\gamma/r^2$ пов'язаний з деякими труднощами внаслідок сингулярності потенціалу. Тому замість розгляду поведінки хвильової функції, ми досліджували рівняння руху для середніх квантово-механічних значень операторів динамічних величин. Можна показати, що система рівнянь Гайзенберга для обернено квадратичного потенціалу замикається для $\langle r^2\rangle$ і можна отримати наступне рівняння

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle r^2\rangle=\frac{4}{m}\langle H\rangle,\qquad H=\frac{p^2}{2m}-\frac{\gamma}{r^2}, \tag{28}$$

розв'язок якого, враховуючи, що гамільтоніан H є інтегралом руху, має вигляд квадратичного поліному по часу

$$\langle r^2\rangle_t=\langle r^2\rangle_0+\frac{\langle \boldsymbol{rp}+\boldsymbol{pr}\rangle_0}{m}t+\frac{2\langle H\rangle}{m}t^2. \tag{29}$$

В залежності від початкових умов еволюція частинки буде відбуватися по-різному: вона може як впасти на центр, так і віддалитися на безмежність. Цікаво, що можливий і квазістаціонарний випадок, коли $\langle r^2\rangle$ не змінюється впродовж еволюції.

Падіння на притягальний обернено квадратичний потенціал експериментально було реалізовано для ультрахолодних атомів літію, які рухалися в електричному полі тонкої зарядженої нитки [J. Denschlag, G. Umshaus, J. Schmiedmayer, Phys.Rev.Lett., 81, 737 (1998)]. Надалі цей експеримент називатимемо абревіатурою з прізвищ авторів DUS. Через циліндричну симетрію задачі падіння обернено квадратичний потенціал є двовимірним, тому в дисертаційній роботі двовимірний випадок розглянуто детальніше. Крім того, для простоти обрано $\langle \boldsymbol{rp}+\boldsymbol{pr}\rangle_0=0$, що виконується для дійсних хвильових функцій (перший стовпчик рисунка 1). В цьому випадку можна отримати вираз для часу падіння

$$t_f=\sqrt{-\frac{m\langle r^2\rangle_0}{2\langle H\rangle}}. \tag{30}$$

З цього виразу слідує, що при $\langle H\rangle<0$ частинка впаде на притягальний центр за скінченний час. Якщо $\langle H\rangle>0$, то час падіння є уявним, це відповідає відльоту частинки на нескінченність. У випадку $\langle H\rangle=0$ час життя є нескінченним, що відповідає вищезгаданим квазістаціонарним станам, при яких, як це випливає з (29), частинка еволюціонує безмежно довго з $\langle r^2\rangle_t=\langle r^2\rangle_0=const$. Прикладів таких станів є багато. Один з можливих квазістаціонарних станів має вигляд

$$\psi_s=\sqrt{\frac{2\beta^{s+1}}{\Gamma(s+1)}}r^s\exp\left(-\frac{1}{2}\beta r^2\right),\qquad s=\frac{2m\gamma}{3\hbar^2}. \tag{31}$$

Було показано існування цікавого квантового ефекту при малих значеннях константи взаємодії, а саме: квантова частинка принципово не може впасти на притягальний обернено квадратичний потенціал, якщо константа взаємодії γ менша

