

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

**ЗАГАЛЬНИЙ ФІЗИЧНИЙ ПРАКТИКУМ
З МЕХАНІКИ**

Навчальний посібник

За загальною редакцією Я. М. Чорнодольського

Львів
2024

УДК 531/534(075.8)

З 14

Автори:

Я. М. Чорнодольський, Б. Я. Мелех, О. І. Конопельник,
І. О. Кошмак, О. М. Стельмах

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, професор *І. Д. Столярчук*
(Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка);
д-р фіз.-мат. наук, професор *Л. С. Яблонь*
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника);
канд. техн. наук, доцент *В. В. Сватко*
(Національний транспортний університет, м.Київ)

*Рекомендовано до друку Вченою радою ЛНУ імені Івана Франка
Протокол №66/5 від 29 травня 2024 р.*

З 14 **Загальний фізичний практикум з механіки** : навч. посіб-
ник / [Я. М. Чорнодольський, Б. Я. Мелех, О. І. Конопельник,
І. О. Кошмак, О. М. Стельмах] ; за заг. ред. Я. М. Чорнодоль-
ського. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2024. – 152 с.

ISBN 978-617-10-0878-6

Описано основні закони механіки. Наведено класифікацію по-
хибок вимірювання фізичних величин. Викладено теоретичні відо-
мості та методику проведення лабораторних робіт.

Для студентів фізичного та інших природничих факультетів.

УДК 531/534(075.8)

© Чорнодольський Я.М., Мелех Б.Я.,
Конопельник О.І. та ін., 2024

© Львівський національний університет
імені Івана Франка, 2024

ISBN 978-617-10-0878-6

Вступ

Основою фізики є експеримент. Саме навчальний експеримент допомагає студенту глибше зрозуміти фізичні явища, усвідомити залежності між величинами, які сформульовані у законах. Тому загальний фізичний практикум є обов'язковою навчальною дисципліною під час вивчення фізики на будь-якому освітньо-кваліфікаційному рівні, а особливо на рівні вищої школи – в Університеті. Фізичний практикум дає змогу студентові опанувати основи прямих вимірювань фізичних величин, статистичну обробку їхніх результатів, проводити опосередковані вимірювання (за допомогою формул), оцінку та обчислення їхніх похибок.

Єдина мова фізики – математика, яка допомагає пов'язати величини, значення яких отримують на підставі прямих вимірювань, у вигляді законів, використовуючи які фізика має силу теоретичного передбачення поведінки різних фізичних систем. Одне з важливих завдань фізичного практикуму – дати студентам експериментально переконатися, що такі математично-теоретичні передбачення правильні. Проводячи математичне опрацювання отриманих результатів, студенти наочно переконуються у правильності фізичних законів і правил, краще усвідомлюють причинно-наслідкові зв'язки між величинами, що є в основі тих чи інших процесів.

Отже, фізичний практикум дає змогу студентові переконатись у правильності фізичних законів, дослідити явища, які

викладають їм на лекційних заняттях відповідних розділів курсу загальної фізики, а також набути навичок самостійно виконувати експеримент. Отож завдання фізичного практикуму такі:

- навчити студентів використовувати теоретичний матеріал для аналізу конкретних фізичних ситуацій, експериментально перевіряти справджуваність теоретичних передбачень в умовах конкретної задачі;
- ознайомити студентів із сучасними фізичними приладами, з основами їх роботи, а також дати відомості про спектр застосування;
- забезпечити набуття студентами практичних навичок користування вимірювальною апаратурою й експериментальними установками;
- навчити студентів проводити фізичні експерименти за допомогою вищезгаданих приладів і визначати похибки вимірювань, оцінювати точність і ступінь достовірності отримуваних результатів;
- враховуючи точність експерименту, зробити обґрунтований висновок про справджуваність фізичних законів і закономірностей; підтвердити значення фізичних констант і характеристик речовин чи процесів.

Ця частина фізичного практикуму є посібником для виконання студентами Університету лабораторних робіт з механіки. Оскільки механіку викладають на фізичних факультетах закладів вищої освіти у першому семестрі першого курсу, то в навчальному посібнику наведено основи визначення похибок прямих і опосередкованих вимірювань, які будуть використовувати

студенти і в наступних частинах фізичного практикуму (які викладатимуть у наступних семестрах – аж до 4-го курсу), присвячених вивченню інших розділів курсу загальної фізики, а також під час виконання ними курсових і магістерських робіт, в подальшому, після отримання диплома, в професійній науковій діяльності.

В описі кожної лабораторної роботи наведено:

- перелік завдань, які потрібно зробити під час виконання цієї роботи;
- перелік та опис приладів, необхідних для виконання цієї роботи;
- теоретичні основи фізичних процесів і явищ, які студенти мають засвоїти для виконання цієї роботи (нижче наводяться посилання на доступні навчальні ресурси);
- виведення робочих формул;
- порядок виконання роботи;
- перелік контрольних запитань для перевірки готовності студентів до виконання роботи та обов'язкові питання, які є основою під час захисту студентами звітів до виконаної роботи.

Студентам для самопідготовки до виконання лабораторних робіт рекомендуємо такий список літератури:

1. Мелех Б.Я., Смеречинський С.В., Стельмах О.М., Кошмак І.О. Електронний курс з навчальної дисципліни “Механіка”: Відеолекції (з описом контенту), відеодемонстрації виконання лабораторних робіт та модульні тести з “Механіки” для студентів фізичного факультету.
<https://e-learning.lnu.edu.ua/course/view.php?id=204>

2. Кучерук І. М. Загальний курс фізики. Том 1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик. – Київ: Техніка, 1999.
3. Ваврух М. В. Збірник задач з механіки : навч. посібник / М. В. Ваврух, С. В. Смеречинський, О. М. Стельмах, Н. Л. Тишко. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2017. – 285 с.
4. Кушнір Р. М. Загальна фізика. Механіка. Молекулярна фізика : навч. посібник / Р. М. Кушнір. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2003. – 403 с.
5. Бородчук А. В. Механіка : лабораторний практикум / А. В. Бородчук, Я. А. Пастирський, З. В. Стасюк. – Львів, 2006. – 257 с.
6. Іванків Л. І. Механіка : навч. посібник для студ. фіз. спец. вузів / Л. І. Іванків, Б. М. Палюх. – Київ: ІСДО, 1995. – 228 с.
7. Іро Г. Класична механіка / пер. з нім. ; Г. Іро – Львів, 1999. – 461 с.
8. Gallavotti G. The Elements of Mechanics / G. Gallavotti. – Ipparco Editore, Dipartimento di Fisica Università di Roma “La Sapienza”, 2007. – 572 p.

Крім запропонованих посібників, для самопідготовки рекомендуємо користуватися конспектом лекцій, а також літературою, яку запропонував лектор.

Для визначення похибок фізичних величин радимо використовувати: Демків Т. М. Основи теорії похибок фізичних величин. Методичні матеріали для загального фізичного практикуму / Т. М. Демків, О. І. Конопельник, Я. І. Шопя. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2008. – 40 с.

В основу цього посібника покладено навчальне видання: Логвиненко О. О. Загальна фізика : лабораторний практикум з механіки для студентів університету / О. О. Логвиненко, Я. А. Пастирський. – Львів: Ред. видав. відд. Львів. держ. ун-ту, 1995. – 113 с.

У посібнику наведено розширені теоретичні відомості до лабораторних робіт, які виконують студенти фізичного та інших природничих факультетів.

У другому розділі цього навчального посібника описано дванадцять лабораторних робіт (ЛР) з механіки.

- 2.1. Визначення густини речовини тіл правильної геометричної форми (ЛР 101).
- 2.2. Перевірка основного закону динаміки обертального руху за допомогою маятника Обербека (ЛР 111).
- 2.3. Визначення моменту інерції тіла за допомогою маятника Максвелла (ЛР 112).
- 2.4. Дослідження залежності моменту інерції дволанкової системи від її геометричних параметрів (ЛР 113).
- 2.5. Перевірка закону збереження моменту імпульсу (ЛР 114).
- 2.6. Визначення прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника (ЛР 115).
- 2.7. Дослідження процесу пружної деформації розтягу дротини (ЛР 118).
- 2.8. Дослідження пружної деформації кручення (ЛР 120А).
- 2.9. Вивчення коливних процесів (ЛР 122).
- 2.10. Дослідження прецесії гіроскопа та визначення його моменту інерції (ЛР 123).

- 2.11. Визначення швидкості поширення звуку в повітрі методом стоячої хвилі (ЛР 125).
- 2.12. Визначення швидкості польоту кулі за допомогою крутильно-балістичного маятника (ЛР 129).

Лабораторні роботи охоплюють основні розділи механіки, а саме: сили в механіці (ЛР 118, 120А); механіка твердого тіла (ЛР 101, 111, 112, 113); закони збереження (ЛР 114, 129); коливний рух та поширення хвиль у пружних середовищах (ЛР 122, 125).

У додатку наведено форму звіту до лабораторних робіт.

Розділ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ФІЗИЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ

1.1. Основні поняття. Вимірювання та типи похибок

Точність вимірювання значень фізичних величин характеризується похибками засобів вимірювання та результатів дослідження (точніші вимірювання характеризуються меншою сумарною похибкою). Отже, оцінка результатів вимірювань безпосередньо залежить від правильного опрацювання результатів спостережень: помилки під час такого опрацювання приведуть до втрати цінної інформації та до неправильних висновків.

Умовами отримання правильних висновків щодо інтерпретації результатів вимірювання фізичних величин є лише правильний аналіз методики проведення експерименту та правильне статистичне опрацювання отриманих результатів.

Кожна з лабораторних робіт фізичного практикуму присвячена вивченню конкретного фізичного явища, а також відтворенню дослідів для перевірки основних фізичних законів. Зазвичай кожне таке дослідження складається з кількох вимірювань.

Під *вимірюванням* розуміють виявлення значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

Фізична величина – це властивість, якісно спільна для багатьох фізичних об'єктів (фізичних систем, їхніх станів і процесів, які в них відбуваються), але кількісно індивідуальна для кожного об'єкта. Фізичними величинами є довжина, маса, час, швидкість тощо.

Кількісна оцінка фізичної величини називається *розміром фізичної величини*.

Значення фізичної величини – це оцінка фізичної величини у вигляді деякого числа прийнятих для неї одиниць.

Число, яке входить у значення фізичної величини, називається *числовим значенням фізичної величини*.

Вимірювання фізичної величини – це експериментальний процес, під час якого визначають у скільки разів фізична величина більша або менша від однорідної величини, прийнятої за одиницю. Вимірювання складається зі спостережень і математичного опрацювання їхніх результатів.

Спостереження під час вимірювання – це експериментальна операція, внаслідок якої отримують одне з групи значень величин, що підлягають сумісному опрацюванню, для одержання результату вимірювання.

Вимірювання розділяють на прямі та непрямі. Непрямі вимірювання поділяються на опосередковані, сукупні та сумісні.

Прямі вимірювання – це такі, за яких шукане значення фізичної величини визначають безпосередньо з дослідних даних.

Опосередковані – це вимірювання, за яких шукане значення величини визначають на підставі відомої залежності між цією величиною і величинами, що підлягають прямим вимірюванням.

Сукупні – це одночасні вимірювання кількох однойменних значень величин, за яких шукане значення величини визначають за допомогою розв'язання системи рівнянь, отриманих внаслідок прямих вимірювань різних сполучень цих величин.

Сумісні – це вимірювання двох або кількох однойменних значень величин, що їх виконують одночасно для визначення залежностей між ними.

Під час аналізу вимірювань треба чітко розмежовувати два поняття: істинне значення фізичних величин та їхні емпіричні прояви – результати вимірювань.

Істинне значення фізичної величини – це значення, яке ідеально якісно і кількісно відображає відповідну властивість об'єкта. Воно не залежить від засобів нашого пізнання і виявляється тією абсолютною істиною, до якої ми прагнемо, намагаючись виразити його у вигляді числового значення.

Результати вимірювань, навпаки, є продуктом нашого пізнання, наближені оцінки значень величин, визначені шляхом спостережень. Вони залежать не тільки від самих величин, а й від методів вимірювання, технічних засобів, за допомогою яких їх вимірюють, і властивостей органів відчуття спостерігача, який виконує вимірювання.

Через недосконалість засобів вимірювання, а також через численні збурення, отримане під час вимірювань значення фізичної величини x відрізняється звичайно від його істинного значення x_0 , тобто має похибку.

Похибка вимірювання – це відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини.

Похибка $\Delta x = x - x_0$, виражена в одиницях вимірюваної фізичної величини, називається *абсолютною*, а виражена в частинах або відсотках від значення вимірюваної фізичної величини – *відотною*.

Оскільки істинне значення x_0 вимірюваної величини невідоме, то невідомі й похибки вимірювання. Щоб отримати хоча б наближені результати, доводиться замість істинного значення підставляти так зване *дійсне значення*, тобто значення, визначене

експериментально, яке наближається до істинного настільки, що для цієї мети його можна використати замість нього.

Залежно від закономірності появи *похибки вимірювання* бувають трьох типів: грубі, систематичні та випадкові.

Грубою похибкою, або промахом, називають похибку вимірювання, яка суттєво перевищує очікувану за цих умов вимірювань.

Систематична похибка вимірювання – це складова похибки вимірювання, яка залишається сталою або закономірно змінюється під час повторних вимірювань тієї ж величини.

Випадковою похибкою вимірювання називають складову похибки, яка змінюється випадково під час повторних вимірювань тієї ж величини.

Закономірності випадкових похибок вивчені, існують прийоми їхніх оцінок і виявлень. Їх виявляють шляхом багаторазових вимірювань. Систематичні ж похибки не можна ні виявити, ні усунути під час повторних вимірювань тим самим приладом.

Поява тієї чи іншої випадкової похибки є так званою випадковою подією. *Випадковими подіями* називають такі події, появу яких не можна точно передбачити. Їх вивчає теорія ймовірностей, що дає методи обчислення ймовірності їхньої появи.

Теорія похибок, яка ґрунтується на теорії ймовірностей, дає формули для обчислення ймовірностей появи того чи іншого значення випадкової похибки Δx у ряді n однакових вимірювань величини x .

1.2. Похибки прямих вимірювань фізичних величин

Завдання прямого вимірювання полягає у визначенні середнього значення шуканої величини з врахуванням поправки на систематичну похибку, а також в обчисленні випадкової похибки, похибки приладу і заокруглення.

1.2.1. Визначення випадкової похибки

Прилад не є абсолютно ізольованим від зовнішнього середовища. Випадкові коливання величин, які є характеристиками цього середовища та мають вплив на роботу приладу (наприклад, атмосферні умови, напруженості зовнішніх електричних і магнітних полів, нестабільність електричного джерела живлення приладу, суб'єктивні помилки оператора, який керує роботою приладу, вібрації тощо), призводять до того, що значення тієї ж самої вимірюваної величини будуть різними під час повторних вимірювань тим же приладом. Характеризує ці відхилення *випадкова похибка*.

Якщо збільшувати кількість вимірювань, то можна помітити, що більшість з виміряних значень будуть групуватися біля середнього значення всіх виміряних величин. Що більше відхилення від середнього значення, то рідше воно траплятиметься під час вимірювань. Зі збільшенням кількості вимірювань розподіл отримуваних під час вимірювання значень стабілізується.

Результуюча випадкова похибка формується багатьма випадковими похибками, що з'являються унаслідок згаданих вище причин. Якщо ці окремі похибки (причини) незалежні, то, згідно з положенням теорії ймовірностей, сформульованого у так званій центральній граничній теоремі, результуюча сумарна випадкова похибка буде розподілена за так званим *нормальним законом* (розподілом Гауса). Ми враховуватимемо припущення розподілу випадкової похибки саме за нормальним законом.

Нехай у результаті i -го спостереження величини x_0 отримано значення x_i . Якщо таких спостережень було n , то вся сукупність значень x_i називається *вибіркою об'єму n* . Під дійсним значенням вимірюваної величини в цьому випадку розуміють *середнє арифметичне значення вибірки*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (1.1)$$

Припускають, що це середнє арифметичне значення вибірки об'єму n приблизно відповідає величині, коли нормальний розподіл досягає максимального значення.

Випадковим відхиленням результату i -го спостереження від середнього буде

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}. \quad (1.2)$$

Знаючи величину випадкових відхилень кількох спостережень, легко обчислити *вибіркове середнє квадратичне відхилення* результату спостереження (оцінка середнього квадратичного відхилення)

$$S_x = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1} \right]^{1/2}. \quad (1.3)$$

Середнє квадратичне відхилення визначає ширину нормального розподілу. Власне ця величина разом з \bar{x} повністю визначають нормальний розподіл для вибірки об'єму n .

Однак значення \bar{x} та S_x будуть змінюватися під час збільшення кількості спостережень n . Набір значень цих величин, отриманий так, буде теж мати випадковий характер і підкорятиметься *нормальному закону* розподілу. Кінцевою метою обробки деяких вимірювань є одержання найвірогіднішого результату вимірювання (середнє вибіркове) і оцінка його похибки.

Похибку результату вимірювання характеризує величина, яку називають *вибірковим середнім квадратичним відхиленням середнього арифметичного*, або оцінкою середнього квадратичного відхилення середнього арифметичного

$$S_{\bar{x}} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)} \right]^{1/2} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}. \quad (1.4)$$

Ця величина характеризує розподіл середніх значень \bar{x} , отриманих у різних вибірках.

Закон нормального розподілу, під час виконання вищезгаданої умови незалежності чинників, які формують випадкову похибку, ідеально описує розподіл випадкової похибки за нескінченної кількості вимірювань. Однак насправді кількість вимірювань n – скінченне. Визначаючи границі довірчого інтервалу (інтервалу, в який потрапляє вимірювана величина із заданою ймовірністю), для \bar{x} за малих значень n ($n \leq 30$) використовують закон розподілу випадкових похибок, запропонований Стьюдентом. Для цього спочатку треба визначити \bar{x} і $S_{\bar{x}}$, а потім вибрати потрібну довірчу ймовірність p (відносну кількість відхилень, величина яких не перевищує за абсолютним значенням заданої величини $|\Delta x_1|$) результату і за відповідною таблицею коефіцієнтів Стьюдента (табл. 1.1) залежно від кількості проведених спостережень n визначають коефіцієнт Стьюдента

$$t_{pn} = \frac{\Delta_{\text{вип}}x}{S_{\bar{x}}}. \quad (1.5)$$

Знаючи $S_{\bar{x}}$ і t_{pn} , обчислюють випадкову похибку результату вимірювання (довірчу границю)

$$\Delta_{\text{вип}}x = t_{pn}S_{\bar{x}}. \quad (1.6)$$

1.2.2. Похибка приладу

Похибку приладу визначають під час його випробування або перевірки, яку виконують метрологічні служби.

