**ВІДГУК**
**офіційного опонента на дисертаційну роботу Васюти Василя Михайловича «Квантові системи у просторі зі спіновою некомутативністю координат», подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика**

Ідея про розгляд простору, координати в якому є некомутативними, а також і перша конкретна її реалізація, були опубліковані ще в 1947 році. Однак лише десь з початку 90-х років минулого століття розпочалися активні дослідження різних аспектів цієї ідеї. Безперечно сильний імпульс такі дослідження отримали завдяки певним принципово важливим результатам і досягненням у побудові моделей квантової гравітації та в розробці теорії струн (на останню, як відомо, покладаються надії побудувати в осяжному майбутньому єдину теорію – т.зв. "theory of everything", яка б об'єднувала усі чотири типи фундаментальних взаємодій включно з гравітаційною). На даний час можна засвідчити існування в сучасній теоретичній фізиці окремого напрямку, присвяченого вивченню квантових (а також і класичних) систем у просторах з некомутативними координатами, а також і асоційованих з ними різних деформацій алгебр просторових і просторо-часових груп симетрії чи алгебри Гайзенберга та важливої концепції мінімальної довжини. Необхідно відзначити, що некомутативність координат простору може мати (і, як правило, має) нетривіальні наслідки для тих квантових систем, що перебувають у некомутативному просторі. Саме до цього напрямку слід віднести дисертаційну роботу Василя Михайловича Васюти, в якій були досліджені низка квантових систем у некомутативному просторі коли характерною властивістю координат простору є їх *спінова* некомутативність.

Дисертаційна робота В.М. Васюти має добре продуману структуру і досить гарно написана; вона складається зі вступу, п'ятьох розділів та висновків і, разом зі списком із 125 використаних літературних джерел, становить 124 сторінки тексту. Приведено також три рисунки.

Перший із п'яти розділів містить коротку історичну довідку щодо досліджень концепції некомутативних координат взагалі, та некомутативних координат зі спіновою некомутативністю зокрема. В достатній мірі висвітлено сучасний стан проблеми, а також описано мотивацію нових досліджень фізичних систем у просторі зі спіновою некомутативністю.

Оригінальні результати дисертації викладені в наступних чотирьох розділах (відзначу, що для зручності читача до кожного з них дається свій вступ та свої висновки).

У другому розділі дисертантом побудовано дві нові некомутативні алгебри зі спіновою некомутативністю координат. Важливо, що вони є інваріантними відносно перетворень системи координат; крім того, для просторів, що описуються запропонованими алгебрами, властивою є наявність мінімаль-

ної довжини. Необхідно також відзначити, що для однієї із досліджуваних алгебр запропоновано метод побудови функцій некомутативних координат, та досліджено основні властивості таких функцій. Наводиться порівняння з підходом Мойала (який стосується іншого варіанту некомутативності, ніж досліджувався у дисертації).

Дослідженню властивостей квантово-механічних систем у просторі зі спіновою некомутативністю координат присвячений третій розділ. Зокрема, дисертантом точно розв'язано задачу про гармонічний осцилятор у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Показано, що некомутативність приводить до появи у осцилятора ефективної маси, яка набула явної залежності від параметра некомутативності $\theta$ (зменшуючись із його зростанням), та одночасно до виникнення спін-орбітальної взаємодії (котра зникає в границі $\theta \to 0$). В рамках теорії збурень досліджено атом водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Показано, що стандартна теорія збурень дає скінченні поправки до спектра атома водню для рівнів з орбітальним моментом $l \neq 0$. З метою знаходження поправок до спектра $s$-рівнів (причому вимагається щоб вони були скінченними) в дисертації розвинено модифіковану теорію збурень. На основі отриманих теоретичних розрахунків та з використанням сучасних експериментальних даних дисертантом отримано оцінку, що обмежує зверху значення параметра спінової некомутативності і таким чином диктує надзвичайну малість значень для $\theta$.

В розділі 4 дисертації представлено результати дослідження обернено- квадратичного потенціалу. Знайдено якою є часова еволюція деяких квантовомеханічних середніх довільного квантового стану у обернено-квадратичному потенціалі. Отримано умови падіння частинки на притягальний центр. Крім того, показано, що внаслідок принципу невизначеності Гайзенберга існує квантова границя ("критичне" значення константи зв'язку) для падіння і, з цієї причини, для достатньо малих констант зв'язку квантова частинка у обернено-квадратичному потенціалі не може впасти на притягальний центр. Знайдено квазістаціонарні стани, які еволюціонують з постійним у часі середнім $\langle r^2 \rangle$. Отримані результати застосовано для опису відомого експерименту з падінням атомів літію на обернено-квадратичний потенціал, створений тонкою зарядженою ниткою. У цьому констексті слід особливо відзначити той факт, що в дисертації запропоновано модифікації експерименту для полегшення експериментального дослідження квантової границі падіння. Цікавим є також і той результат, що у просторі зі спіновою некомутативністю, де присутня мінімальна довжина, падіння на притягальний центр неможливе, а натомість виникають зв'язані стани. На основі властивості скінченності потенціальної енергії, в рамках варіаційного методу знайдено оцінку енергії основного стану частинки у спіново-некомутативному просторі, причому проаналізовано різні варіанти алгебри спінової некомутативності координат.