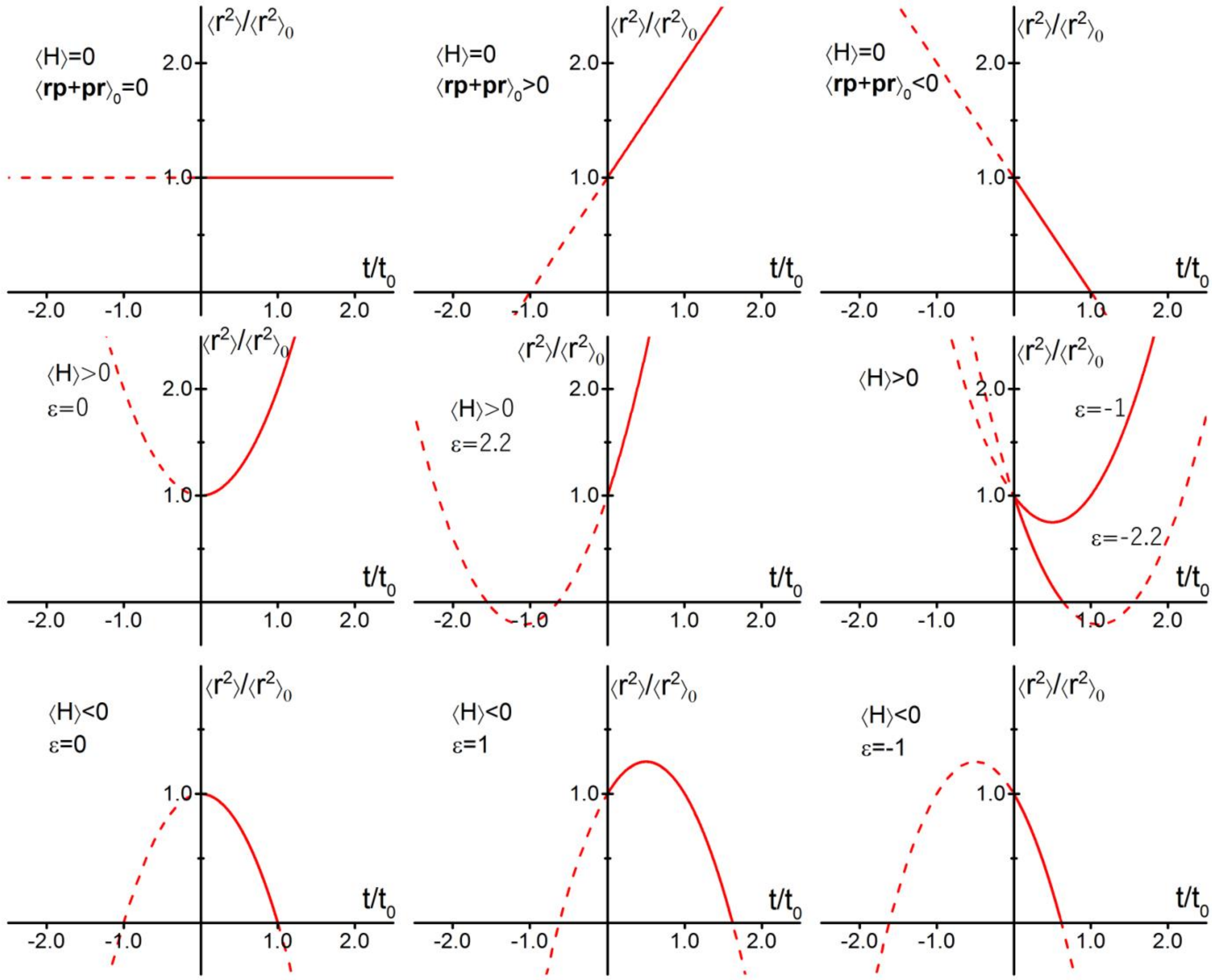

Рисунок 1. Еволюція $\langle r^2 \rangle$ для різних початкових умов. Повна лінія (суцільна і пунктирна) відображає розв'язок рівнянь руху для $\langle r^2 \rangle$, але дійсний рух частинки відповідає лише суцільній частині.

за деяке критичне значення γ_c $\gamma < \gamma_c$. Така ситуація принципово відрізняється від класичного випадку, коли падіння можливе для довільних значень параметра взаємодії (достатньо помістити частинку з нульовою швидкістю в будь-яку точку і вона скотиться у центр). Квантова границя падіння γ_c може бути порахована для конкретної хвильової функції. Наприклад для ψ_s (31)

$$\gamma_c = \frac{s\hbar^2}{2m}. \tag{32}$$

З виразу для часу падіння (30) у припущенні, що розподіл атомів у камері є гаусовим, що типово для пасток з малою густиною, нами було отримано експоненційний закон розпаду для числа атомів N, які впадуть на центр за час t

$$N(t) = N_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{33}$$

що відповідає результатам DUS. Час життя при підстановці значень параметрів експерименту DUS рівний $\tau \approx 7$ с, що добре узгоджується з експериментально