Граничну похибку приладу (максимально допустима похибка, яку дає прилад під час вимірювання в нормальних умовах) $\theta_{\text{гр}}$ обчислюють за класом точності, який зазначають у його паспорті або на шкалі приладу. *Класом точності* k вимірювального приладу називають виражене у відсотках відношення граничної абсолютної похибки $\theta_{\text{гр}}$ до максимального значення $x_{\text{макс}}$, яке цей прилад може виміряти: $k = (\theta_{\text{гр}}/x_{\text{макс}})100\%$.

Таблиця 1.1. Коефіцієнти Стюдента t_{pn}

n	Довірча ймовірність p						
	0.5	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
2	1.00	3.1	6.31	12.71	31.82	63.66	636.62
3	0.82	1.9	2.92	4.30	6.97	9.93	31.60
4	0.77	1.6	2.35	3.18	4.54	5.84	12.92
5	0.74	1.5	2.13	2.78	3.75	4.60	8.61
6	0.73	1.5	2.02	2.57	3.37	4.03	6.87
7	0.72	1.4	1.94	2.45	3.14	3.71	5.96
8	0.71	1.4	1.90	2.37	3.00	3.50	5.41
9	0.71	1.4	1.86	2.31	2.90	3.36	5.04
10	0.70	1.4	1.83	2.26	2.82	3.25	4.78
11	0.70	1.4	1.81	2.23	2.76	3.17	4.59
12	0.70	1.4	1.80	2.20	2.72	3.11	4.44
13	0.70	1.4	1.78	2.18	2.68	3.06	4.32
14	0.69	1.4	1.77	2.16	2.65	3.01	4.22
15	0.69	1.3	1.76	2.15	2.62	2.98	4.14
16	0.69	1.3	1.75	2.13	2.60	2.95	4.07
17	0.69	1.3	1.75	2.12	2.58	2.92	4.02
18	0.69	1.3	1.74	2.11	2.57	2.90	3.97
19	0.69	1.3	1.73	2.10	2.55	2.88	3.92
20	0.69	1.3	1.73	2.09	2.54	2.86	3.88
25	0.69	1.3	1.71	2.09	2.49	2.80	3.75
30	0.68	1.3	1.70	2.04	2.46	2.76	3.66
40	0.68	1.3	1.68	2.02	2.42	2.70	3.55
60	0.68	1.3	1.67	2.00	2.39	2.66	3.46
120	0.68	1.3	1.66	1.98	2.36	2.62	3.37
∞	0.67	1.3	1.65	1.96	2.33	2.58	3.29

Граничну похибку приладу можна визначити за формулою

$$\theta_{\text{ГР}} = \frac{kx_{\text{макс}}}{100\%}. \quad (1.7)$$

Потрібно зважати, що гранична похибка чи клас точності приладу стосується не конкретного екземпляра, а всієї сукупності цієї серії приладів. Про похибку окремого екземпляра можна

Таблиця 1.2. Довірча ймовірність p для довірчого інтервалу, вираженого в частках середнього квадратичного відхилення

t_p	p	t_p	p	t_p	p
0.1	0.07966	1.6	0.89040	2.8	0.99489
0.5	38292	2.0	95450	3.0	99730
0.7	51607	2.2	97219	3.5	99953
1.0	68269	2.4	98360	4.0	99994
1.3	0.80640	2.6	0.99068	4.5	0.999994

лише сказати, що вона не виходить за межі, визначені граничною похибкою або класом точності. Тому, незважаючи на те, що похибка приладу систематична, її можна враховувати під час обчислень як випадкову (розподілену за рівномірним законом від $-\theta$ до $+\theta$).

Граничні похибки штангенциркулів, мікрометрів і деяких інших приладів іноді нанесені на самому приладі, іноді зазначені в паспорті. Якщо гранична похибка або клас точності приладу невідомі, то приймають, що *гранична похибка* $\theta_{\text{гр}}$ дорівнює 0,5 ціни поділки шкали (ціна поділки шкали – це різниця значень, яка відповідає двом сусіднім позначкам шкали).

Знаючи граничну похибку приладу $\theta_{\text{гр}}$, обчислюємо вибіркоче середнє квадратичне відхилення результату вимірювання

$$S_{\text{пр}} = \frac{\theta_{\text{гр}}}{3}. \quad (1.8)$$

Тоді для довірчої ймовірності p абсолютну похибку приладу можна обчислити за формулою

$$\Delta_{\text{пр}}x = t_p S_{\text{пр}} = \frac{t_p \theta_{\text{гр}}}{3}, \quad (1.9)$$

де t_p – коефіцієнт, який беремо з табл. 1.2.

Зазначимо, що фактична похибка будь-якого приладу може бути меншою, ніж це випливає з формули (1.9), і її можна врахувати конкретно, якщо є крива градування приладу або взірцевий прилад.

1.2.3. Похибка заокруглення

У тих випадках, коли відліки показів приладу заокруглюють до цілих значень або часток поділок (лінійка, мікромметр, електровимірювальний прилад тощо), а також під час користування ноніусом або цифровими приладами, виникає випадкова похибка (похибка заокруглення), яка має рівномірний розподіл. У цьому випадку, якщо немає систематичних похибок, то максимальна похибка не перевищує $h/2$, де h – інтервал заокруглення. Інтервал заокруглення h може дорівнювати ціні поділки приладу, якщо відлік беруть з точністю до цілих поділок або половині ціни поділки, якщо відліки заокруглюють до половини поділки.

Похибкою заокруглення називають величину

$$\Delta_3 x = p \frac{h}{2}, \quad (1.10)$$

де p – довірча ймовірність.

Під час виконання лабораторних робіт потрібно враховувати три типи похибок: випадкову $\Delta_{\text{вип}}x$, похибку приладу $\Delta_{\text{пр}}x$ і похибку заокруглення $\Delta_3 x$.

1.2.4. Сумарна похибка дослідів

Сумарну похибку дослідів визначають “квадратичним підсумовуванням”:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta_{\text{вип}}x)^2 + (\Delta_{\text{пр}}x)^2 + (\Delta_3 x)^2}. \quad (1.11)$$

Для оцінки точності вимірювань вводять поняття *відносної* похибки:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}. \quad (1.12)$$

Під час обчислення сумарної похибки за формулою (1.11) можна нехтувати будь-якою складовою ($\Delta_{\text{вип}}x$, $\Delta_{\text{пр}}x$ або Δ_3x), якщо її значення у три рази менше від будь-якої іншої похибки.

У випадку вимірювання, під час якого виконують тільки одне спостереження (наприклад, вимірювання температури, зважування тіла на технічній вазі тощо), сумарну похибку оцінюють похибкою приладу і заокруглення. Одноразовим спостереженням обмежуються тоді, коли три-чотири попередні досліди свідчать, що випадкова похибка не виявляється (за повторних спостережень отримують той самий результат). Це трапляється тоді, коли випадкова похибка нижча порогу чутливості приладу. У цьому випадку обчислюють тільки $\Delta_{\text{пр}}x$ і Δ_3x .

1.3. Похибки непрямих вимірювань фізичних величин

Значення деяких фізичних величин одержують за допомогою формул, враховуючи фізичні закони чи залежності від значень фізичних величин, які отримують на підставі прямих вимірювань у відповідній лабораторній роботі. Вище описано, як оцінити похибки для величин, значення яких отримані на підставі прямих вимірювань. У цьому підрозділі коротко описано загальний підхід для виведення формул, що дають змогу обчислити похибки величин, отриманих за допомогою формул. Далі, в описі кожної лабораторної роботи, зважаючи на описаний тут підхід, виведено формули для обчислення похибок відповідних опосередкованих вимірювань. Варто пам'ятати, що в робочі формули підставляють *середні* значення величини, одержані під час прямих вимірювань.

Непряме вимірювання у загальному випадку можна зобразити деякою функцією N змінних $y = f(x_1, \dots, x_N)$, аргументи якої, x_1, \dots, x_N , відображають величини, значення яких отримують внаслідок прямих вимірювань. Повний диференціал цієї функції має такий вигляд:

$$dy = df(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i,$$

де $\partial y / \partial x_i$ – частинні похідні (похідні за кожною змінною x_i).

Пам'ятаймо, що коли береться частинна похідна від функції багатьох змінних за якоюсь із цих змінних, то всі інші змінні вважаються константами.

Переходячи від нескінченно малих приростів dy до скінченних Δx , отримуємо:

$$\Delta y = \pm \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right|. \quad (1.13)$$

Точнішу оцінку похибки Δy отримують через зв'язок дисперсії (квадрата середнього квадратичного відхилення середнього арифметичного $(S_{\bar{y}})^2$) величини y з дисперсіями $(S_{\bar{x}_i})^2$ величин, отриманих на підставі прямих вимірювань:

$$(S_{\bar{y}})^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta S_{\bar{x}_i} \right)^2. \quad (1.14)$$

Домноживши ліву та праву частину цього виразу на коефіцієнти Стьюдента, а також прийнявши до уваги похибки приладу/приладів та заокруглень під час визначення величин x_i , отримуємо остаточний вираз для розрахунку похибки непрямих вимірювань:

$$\Delta y = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}, \quad (1.15)$$

де множник Δx_i – абсолютні похибки прямих вимірювань значень величин x_i .

В описах кожної лабораторної роботи, наведених у наступному розділі, виводяться робочі формули для визначення похибок непрямих вимірювань, як базову використовують дещо модифікований вигляд формули (1.15). Модифікація стосується введення у формулу середнього значення величини \bar{y} , яке є у відповідній залежності від середніх значень величин \bar{x}_i ($\bar{y} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$), отриманих шляхом прямих вимірювань:

$$\Delta y = \pm \bar{y} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)} \right)^2}. \quad (1.16)$$

Розділ 2

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З МЕХАНІКИ ТА МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЇХ ВИКОНАННЯ

2.1. Визначення густини речовини тіл правильної геометричної форми

Під час виконання лабораторної роботи основною метою є обчислення густини тіла за визначеними геометричними розмірами та масою, а також оцінка похибки прямих і непрямих вимірювань. Тут необхідними приладами є штангенциркуль, мікрометр, аналітична вага з набором важків, тіло правильної геометричної форми. Теоретичний матеріал, який потрібно знати для виконання лабораторної роботи, – абсолютна та відносна похибка вимірювань, правила користування штангенциркулем і мікрометром, будова ноніуса, маса та густина тіл.

2.1.1. Визначення лінійних розмірів

Для вимірювань геометричних розмірів фізичних тіл студент може використати сантиметрову лінійку, штангенциркуль чи мікрометр. Залежно від того, які розміри об'єкта досліджень (відстань, пройдена тягарцем, діаметр шківів чи малого циліндра), будемо застосовувати той чи інший вимірювальний пристрій. Зрозуміло, що й точність отриманого результату буде різною

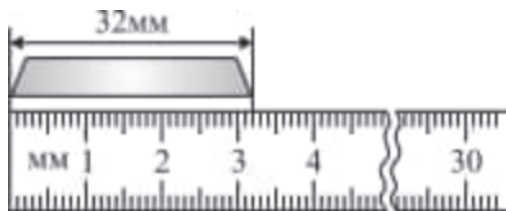


Рис. 2.1. Схематичне зображення лінійки

через різну точність інструментів. Розглянемо детальніше будову та особливості вимірювання лінійкою, штангенциркулем і мікрометром.

Лінійку (рис. 2.1) використовують для вимірювання розмірів різних геометричних тіл. На ній можна відраховувати тільки ціле число міліметрів, тобто її точність дорівнює 1 мм.

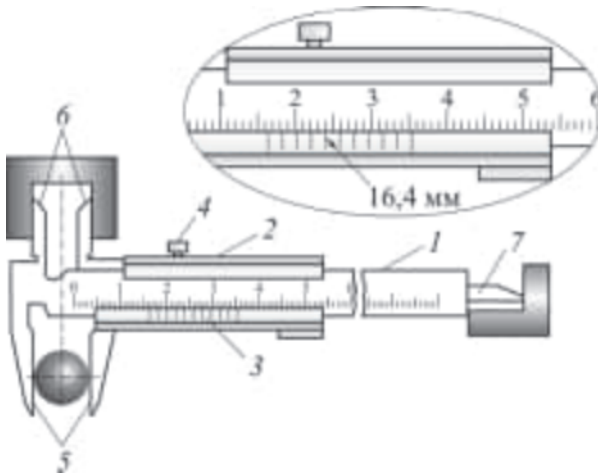
Міліметр є доволі великою одиницею довжини для сучасних методів вимірювання. Поєднання двох лінійок в одному інструменті, такому як штангенциркуль, допоможе поліпшити точність вимірювання.

Штангенциркуль (рис. 2.2) – це інструмент для вимірювання лінійних розмірів тіл з високою точністю. Він складається (див. рис. 2.2, б) зі сталеві лінійки 1 з міліметровою шкалою, щодо якої переміщається рамка 2 з ноніусом 3, і двох пар губок 5 та 6. Стопорний гвинт 4 призначений для фіксації положення ноніуса під час вимірювання. Пара губок 6 слугує для визначення внутрішніх діаметрів отворів та їхньої глибини, а 5 – для визначення зовнішніх розмірів. У кожній парі одна губка рухома, інша нерухома. Якщо губки зімкнуті, то відлік за ноніусом дорівнює нулю.

Ноніусом називають доповнення до основного масштабу, яке дає змогу підвищити точність вимірювання з заданим масштабом у 10–50 разів. Лінійний ноніус – це невелика лінійка, що



а



б

Рис. 2.2. Зовнішній вигляд (а) і схематичне (б) зображення штангенциркуля з точністю 0.1 мм

може ковзати вздовж основного масштабу і на яку нанесена маленька шкала з m поділок. Якщо позначити ціну поділки лінійки y , то точність ноніуса $\Delta x = y/m$.

Коли губки розсунути, то відстань між ними, очевидно, дорівнюватиме довжині, на яку нуль ноніуса перемістився вздовж лінійки від її нуля.

Оскільки подїлки нонїуса не дорівнюють подїлкам лїнійки, то завжди знайдеться на ньому така n -на подїлка, яка буде найбільше збігатися з відповідною подїлкою лїнійки. На рис. 2.2, б четверта подїлка нонїуса збіглася з подїлкою основної шкали. У цьому випадку довжина відрїзка L дорівнює сумї кількостї k цїлих подїлок нерухомої лїнійки ($k = 16$) і добутку точностї нонїуса ($y/m = 1 \text{ мм} / 10 = 0.1 \text{ мм}$) на номер подїлки нонїуса n , що точно збігається з деякою подїлкою лїнійки ($n = 4$):

$$L = ky + n \frac{y}{m}.$$

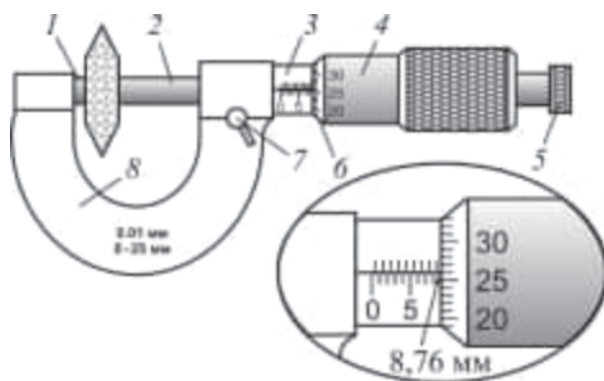
Отже, предмет, розміри якого вимірюють на рис. 2.2, б, має діаметр 16.4 мм. Похибка штангенциркуля дорівнює половинї його точностї $1/2 \Delta x$.

Мікрометр (рис. 2.3) використовують для визначення діаметра дротин, невеликих товщин пластинок тощо. Це інструмент для вимірювання лїнійних розмірів з точністю 0.01 мм. Він складається (див. рис. 2.3, б) зі сталевої скоби 8, що має нерухому опорну п'яту 1, стебла 3, мікрометричного гвинта 2 і стопорного гвинта 7. Мікрометричний гвинт переміщається всерединї спеціальної гільзи з різьбою, закріпленою в стеблі 3. Крок гвинта становить 0.5 мм. На зовнішній поверхні стебла нанесенї двї поздовжнї шкали з цїною подїлки 0.5 мм. Зовнї стебло охоплює барабан 4, з'єднаний з мікрометричним гвинтом 2, що обертається під час обертання барабана, і його вимірювальна поверхня переміщається. Цїна подїлки шкали барабана становить 0.01 мм.

Під час вимірювання мікрометром похибки найчастїше виникають через неоднаковий натиск мікрометричного гвинта на вимірюваний предмет. Для забезпечення рівномірного натиску мікрометричного гвинта на досліджуване тіло в кінці барабана є спеціальний пристрій — трїскачка 5. Для вимірювання тіло за-тискають між опорною п'ятою 1 і мікрометричним гвинтом 2, обертаючи мікрометричний гвинт до моменту виникнення звуку



а



б

Рис. 2.3. Зовнішній вигляд (а) і схематичне (б) зображення мікрометра

в тріскачці 5. На стеблі нанесена поздовжня лінія, навпроти якої зчитують відлік. Цілі міліметри відраховують за поділками верхньої шкали. Якщо після поділки на верхній шкалі барабан відкриває поділку нижньої шкали, то до розміру потрібно додати 0.5 мм. Соті частки міліметра зчитують на шкалі барабана навпроти поздовжньої лінії.

2.1.2. Визначення маси тіла за допомогою терезів. Правила зважування

Для визначення маси використовують різні ваги чи терези залежно від габариту зважувальних об'єктів і потрібної точності. В умовах лабораторії для зважування досліджуваних зразків використовують терези.