У п'ятому розділі дисертації розглянута польва система, а саме, запропонована теорія електромагнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Побудовано тензор та дію такого некомутативного електромагнітного поля. Показано, що, окрім інваріантності відносно перетворень Лоренца, дія є інваріантною відносно деяких калібрувальних перетворень, вигляд яких також знайдено. З отриманого виразу для калібрувальних перетворень отримано модифікований закон збереження електричного струму. Варіюючи дію, знайдено рівняння поля, вони є нелінійними, містять похідні всіх порядків, але тим не менше є точними. У рамках побудованої електродинаміки розглянуто деякі системи. В рамках теорії збурень досліджено модифікацію електростатичного поля точкового заряду, поміщеного у зовнішнє магнітне поля, показано, що зовнішнє поле зменшує ефективний заряд частинки. Також в пертурбативному підході досліджено взаємодію двох плоских електромагнітних хвиль у просторі зі спіновою некомутативністю координат, показано, що така взаємодія веде до генерації вищих гармонік та модифікації хвильового вектора взаємодіючих хвиль. Отримані рівняння некомутативного електромагнітного поля точно розв'язано для задачі про поширення плоскої електромагнітної хвилі у зовнішніх полях. Показано, що зовнішнє поле модифікує дисперсійне співвідношення для електромагнітної хвилі.

Дисертаційну роботу завершують Висновки та Список використаних джерел.

Загальне враження від дисертації є цілком позитивним. Автор отримав цікаві результати, продемонстрував прекрасне володіння відповідними методами. Тим не менше, у мене є кілька зауважень.

1) В задачі про квантовий осцилятор у просторі зі спіновою некомутативністю координат з'явилася ефективна маса, залежна від параметра некомутативності $\theta$, та спін-орбітальна взаємодія із цим же параметром у ролі множника, через що обидва ефекти в границі $\theta \to 0$ зникають одночасно. Виникає питання, чи можлива модифікація некомутативності простору для квантового осцилятора із двома незалежними параметрами такими, що відповідали б окремо за кожен із цих двох ефектів.

2) При дослідженні електродинаміки у просторі зі спіновою некомутативністю координат ефективно з'являється неабелеве калібрувальне поле. Однак, з моєї точки зору варто було дати більш чітке пояснення і опис того об'єкта, яким є сукупність неабелевих калібрувальних перетворень поля, породжених некомутативністю простору, тобто, чи є це (некомпактна) неабелева група у звичному сенсі, чи може це є інша, більш складна структура. Також слід було вказати кількість незалежних параметрів у цього об'єкта.

3) Щодо деяких термінів та позначень. Так, в кількох місцях дисертації і автореферату вжито термін "падіння на потенціал", що якось не сприймається при читанні. Крім того, одне і те ж позначення "$h$" у різних розділах використано для двох різних величин – знерозміреного гамільтоніана і для магнітного поля. Прізвище вченого *Moyal* у родовому відмінку мало би бути "Мояла" замість "Мояли". Нарешті, є зауваження стосовно рисунку 3.1 на ст. 55 – цей рисунок у дисертації наведений у чорно-білому варіанті, і через це важко зрозуміти які криві відповідать яким значенням $l$ і $j$.

Однак, цілком зрозуміло, що зроблені зауваження аж ніяк не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації. Усі результати і висновки дисертаційної роботи опубліковані в наукових статтях у реферованих зарубіжних і вітчизняних фахових наукових виданнях і достатньою мірою апробовані під час виступів на численних представницьких конференціях, переважно міжнародних.

Викладене вище дає усі підстави стверджувати: дослідження в дисертаційній роботі В.М. Васюти стосуються цілком актуальних проблем, їх виконано на високому науковому рівні, із застосуванням сучасних методів теоретичної і математичної фізики; автором отримано низку важливих оригінальних результатів.

Автореферат повно і адекватно відображає основні положення і зміст дисертації та оформлений належним чином. Дисертаційна робота задовольняє усім вимогам «Порядку присудження наукових ступенів, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 року № 567, а її автор Василь Михайлович Васюта безумовно заслуговує присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.04.02 – теоретична фізика.

Завідувач відділу математичних методів
в теоретичній фізиці Інституту теоретичної
фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
доктор фізико-математичних наук, професор О.М. Гаврилик

Підпис доктора фіз.-мат. наук
Гаврилика Олександра Михайловича засвідчую:

Вчений секретар Інституту теоретичної фізики
ім. М.М. Боголюбова НАН України
кандидат фіз.-мат. наук С.М. Перепелиця