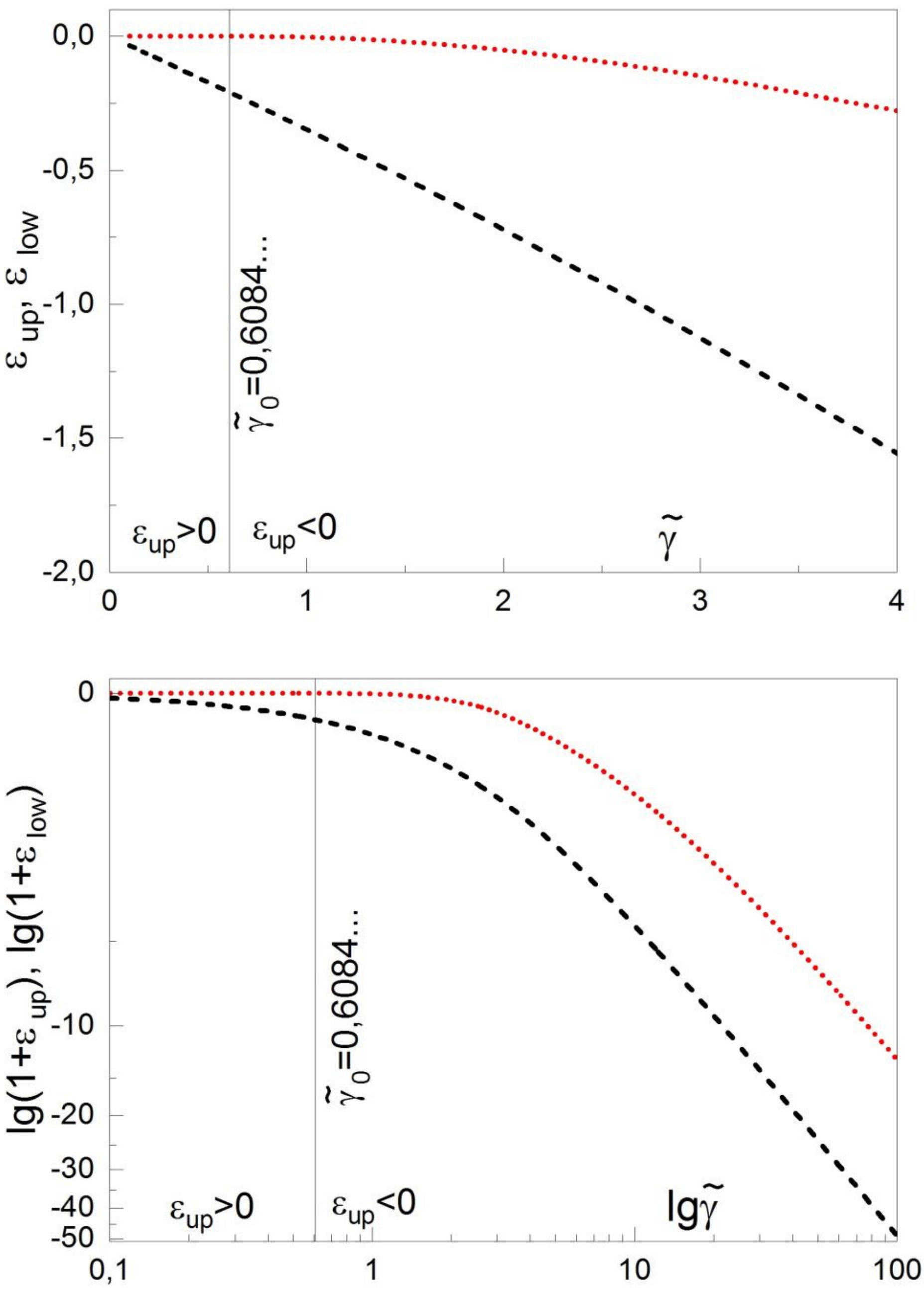

Рисунок 2. На графіках зображено залежність нижньої (пунктиром) та верхньої (точками) оцінки енергії основного стану від константи зв'язку $\tilde{\gamma}$. Вертикальна лінія $\tilde{\gamma}_0 = 0.6084\ldots$ відповідає граничному значенню константи зв'язку: при $\tilde{\gamma} < \tilde{\gamma}_0$ верхня оцінка енергії основного стану більша нуля, а при $\tilde{\gamma} > \tilde{\gamma}_0$ – менша. Значення енергії основного стану знаходиться між верхньою і нижньою лініями.

виміряним значенням $\tau_{exp} \approx 10$ с.

Оцінено критичний заряд і напругу в експерименті DUS, які відповідають квантовій границі падіння. Вони дорівнюють $q_c = 1.8 \cdot 10^{-12}$ Кл/м та $U_c = 0.29$ В відповідно. В даних експериментах вимірювання проводяться на напругах порядку сотень вольт, тому спостереження критичної напруги в експериментах DUS здійснити складно. У зв'язку з цим, в дисертаційній роботі запропоновано покращення експерименту DUS для спостереження квантової границі падіння. Збільшення критичної напруги можливе завдяки використанню легших атомів з меншим значенням поляризованості або збільшенню відношення R/r, де R – радіус камери, а r – радіус нитки.

Друга частина розділу містить дослідження поведінки квантової частинки в обернено квадратичному потенціалі у просторі з різними варіантами алгебр зі спіновою некомутативністю координат. Показано, що замість падіння на притягальний центр як в комутативному випадку, у випадку зі спіновою некомутативністю координат частинка утворює зв'язані стани.

Гамільтоніан частинки в потенціалі $-\gamma/R^2$ у просторі з некомутативними координатами $X_i = x_i + \theta\sigma_i$ записується у вигляді

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{\gamma}{r^2 + \hbar\theta r(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\sigma}) + 3\hbar^2\theta^2/4}. \tag{34}$$

Оскільки кінетична енергія є додатньо визначеною, то можемо знайти нижню межу енергії основного стану як мінімальне значення потенціальної енергії. Для знерозміреного гамільтоніана $h = H/H_0$, де $H_0 = 2\hbar^2/m\theta^2$ нижня межа для деяких значень параметра $\tilde{\gamma} = \gamma/\frac{\hbar^2}{2m}$ рівна

$$\varepsilon_{low}(\tilde{\gamma} = 1) = -0.3482\ldots, \quad \varepsilon_{low}(\tilde{\gamma} = 10) = -4.3475\ldots, \quad \varepsilon_{low}(\tilde{\gamma} = 100) = -49.0618\ldots.$$

Верхню межу енергії основного стану можна знайти з варіаційного принципу. Обираючи пробну хвильову функцію у вигляді

$$\psi = Ce^{-\frac{\alpha x}{2}}(x\Omega_{1/2,1,0} + i\beta/\alpha\Omega_{1/2,0,0}), \tag{35}$$

отримуємо обмеження на середнє від гамільтоніана h у вигляді

$$\langle h \rangle \le E(\alpha,\beta) = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\tilde{\gamma}}{2}\frac{a\beta^2 + b\beta + c}{12 + \beta^2}, \tag{36}$$

де a, b, c - деякі функції варіаційного параметра α. Мінімізація $E(\alpha,\beta)$ по α і β дає наступні значення для верхньої межі енергії основного стану

$$\varepsilon_{up}(\tilde{\gamma} = 1) = -0.0037\ldots, \quad \varepsilon_{up}(\tilde{\gamma} = 10) = -1.0753\ldots, \quad \varepsilon_{up}(\tilde{\gamma} = 100) = -13.0336\ldots.$$

Залежність $\varepsilon_{up}(\tilde{\gamma})$ та $\varepsilon_{low}(\tilde{\gamma})$ зображено на рисунку 2. Істинне значення енергії основного стану знаходиться між верхньою і нижньою лініями. Варіаційний метод дає від'ємне значення верхньої межі для констант зв'язку $\tilde{\gamma} \ge \tilde{\gamma}_0 = 0.6084\ldots$, тому саме для таких значень $\tilde{\gamma}_0$ можна стверджувати наявність зв'язаних станів, оскільки з від'ємності верхньої межі і скінченності нижньої межі випливає скінченність і від'ємність енергії основного стану.