Терези (рис. 2.4) складаються з рівноплечового коромисла 1 (див. рис. 2.4, б), опорою якого є ребро сталеві призми 2, що вставлена всередину коромисла перпендикулярно до його площини. Ребро призми опирається на поліровану пластинку 3, що закріплена на верхній частині колонки 6. На кінцях коромисла на однаковій відстані від опори розташовані призми 4 та необхідні пристосування для підвішення шальок 8. Для визначення положення рівноваги чашок використовують довгу стрілку 7, прикріплену до середини коромисла. Коли терези не використовують, вони перебувають в опущеному положенні. Під час вимірювань коромисло з чашками децю піднімають уверх за допомогою ручки 12. Так уникають зайвого зношування терезів. Колонка має бути встановлена вертикально, що можна перевірити за допомогою нитки підвісу 5, розташованої біля колонки. Підвіс має встановитись точно над вістрям гайки 11, що закріплена на основі 9. Досягнути цього можна обертанням гвинтів 10 на ніжках. Якщо колонка розташована вертикально, терези ненавантажені й підняті, то кінець стрілки 7 має вказувати на середню поділку шкали 13.

Кожні терези розраховані на певне граничне навантаження, яке не можна переходити, щоб не спричинити перегину коромисла. Відповідно до цього, кожні терези укомплектовані футляром з повним набором різноважок (див. рис. 2.4, а) до певного значення маси.

У разі використання терезів треба дотримуватись таких правил:

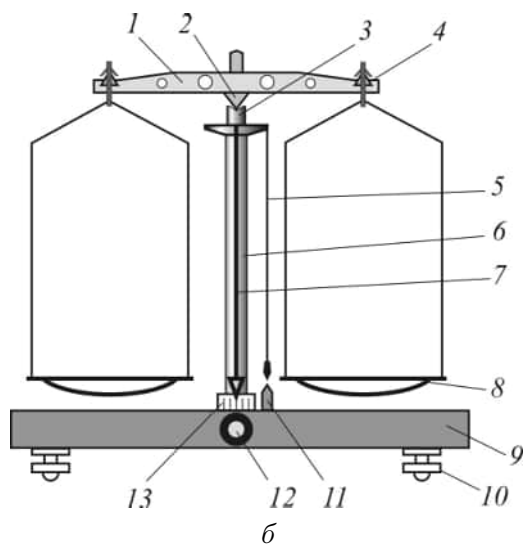
*a**б*

Рис. 2.4. Зовнішній вигляд (а) і схематичне (б) зображення терезів

- на підняті терези не можна класти або знімати вантажі та навіть доторкатись до шальок;
- вантажі на шальки потрібно накладати так, щоб їхній загальний центр тяжіння містився в центрі шальки;
- різноважки можна брати тільки пінцетом, дрібні різноважки плоскої форми беруть пінцетом за зігнений кутик;
- знімаючи різноважки з шальки, їх потрібно класти на відповідне місце у футлярі;
- піднімати і довантажувати коромисло треба повільно після того, як шальки зрівноважились і можна однозначно стверджувати, яка важча;
- не можна залишати надовго вантажі на шальках терезів, особливо коли вони не опущені на основу;
- після завершення зважування терези опускають (аретирують), різноважки і тягарець знімають.

2.1.3. Визначення густини тіл

Важливою фізичною характеристикою речовини є густина – скалярна величина, що дорівнює масі, поміщеній в одиниці об’єму тіла. Її визначають формулою:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (2.1.1)$$

Визначення густини зводиться до вимірювання маси m та об’єму V тіла. Масу визначають за допомогою зважування на технічних терезах, а об’єм тіла обчислюють за виміряними геометричними розмірами. Наприклад, для паралелепіпеда

$$V = abc, \quad (2.1.2)$$

де a – довжина; b – ширина; c – висота паралелепіпеда. Для циліндра

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}. \quad (2.1.3)$$

Тут d – діаметр; h – висота циліндра.

У цій лабораторній роботі ми визначаємо густину паралелепіпеда і циліндра, тому, підставивши (2.1.2) та (2.1.3) у формулу для густини (2.1.1), отримуємо робочі формули:

$$\rho_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}}{abc}; \quad (2.1.4)$$

$$\rho_{\text{ц}} = \frac{4m_{\text{ц}}}{\pi d^2 h}. \quad (2.1.5)$$

Для розрахунку густини тіл вимірюють довжину, ширину та висоту паралелепіпеда штангенциркулем і діаметр та висоту циліндра мікрометром. Геометричні розміри визначають п'ять разів. Результати вимірювань записують у табл. 2.1 та 2.2, відповідно. Визначають масу досліджуваних тіл за допомогою електронної ваги. За середніми значеннями отриманих величин обчислюють за формулами (2.1.4) та (2.1.5) густину тіл. Результати вимірювань та обчислень для паралелепіпеда записують у табл. 2.1, для циліндра – у табл. 2.2.

Щоб отримати формулу для обчислення похибок величин непрямих вимірювань, використовують формулу, записану у вигляді:

$$\Delta y = \langle y \rangle \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right)^2}, \quad (2.1.6)$$

де $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – деяка функція від n змінних; $\langle y \rangle$ – середнє її значення; Δx_i – абсолютна похибка величини прямого вимірювання.

На підставі цієї формули розраховують частинні похідні та абсолютну похибку для густини паралелепіеда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial a} = -\frac{m}{bca^2}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{abc};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial b} = -\frac{m}{acb^2}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial c} = -\frac{m}{abc^2}.$$

Аналогічно і для густини цилїндра:

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi d^2 h}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{4m}{\pi d^3 h}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial h} = -\frac{4m}{\pi d^2 h^2}.$$

Оцінюють похибки прямих вимірювань геометричних розмірів і маси тїл та похибки непрямих вимірювань густини за формулами:

$$\Delta \rho_{\Pi} = \bar{\rho}_{\Pi} \sqrt{\left(\frac{\Delta m_{\Pi}}{\bar{m}_{\Pi}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\bar{c}}\right)^2};$$

$$\delta \rho_{\Pi} = \frac{\Delta \rho_{\Pi}}{\bar{\rho}_{\Pi}} \cdot 100\%;$$

$$\Delta \rho_{\text{ц}} = \bar{\rho}_{\text{ц}} \sqrt{\left(\frac{\Delta m_{\text{ц}}}{\bar{m}_{\text{ц}}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\bar{h}}\right)^2};$$

$$\delta \rho_{\text{ц}} = \frac{\Delta \rho_{\text{ц}}}{\bar{\rho}_{\text{ц}}} \cdot 100\%.$$

Результати записують у відповідну таблицю.

Таблиця 2.1

Номер з/п	a_i , м	Δa_i , м	b_i , м	Δb_i , м	c_i , м	Δc_i , м	$\rho_{\text{п}}$, кг/м ³	$\Delta \rho_{\text{п}}$, кг/м ³	$\delta \rho_{\text{п}}$, %
1-5									
Сер. зн.									

Таблиця 2.2

Номер з/п	d_i , м	Δd_i , м	h_i , м	Δh_i , м	$\rho_{\text{ц}}$, кг/м ³	$\Delta \rho_{\text{ц}}$, кг/м ³	$\delta \rho_{\text{ц}}$, %
1-5							
Сер. зн.							

Кінцевий результат записують у вигляді:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a \text{ (м)}, \delta a = \dots\%;$$

$$b = \bar{b} \pm \Delta b \text{ (м)}, \delta b = \dots\%;$$

$$c = \bar{c} \pm \Delta c \text{ (м)}, \delta c = \dots\%;$$

$$d = \bar{d} \pm \Delta d \text{ (м)}, \delta d = \dots\%;$$

$$h = \bar{h} \pm \Delta h \text{ (м)}, \delta h = \dots\%;$$

$$m_{\text{п}} = \bar{m}_{\text{п}} \pm \Delta m_{\text{п}} \text{ (кг)}, \delta m_{\text{п}} = \dots\%;$$

$$m_{\text{ц}} = \bar{m}_{\text{ц}} \pm \Delta m_{\text{ц}} \text{ (кг)}, \delta m_{\text{ц}} = \dots\%;$$

$$\rho_{\text{п}} = \bar{\rho}_{\text{п}} \pm \Delta \rho_{\text{п}} \text{ (кг/м}^3\text{)}, \delta \rho_{\text{п}} = \dots\%;$$

$$\rho_{\text{ц}} = \bar{\rho}_{\text{ц}} \pm \Delta \rho_{\text{ц}} \text{ (кг/м}^3\text{)}, \delta \rho_{\text{ц}} = \dots\%.$$

Отримані результати порівнюють з табличними значеннями густини металів і роблять висновок про роботу.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. Яку фізичну величину називають густиною тіла?
2. Які вимірювання називають прямими, непрямими?
3. Які види похибок Ви знаєте?
4. Що називають абсолютною та відносною похибкою вимірювання фізичної величини?
5. З яких похибок складається загальна похибка вимірювання?
6. Як обчислюють випадкову похибку, похибку приладу та заокруглення?
7. Як обчислити похибку непрямих вимірювань?
8. Що таке довірчий інтервал? Від чого він залежить?

2.2. Перевірка основного закону динаміки обертального руху за допомогою маятника Обербека

Під час виконання лабораторної роботи основною метою є експериментальна перевірка основного закону динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Необхідні прилади для роботи – маятник Обербека, лічильник часу, електронна вага, масштабна лінійка, штангенциркуль, набір тягарців різної маси. Теоретичний матеріал, який потрібно знати для виконання лабораторної роботи, – тангенціальне та кутове прискорення, їх взаємозв'язок; момент сили; момент інерції матеріальної точки та твердого тіла; момент імпульсу; другий закон Ньютона для поступального та обертального рухів; теорема Гюйгенса–Штейнера.

2.2.1. Основні поняття та формули динаміки твердого тіла

Визначимо деякі основні поняття, якими оперуватимемо у цій роботі.

Абсолютно тверде тіло (надалі тверде тіло) – це тіло, відстань між будь-якими двома його точками можна вважати постійною. Інакше кажучи, це тіло, форма і розміри якого не змінюються під час руху. Усяке тверде тіло можна подумки розбити на велику кількість частин, як завгодно малих порівняно з розмірами всього тіла, і розглядати його як систему (сукупність) матеріальних точок, жорстко зв'язаних одна з одною.

Центром мас, або *центром інерції* називають геометричну точку C , маса якої дорівнює масі всього тіла, а її положення визначається радіус-вектором \mathbf{R}_c :

$$\mathbf{R}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\mathbf{r}_i}{m}, \quad (2.2.1)$$

де m_i і \mathbf{r}_i – маси й радіуси-вектори окремих точок (частин), m – маса всього тіла.

Довільний рух тіла можна розглядати як сукупність поступального руху центра мас і обертального руху навколо осі, що проходить через центр мас.

Поступальним називається рух, під час якого пряма, що з'єднує будь-які дві точки тіла, переміщується паралельно сама собі (рис. 2.5). При такому русі всі точки тіла виконують за той самий проміжок часу рівні за величиною і напрямом переміщення, внаслідок чого швидкості і прискорення всіх точок у кожен момент часу є однаковими. Тому достатньо визначити рух однієї з точок тіла (наприклад, центра мас) для того, щоб охарактеризувати рух всього тіла. Для опису поступального руху використовують тангенціальне прискорення.

Тангенціальне прискорення \mathbf{a}_τ , яке є складовою лінійного прискорення \mathbf{a} , кількісно дорівнює зміні модуля швидкості \mathbf{v} тіла за одиницю часу t і напрямлене по дотичній до траєкторії руху. Числове значення вектора \mathbf{a}_τ

$$|\mathbf{a}_\tau| = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}. \quad (2.2.2)$$

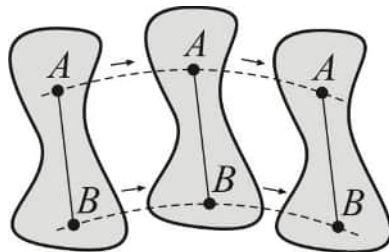


Рис. 2.5. Схематичне зображення поступального руху

Напрямок тангенціального прискорення збігається з напрямком швидкості, а його значення і знак визначають характер криволінійного руху. Якщо $a_\tau > 0$, то рух прискорений, якщо ж $a_\tau < 0$, – сповільнений.

Другий закон Ньютона для центра мас твердого тіла записується у вигляді

$$\frac{d(m\mathbf{v}_c)}{dt} = \mathbf{F}_{\text{зовн}}, \quad (2.2.3)$$

де \mathbf{v}_c – швидкість центру мас; $\mathbf{F}_{\text{зовн}}$ – рівнодійна всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла.

Обертальним рухом твердого тіла називають такий рух, за якого всі точки тіла описують кола, що лежать у паралельних площинах, з центрами, розташованими на прямій, яку називають віссю обертання (рис. 2.6). Вісь обертання може бути всередині тіла та поза ним.

Кутовим прискоренням $\boldsymbol{\varepsilon}$ називають вектор, який чисельно дорівнює зміні кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ за одиницю часу:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (2.2.4)$$

Це псевдовектор, його ще називають аксіальним. Він не має точки прикладання і паралельний до осі обертання. У прискореному обертанні напрям кутового прискорення $\boldsymbol{\varepsilon}$ збігається з напрямом кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$, а у сповільненому – протилежний до неї.

Кутове прискорення пов'язане з лінійним тангенціальним прискоренням точки так, що вектор тангенціального прискорення \mathbf{a}_τ дорівнює векторному добутку кутового прискорення $\boldsymbol{\varepsilon}$ на радіус-вектор \mathbf{r} :

$$\mathbf{a}_\tau = [\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}]. \quad (2.2.5)$$

Щоб тверде тіло з закріпленою віссю привести в обертовий рух, потрібно хоча б до однієї з його точок прикласти зовнішню

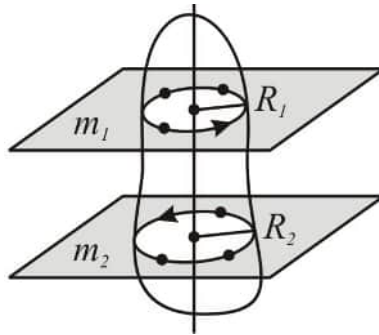


Рис. 2.6. Схематичне зображення обертального руху

силу \mathbf{F} і щоб точка прикладання сили не була на осі обертання, а сама сила непаралельна їй (рис. 2.6).

Моментом сили \mathbf{M} відносно осі обертання називають фізичну величину, яка дорівнює векторному добутку радіус-вектора \mathbf{r} , проведеного в точку прикладання сили \mathbf{F} , на цю силу:

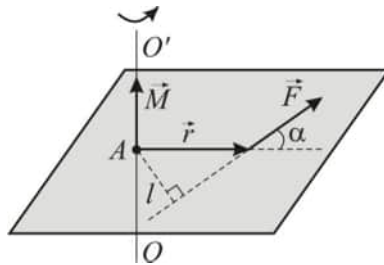
$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]. \quad (2.2.6)$$

Момент сили \mathbf{M} напрямлений уздовж осі обертання OO' та перпендикулярний до площини, в якій лежать радіус-вектор \mathbf{r} і сила \mathbf{F} . Напрямок його визначають за означенням векторного добутку або за правилом свердлика. Під час спостереження з кінця вектора \mathbf{M} видно, що обертання по найкоротшому шляху від \mathbf{r} до \mathbf{F} відбувається проти годинникової стрілки (рис. 2.7).

Модуль вектора \mathbf{M} згідно з визначенням векторного добутку дорівнює

$$M = Fr \sin \alpha = Fl, \quad (2.2.7)$$

де α – кут між векторами \mathbf{r} і \mathbf{F} ; величина $l = r \sin \alpha$ – довжина перпендикуляра, опущеного з точки A на пряму, вздовж якої діє

Рис. 2.7. Векторне зображення моменту сили M

сила, називається плечем сили. Одиниця вимірювання моменту сили – [Н·м].

Моментом інерції I матеріальної точки відносно осі обертання називають фізичну величину, яка дорівнює добутку її маси m на квадрат відстані r до осі обертання:

$$I = mr^2. \quad (2.2.8)$$

Одиниця вимірювання – [кг·м²].

Основний закон динаміки обертального руху стверджує, що кутове прискорення твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, прямо пропорційне до сумарного моменту всіх зовнішніх сил, що діють на тіло, і обернено пропорційне до моменту інерції тіла відносно цієї осі:

$$\varepsilon = \frac{M}{I}, \quad (2.2.9)$$

де ε – проекція кутового прискорення на вісь обертання; M – проекція моменту сил на вісь обертання; I – момент інерції тіла відносно осі.

Цей закон є аналогом другого закону Ньютона для поступального руху ($a = F/m$), проте в ньому є інші величини – кутове

прискорення, момент сили, момент інерції, оскільки обертальний рух твердого тіла визначений не лише силою і масою тіла, а й просторовим розподілом мас точок у твердому тілі та розташуванням прямих, уздовж яких діють сили.

В обертальному русі роль маси m , тобто міри інертності, відіграє момент інерції I , роль сили F – момент сили M , прискорення a – кутове прискорення ε .

2.2.2. Вивчення обертального руху на маятнику Обербека

Закони обертального руху зазвичай досліджують за допомогою приладу “маятник Обербека”, який зображено на рис.2.8. Маятник складається з вала 1, на якому закріплені два шківів різних радіусів R_1 і R_2 та чотири стрижні 2 у вигляді хрестовини. На стрижнях кріплять додаткові вантажі 3 однакової маси. Пересуваючи їх вздовж стрижня, можна змінювати момент інерції I маятника. Маятнику надають обертального руху, підвішуючи тягарець 4 до нитки, протилежний кінець якої намотують на один зі шківів. Змінюючи масу m тягарця або радіус R шківа, можна змінити момент сили M . Висоту h опускання тягарця вимірюють лінійкою або визначають за шкалою 5 приладу. Час t опускання тягарця вимірюють лічильником часу 6 (механічним, електромеханічним чи електронним секундоміром).

Момент сили M визначають за формулою (2.2.6). З рис. 2.8 бачимо, що довжина радіуса-вектора \mathbf{r} дорівнює радіусу шківа R , на який намотана нитка, а F – силі натягу $F_{\text{н}}$ нитки, що виникає під дією ваги тягарця масою m . Оскільки кут між векторами \mathbf{r} і $\mathbf{F}_{\text{н}}$ дорівнює 90° , то формулу (2.2.7) запишемо так:

$$M = RF_{\text{н}}. \quad (2.2.10)$$

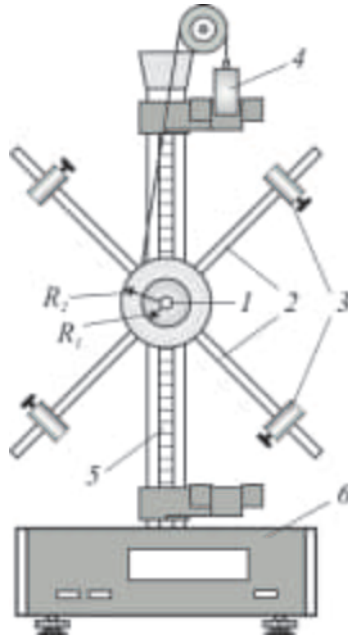


Рис. 2.8. Маятник Обербека

За другим законом Ньютона для поступального руху рівнодійна сил, що діють на тіло, дорівнює добутку маси тіла на його прискорення:

$$\sum F_i = ma. \quad (2.2.11)$$

Тому рівняння поступального руху тягарця масою m набуває вигляду

$$mg - F_H = ma. \quad (2.2.12)$$

З урахуванням характеру руху тягарця момент інерції визначають так:

$$I = \frac{mR^2(gt^2 - 2h)}{2h}, \quad (2.2.13)$$

де h – висота опускання тягарця; t – час опускання.

Перевіримо основний закон динаміки обертального руху (2.2.9) за умови сталого моменту інерції I , змінюючи момент сили M . Для двох різних M_1 і M_2 можна записати

$$\varepsilon_1 = \frac{M_1}{I}, \quad \varepsilon_2 = \frac{M_2}{I}. \quad (2.2.14)$$

З цих рівностей випливає, що

$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} = I = \text{const}. \quad (2.2.15)$$

З урахуванням виразу (2.2.13) для моменту інерції рівність (2.2.15) запишемо так:

$$m_1 R_1^2 (gt_1^2 - 2h) = m_2 R_2^2 (gt_2^2 - 2h). \quad (2.2.16)$$

Отже, перевірку основного закону динаміки обертального руху можна звести до експериментальної перевірки рівності $A = B$, де

$$A = m_1 R_1^2 (gt_1^2 - 2h); \quad B = m_2 R_2^2 (gt_2^2 - 2h). \quad (2.2.17)$$

Для проведення розрахунків вимірюють лінійкою висоту h за шкалою, а штангенциркулем – радіуси шківів R_1 і R_2 . Визначають маси вантажів m_1 і m_2 на технічних терезах. Вимірюють час t_1 опускання на відстань h вантажу масою m_1 , що підвішений до нитки, яка намотана на шків радіусом R_1 . Вимірювання повторюють п'ять разів.

Вимірюють час t_2 опускання на відстань h вантажу масою m_2 , що підвішений до нитки, яка намотана на шків радіусом R_2 . Вимірювання повторюють п'ять разів. За формулою (2.2.17) визначають A та B і переконуються, що вони однакові (в межах похибки).

З робочих формул (2.2.17) розраховують частинні похідні:

$$\frac{\partial A}{\partial m_1} = R_1^2(gt_1^2 - 2h); \quad \frac{\partial A}{\partial R_1} = 2m_1R_1(gt_1^2 - 2h);$$

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} = 2m_1R_1^2gt_1; \quad \frac{\partial A}{\partial h} = -2m_1R_1^2.$$

$$\frac{\partial B}{\partial m_2} = R_2^2(gt_2^2 - 2h); \quad \frac{\partial B}{\partial R_2} = 2m_2R_2(gt_2^2 - 2h);$$

$$\frac{\partial B}{\partial t_2} = 2m_2R_2^2gt_2; \quad \frac{\partial B}{\partial h} = -2m_2R_2^2.$$

Використовуючи наведені вище формули та формулу (2.1.6), обчислюють абсолютні похибки для значень A та B :

$$\Delta A = \bar{A} \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{\bar{m}_1}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta R_1}{\bar{R}_1}\right)^2 + \left(\frac{2g\bar{t}_1\Delta t_1}{\bar{g}\bar{t}_1^2 - 2\bar{h}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta h}{\bar{g}\bar{t}_1^2 - 2\bar{h}}\right)^2};$$

$$\Delta B = \bar{B} \sqrt{\left(\frac{\Delta m_2}{\bar{m}_2}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta R_2}{\bar{R}_2}\right)^2 + \left(\frac{2g\bar{t}_2\Delta t_2}{\bar{g}\bar{t}_2^2 - 2\bar{h}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta h}{\bar{g}\bar{t}_2^2 - 2\bar{h}}\right)^2};$$

$$\delta A = \frac{\Delta A}{\bar{A}} \cdot 100\%; \quad \delta B = \frac{\Delta B}{\bar{B}} \cdot 100\%.$$

Результати вимірювань і обчислень записують у табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Номер з/п	t_{1i} , с	Δt_{1i} , с	t_{2i} , с	Δt_{2i} , с	A , кг·м ³	ΔA , кг·м ³	B , кг·м ³	ΔB , кг·м ³
1-5								
Сер. зн.								

Кінцевий результат записують у вигляді:

$$R_1 = \bar{R}_1 \pm \Delta R_1, \text{ (м)}; R_2 = \bar{R}_2 \pm \Delta R_2, \text{ (м)};$$

$$m_1 = \bar{m}_1 \pm \Delta m_1, \text{ (кг)}; m_2 = \bar{m}_2 \pm \Delta m_2, \text{ (кг)};$$

$$A = \bar{A} \pm \Delta A, \text{ (кг} \cdot \text{м}^3\text{)}; \delta A = \dots\%;$$

$$B = \bar{B} \pm \Delta B, \text{ (кг} \cdot \text{м}^3\text{)}; \delta B = \dots\%.$$

З отриманих результатів формують висновки до лабораторної роботи.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. Що називають моментом інерції матеріальної точки; твердого тіла?
2. Яку фізичну величину називають моментом сили?
3. Сформулюйте і запишіть основний закон динаміки обертального руху.
4. Що називають кутовим прискоренням обертального руху?
5. Який зв'язок кутового прискорення з лінійним тангенціальним прискоренням?

6. Запишіть другий закон Ньютона для випадку опускання тягарця.
7. Як можна змінити момент сили, що діє на маятник Обербека?
8. Як можна змінити момент інерції маятника Обербека?

2.3. Визначення моменту інерції тіла за допомогою маятника Максвелла

Основною метою цієї роботи є вивчення законів динаміки обертального руху твердих тіл на прикладі маятника Максвелла. До приладів, які необхідні для виконання роботи, належать маятник Максвелла і лічильник часу. Необхідним теоретичним матеріалом тут є момент сили; момент інерції твердого тіла; рівняння моментів; закон збереження моменту імпульсу.

2.3.1. Закон збереження енергії. Момент інерції маятника Максвелла

Робота маятника Максвелла (рис.2.9) базується на одному з основних законів механіки – *законі збереження механічної енергії*: повна механічна енергія замкнутої консервативної системи під час руху не змінюється. Сили, які діють на тіла системи, поділяють на внутрішні та зовнішні. *Внутрішніми* називають сили, з якими взаємодіють між собою тіла системи; *зовнішніми* – сили, зумовлені впливом тіл, які не належать системі. Замкнена система означає, що немає зовнішніх сил, які виконують роботу і збільшують або зменшують механічну енергію системи.

Сили також поділяють на консервативні та дисипативні. *Консервативними* називають сили, робота яких визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіл і не залежить від траєкторії. *Дисипативними* називають сили, завжди спрямовані протилежно до швидкостей, які чинять негативну сумарну роботу під час будь-яких переміщень тіл. Консервативна система не має дисипативних сил (тертя, опору та ін.), які перетворюють механічну енергію системи у внутрішню (тепло).

Маятник Максвелла являє собою тверде тіло (масивний диск), поміщене на горизонтальну вісь. Вісь підвішена на двох нитках (рис. 2.9, а). Під дією сили тяжіння (рис. 2.9, б) маятник виконує

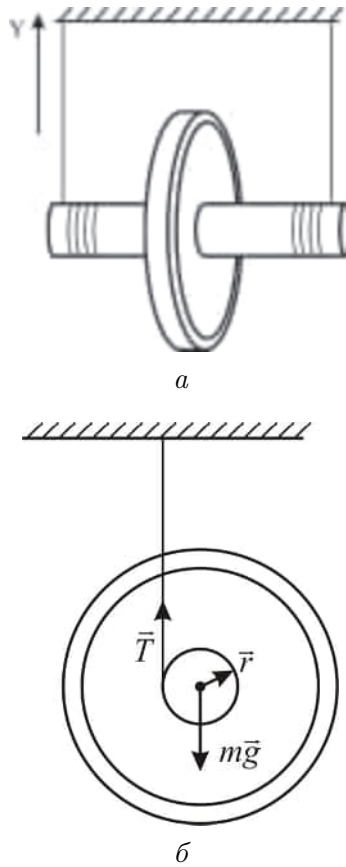


Рис. 2.9. Маятник Максвелла

коливання у вертикальному напрямі, а також виконує крутильні коливання навколо своєї осі. Закручуючи нитки, маятник піднімається на висоту h , тобто йому надається запас потенціальної енергії. Якщо відпустити маятник, то він виконує рух під дією сили тяжіння: поступальний вниз і обертальний навколо своєї осі. У цьому випадку потенціальна енергія переходить у кінетичну. Досягнувши нижнього положення, маятник буде за інерцією обертатись в тому ж напрямі, нитки намотаються на вісь маятника і він підніметься. Так відбуваються коливання маятника.

Закон збереження енергії для маятника Максвелла можна записати у такому вигляді:

$$E_{\text{повн}} = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \text{const}, \quad (2.3.1)$$

де $E_{\text{повн}}$ – повна енергія системи; $E_{\text{к}}$ – повна кінетична енергія; $E_{\text{п}}$ – потенціальна енергія.

Повна кінетична енергія руху маятника дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху та кінетичної енергії обертального руху навколо осі, яка проходить через центр мас і дорівнює

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.3.2)$$

Тут v – лінійна швидкість руху маятника; ω – кутова швидкість; m – маса маятника; I – момент інерції маятника.

Підставивши рівняння (2.3.2) у (2.3.1) та записавши $E_{\text{п}} = mgh$, отримаємо:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.3.3)$$

Оскільки, $\omega = v/r$, де r – радіус осі (рис. 2.9, б), на яку намотано нитки, тоді рівняння (2.3.3) набуде вигляду:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2r^2}. \quad (2.3.4)$$

Звідси знаходимо момент інерції маятника:

$$I = mr^2 \left(\frac{2gh}{v^2} - 1 \right). \quad (2.3.5)$$

Рух маятника рівноприскорений, відповідно, можна застосувати формули для шляху та швидкості:

$$\begin{cases} h = v_0 t + at^2/2; \\ v = v_0 + at. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Прийmemo $v_0 = 0$, тоді

$$\begin{cases} h = at^2/2; \\ v = at. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

З системи рівнянь (2.3.7) знаходимо $v = 2h/t$. Якщо $r = D/2$ і підставивши це у формулу (2.3.5), то отримаємо робочу формулу у вигляді:

$$I = \frac{mD^2}{4} \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (2.3.8)$$

Таку ж формулу можна отримати іншим способом.

Запишемо рівняння руху маятника. Під час поступального руху маятника згідно з другим законом Ньютона, з урахуванням діючих на маятник сил (рис. 2.9, б), можна записати:

$$ma = mg + 2T, \quad (2.3.9)$$

де a – прискорення поступального руху центра мас маятника; T – сила натягу однієї нитки.

Проекція цього рівняння на вісь Y :

$$ma = mg - 2T. \quad (2.3.10)$$

Для обертального руху маятника запишемо основний закон динаміки обертального руху для абсолютно твердого тіла:

$$M = I\varepsilon, \quad (2.3.11)$$

де I – момент інерції маятника відносно його осі обертання; ε – кутове прискорення маятника; M – результуючий момент зовнішніх сил відносно осі обертання.

Оскільки момент сили тяжіння відносно осі обертання дорівнює нулю, тоді

$$I\varepsilon = 2Tr, \quad (2.3.12)$$

де r – радіус осі.

Позаяк $a = \varepsilon r$ і з рівняння (2.3.10) $2T = m(g - a)$, можемо записати:

$$I = mr^2 \frac{(g - a)}{a}, \quad (2.3.13)$$

або $I = mr^2 (g/a - 1)$.

Прискорення a може бути знайдено після вимірювання часу руху маятника під час проходження відстані h . Із рівняння для рівноприскореного руху без початкової швидкості маємо:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (2.3.14)$$

Тоді

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \quad (2.3.15)$$

і якщо підставити діаметр осі D , отримаємо основну розрахункову формулу:

$$I = \frac{mD^2}{4} \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (2.3.16)$$

2.3.2. Визначення моменту інерції маятника Максвелла

Загальний вигляд робочої установки зображено на рис. 2.10. Основа 1 містить регулюючі ніжки 2, які дають змогу проводити вирівнювання приладу. В основі закріплена колонка 3, до якої прикріплено нерухомий верхній кронштейн 4 і рухомий нижній кронштейн 5. На верхньому кронштейні знаходиться електромагніт 6, фотоелектричний датчик 7 і закріплювач 8 для закріплення і регулювання довжини біфілярної підвіски маятника. Нижній кронштейн разом із прикріпленим до нього фотоелектричним датчиком 9 можна переміщувати вздовж колонки і фіксувати в довільно вибраному положенні. Тілом маятника є ролик, закріплений на осі 10. На нього прикріплюють кільце 11, яке змінює момент інерції маятника.

Маятник підтримується у верхньому положенні електромагнітом. Його довжина визначається за допомогою міліметрової шкали на колонці приладу з похибкою не більше 2 мм. Для точнішого вимірювання довжини на нижньому кронштейні наведено вказівник, який поміщений на висоті оптичної осі нижнього фотоелектричного датчика. Для вимірювання часу падіння з відносною похибкою не більше 0.02 % використовується електронна схема, яка складається з мілісекундоміра 12, двох фотоелектричних датчиків і електромагніту. Під час проходження маятника біля фотоелектричного датчика в схему мілісекундоміра надходить електричний сигнал, який фіксує момент проходження маятника.

Під час виконання лабораторної роботи перевіряють, чи збігається нижня частина кільця маятника з нулем на колонці. Якщо не збігається, тоді потрібно відкрутити верхній кронштейн і відрегулювати його висоту. Натискають кнопку “пуск” мілісекундоміра. Встановлюють довжину нитки так, щоб край сталюого кільця після опускання маятника розташовувався приблизно на

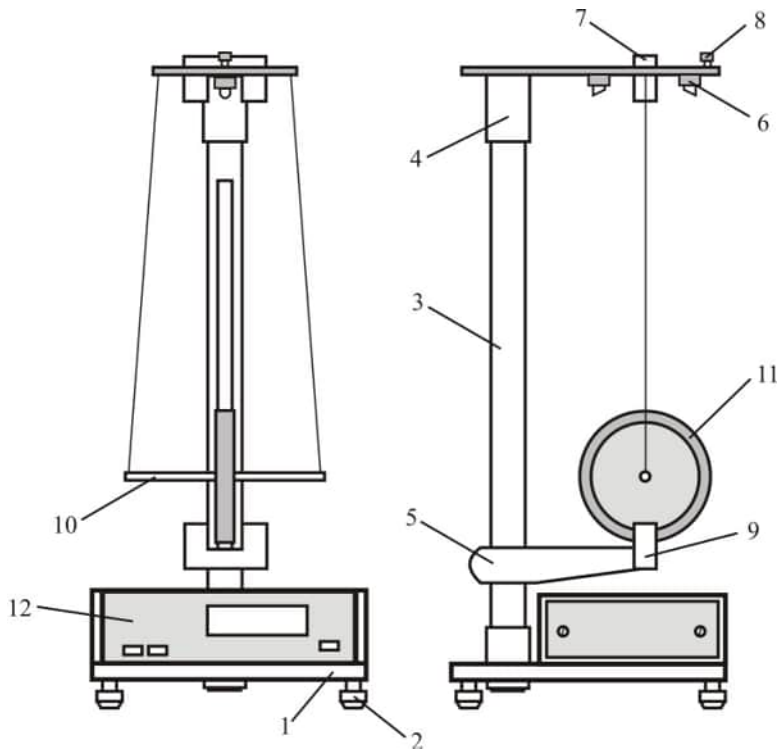


Рис. 2.10. Загальний вигляд установки

2 мм нижче оптичної осі нижнього фотоелектричного датчика. Одночасно проводять регулювання установки маятника так, щоб його вісь була паралельна до основи приладу. Натискають кнопку “пуск” мілісекундоміра. Намотують на вісь маятника нитку підвіски. Фіксують маятник за допомогою електромагніту. Натискають кнопку “скидання” мілісекундоміра. Натискають кнопку “пуск” мілісекундоміра. Вимірюють час падіння маятника в

секундах за допомогою мілісекундоміра. Проводять аналогічні вимірювання п'ять разів.

Визначають висоту h у метрах, використовуючи шкалу на вертикальній колонці приладу.

Визначають діаметр осі разом із намотаною на неї ниткою за формулою:

$$D = D_o + 2D_n, \quad (2.3.17)$$

де D_n – діаметр нитки ($D_n = 0.5$ мм); D_o – діаметр зовнішньої осі маятника ($D_o = 10$ мм).

Визначають масу маятника разом із кільцем за формулою:

$$m = m_o + m_k + m_p. \quad (2.3.18)$$

Тут m_o – маса осі; m_k – маса кільця; m_p – маса ролика. Значення мас окремих елементів наведено на дослідній установці.

Визначають момент інерції маятника за формулою (2.3.16).

Визначають теоретичне значення моменту інерції за формулою:

$$I_T = I_o + I_k + I_p, \quad (2.3.19)$$

де $I_o = \frac{1}{8}m_o D_o^2$ – момент інерції осі; $I_k = \frac{1}{8}m_k(D_k^2 + D_p^2)$ – момент інерції кільця; D_k – зовнішній діаметр кільця ($D_k = 105$ мм); D_p – зовнішній діаметр ролика ($D_p = 86$ мм); $I_p = \frac{1}{8}m_p(D_p^2 + D_o^2)$ – момент інерції ролика.

Обчислюють відносну похибку визначення моменту інерції за формулою:

$$\varepsilon = \frac{|I - I_T|}{I_T} \cdot 100\%. \quad (2.3.20)$$

Відносна похибка не повинна перевищувати 8 %.