Аналогічні оцінки енергії основного стану проводилися і для частинки в обернено квадратичному потенціалі у просторі з координатами (1). Гамільтоніан задачі має вигляд

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{\gamma}{r^2 - \theta(\boldsymbol{s},\boldsymbol{L})/\hbar + \theta^2 p^2/8}. \tag{37}$$

Враховуючи додатну визначеність оператора кінетичної енергії можна знайти нижню межу енергії основного стану гамільтоніана (37) у вигляді

$$\langle H\rangle \geq \langle -\frac{\gamma}{r^2-\theta(\boldsymbol{s},\boldsymbol{L})/\hbar+\theta^2p^2/8}\rangle \geq -\frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta}. \quad (38)$$

Нижня межа спектру може бути знайдена за допомогою варіаційних функцій, які є власними функціями знаменника (38). Мінімальне середнє від (37) приводить до

$$E_0 \leq \frac{3\hbar}{\sqrt{2}m\theta} - \frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta}. \quad (39)$$

З умови від'ємності (39) випливає, що частинка з гамільтоніаном (37) утворює зв'язані стани при константі зв'язку

$$\gamma > \frac{9\hbar^2}{4m}. \quad (40)$$

Таким чином, показано, що на відміну від комутативного випадку, де квантова частинка падає на притягальний обернено квадратичний потенціал, у просторі зі спіновою некомутативністю координат, у потенціалі $-\gamma/r^2$ виникають зв'язані стани.

У **п'ятому розділі** побудовано електродинаміку у просторі зі спіновою некомутативністю координат (8). В такому просторі електромагнітне поле є неабелевим і задається матричною функцією

$$\tilde{A}^\mu = \hat{T}A^\mu = e^{i\theta\gamma^\alpha\partial_\alpha}A^\mu. \quad (41)$$

В силу загальної схеми теорії неабелевих полів, тензор некомутативного електромагнітного поля записується у вигляді

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu\tilde{A}^\nu - \partial^\nu\tilde{A}^\mu - ie\left[\tilde{A}^\mu,\tilde{A}^\nu\right] = \partial^\mu\tilde{A}^\nu - \partial^\nu\tilde{A}^\mu + 2e\theta^2\sigma^{\alpha\beta}\tilde{\partial}_\alpha\tilde{A}^\mu\tilde{\partial}_\beta\tilde{A}^\nu. \quad (42)$$

Маючи вираз для тензора поля, легко побудувати дію некомутативного електромагнітного поля у вигляді

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x Sp\left\{-\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right\} =$$
$$= \int d^4x\left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}e^2\theta^4\left(\tilde{\partial}^\alpha A^\mu\tilde{\partial}_\alpha A_\mu\tilde{\partial}^\beta A^\nu\tilde{\partial}_\beta A_\nu - \tilde{\partial}^\alpha A^\mu\tilde{\partial}_\alpha A_\nu\tilde{\partial}^\beta A^\nu\tilde{\partial}_\beta A_\mu\right)\right\}. \quad (43)$$

Побудована дія є інваріантною відносно перетворень Лоренца, оскільки записана в явно коваріантній формі. Крім того, вона є C-, P-, T- інваріантною. Існує також і калібрувальна симетрія для дії (43). З умови калібрувальної інваріантності коваріантної похідної можна знайти закон калібрувальних перетворень для $\tilde{A}_\mu$

$$\tilde{A}'_\mu = \tilde{A}_\mu + \partial_\mu\tilde{\alpha} - 2e\theta^2\sigma^{\nu\beta}\tilde{\partial}_\nu\alpha\tilde{\partial}_\beta A_\mu. \quad (44)$$

Групою калібрувальних перетворень є група $U(1)\otimes SL(1,3)$.

З закону калібрувальних перетворень (44) в рамках методу Ньотер можна отримати модифікований закон збереження електричного струму

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad J^\mu = j^\mu - 2e^2\theta^4 sinc\left(\sqrt{-\theta\partial^2}\right)\left(\tilde{\partial}^\mu A^\alpha\tilde{\partial}^\nu A^\beta\tilde{\partial}_\beta F_{\alpha\beta}\right). \quad (45)$$

З варіації дії (43) випливають наступні рівняння некомутативного електромагнітного поля

$$\partial^2A^\mu + e^2\theta^4\tilde{\partial}_\alpha\left(\tilde{\partial}^\alpha A^\mu\tilde{\partial}^\beta A^\nu\tilde{\partial}_\beta A_\nu - \tilde{\partial}^\beta A^\mu\tilde{\partial}^\alpha A^\nu\tilde{\partial}_\beta A_\nu\right) = 0. \quad (46)$$

Ці рівняння є нелінійними, містять похідні всіх порядків, та тим не менше є точними. В дисертаційній роботі ці рівняння було проаналізовано для випадку деяких електромагнітних систем.