Розрахуємо частинні похідні для формули (2.3.16) і запишемо їх у вигляді:

$$\frac{\partial I}{\partial m} = \frac{D^2}{4} \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right); \quad \frac{\partial I}{\partial D} = \frac{mD}{2} \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right);$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{mD^2gt}{4h}; \quad \frac{\partial I}{\partial h} = -\frac{mD^2gt^2}{8h^2}.$$

Запишемо на підставі формули (2.1.6), формули для похибок величин непрямих вимірювань:

$$\Delta I = \bar{I} \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\bar{m}} \right)^2 + \left(\frac{4h\Delta D}{\bar{D}(gt^2 - 2h)} \right)^2 + \left(\frac{gt^2\Delta h}{\bar{h}(gt^2 - 2h)} \right)^2 + \left(\frac{2gt\Delta t}{\bar{t}(gt^2 - 2h)} \right)^2};$$

$$\delta I = \frac{\Delta I}{\bar{I}}.$$

Результати вимірювань і обчислень записують у табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Номер з/п	m_i , кг	Δm_i , кг	D_i , м	ΔD_i , м	t_i , с	Δt_i , с	h_i , м	Δh_i , м	I , кг·м ²	ΔI , кг·м ²
1-5										
С.зн.										

Кінцевий результат записують у вигляді:

$$m = \bar{m} \pm \Delta m, \text{ (кг);} \quad D = \bar{D} \pm \Delta D, \text{ (м);}$$

$$t = \bar{t} \pm \Delta t, \text{ (с);} \quad h = \bar{h} \pm \Delta h, \text{ (м);}$$

$$I = \bar{I} \pm \Delta I, \text{ (кг} \cdot \text{м}^2\text{);} \quad \delta I = \dots\%.$$

На підставі отриманих результатів для I та I_T формують висновки до лабораторної роботи.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. Сформулюйте закон збереження механічної енергії й умови його виконання.
2. Які сили називають консервативними, а які дисипативними?
3. Запишіть основний закон динаміки обертального руху.
4. Дайте визначення моменту інерції твердого тіла.
5. Запишіть формулу для визначення кінетичної енергії абсолютно твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.
6. Опишіть прилад і дію маятника Максвелла.

2.4. Дослідження залежності моменту інерції дволанкової системи від її геометричних параметрів

Під час виконання лабораторної роботи основною метою є експериментальне дослідження залежності моменту інерції дволанкової системи від положення її центра мас. Основні прилади та матеріали – штатив із горизонтальною віссю, на яку підвищують дволанкову систему; металева тригранна призма; електронна вага; вимірювальна лінійка; секундомір; транспортир. До теоретичного матеріалу, який потрібний для проведення роботи, належить центр мас; момент інерції матеріальної точки та твердого тіла; момент сили; момент імпульсу; рівняння моментів; фізичний маятник.

2.4.1. Момент інерції. Рух центра мас системи матеріальних точок

Мірою інертності тіла під час обертального руху є момент інерції. Його можна визначити окремо для матеріальної точки та твердого тіла (системи матеріальних точок).

Моментом інерції матеріальної точки, що обертається навколо нерухомої осі, є скалярна величина

$$I = mr^2, \quad (2.4.1)$$

де m – маса точки; r – відстань від осі обертання до точки.

Моментом інерції твердого тіла відносно нерухомої осі є сума моментів інерції всіх його матеріальних точок відносно цієї осі (осі обертання):

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (2.4.2)$$

Оскільки рівнянням руху матеріальної точки є другий закон Ньютона, то рівняння руху твердого тіла можна отримати з вра-

хуванням руху кожної його точки, що суттєво ускладнює відповідну задачу. Рівняння можна спростити, якщо ввести поняття центра мас твердого тіла.

Центром мас (центром інерції) системи n матеріальних точок (твердого тіла) називають точку, радіус-вектор якої визначають за формулою:

$$\mathbf{R}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad (2.4.3)$$

де $m = \sum_{i=1}^n m_i$ – повна маса системи; m_i , \mathbf{r}_i – маси і радіус-вектори матеріальних точок, відповідно.

В однорідному полі тяжіння центр мас системи одночасно є центром тяжіння – точкою прикладання рівнодійної всіх паралельних сил тяжіння, положення якої не змінюється під час довільних поворотів системи.

Якщо на систему діють зовнішні сили, рівнодійна на кожну точку яких є \mathbf{F}_i , то система буде рухатися з прискоренням, причому рівняння руху набуде вигляду другого закону Ньютона для матеріальної точки:

$$m \mathbf{a}_c = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad (2.4.4)$$

де \mathbf{a}_c – прискорення центру мас.

Рівняння (2.4.4) виражає закон руху центра мас системи (твердого тіла): якщо на систему матеріальних точок діють зовнішні сили, то центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса m якої дорівнює повній масі системи.

У замкненій системі матеріальних точок (коли точки системи взаємодіють лише між собою і не взаємодіють з точками іншої системи) зовнішні сили на систему не діють і, згідно з формулою (2.4.4), центр мас твердого тіла перебуває в стані спокою або прямолінійного рівномірного руху.

2.4.2. Дволанкова система як фізичний маятник

Опис установки. Розглянемо зображену на рис. 2.11 установку для вимірювання моменту інерції в разі зміни положення центра мас. Основною її частиною є дволанкова система, що складається з двох металевих планок 1 із рівновіддаленими отворами. Планки (ланки) можна жорстко скріпити гвинтом 2 у різних точках під довільним кутом. Якщо таку систему підвісити на горизонтальну вісь 3, яка не проходить через центр мас ланок, і надати їй коливального руху, то отримаємо фізичний маятник.

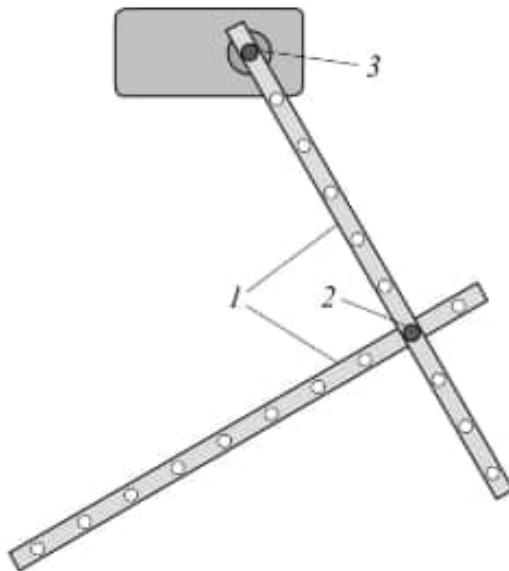


Рис. 2.11. Дволанкова система

Фізичним маятником називають тверде тіло, яке коливається під дією сили тяжіння навколо горизонтальної осі, що не проходить через його центр мас.

Виведення робочої формули. Період T коливань фізичного маятника визначають за формулою:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}, \quad (2.4.5)$$

де I – момент інерції маятника; m – маса маятника; g – прискорення вільного падіння; d – відстань від центра мас маятника до осі підвісу.

З формули (2.4.5) визначимо момент інерції:

$$I = \frac{T^2 mgd}{4\pi^2}. \quad (2.4.6)$$

У випадку зміни кута α розхилу між ланками змінюватиметься положення центра мас системи (відстань d), що, за формулою (2.4.6), зумовить зміну моменту інерції I системи. Цю залежність моменту інерції дволанкової системи від кута між ланками потрібно дослідити під час виконання лабораторної роботи.

2.4.3. Вимірювання моменту інерції дволанкової системи

Для розрахунку моменту інерції дволанкової системи визначають масу першої m_1 і другої (з гвинтом і гайкою) m_2 ланок. З'єднують гвинтом ланки (точку з'єднання задає викладач) так, щоб кут між ними дорівнював 0° , і визначають положення центра мас системи. Для цього жорстко з'єднану систему зрівноважують на ребрі тригранної призми. Вимірюють лінійкою відстань від положення центра мас до точки підвісу (задає викладач). Підвішують систему на горизонтальну вісь так, щоб вісь

пройшла через точку підвісу. Надають системі коливального руху. Секундоміром визначають час t для N повних коливань системи й обчислюють період коливань $T = t/N$. Описані вище дії повторюють для кута між ланками 180° , а результати записують у табл. 2.5.

Щоб визначити відстань d при кутах 45° , 90° і 135° потрібно виконати геометричну побудову (рис. 2.12) на підставі таких вимірювань: а) методом, описаним вище, визначають положення центра мас ланок AB і CD (A_1 і B_1); б) вимірюють відстань d_1 від центра мас першої ланки AB до точки підвісу O ; в) вимірюють відстань d_2 від центра мас другої ланки (разом з гвинтом і гайкою) до точки з'єднання ланок; г) на міліметровому папері будують згідно з рис. 2.12, де у довільно вибраному масштабі відкладені: AB – довжина першої ланки; CD – довжина другої ланки під відповідним кутом α ; точка O – точка підвісу, точка O_1 – точка з'єднання ланок, точка A_1 – положення центра мас

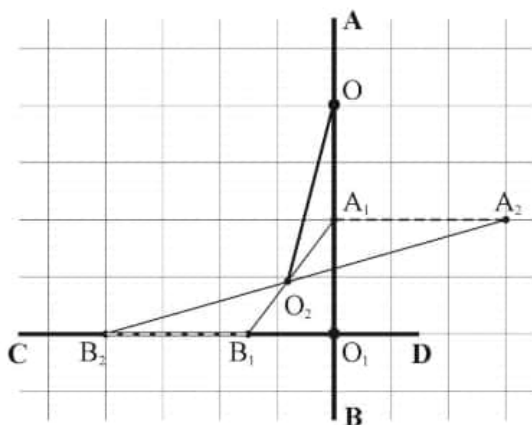


Рис. 2.12. Геометрична побудова для визначення центра мас

першої ланки, B_1 – положення центра мас другої ланки. Центр мас (точка O_2) двох ланок лежить на лінії, яка з'єднує центри мас обох ланок (лінія A_1B_1). Положення точки O_2 визначають так: з точки A_1 проводять у довільному масштабі та в довільному напрямі відрізок A_1A_2 , пропорційний до маси m_2 ланки CD , а з точки B_1 у протилежному напрямі в тому ж масштабі – відрізок B_1B_2 , пропорційний масі m_1 , ланки AB . Точка O_2 перетину прямих A_1B_1 і A_2B_2 буде центром мас дволанкової системи. Результати експериментів записують у табл. 2.5. Обчислюють момент інерції дволанкової системи за формулою (2.4.6) для всіх заданих значень кута α та оцінюють точність одержаних результатів. Обчислюють похибки експерименту.

На підставі робочої формули (2.4.6) отримують такі частинні похідні:

$$\frac{\partial I}{\partial T} = \frac{2Tmgd}{4\pi}; \quad \frac{\partial I}{\partial m} = \frac{T^2gd}{4\pi}; \quad \frac{\partial I}{\partial d} = \frac{T^2mg}{4\pi}.$$

Тоді формули похибок для величин непрямих вимірювань на підставі формули (2.1.6) записують у такому вигляді:

$$\Delta I = \bar{I} \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{\bar{T}}\right)^2}; \quad \delta I = \frac{\Delta I}{\bar{I}}.$$

Результати вимірювань та обчислень записують у табл. 2.5. Кінцевий результат записують у вигляді:

$$m_1 = \bar{m}_1 \pm \Delta m_1; \quad m_2 = \bar{m}_2 \pm \Delta m_2; \quad m = \bar{m} \pm \Delta m;$$

$$T_0 = \bar{T}_0 \pm \Delta T_0; \quad \text{аналогічно для } T_{45}, T_{90}, T_{135}, T_{180};$$

$$d_0 = \bar{d}_0 \pm \Delta d_0; \quad \text{аналогічно для } d_{45}, d_{90}, d_{135}, d_{180};$$

$$I_0 = \bar{I}_0 \pm \Delta I_0; \quad \text{аналогічно для } I_{45}, I_{90}, I_{135}, I_{180}.$$

Таблиця 2.5

Номер з/п	$\alpha_i, ^\circ$	N	$t_i,$ с	$T_i,$ с	$d,$ м	$I,$ кг · м ²	$\Delta I,$ кг · м ²	$\delta I,$ %
1-5								
Сер. зн.		10						
1-5								
Сер. зн.		10						
1-5								
Сер. зн.		10						
1-5								
Сер. зн.		10						
1-5								
Сер. зн.		10						

Зобразити геометричні побудови на міліметровому папері для кутів $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$.

З отриманих результатів формують висновки до лабораторної роботи.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. Що називають центром мас системи, яка складається з двох матеріальних точок; з n матеріальних точок?
2. Запишіть формулу, за якою визначають радіус-вектор центра мас системи матеріальних точок.
3. Що називають моментом інерції матеріальної точки; твердого тіла?
4. Який тип руху виконує центр мас механічної системи?

5. Обчисліть момент інерції однорідного стержня відносно осі, що проходить через один із його кінців; через центр мас.
6. Що називають фізичним маятником?
7. Запишіть формулу періоду коливань фізичного маятника.

2.5. Перевірка закону збереження моменту імпульсу

Основною метою лабораторної роботи є експериментальна перевірка закону збереження моменту імпульсу. Необхідними інструментами для роботи є установка для визначення моменту імпульсу та секундомір. Теоретичний матеріал, який потрібно знати для проведення лабораторної роботи: кутова швидкість; момент сили та момент інерції; другий закон Ньютона для обертального руху; момент імпульсу; закон збереження моменту імпульсу; закон збереження енергії; робота сили.

2.5.1. Момент імпульсу тіла та закон його зміни

Розглянемо тіло масою m , що рухається по деякій траєкторії зі швидкістю \mathbf{v} і в цей момент часу його радіус-вектор дорівнює \mathbf{r} , а його імпульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (рис. 2.13). Крім імпульсу, існує ще одна векторна характеристика руху – момент імпульсу \mathbf{L} .

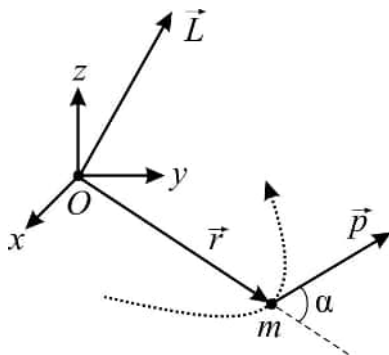


Рис. 2.13. Опис руху тіла

Моментом імпульсу тіла відносно точки O (рис. 2.13) називають векторний добуток радіус-вектора на імпульс тіла:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]. \quad (2.5.1)$$

Момент імпульсу визначають для криволінійного та для прямолінійного руху.

На рис. 2.14, *а* зображено тіло, що обертається по колу радіуса r , для нього $L = rp \sin 90^\circ = mvr$.

На рис. 2.14, *б* – тіло, яке рухається по прямій, для нього $L = mvr \sin \alpha = mvl$.

Паралельним перенесенням перемістимо вектор імпульсу \mathbf{p} так, щоб його початок збігався з початком координат O (рис. 2.15). Згідно з визначенням $\mathbf{L} \perp \mathbf{r}$, $\mathbf{L} \perp \mathbf{p}$, а його напрям визначають за правилом правого гвинта. Величина L залежить від вибору точки O , яку можна вибирати де завгодно. Тому вектор \mathbf{L} проводять з точки O , якщо ж наявна вісь обертання, то точку O ставлять на осі.

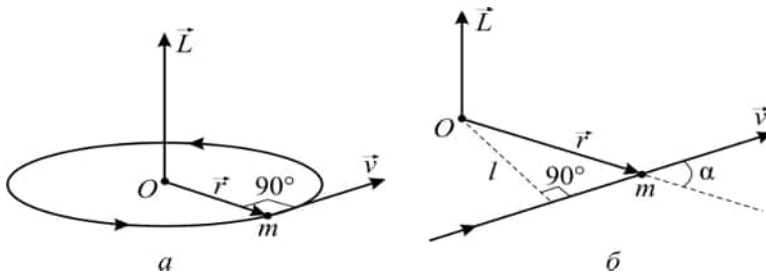


Рис. 2.14. Визначення моменту імпульсу для двох випадків руху тіла: по колу (*а*) та по прямій (*б*)

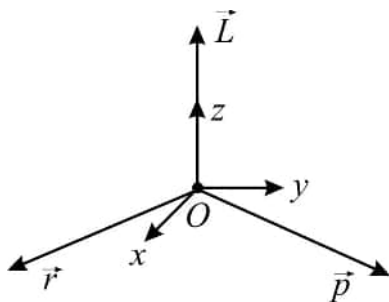


Рис. 2.15. Графічне зображення формули (2.5.1) у декартовій системі координат

Закон зміни моменту імпульсу \mathbf{L} тіла отримують, продиференціювавши за часом вираз (2.5.1):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}, \mathbf{p}] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p} \right] + \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] = [\mathbf{v}, \mathbf{p}] + \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]. \quad (2.5.2)$$

Позаяк $\mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$, тому перший доданок у рівнянні (2.5.2) перетворюється в нуль, а $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ згідно з другим законом Ньютона. Отже,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = \mathbf{M}, \quad (2.5.3)$$

де \mathbf{M} – момент сили (див. розділ 2.2).

Отже, закон зміни моменту імпульсу формулюється так: *швидкість зміни моменту імпульсу тіла відносно деякої точки дорівнює моменту сили відносно тієї ж точки.*

Момент імпульсу системи $\mathbf{L}_{\text{сист}}$ є адитивна величина, що дорівнює векторній сумі моментів імпульсу всіх тіл системи:

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{сист}}}{dt} = \sum_i \mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]. \quad (2.5.4)$$

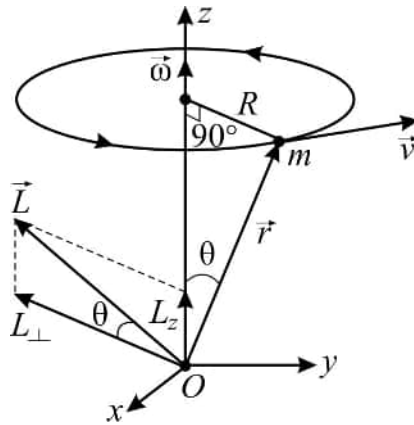


Рис. 2.16. Визначення моменту імпульсу для тіла, що рухається по колу

Оскільки внутрішні сили не можуть змінити повного моменту імпульсу системи, то зв'язок між моментом зовнішніх сил $\mathbf{M}_{\text{зовн}}$, що діють на тіло, та його моментом імпульсу $\mathbf{L}_{\text{сист}}$ задається рівнянням:

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{сист}}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{зовн}}. \quad (2.5.5)$$

Рівняння (2.5.5) називається *рівнянням моментів* і стверджує, що швидкість зміни повного моменту імпульсу системи дорівнює результуючому моменту зовнішніх сил.

Моментом імпульсу тіла відносно осі називають проєкцію моменту імпульсу на деяку фіксовану вісь.

Розглянемо тіло масою m , що рухається по колу радіуса R навколо осі z (рис. 2.16). Виберемо точку O , відносно якої визначають проєкцію вектора \mathbf{L} на вісь z . З рисунка видно, що $L_z = L \sin \theta = mvr \sin 90^\circ \sin \theta = mvR$. Якщо врахувати, що $v = \omega R$, де ω – кутова швидкість обертання тіла, тоді $L_z = mR^2\omega$.

Величина $I = mR^2$ називається моментом інерції тіла відносно осі. Отже,

$$L_z = I\omega, \quad (2.5.6)$$

тобто момент імпульсу тіла відносно осі дорівнює добутку його моменту інерції на кутову швидкість обертання.

Якщо рівняння (2.5.3) записати через проєкції векторів \mathbf{L} і \mathbf{M} на задану фіксовану вісь z , то отримуємо закон зміни моменту імпульсу відносно осі:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (2.5.7)$$

де M_z – момент сили відносно осі.

2.5.2. Дослідження обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Опис установки

На рис. 2.17 зображено схему робочої установки, хрестовина якої може обертатися навколо вертикальної осі під дією моменту сили натягу нитки. Нитку намотують на колонку 1, радіус якої є плечем сили. До нитки підвішують тягарець 2, положення якого можна фіксувати за шкалою 3. Кінці горизонтального стрижня хрестовини 4 містять упори 5. По цьому стрижню можуть вільно рухатися два тягарці 6, які можна закріпити поблизу вертикальної осі хрестовини за допомогою гвинта 7. У такому положенні тягарців хрестовина матиме мінімальний момент інерції. Коли тягарці розсунути до упорів, тоді отримуємо максимальний момент інерції хрестовини.

Під час опускання тягарця 2 із заданої висоти хрестовина буде обертатися зі сталим додатним прискоренням (момент сили – стала величина). Після того, як нитка повністю розкрутиться з колонки 1 (тягарець 2 опуститься в нижнє положення), почнеться обертальний рух хрестовини з від'ємним кутовим прискоренням. Далі нитка знову буде намотуватися на колонку, а тягарець

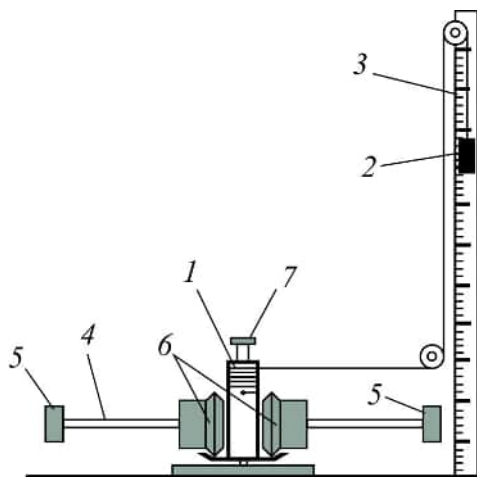


Рис. 2.17. Схема робочої установки для визначення моменту імпульсу

почне підніматися вгору. Якщо б не було втрат на роботу сили тертя, то тягарець повернувся б у попереднє положення.

Знаючи висоту, з якої опускається тягарець, і висоту, на яку він піднявся, можна визначити роботу сил тертя. Такі обчислення можна виконати для двох випадків: мінімального та максимального моментів інерції хрестовини.

Лабораторна установка дає змогу реалізувати рух зі змінним моментом інерції: під час опускання тягарця 2 хрестовина має мінімальний момент інерції (тягарці 6 містяться біля колонки); у нижньому положенні тягарця 2 тягарці 6 під дією відцентрової сили розлітаються до упорів 5 і у цьому випадку тягарець 2 буде підніматися під час обертання хрестовини з максимальним моментом інерції.

Виведення робочої формули. Основний закон динаміки обертального руху (рівняння моментів) визначає зв'язок між моментом зовнішніх сил \mathbf{M} , що діють на тіло, та його моментом імпульсу \mathbf{L} :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (2.5.8)$$

Для ізольованої системи, тобто системи, на яку не діють зовнішні обертальні моменти, одержимо

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \text{ тобто } \mathbf{L} = \text{const}. \quad (2.5.9)$$

Ця рівність виражає закон збереження моменту імпульсу: момент імпульсу ізольованої системи не змінюється під час будь-яких процесів, що відбуваються в системі.

Під час обертання твердого тіла навколо нерухомої осі за відсутності моментів зовнішніх сил останній вираз набуває вигляду

$$I\omega = \text{const}. \quad (2.5.10)$$

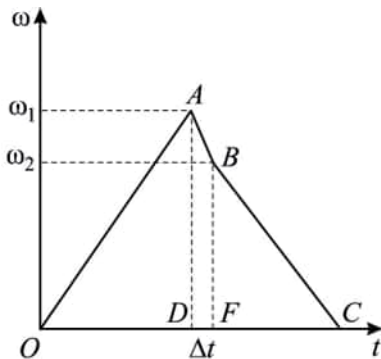


Рис. 2.18. Залежність кутової швидкості хрестовини від часу

З виразу (2.5.10) видно, що зі зменшенням моменту інерції тіла I його кутова швидкість ω збільшується, причому допускають, що в деякі моменти часу тіло перестає бути “твердим”.

Зобразимо графічну залежність кутової швидкості хрестовини від часу під час її руху зі змінним моментом інерції (рис. 2.18). Відрізок AO , що зростає, відповідає першій стадії, BC – третій стадії. За незначний проміжок часу Δt (відрізок DF) кутова швидкість різко зменшується. Ділянка AB відповідає стадії збільшення моменту інерції хрестовини. Обертovому руху хрестовини з максимальним моментом інерції відповідає відрізок BC – третя стадія.

Застосовуючи закон збереження моменту імпульсу відповідно до (2.5.10), для нашого випадку отримаємо:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (2.5.11)$$

де I_1, I_2 – відповідно, мінімальний і максимальний моменти інерції хрестовини; ω_1 – найбільша кутова швидкість на першій стадії руху (точка A на графіку); ω_2 – найбільша кутова швидкість на третій стадії руху (точка B на графіку).

Визначимо величини, що є у виразі (2.5.11), через інші, які можна безпосередньо виміряти на описаній установці. Відношення моментів інерції визначимо за допомогою рівняння руху. Поступальний рух тягарця, прикріпленого до нитки, описує рівняння

$$m \frac{dv}{dt} = mg - T, \quad (2.5.12)$$

де m – маса тягарця, прикріпленого до нитки; dv/dt – його прискорення; v – швидкість поступального руху тягарця; T – сила натягу нитки.

Обертальний рух хрестовини описує основний закон обертального руху (2.5.8). У нашому випадку

$$I_1 \frac{d\omega}{dt} = Tr. \quad (2.5.13)$$

Тут r – радіус колонки, на яку намотана нитка; $d\omega/dt$ – кутове прискорення, пов’язане з лінійною залежністю

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.5.14)$$

Визначивши з виразу (2.5.13) силу натягу нитки T , підставивши його значення в (2.5.12) та скориставшись формулою (2.5.14) для лінійного прискорення тягарця (за умови $mr^2 \ll I$), отримуємо

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mgr^2}{I_1}. \quad (2.5.15)$$

З іншого боку, під час рівноприскореного руху без початкової швидкості

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2h_1}{t_1^2}, \quad (2.5.16)$$

де h_1 – висота, з якої опускається тягарець до повного розмотування нитки. З рівнянь (2.5.15) та (2.5.16) одержимо

$$I_1 = \frac{mgr^2}{2h_1} t_1^2. \quad (2.5.17)$$

Аналогічно, під час руху хрестовини з максимальним моментом інерції

$$I_2 = \frac{mgr^2}{2h_1} t_2^2, \quad (2.5.18)$$

де t_2 – час опускання тягарця з висоти h_1 .

З виразів (2.5.17) і (2.5.18) отримаємо

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}. \quad (2.5.19)$$

Отже, праву частину рівняння (2.5.11) ми виразили за допомогою величин, які безпосередньо визначаємо під час досліду.

Співвідношення кутових швидкостей визначимо з закону збереження енергії. У першій стадії під час опускання тягарця з висоти h_1

$$mgh_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + A_1, \quad (2.5.20)$$

де A_1 – робота сил тертя під час опускання тягарця. Скориставшись співвідношенням між лінійною та кутовою швидкостями $v_1 = \omega_1 r$, при $mr^2 \ll I_1$ визначимо

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(mgh_1 - A_1)}{I_1}}. \quad (2.5.21)$$

Для всіх трьох стадій руху хрестовини закон збереження енергії, очевидно, виглядатиме так:

$$mgh_1 = mgh_2 + A_1 + A_2 + (I_1\omega_1^2 - I_2\omega_2^2)/2, \quad (2.5.22)$$

де A_2 – робота сил тертя під час піднімання тягарця на висоту h_2 ; останній доданок – це енергія, яка перетворилася в тепло під час непружного зіткнення тягарців з упорами.

З рівнянь (2.5.21) і (2.5.22) отримаємо

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2(mgh_2 + A_2)}{I_2}}. \quad (2.5.23)$$

Тепер праву частину рівняння (2.5.11) можемо записати у такому вигляді, використавши формули (2.5.21) та (2.5.23),

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{(mgh_2 + A_2)I_1}{(mgh_1 - A_1)I_2}}. \quad (2.5.24)$$

З рівнянь (2.5.11), (2.5.19) та (2.5.24) випливає, що

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{mgh_2 + A_2}{mgh_1 - A_1}. \quad (2.5.25)$$

Виведемо вирази для A_1 та A_2 через величини, які безпосередньо вимірюємо під час досліду.

Нехай тягарець за найменшого моменту інерції I_1 опускається з висоти h_1 і піднімається на висоту h_3 . Енергію, яка дорівнює різниці потенціальних енергій тягарця, витрачено на роботу сил тертя за весь час руху системи. Робота тільки під час опускання тягарця визначається формулою

$$A_1 = \alpha_1 mgh_1, \quad (2.5.26)$$

де α – величина, що вказує, яка частина потенціальної енергії тягарця, піднятого на висоту h_1 , витрачається на виконання роботи для подолання сил тертя під час його повного опускання.

Значення α можна визначити на підставі таких міркувань. Різниця потенціальних енергій тягарця на початковій h_1 та кінцевій h_3 висотах має дорівнювати роботі сил тертя на повному шляху тягарця $h_1 + h_3$, яку за аналогією з (2.5.26) можна записати

$$A'_1 = \alpha_1 mg(h_1 + h_3). \quad (2.5.27)$$

Отже,

$$\alpha_1 mg(h_1 + h_3) = mg(h_1 - h_3). \quad (2.5.28)$$

Звідси

$$\alpha_1 = \frac{h_1 - h_3}{h_1 + h_3}. \quad (2.5.29)$$

Аналогічно до формули (2.5.26) виразимо роботу, яку виконують сили тертя під час піднімання тягарця на висоту h_2 (згадаємо, що в цьому випадку система мала максимальний момент інерції I_2):

$$A_2 = \alpha_2 mgh_2. \quad (2.5.30)$$

Щоб визначити коефіцієнт α_2 , використаємо ту частину експерименту, в якій тягарець опускався з висоти h_1 і піднімався на висоту h_4 при максимальному моменті інерції. Аналогічно до (2.5.28)

$$\alpha_2 mg(h_1 + h_4) = mg(h_1 - h_4). \quad (2.5.31)$$

Звідси

$$\alpha_2 = \frac{h_1 - h_4}{h_1 + h_4}. \quad (2.5.32)$$

Підставивши формулу (2.5.32) у (2.5.26), отримаємо

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(h_1 - h_3)}{h_1 + h_3} mgh_1; \\ A_2 &= \frac{(h_1 - h_4)}{h_1 + h_4} mgh_2. \end{aligned} \quad (2.5.33)$$

Тоді з формул (2.5.33) і (2.5.25) впливає робоча формула для перевірки закону збереження моменту імпульсу:

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{h_2(h_1 + h_3)}{h_3(h_1 + h_4)}. \quad (2.5.34)$$

Позначимо ліву частину формули (2.5.34) через a , праву – b , тоді перевірка закону збереження моменту імпульсу зводиться до перевірки рівності

$$a = b. \quad (2.5.35)$$

2.5.3. Експериментальна перевірка закону збереження моменту імпульсу

Для перевірки рівності (2.5.34) закріплюють тягарці 2 біля колонки (див. рис. 2.17). Обертають хрестовину, намотують нитку на колонку так, щоб тягарець b піднявся на задану висоту h_1 . Одночасно зі звільненням хрестовини вмикають секундомір і вмикають його, коли тягарець b опуститься на всю довжину

нитки. Це буде t_1 . Спостерігаючи за тягарцем, який піднімається, вимірюють максимальну висоту його підняття h_3 .

Аналогічно вимірюють величини t_2 та h_4 , але перед вимірюванням звільняють тягарці 2 і розсувають їх до упорів. Щоб виміряти висоту h_2 , на яку підніметься тягарець за змінного моменту інерції хрестовини, треба наблизити тягарці 2 до колонки та підняти колонку так, щоб штифт, до якого кріпиться нитка, зайшов в отвір на колонці. У такому положенні штифта намотують нитку на колонку, доки тягарець b не підніметься на висоту h_1 . Відпускають хрестовину. Коли нитка повністю розмотається, вона витягне штифт, звільнивши колонку, яка опуститься під дією сили ваги і відпустить тягарці 2. Під дією відцентрової сили тягарці швидко розлетяться до упорів. Кутова швидкість хрестовини у цьому випадку різко зменшиться. Коли обертання хрестовини припиниться, вимірюють висоту h_2 , на яку піднявся тягарець b .

Усі вимірювання виконують п'ять разів. Результати вимірювань записують у табл. 2.6 та на їхній підставі перевіряють правильність закону збереження моменту імпульсу. Оцінюють точність експерименту. Роблять відповідні висновки.

З робочої формули (2.5.34) розрахуємо такі частинні похідні:

$$\frac{\partial a}{\partial t_1} = \frac{2t_1}{t_2^2}; \quad \frac{\partial a}{\partial t_2} = -\frac{2t_1^2}{t_2^3};$$

$$\frac{\partial b}{\partial h_2} = \frac{h_1 + h_3}{h_3(h_1 + h_4)}; \quad \frac{\partial b}{\partial h_1} = \frac{h_2}{h_3} \frac{h_4 + h_3}{(h_1 + h_4)^2};$$

$$\frac{\partial b}{\partial h_3} = -\frac{h_1 h_2}{h_3^2(h_1 + h_4)}; \quad \frac{\partial b}{\partial h_4} = -\frac{h_2(h_1 + h_3)}{h_3(h_1 + h_4)^2}.$$

Тоді на підставі виразу (2.1.6) формули похибок для величин непрямих вимірювань записують у вигляді:

$$\Delta a = \bar{a} \sqrt{\left(\frac{2\Delta t_1}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t_2}{t_2}\right)^2}; \quad \delta\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\bar{\alpha}};$$

$$\Delta b = \bar{b} \left\{ \left(\frac{\Delta h_2}{\bar{h}_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_1(\bar{h}_4 - \bar{h}_3)}{(\bar{h}_1 + \bar{h}_3)(\bar{h}_1 + \bar{h}_4)}\right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\bar{h}_1 \Delta h_3}{\bar{h}_3(\bar{h}_1 + \bar{h}_4)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_4}{\bar{h}_1 + \bar{h}_4}\right)^2 \right\}^{1/2}; \quad \delta b = \frac{\Delta b}{\bar{b}}.$$

Результати вимірювань та обчислень записують у табл. 2.6.

Таблиця 2.6

Номер з/п	t_{1i} , с	t_{2i} , с	h_{3i} , м	h_{4i} , м	a	Δa	δa , %	b	Δb	δb , %
1-5										
Сер. зн.										

Кінцевий результат записують у вигляді:

$$h_1 = \bar{h}_1 \pm \Delta h_1; \quad h_2 = \bar{h}_2 \pm \Delta h_2; \quad \delta h_1 = ; \quad \delta h_2 = ;$$

$$a = \bar{a} \pm \Delta a; \quad b = \bar{b} \pm \Delta b; \quad \delta a = ; \quad \delta b = .$$

Аналогічно для h_3 , h_4 , t_1 , t_2 .

На підставі отриманих результатів формують висновки до лабораторної роботи.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. Що називають моментом імпульсу? Яка формула його описує у випадку обертання навколо нерухомо закріпленої осі?
2. Сформулюйте та виведіть закон збереження моменту імпульсу.
3. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу у випадку обертання тіла навколо нерухомо закріпленої осі.
4. Сформулюйте закон збереження енергії.
5. Сформулюйте та виведіть закон збереження механічної енергії.
6. Запишіть і сформулюйте закон збереження енергії для випадку, описаного в цій роботі.
7. Запишіть формулу кінетичної енергії для поступального та обертального рухів.
8. Що називають моментом інерції твердого тіла?
9. Нарисуйте та поясніть графік залежності кутової швидкості хрестовини від часу під час її руху зі змінним моментом інерції.
10. Запишіть рівняння поступального руху тягарця, який обертає хрестовину.

2.6. Визначення прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника

Мета цієї лабораторної роботи – визначити експериментально прискорення вільного падіння. Основні прилади – оборотний фізичний маятник, секундомір, металева тригранна призма, масштабна лінійка. Теоретичний матеріал – момент сили; момент інерції; момент імпульсу; основний закон динаміки обертального руху; теорема Гюйгенса-Штейнера; гармонічні коливання; фізичний маятник; період коливання фізичного маятника; зведена довжина фізичного маятника; оборотний маятник; прискорення вільного падіння, його залежність від висоти і географічної широти.

2.6.1. *Коливання. Фізичний і математичний маятники*

Визначимо основні поняття, необхідні для виконання лабораторної роботи.