Зокрема в рамках теорії збурень досліджено електромагнітне поле точкового заряду в зовнішньому магнітному полі. Потенціал поля такої системи в першому наближенні по параметру некомутативності має вигляд

$$A^0 = \frac{q}{4\pi r}\left[1 - e^2\theta^4\left(h^2 - \frac{(\boldsymbol{h},\boldsymbol{r})^2}{2r^2}\right)\right] + \mathcal{O}(\theta^8), \tag{47}$$

$$A^i = \varepsilon^{ijk} h_j x_k \left[1 + \frac{e^2\theta^4}{2}\frac{q^2}{(4\pi)^2 r^4}\right] + \mathcal{O}(\theta^8). \tag{48}$$

Як можна бачити з отриманих виразів, магнітне поле екранує заряд, роблячи його значення меншим. Крім того, це екранування є анізотропним. З іншої сторони, існує і зворотній ефект: заряд також деформує магнітне поле.

Внаслідок нелінійності рівнянь поля (46) у просторі зі спіновою некомутативністю координат виникає взаємодія двох плоских хвиль. Дві плоскі електромагнітні хвилі з амплітудами B і C та хвильовими векторами k і q відповідно, що поширюються одна відносно іншої під кутом Θ задаються потенціалом $A_0^0 = 0$, $A_0^1 = 0$, $A_0^2 = B\sin\Theta\cos(k_\alpha x^\alpha)$, $A_0^3 = C\cos(q_\alpha x^\alpha) +$ $B\cos\Theta\cos(k\alpha x\alpha)$. Аналіз цієї системи в рамках простої теорії збурень приводить до резонансних рівнянь, тому ми узагальнили добре відомий з класичної механіки метод Боголюбова-Крилова на цей випадок. Таким чином з точністю до ведучого порядку розкладу по параметру некомутативності, потенціал електромагнітного поля двох плоских хвиль має вигляд

$$\begin{gathered} A^0 = 0,\ A^1 = 0,\ A^2 = B_s\cos\left(\tilde{k}_\alpha x^\alpha + e^2\theta^4\varphi\right) + e^2\theta^4 a_1, \\ A^3 = C\cos(\tilde{q}_\alpha x^\alpha) + B_c\cos(k_\alpha x^\alpha) + e^2\theta^4 a_2, \end{gathered} \tag{49}$$

де $\varphi = \frac{B_c C}{4} k_\alpha q^\alpha \sin\left(\left(q_\beta + k_\beta\right)x^\beta\right)$, $a_1 = \frac{B_s C}{16} k_\alpha q^\alpha \left(B_c \cos\left(\left(2q_\beta - k_\beta\right)x^\beta\right) -\right.$ $Bc\cos 2q\beta + k\beta x\beta - C\cos 2k\beta - q\beta x\beta + C\cos 2k\beta + q\beta x\beta$,
$a_2 = \frac{B_s^2 C}{16} k_\alpha q^\alpha \left(\cos\left(\left(2k_\beta + q_\beta\right)x^\beta\right) - \cos\left(\left(2k_\beta - q_\beta\right)x^\beta\right)\right)$,
$\tilde{k}_\alpha = k_\alpha + \frac{e^2}{4}\theta^4 C^2 k_\beta q^\beta q_\alpha$, $\tilde{q}_\alpha = q_\alpha + \frac{e^2}{4}\theta^4 B_s^2 k_\beta q^\beta k_\alpha$, $B_s = B\sin\Theta$, $B_c = B\cos\Theta$. З виразу (49) видно, що спінова некомутативність модифікує хвильовий вектор деяких компонент взаємодіючих хвиль та продукує вищі гармоніки. Останній ефект є інтуїтивно очікуваним внаслідок нелінійності рівнянь (46).

Рівняння некомутативного електромагнітного поля (46), незважаючи на свою складність, дозволяють точний розв'язок задачі про поширення плоскої електромагнітної хвилі у постійних електричному та магнітному полях. Така система в комутативному просторі задається потенціалом $A_0^0 = -\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}$, $A_0^1 = ax$, $A_0^2 = \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}$, $A_0^3 = A\cos k_\alpha x^\alpha$, що відповідає зовнішнім електричному полю $\boldsymbol{E}$ та магнітному полю $\boldsymbol{B} = \left(-b_z, a_z, b_x - a_y\right)^T$. Спінова некомутативність не впливає на зовнішні поля, залишаючи їхні значення такими самими як і в комутативному просторі. Більше того, плоска хвиля теж залишається плоскою хвилею в некомутативному просторі, однак з модифікованим законом дисперсії, який описується наступним виразом

$$\omega_s^2 = k_s^2 \frac{1 + e^2\theta^4([\boldsymbol{E}, \boldsymbol{k}_s]^2 - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}_s]^2 - [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}_s]^2) sinc^2(\theta k_s)}{1 + e^2\theta^4(E^2 - a^2 - b^2) sinc^2(\theta k_s)}. \quad (50)$$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено вплив різних варіантів спінової некомутативності координат на такі системи і задачі як атом водню, гармонічний осцилятор, обернено квадратичний потенціал, електромагнітне поле, поле точкового заряду в постійному магнітному полі, плоска електромагнітна хвиля в електричному та магнітному полях, дві плоскі електромагнітні хвилі. Також запропоновано і досліджено нові некомутативні алгебри, інваріантні відносно поворотів системи координат (перетворень Лоренца у релятивістському випадку). Для досягнення поставленої мети роботи було отримано наступні результати:

1. Вперше запропоновано інваріантну відносно поворотів нерелятивістську алгебру зі спіновою некомутативністю координат. Для запропонованої алгебри встановлено наявність мінімальної довжини, та знайдено її значення.
2. Вперше запропоновано релятивістську Лоренц-інваріантну алгебру з некомутативними спіново-зміщеними координатами. Встановлено значення мінімальної довжини для даної алгебри. Дана алгебра дозволяє легко ввести закон множення некомутативних функцій, який відрізняється від зіркового добутку Мояли. Досліджено математичні властивості такої операції множення.
3. Вперше точно розв'язано тривимірний гармонічний осцилятор в просторі зі спіновою некомутативністю координат. Показано, що спінова некомутативність знімає виродження енергетичних рівнів осцилятора за орбітальним квантовим числом. Показано, що для різних значень параметра некомутативності (або різних частот осцилятора) основний стан може реалізовуватися при різних наборах квантових чисел.
4. Вперше досліджено вплив алгебри зі спіново-зміщеними некомутативними координатами на спектр атома водню. Для знаходження поправок було використано модифікації теорії збурень для виділення неаналітичної логарифмічної залежності поправки до енергії s-станів від параметра некомутативності. Показано, що спінова некомутативність знімає виродження енергетичних рівнів по орбітальному квантовому числу. Використовуючи отримані результати, вперше встановлено верхню границю для параметра спінової некомутативності.
5. Вперше розглянуто часову еволюцію квантової частинки в притягальному обернено квадратичному потенціалі. Використовуючи рівняння Гайзенберга, вперше знайдено, що середнє від оператора квадрата радіус-вектора еволюціонує як квадратичний поліном по часу. Знайдено умови падіння частинки на притягальний центр. Вперше розраховано час падіння квантової частинки в обернено квадратичному потенціалі. Показано, що існують квазі-стаціонарні стани, які еволюціонують з постійним в часі середнім від оператора квадрата радіус-вектора. Результати порівняно з експериментальним вимірюванням падіння атомів літію на заряджену нитку.

6. Вперше показано, що для притягального обернено квадратичного потенціалу існує квантова границя падіння: частинка принципово не може впасти на притягальний центр, якщо константа взаємодії менша за деяке критичне значення. Запропоновано модифікації існуючого експерименту для можливості спостереження цієї квантової границі падіння.

7. Вперше показано, що в просторі зі спіновою некомутативністю обернено квадратичний потенціал регуляризується і замість падіння на притягальний центр утворюються зв'язані стани в такому потенціалі. Оцінено енергію основного стану частинки в обернено квадратичному потенціалі в просторах з різними алгебрами зі спіновою некомутативністю.

8. Вперше побудовано теорію електромагнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю. Побудовано тензор та дію електромагнітного поля в такому просторі. Знайдено калібрувальні перетворення для поля та закон збереження електричного струму.

9. Вперше в просторі з релятивістськими некомутативними спіново-зміщеними координатами записано рівняння електромагнітного поля. Ці рівняння є нелінійними, містять похідні всіх порядків, однак є точними у всіх порядках розкладу по параметру некомутативності.

10. Вперше розглянуто модифікацію закону Кулона під впливом зовнішнього магнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Показано, що магнітне поле ефективно екранує заряд, а заряд в свою чергу локально збільшує магнітне поле.

11. Вперше розглянуто взаємодію плоских електромагнітних хвиль у просторі зі спіновою некомутативністю. Показано, що взаємодія між хвилями, спричинена некомутативністю, генерує вищі гармоніки, а також змінює хвильовий вектор деяких компонент взаємодіючих хвиль.

12. Вперше точно розв'язано задачу про поширення плоскої електромагнітної хвилі в постійних електричному та магнітному полях у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Знайдено точний вираз для закону дисперсії електромагнітної хвилі в цьому випадку.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Васюта В. М. Точний розв'язок гармонічного осцилятора в просторі зі спіновою некомутативністю // Журн. фіз. дослідж.— 2013.— Т. 17, №3.— Ст. 3001.— 4 с.

[2] Васюта В. М. Поправки до енерґетичного спектра атома водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат // Журн. фіз. дослідж.— 2014.— Т. 18, №4.— Ст. 4001.— 7 с.

[3] Vasyuta V. M., Tkachuk V. M. Classical electrodynamics in a space with spin noncommutativity of coordinates // Phys. Lett. B.— 2016.— Vol. 761.— P. 462-468.

[4] Vasyuta V. M., Tkachuk V. M. Falling of a quantum particle in an inverse square attractive potential // Eur. Phys. J. D.— 2016.— Vol. 70, No. 12.— Art. 267.— 5 p.

[5] Васюта В. М., Зв'язані стани в потенціалі $-\gamma/r^2$ в просторі зі мпіновою некомутативністю координат // Вісн. Львів, ун-ту. Сер. фіз.— 2016.— Вип. 52.— С. 28-33.