Прискорення вільного падіння ($g = 9,80665 \text{ м/с}^2$) – це прискорення, з яким рухаються всі тіла у вакуумі під дією сили тяжіння біля поверхні Землі. Експериментально його можна визначити за допомогою фізичного маятника, період коливання якого залежить від значення цього прискорення.

Коливанням називають рух, під час якого тіло багаторазово відхиляється від положення рівноваги і щоразу до нього повертається.

Періодичними називають коливання, за яких амплітуда відхилення тіла від положення рівноваги повторюється за однакового проміжку часу. Найкоротший такий проміжок часу називають періодом коливань.

Гармонічними називають такі коливання, коли часову залежність відхилення $x(t)$ тіла від положення рівноваги можна описати функцією синуса чи косинуса:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \text{чи} \quad x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.6.1)$$

де A – амплітуда коливань; ω – циклічна частота; φ – початкова фаза, яка визначає відхилення тіла в момент часу $t = 0$.

Фізичним маятником називають абсолютно тверде тіло, що коливається під дією власної ваги навколо горизонтальної осі, яка не проходить через центр його мас. Період коливань фізичного маятника визначають за формулою

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}, \quad (2.6.2)$$

де I – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку його підвісу; m – маса маятника; g – прискорення вільного падіння; d – відстань від точки підвісу до центра мас маятника.

Центром мас, або *центром інерції* твердого тіла (системи матеріальних точок) називають певну його точку, положення якої залежить від розподілу мас у тілі. Центр мас рухається так само, як рухалася б матеріальна точка, в якій зосереджена вся маса твердого тіла і на яку діють ті самі сили, що прикладені до системи (див. розділ 2.4).

Математичним маятником називають матеріальну точку, яка коливається під дією сили тяжіння на невагомій і нерозтяжній нитці довжиною l . Період коливань математичного маятника визначають за формулою:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.6.3)$$

Довжину математичного маятника, який має однаковий з фізичним період коливань, називають *зведеною довжиною фізичного маятника*.

Якщо прирівняти праві частини формул (2.6.2) і (2.6.3) для періодів коливань фізичного та математичного маятників, то отримуємо вираз для зведеної довжини фізичного маятника:

$$l = \frac{I}{md}. \quad (2.6.4)$$

Якщо ж під час обертального або коливального руху вісь обертання не проходить через центр мас твердого тіла, то його момент інерції визначають за теоремою Штейнера: момент інерції I тіла відносно будь-якої осі, що не проходить через центр мас, дорівнює сумі моменту інерції I_0 відносно паралельної до неї осі, що проходить через центр мас, та добутку маси m тіла на квадрат відстані d між цими паралельними осями:

$$I = I_0 + md^2. \quad (2.6.5)$$

Отже, з віддаленням осі обертання від центра мас момент інерції тіла відносно цієї осі збільшується.

2.6.2. Експериментальне визначення прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника

Зазвичай прискорення вільного падіння g вимірюють непрямими методами. Одним з них є метод оборотного маятника. Установка, на якій проводять вимірювання, зображена на рис. 2.19. Вона змонтована на основі 1, в якій є лічильники для вимірювання часу t і кількості періодів коливань N . До основи прикріплена колонка 2, на якій зафіксовано верхній і нижній кронштейни. На верхньому кронштейні підвішують оборотний фізичний маятник, а до нижнього кріплять фотоелектричний сенсор 3. Оборотний маятник – це сталевий стрижень 4, на якому можна пересувати і фіксувати дві опорні призми 5 для підвісу маятника в прямому й оберненому положенні, а також два тягарі 6 (сочевиці), пересовуючи які, змінюють період коливань маятника. Для

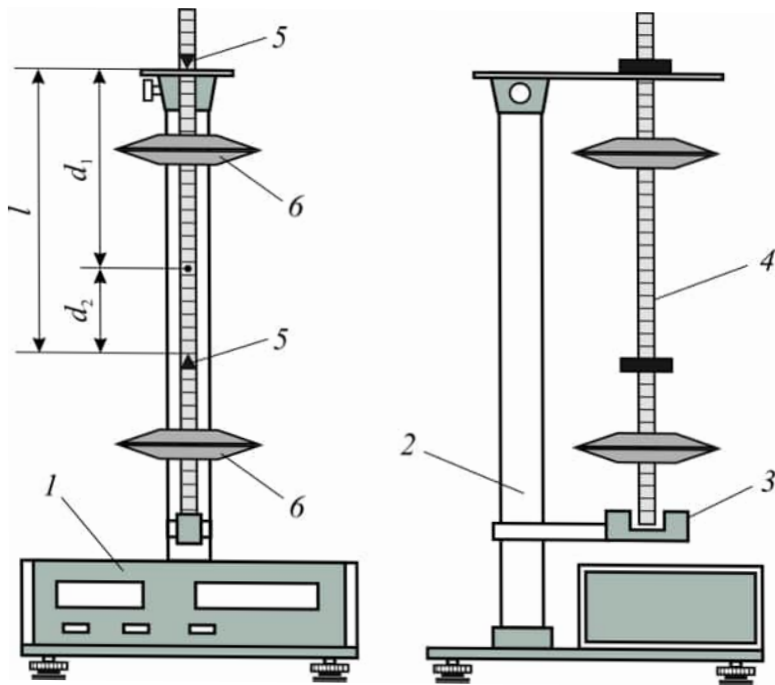


Рис. 2.19. Оборотний фізичний маятник

оборотного маятника завжди можна знайти таке розташування опорних призм, за якого в разі підвішування маятника в прямому чи оберненому положенні його період коливань залишається однаковим. У цьому випадку прискорення g можна визначити з достатньою точністю.

Виведення робочої формули. Якщо тверде тіло коливається, то сила тяжіння, яка діє на кожний елемент цього тіла, створює деякий момент сили відносно осі. Сума моментів цих сил дорівнює моменту рівнодійної сили тяжіння, прикладеної до центра мас тіла.

Існує взаємозв'язок між моментом \mathbf{M} зовнішньої сили відносно осі обертання та моментом імпульсу тіла \mathbf{L} ; його описує рівняння моментів

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (2.6.6)$$

У цьому випадку величина вектора моменту сили

$$M = -mgd \sin \alpha. \quad (2.6.7)$$

Тут d – відстань від осі обертання O до центра мас C ; α – кут між прямою OC і вертикаллю (рис. 2.20).

У випадку обертання навколо нерухомої осі момент імпульсу тіла легко виразити через кутову швидкість обертання. Елемент маси Δm_i цього тіла має елементарний момент імпульсу

$$\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i \Delta m_i \mathbf{v}_i].$$

Тут \mathbf{r}_i – радіус-вектор, значення якого дорівнює відстані від осі обертання до елемента маси; \mathbf{v}_i – лінійна швидкість елемента маси Δm_i .

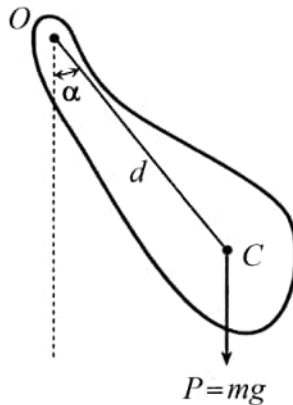


Рис. 2.20. Схематичне зображення фізичного маятника

Враховуючи взаємозв'язок між лінійною \mathbf{v} та кутовою $\boldsymbol{\omega}$ швидкостями, а саме: $\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]$, отримаємо $|L| = r_i^2 \omega \Delta m_i$.

Оскільки моменти імпульсу всіх елементів мас напрямлені по осі обертання та їхня кутова швидкість однакова, то повний момент імпульсу тіла

$$L = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \omega = \sum_{i=1}^n (m_i r_i^2) \omega = I \omega, \quad (2.6.8)$$

де $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ – момент інерції тіла відносно вибраної осі, який залежить від розподілу маси тіла відносно осі та є мірою інерції тіла під час обертального руху.

Після врахування M та L рівняння моментів (2.6.6) набуває вигляду

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = -mgd \sin \alpha. \quad (2.6.9)$$

Оскільки $\omega = d\alpha/dt$, то $d\omega/dt = d^2\alpha/dt^2$ і рівняння (2.6.9) можна записати у вигляді

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgd}{I} \sin \alpha. \quad (2.6.10)$$

Це диференціальне рівняння, з якого визначають кут відхилення як функцію часу. Розв'язати таке рівняння досить складно, але якщо обмежитись малими кутами (змінити $\sin \alpha$ на α), то задача значно спрощується. За цих умов рівняння руху маятника (2.6.10) набуває вигляду

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgd}{I} \alpha. \quad (2.6.11)$$

Розв'язком цього рівняння є гармонічна функція

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t, \quad (2.6.12)$$

де α_0 – амплітуда коливань; ω – циклічна частота коливань ($\omega = 2\pi\nu$, де ν – частота коливань).

Підставивши значення α з рівняння (2.6.12) у рівняння (2.6.11), одержимо

$$\omega^2 \alpha_0 \cos \omega t = \frac{mgd}{I} \alpha_0 \cos \omega t. \quad (2.6.13)$$

Щоб рівняння (2.6.11) задовольнялось, має бути $\omega^2 = mgd/I$, або

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}. \quad (2.6.14)$$

Період коливання фізичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}, \quad (2.6.15)$$

де I – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через вісь його підвісу; m – маса маятника; d – відстань від осі підвісу до центра мас маятника; g – прискорення вільного падіння.

Підставивши у формулу (2.6.15) вираз для моменту інерції матеріальної точки $I = ml^2$ (за умови, що $d = l$), отримаємо період коливання математичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.6.16)$$

Отже, зведена довжина фізичного маятника

$$l = \frac{I}{md}. \quad (2.6.17)$$

На практиці зведену довжину фізичного маятника визначає відстань між *точкою підвісу* маятника і його *центром коливання*. Ці дві точки лежать на одній прямій з центром мас маятника

та розміщені по обидва боки від нього. Точки мають властивість *спряженості*, або взаємозв'язаності, тобто якщо повернути маятник і його центр коливання стане точкою підвісу, то період коливання маятника збереже попереднє значення.

Виявивши дві такі точки, навколо яких маятник коливається з однаковим періодом, вимірявши відстань між цими точками та період коливання, можна з формули (2.6.16) отримати

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (2.6.18)$$

Оскільки домогтися цілком однакових періодів дуже важко, то Бессель довів, що прискорення g можна одержати простіше і з тією ж точністю, якщо періоди збігаються лише приблизно.

Нехай маятник підвішений у прямому положенні, тоді період його коливань

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{(I_0 + md_1^2)}{mgd_1}}, \quad (2.6.19)$$

(згідно з теоремою Гюйгенса–Штейнера $I = I_0 + md_1^2$, де I_0 – момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через його центр мас).

Якщо маятник підвісити в оберненому положенні, то відповідно

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{(I_0 + md_2^2)}{mgd_2}}. \quad (2.6.20)$$

У формулах (2.6.19), (2.6.20) d_1 і d_2 – відстань від центра мас маятника до першої і другої призми, тому $l = d_1 + d_2$. Із цих формул випливає:

$$4\pi^2 I_0 = T_1^2 md_1 g - 4\pi^2 md_1^2; \quad (2.6.21)$$

$$4\pi^2 I_0 = T_2^2 md_2 g - 4\pi^2 md_2^2. \quad (2.6.22)$$

Прирівнявши праві частини рівнянь (2.6.21) і (2.6.22) та врахувавши, що $l = d_1 + d_2$, одержимо робочу формулу:

$$g = \frac{4\pi^2 l (d_1 - d_2)}{d_1 T_1^2 - d_2 T_2^2}. \quad (2.6.23)$$

Для проведення розрахунку прискорення вільного падіння g встановлюють сочевиці і призми згідно з варіантом, що його задав викладач. Вимірюють час десяти повних коливань маятника в прямому та оберненому положеннях для всіх місць верхньої призми, що зазначені у варіанті. Щоб уникнути промахів, вимірювання повторюють тричі. Визначають середні значення періодів для прямого T_1 та оберненого T_2 положень маятника, будують графік залежності цих періодів від положення верхньої призми h . Координата точки перетину графіка по осі абсцис дає відстань h . Встановлюють на таку висоту h верхню призму і п'ять разів вимірюють періоди T_1 і T_2 . Результати всіх вимірювань записують у табл. 2.7. Якщо періоди коливань маятника в прямому та оберненому положеннях збігаються з точністю 0,01 с, то знімають маятник з підвісу, кладуть його на тригранну металеву призму. Тоді визначають положення центра мас і вимірюють відстані d_1 і d_2 . За робочою формулою обчислюють значення g і оцінюють точність одержаного результату.

Використовуючи робочу формулу (2.6.23) і формулу (2.1.6), розраховують частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial l} &= \frac{4\pi^2 (d_1 - d_2)}{d_1 T_1^2 - d_2 T_2^2}; & \frac{\partial g}{\partial d_1} &= \frac{4\pi^2 l (T_1^2 d_2 - T_2^2 d_1)}{(d_1 T_1^2 - d_2 T_2^2)^2}; \\ \frac{\partial g}{\partial d_2} &= \frac{4\pi^2 l (T_2^2 d_1 - T_1^2 d_2)}{(d_1 T_1^2 - d_2 T_2^2)^2}; & \frac{\partial g}{\partial T_1} &= -\frac{8\pi^2 l (d_1 - d_2) d_1 T_1}{(d_1 T_1^2 - d_2 T_2^2)^2}; \\ \frac{\partial g}{\partial T_2} &= \frac{8\pi^2 l (d_1 - d_2) d_2 T_2}{(d_1 T_1^2 - d_2 T_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Формула для обчислення похибки величини непрямого вимірювання набуває вигляду:

$$\Delta g = \bar{g} \left\{ \left(\frac{\Delta l}{\bar{l}} \right)^2 + \left(\frac{(\bar{T}_1^2 - \bar{T}_2^2) \bar{d}_2 \Delta d_1}{(\bar{d}_1 - \bar{d}_2)(\bar{d}_1 \bar{T}_1^2 - \bar{d}_2 \bar{T}_2^2)} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{(\bar{T}_1^2 - \bar{T}_2^2) \bar{d}_1 \Delta d_2}{(\bar{d}_1 - \bar{d}_2)(\bar{d}_1 \bar{T}_1^2 - \bar{d}_2 \bar{T}_2^2)} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{2 \bar{d}_1 \bar{T}_1 \Delta T_2}{(\bar{d}_1 \bar{T}_1^2 - \bar{d}_2 \bar{T}_2^2)} \right)^2 + \left(\frac{2 \bar{d}_2 \bar{T}_2 \Delta T_1}{(\bar{d}_1 \bar{T}_1^2 - \bar{d}_2 \bar{T}_2^2)} \right)^2 \right\}^{1/2};$$

$$\delta g = \frac{\Delta g}{\bar{g}}.$$

Результати вимірювань та обчислень записують у табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Номер з/п	N	$t_{1i},$ с	$T_{1i},$ с	$\Delta T_{1i},$ с	$t_{2i},$ с	$T_{2i},$ с	$\Delta T_{2i},$ с	$g,$ м/с ²	$\Delta g,$ м/с ²	$\delta g,$ %
1-5										
С. зн.										

Кінцевий результат записують у вигляді:

$$l = \bar{l} \pm \Delta l; \quad d_1 = \bar{d}_1 \pm \Delta d_1; \quad d_2 = \bar{d}_2 \pm \Delta d_2;$$

$$T_1 = \bar{T}_1 \pm \Delta T_1; \quad T_2 = \bar{T}_2 \pm \Delta T_2.$$

$$g = \bar{g} \pm \Delta g; \quad \delta g = .$$

На підставі вимірювань та обчислень формують висновки до лабораторної роботи.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. Що називають прискоренням вільного падіння?
2. Від чого залежить прискорення вільного падіння?
3. Що називають математичним маятником; фізичним маятником?
4. Запишіть рівняння руху фізичного маятника та виведіть формулу для періоду його коливань.
5. Що називають зведеною довжиною фізичного маятника?
6. Які коливання називають гармонічними?
7. Що називають моментом інерції твердого тіла?
8. Що таке момент сили?
9. Що називають моментом імпульсу?
10. Як направлені вектори моменту сили; моменту імпульсу?

2.7. Дослідження процесу пружної деформації розтягу дротини

Основна мета роботи – вимірювання абсолютного видовження дротини та обчислення модуля Юнга для її матеріалу. Для виконання роботи необхідна установка для вимірювання деформації дротини, лінійка або рулетка, мікрометр. Теоретичний матеріал – деформація твердих тіл; закон Гука; модуль Юнга; границі пружності та міцності; діаграма розтягу; пластичні деформації.

2.7.1. Деформація твердих тіл. Закон Гука

Тверді тіла, як відомо, мають кристалічну будову, тобто частинки, що утворюють тверде тіло, розміщені в певному порядку. Кожна частинка зазнає впливу з боку всіх сусідніх частинок, і їхня рівновага відповідає тому, що рівнодійна цих сил дорівнює нулю. Під час деформації твердого тіла під впливом зовнішніх сил його частинки зміщуються з початкових положень рівноваги в нові. Під деформацією розуміють зміну розмірів чи форми тіла під дією зовнішньої сили.

Зовнішній силі, що спричиняє деформацію тіла, протидіють внутрішні сили взаємодії між частинками тіла. Якщо зсув частинок був не дуже великий, то після припинення дії зовнішньої сили вони під впливом внутрішніх сил повертаються в початкові положення, таку деформацію називають пружною – тіло після припинення дії зовнішньої сили повністю відновлює попередні розміри та форму. Якщо ж зовнішня сила велика і переміщує частинки настільки, що сили їхньої взаємодії вже не можуть повернути частинки в початкові положення після припинення дії зовнішньої сили, то таку деформацію називають пластичною – розміри і форма тіла не повністю відновлюються після припинення дії зовнішніх сил. Отже, зовнішню силу, прикладену до

тіла, зрівноважує сила пружності $F_{\text{пр}}$, яка виникає всередині тіла. Фізичну величину, що чисельно дорівнює пружній силі $F_{\text{пр}}$, яка припадає на одиницю площі поперечного перерізу S тіла, називають механічним напруженням σ :

$$\sigma = \frac{F_{\text{пр}}}{S}. \quad (2.7.1)$$

Залежно від характеру дії зовнішньої сили розрізняють деформації розтягу, стиску, згину, зсуву, кручення. Проте в теорії пружності доведено, що всі вони можуть бути зведені до деформацій розтягу і зсуву. Розглянемо однорідний стрижень, закріплений на одному кінці, а до іншого прикладемо силу $F_{\text{н}}$, що розтягуватиме його (рис. 2.21). Якщо початкова довжина стрижня x_0 , то під дією сили вона почне збільшуватись і буде дорівнювати x . У цьому разі абсолютне видовження становить $\Delta x = x - x_0$.