[6] Васюта В. М., Ткачук В. М. Обернено квадратичний потенціал у просторі зі спіновою некомутативністю координат // Укр. фіз. журн.— 2017.— Т. 62, №4.— С. 343-348.
[7] Vasyuta V. M. Quantum systems in space with spin noncommutativity of coordinates // in: Trans-European School of High Energy Physics, Basivka, Lviv Region, Ukraine, July 17-24, 2014: Proceedings.— 2014.— 155-157.
[8] Васюта В. Узагальнена нерелятивістська спінова некомутативність // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2013", Львів, 15-17 травня 2013 р.: Тези доповідей.— С. F2.
[9] Vasyuta V. M. Exactly solvable problems in space with spin noncommutativity // International Conference "Quantum Groups and Quantum Integrable Systems", June 18 – 21, 2013, Kiev, Ukraine: Program and Abstracts.— P. 48.
[10] Vasyuta V. M. Spin noncommutativity of coordinates from Barut-Zanghi model // V Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics", December 24-27, 2013, Kyiv, Ukraine: Program & Proceedings.— P. 27.
[11] Васюта В. М. Поправки до енергетичного спектру атома водню в просторі зі спіновою некомутативністю // 14-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 4-6 червня 2014. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 48.
[12] Васюта В. Атом водню в просторі зі спіновою некомутативністю координат [Різдвяні дискусії 2015, Львів, 12-13 січня 2015] // Журн. фіз. дослідж.— 2015.— Т. 19, №1/2.— С. 1998-4.
[13] Васюта В. М. Час падіння квантової частинки на потенціал $-\gamma/r^2$ // 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 4-5 червня 2015. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 41.
[14] Vasyuta V. Hydrogen atom in space with spin noncommutativity // XXXV Max Born Symposium "The Planck Scale II", Wroclaw, Poland, 7-12 September 2015: Book of abstracts.— [P. 4].
[15] Vasyuta V. M. Evolution of a quantum particle in an inverse square potential // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 19-22 October 2015, Zielona Góra, Poland: Book of abstracts.— [P. 37].
[16] Васюта В. Електродинаміка у просторі зі спіновою некомутативністю координат [Різдвяні дискусії 2016, Львів, 11-12 січня 2016] // Журн. фіз. дослідж.— 2016.— Т. 20, №1/2.— С. 1998-4.
[17] Vasyuta V. M. Field equations in space with spin noncommutativity of coordinates// Workshop on Current Problems in Physics: Program and Abstracts, Lviv, 05–07 July 2016.— P. 18-19.
[18] Васюта В. М. Електромагнітні системи у просторі зі спіновою некомутативністю координат // 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 8-9 червня 2017. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 35.

АНОТАЦІЯ

Васюта В.М., Квантові системи у просторі зі спіновою некомутативністю координат. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика, – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

Запропоновано дві нові некомутативні алгебри зі спіновою некомутативністю координат. Показано, що у просторі з такими алгебрами присутня мінімальна довжина, знайдено її значення.

У просторі зі спіновою некомутативністю координат точно розв'язано гармонічний осцилятор та в рамках теорії збурень досліджено спектр атома водню. У випадку атома водню, звичайна теорія збурень не працює для s-рівнів, тому для цього випадку було розвинуто модифіковану теорію збурень.

Досліджено часову еволюцію квантової частинки в обернено квадратичному потенціалі. Показано існування квантової межі падіння – частинка не може впасти на притягальний обернено квадратичний потенціал для констант взаємодії, менших за деяке критичне значення. Отримані вирази для еволюції квантової частинки застосовано для опису результатів експериментів з падінням на притягальний обернено квадратичний потенціал.

Показано, що для достатньо великих значень константи взаємодії, для обернено квадратичного потенціалу у просторі з різними варіантами алгебр зі спіновою некомутативністю виникають зв'язані стани замість падіння частинки на притягальний центр.

Побудовано теорію електромагнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Знайдено тензор, лагранжіан та дію такого некомутативного поля. Отримано точні у всіх порядках розкладу по параметру некомутативності рівняння некомутативного електромагнітного поля.

В рамках побудованої електродинаміки розглянуто деякі електромагнітні системи. Зокрема показано, що спінова некомутативність координат приводить до анізотропного екранування заряду, зовнішнім магнітним полем. За допомогою узагальненого на релятивістський випадок методу Боголюбова-Крилова досліджено взаємодію двох плоских хвиль. Точно розв’язано задачу про поширення плоскої електромагнітної хвилі у зовнішніх електричному та магнітному полях.

Ключові слова: некомутативність, атом водню, гармонічний осцилятор, обернено квадратичний потенціал, падіння на притягальний центр, некомутативна теорія поля, нелінійна електродинаміка.

АННОТАЦИЯ

Васюта В. М., Квантовые системы в пространстве со спиновой некоммутативностью координат. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02. – теоретическая физика, – Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2017.

Предложены две новые алгебры со спиновой некоммутативностью координат. Показано, что в пространстве с такими алгебрами присутствует минимальная длина, найдено ее значение.

В пространстве со спиновой некоммутативностью координат точно решен гармонический осциллятор и в пределах теории возмущений исследован спектр атома водорода. В случае атома водорода, обычная теория возмущений не работает для s-уровней, поэтому для этого случая была развита модифицированная теория возмущений.

Исследована временная эволюция квантовой частицы в обратно квадратичном потенциале. Показано существование квантового предела падения – частица не может упасть на притягательный обратно квадратичный потенциал для констант взаимодействия, меньших некоторого критического значения. Полученные выражения для эволюции квантовой частицы применены для описания результатов экспериментов с падением на притягательный обратно квадратичный потенциал.

Показано, что для достаточно больших значений константы взаимодействия, для обратно квадратичного потенциала в пространстве с различными вариантами алгебр со спиновой некоммутативностью возникают связанные состояния вместо падения частицы на притягательный центр.

Построена теория электромагнитного поля в пространстве со спиновой некоммутативностью координат. Найдены тензор, лагранжиан и действие такого некоммутативного поля. Получены точные во всех порядках разложения по параметру некоммутативности уравнения некоммутативного электромагнитного поля.

В пределах построенной электродинамики рассмотрены некоторые электромагнитные системы. В частности показано, что спиновая некоммутативность координат приводит к анизотропном экранированию заряда внешним магнитным полем. С помощью обобщенного на релятивистский случай метода Боголюбова-Крылова исследовано взаимодействие двух плоских волн. Точно решена задача о распространении плоской электромагнитной волны во внешних электрическом и магнитном полях.

Ключевые слова: некоммутативность, атом водорода, гармоничный осциллятор, обратно квадратичный потенциал, падение на притягательный центр, некоммутативная теория поля, нелинейная электродинамика.

ABSTRACT

Vasyuta V.M. Quatum systems in space with spin noncommutativity of coordinates. – Manuscript.

Thesis for degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences by specialty 01.04.02. – Theoretical Physics. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2017.

The work is devoted to the systematic investigation of quantum and classical (in particular electromagnetic) systems in space with spin noncommutativity of coordinates.

To restore invariance relatively to rotations (Lorentz-invariance) we propose two new algebras (nonrelativistic and relativistic) with spin noncommutativity of coordinates. It is shown, that in space with these algebras the minimal length is present. Its value is found for both versions of noncommutative algebras. For a relativistic algebra we propose

a scheme of constructing a noncommutative function. This scheme is an alternate to the Moyal star product, which is used in space with canonical noncommutativity. Also mathematical properties of a product of such functions are investigated.

In space with spin noncommutativity of coordinates a harmonic oscillator is solved exactly, a spectrum and wave functions of the problem are found. It is shown, that spin noncommutativity breaks degeneracy of energy levels relatively to a sum $(2n+l)$ of principal and orbital quantum numbers. For some, sufficiently large, values of a parameter of noncommutativity a ground state is twice degenerated.

Within the perturbation theory a spectrum of the Hydrogen atom in space with spin noncommutativity of coordinates is studied. It is shown, that for levels with $l \neq 0$ spin noncommutativity breaks a degeneracy of energy levels relatively to orbital quantum level. To find corrections to s-levels a modified perturbation theory is developed. First non-zero corrections to energy of s-levels due to spin noncommutativity depend logarithmically upon the parameter of spin noncommutativity.

Using obtained results for corrections to the spectrum of the Hydrogen atom and results of experimental measurements of the frequency of the two-photon $2s$—$1s$ transition in Hydrogen atom, an upper estimation for the parameter of spin noncommutativity was established. The estimation is compared with analogous restrictions, that were found for a parameter of canonical noncommutativity.

Time evolution of a quantum particle in an attractive inverse square potential is investigated. It is found, that quantum mechanical average $\langle r^2 \rangle$ evolves as quadratic polynomial with time. Based on obtained results, conditions of falling into the attractive potential are found. It is well known, that an attractive inverse square potential does not produce stationary states, but in current work we show, that some quasi-stationary states exist. Such states evolve with $\langle r^2 \rangle$ being constant in time, namely they neither fall into the center nor escape from it. An example of such a quasi-stationary state is given.

It is shown, that in quantum case a limit of falling exists – a particle cannot fall into an attractive inverse square potential for coupling constants smaller than some critical value.

Obtained results for an evolution of a quantum particle in an inverse square potential are applied for description of the experiment, where neutral Lithium atoms fall into an inverse square potential, created by a thin charged wire. However for parameters of the experiment it is hard to measure the quantum limit of falling. Therefore we propose several modifications of the experiment, which may help in observing the quantum limit of falling experimentally.

An attractive inverse square potential is considered in space with different versions of spin noncommutative algebra. It is shown, that potential, and as conclusion total, energy of a particle in an inverse square potential in space with spin noncommutativity has lower limit. From the other hand, using the variational method, an upper estimation for a ground state energy is found. Thereby it is shown, that for sufficiently large coupling constants, in an attractive inverse square potential instead of falling of a particle into the center bound states appear.

Also a theory of electromagnetic field in space with spin noncommutativity of coordinates is built. Tensor of the electromagnetic field, the Lagrange function and its

action are found. The constructed action is Lorentz- and C-, P-, T- invariant. Moreover, it is invariant relatively to some gauge transformations, which were found from the condition of gauge invariance of covariant derivative. From the expression for gauge transformation, using the Noether method a modified conservation law of electrical current is found. From the least action principle exact field equations are received. These equations are nonlinear and contain derivatives of all orders, nevertheless they are exact.

Within the considered electrodynamics several electromagnetic systems are considered. It is shown, that spin noncommutativity does not affect an electrostatic field of a single point charge. Nevertheless, because of nonlinearity of considered theory, the electrostatic field of the point charge interacts with an external magnetic field. Such an interaction leads to anisotropic screening of the charge by magnetic field. Also an opposite effect is present – the electric field of the point charge effectively decreases a strength of the magnetic field in the vicinity of the charge.

Nonlinearity of the electrodynamics leads to interaction of two plane waves. To consider the problem we generalized the well-known from classical mechanics Bogolyubov-Krylow method on field theory. A consideration within this method shows, that, besides generation of the higher harmonics, spin noncommutativity modifies a wave vector of some components of the interacting waves.

Despite the complexity of obtained field equations, we find an exact solution of a problem of a plane wave propagation in constant electric and magnetic fields. External fields only change a dispersion law, but do not produce higher harmonics and birefringence. It is interesting, that in this problem, the wave does not modify external fields, how it is in the case of a point charge in an external magnetic field.

Key words: noncommutativity, Hydrogen atom, harmonic oscillator, inverse square potential, falling into an attractive center, noncommutative field theory, nonlinear electrodynamics.