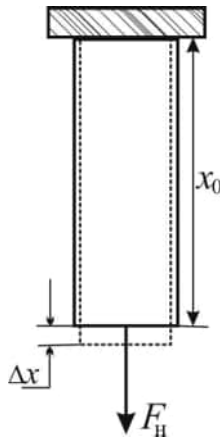


Рис. 2.21. Зміна розмірів стрижня під час деформації розтягу

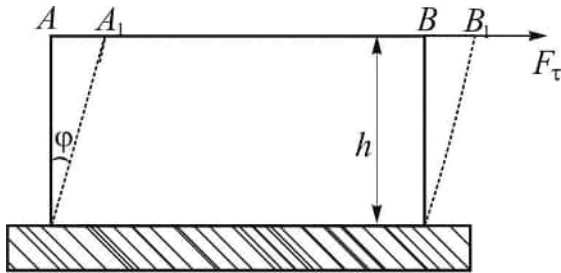


Рис. 2.22. Прямокутний брусок під час деформації зсуву

Деформацію розтягу характеризують відносним видовженням, або відносною деформацією ε , яка дорівнює відношенню абсолютної деформації (видовження) до початкової довжини x_0 :

$$\varepsilon = \frac{x - x_0}{x_0} = \frac{\Delta x}{x_0}. \quad (2.7.2)$$

Деформацію зсуву спостерігають, коли в прямокутному бруску прикріплюють нижню грань, а до верхньої прикладають дотичну силу F_τ (рис. 2.22), під дією якої всі шари бруска зміщуються на кут φ . Деформацію зсуву характеризують відносним зсувом, тобто тангенсом кута φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AA_1}{h} \approx \varphi, \quad (2.7.3)$$

де AA_1 – абсолютний зсув. Для пружних деформацій справджується закон Гука.

Закон Гука для пружної деформації зсуву стверджує, що тангенціальне механічне напруження під час пружної деформації зсуву прямо пропорційне до відносного зсуву. У вигляді формули закон записують так:

$$\sigma_\tau = G\varphi. \quad (2.7.4)$$

Тут $\sigma_\tau = F_\tau/S$ – тангенціальне напруження, де S – площа поверхні, до якої прикладена дотична сила F_τ ; G – модуль зсуву.

Модуль зсуву – це величина, що чисельно дорівнює механічному тангенціальному напруженню, яке б спричинило відносний зсув, що дорівнює одиниці.

Закон Гука для деформації розтягу: механічне напруження пружно деформованого тіла прямо пропорційне до його відносної деформації:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.7.5)$$

де E – модуль Юнга, або модуль пружності в разі деформації розтягу.

Модуль Юнга дорівнює нормальному механічному напруженню, яке виникло б у зразку в разі збільшення його довжини вдвічі, якби для такої деформації справджувався закон Гука (деформація була б пружною).

Залежність механічного напруження σ_n від відносної деформації ε для будь-якого однорідного зразка зображено у вигляді діаграми деформації розтягу (рис. 2.23).

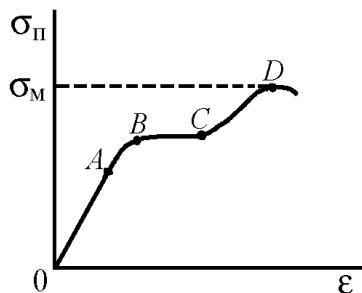


Рис. 2.23. Діаграма деформації розтягу

Для невеликих відносних деформацій механічне напруження σ_n пропорційне до відносної деформації ε , тобто виконується закон Гука. Найбільше механічне напруження σ_n , для якого ще виконується закон Гука, називають межею пропорційності, або межею пружності (точка *A* на рис.2.23). Подальше збільшення напруження σ_n спричиняє значне зростання відносного видовження. У разі досягнення механічного напруження, яке називають межею плинності (точка *B*), відносна деформація зразка продовжує зростати без подальшого збільшення навантаження. Горизонтальна ділянка *BC* є ділянкою плинності. У точці *C* розпочинається зростання напруження зі збільшенням деформації. Найбільше механічне напруження σ_n , що відповідає точці *D*, називають межею міцності. З подальшим збільшенням напруження зразок розривається. Експериментально в цій роботі будемо досліджувати пружну деформацію розтягу.

2.7.2. Експериментальне визначення модуля Юнга

Установка для вимірювання абсолютного видовження дротини під час деформації розтягу (рис. 2.24) складається з шини 1, до якої прикріплені три кронштейни 2. До верхнього кронштейна кріплять один кінець дротини 3; інший її кінець закріплений у штоці, який проходить через напрямну втулку нижнього кронштейна і закінчується платформою 4 для установки тягарців 7. Середній кронштейн слугує для кріплення індикатора 5, яким вимірюють абсолютне видовження. Щоб забезпечити рівномірне навантаження верхнього кронштейна в процесі виконання роботи, до нього за допомогою двох штанг прикріплюють платформу 6, на якій зберігають тягарці.

Нехай l_0 – довжина недеформованої дротини. Якщо до дротини прикласти силу F , то дротина видовжиться на Δl , і її довжина $l = l_0 + \Delta l$. Відношення $\varepsilon = \Delta l/l_0$ називають відносним видовженням. Для малих деформацій виконується закон

Гука $\sigma = E\varepsilon$, де $\sigma = F/s$ – напруження (сила, віднесена до одиниці площі поперечного перерізу), E – стала, яка залежить від матеріалу та його фізичного стану. Величину E називають модулем Юнга.

З наведених вище формул отримаємо такий вираз для модуля Юнга:

$$E = \frac{Fl_0}{s\Delta l}. \quad (2.7.6)$$

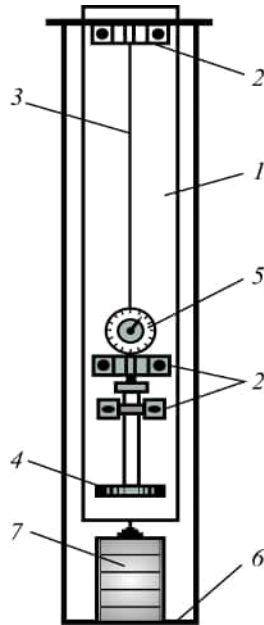


Рис. 2.24. Схема установки для вимірювання абсолютного видовження дротини

Враховуючи, що $s = \pi d^2/4$, а $F = P = mg$, одержимо робочу формулу:

$$E = 4mgl_0/\pi d^2 \Delta l. \quad (2.7.7)$$

Виведемо формулу для обчислення густини енергії пружного розтягу. Для того, щоб деформувати тіло, потрібно виконати над ним роботу. Відповідно деформоване тіло саме може виконати роботу, оскільки воно має запас потенціальної енергії. Ця енергія називається пружною. Обчислимо енергію розтягнутої дротини. Прикладемо до дротини силу $f(x)$ і будемо повільно збільшувати її від початкового значення $f = 0$ до кінцевого $f = F$. Під час цього відбувається видовження дротини і $x = (0 \div \Delta l)$. За законом Гука $f(x) = kx$, де k – коефіцієнт пружності, який можна виразити через модуль Юнга: $k = Es/l_0$. Уся робота в нашому випадку витратиться на приріст пружної енергії:

$$U = \int_0^{\Delta l} f(x) dx = k \int_0^{\Delta l} x dx = \frac{1}{2} k \Delta l^2. \quad (2.7.8)$$

Оскільки в кінці розтягу $x = \Delta l$, то $F = f(\Delta l) = k \Delta l$. Врахувавши це, отримаємо:

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l. \quad (2.7.9)$$

Визначимо об'ємну густину пружної енергії, тобто пружну енергію, яка припадає на одиницю об'єму деформованої дротини. Для цього ліву та праву частини (2.7.9) розділимо на об'єм дротини $V = sl$:

$$u = \frac{U}{sl} = \frac{F \Delta l}{2sl} = \frac{\sigma \varepsilon}{2}. \quad (2.7.10)$$

Скориставшись законом Гука у вигляді $\sigma = E\varepsilon$ і формулою (2.7.7), отримуємо робочу формулу для об'ємної густини пружної енергії

$$u = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{2mg\Delta l}{\pi d^2 l_0}. \quad (2.7.11)$$

Для розрахунку модуля Юнга вимірюють мікрометром діаметр дротини в кількох місцях. Довжину дротини вимірюють за допомогою лінійки або рулетки. Встановлюють стрілку індикатора у нульове положення (повертаючи його шкалу). З платформи рівномірного навантаження кронштейна беруть по одному тягарцю і навантажують ним платформу штока деформації дротини. Індикатором вимірюють абсолютні видовження дротини для кожного навантаження. Вимірювання повторюють п'ять разів. За робочими формулами обчислюють модуль Юнга та об'ємну густину пружної енергії для п'яти значень напружень.

Будують графік залежності об'ємної густини енергії u від деформуючої сили mg .

Щоб записати на підставі формули (2.1.6) формули похибок, розрахуємо такі частинні похідні, використовуючи робочі формули (2.7.7) і (2.7.11):

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{4gl_0}{\pi d^2 \Delta l}; \quad \frac{\partial E}{\partial l_0} = \frac{4gm}{\pi d^2 \Delta l}; \quad \frac{\partial E}{\partial d} = -\frac{8gml_0}{\pi d^3 \Delta l};$$

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta l} = -\frac{4gml_0}{\pi d^2 (\Delta l)^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial m} = \frac{2g\Delta l}{\pi d^2 l_0};$$

$$\frac{\partial u}{\partial \Delta l} = \frac{2gm}{\pi d^2 l_0}; \quad \frac{\partial u}{\partial d} = -\frac{4gm\Delta l}{\pi d^3 l_0}; \quad \frac{\partial u}{\partial l_0} = -\frac{2gm\Delta l}{\pi d^2 l_0^2}.$$

Тоді формули для похибок величин непрямих вимірювань мають вигляд:

$$\Delta E = \bar{E} \left\{ \left(\frac{\Delta m}{\bar{m}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta l_0}{\bar{l}_0} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta d}{\bar{d}} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta \bar{l}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{\bar{g}} \right)^2 \right\}^{1/2}; \quad \delta E = \frac{\Delta E}{\bar{E}};$$

$$\Delta u = \bar{u} \left\{ \left(\frac{\Delta m}{\bar{m}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta l_0}{\bar{l}_0} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta d}{\bar{d}} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta \bar{l}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{\bar{g}} \right)^2 \right\}^{1/2}; \quad \delta u = \frac{\Delta u}{\bar{u}}.$$

Результати вимірювань та обчислень записують у табл. 2.8.

Таблиця 2.8

Номер з/п	m_1 , кг	Δl_{i1} , м	E_1 , Па	ΔE_1 , Па	δE_1 , %	u_1 , Па	Δu_1 , Па	δu_1 , %
1-5								
Сер. зн.								

Кінцеві результати записують у вигляді:

$$m_1 = \bar{m}_1 \pm \Delta m_1; \quad \Delta l_1 = \Delta \bar{l}_1 \pm \Delta(\Delta l_1);$$

$$d = \bar{d} \pm \Delta d; \quad l_0 = \bar{l}_0 \pm \Delta l_0; \quad g = (9,81 \pm 0,01) \text{ м/с}^2.$$

$$E_1 = \bar{E}_1 \pm \Delta E_1; \quad u_1 = \bar{u}_1 \pm \Delta u_1;$$

$$\delta E_1 = ; \quad \delta u_1 = ; \quad p = ; \quad n = 5.$$

Аналогічно для 2, 3, 4, 5 кг, а також $E_2, E_3, E_4, E_5; u_2, u_3, u_4, u_5$.

Побудувати графік залежності $u = f(mg)$.

Оцінити точність виконання вимірювань та обчислень і сформулювати висновки до лабораторної роботи.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. Сформулюйте закон Гука для деформації розтягу.
2. Що називають напруженням; абсолютним і відносним видовженням?
3. Який фізичний зміст модуля Юнга?
4. Що таке межа пружності та міцності?
5. Нарисуйте типовий хід діаграм деформації розтягу.
6. Що таке залишкова деформація?
7. Виведіть вираз для енергії пружно деформованого стержня.
8. Який зв'язок між модулем пружності та коефіцієнтом Пуассона?
9. Як визначити роботу змінної сили?

2.8. Дослідження пружної деформації кручення

Основна мета роботи – визначення модуля зсуву на основі досліджень крутильних коливань. Прилади та матеріали – мікрометр, штангенциркуль, технічна вага з набором важків, циліндр, або інше тіло правильної геометричної форми. До теоретичного матеріалу належать деформації твердих тіл; модуль зсуву та модуль кручення; момент сили; момент інерції; основний закон обертового руху; крутильні коливання; період крутильних коливань.

2.8.1. Модуль кручення та період коливань крутильного маятника

Кручення – вид деформації, що характеризується взаємним поворотом поперечних перерізів стрижня навколо його осі на деякий кут під впливом моментів зовнішніх сил, що діють у цих перерізах. Тоді вісь залишається прямолінійною і називається віссю кручення, а кут, на який зміщується кінцевий переріз, називається повним кутом закручування. На рис. 2.25 зображено циліндричний стрижень, один з кінців якого жорстко закріплений, а до іншого прикладено крутильний момент M , що спричинює його закручування на кут φ .

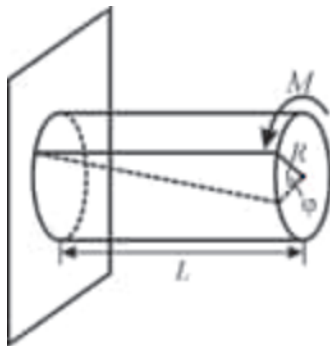


Рис. 2.25. Деформація кручення циліндричного стрижня

Модуль кручення f показує, який крутильний момент M потрібно прикласти, щоб закрутити стрижень на одиничний кут φ :

$$f = \frac{M}{\varphi}. \quad (2.8.1)$$

Коли тверде тіло виконує обертові рухи, тоді до нього можна застосувати основний закон динаміки обертового руху:

$$M = I\varepsilon, \quad (2.8.2)$$

де I – момент інерції; $\varepsilon = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$ – кутове прискорення.

Підставляючи рівняння (2.8.2) у (2.8.1), отримуємо:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} - f\varphi = 0. \quad (2.8.3)$$

Крутильний момент M напрямлений завжди так, щоб зменшити кутове відхилення φ . З рівняння (2.8.3) видно, що кутове прискорення пропорційне зміщенню φ і напрямлене протилежно до нього, тобто існує ознака гармонічного коливального руху. Оскільки тіло виконує гармонічні коливання, тоді можна знайти періоди таких коливань.

Розв'язком рівняння (2.8.3) є гармонічна функція:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t. \quad (2.8.4)$$

Тут кутова швидкість

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{I}}. \quad (2.8.5)$$

Враховуючи, що $\omega = 2\pi/T$, отримуємо вираз для періоду коливань крутильного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}. \quad (2.8.6)$$

Модуль кручення f залежить від матеріалу та його геометричних розмірів і пов'язаний із модулем зсуву G співвідношенням

$$f = \frac{4R^2G}{2L}. \quad (2.8.7)$$

Тут R – радіус, а L – довжина циліндричного стрижня.

2.8.2. Визначення модуля зсуву

Модуль зсуву можна визначити за допомогою крутильного маятника, схему установки зображено на рис. 2.26. Основа установки складається з колонки 1 та електронного блока 2. На колонці закріплено три кронштейни. За допомогою затискачів 3, що містяться на верхньому та нижньому кронштейнах, фіксують дротини 4, на яких підвішена рамка 5. Середній кронштейн складається зі сталевий плити, яка виконує роль підставки для фотоелектронного датчика 6, електромагніту 7 та кутової шкали 8. У рамці 5 можна закріплювати тягарці за допомогою рухомої поперечини 9, яку переміщують вздовж нерухомих стрижнів і гайок на затискних втулках 10. Електронний секундомір складається з мілісекундоміра, лічильника періодів коливань і кнопок керування.

Під час коливань маятника світловий потік із лампочки, який падає на фототранзистор, перериває стрілка рамки, унаслідок чого в схемі транзистора генеруються електричні імпульси, які після підсилення у схемі транзистора надходять на вхід мілісекундоміра. За цих умов світлове табло мілісекундоміра безперервно фіксує час і кількість виконаних коливань. Отже, лабораторна установка дає змогу вимірювати період коливань маятника в напівавтоматичному режимі.

Завдання роботи – визначити модуль зсуву N сталевий дротини (підвісу). Спочатку з формули (2.8.6) визначимо модуль

кручення f . Крутильні коливання виконує рамка, закріплена на двох (верхньому та нижньому) підвісах. У цьому випадку модуль кручення f підвісу буде складатись із суми модулів кручення верхнього f_1 та нижнього f_2 підвісів, тобто

$$f = f_1 + f_2 = \frac{\pi D^4 N}{32} \cdot \frac{L_1 + l_2}{L_1 L_2}, \quad (2.8.8)$$

де D – діаметр дротин підвісу; L_1 і L_2 – довжина його верхньої та нижньої частин; N – модуль зсуву підвісу.

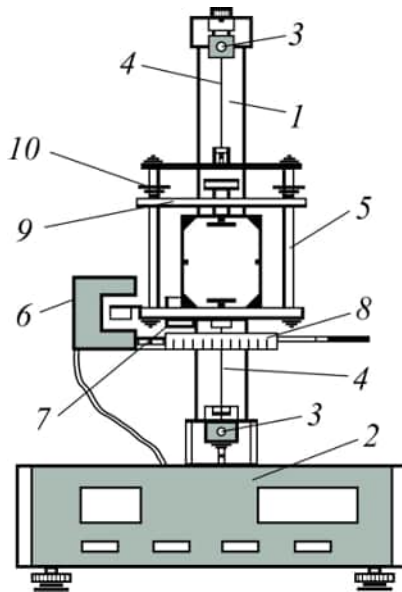


Рис. 2.26. Установка для дослідження пружної деформації кручення

Оскільки період крутильних коливань рамки описує формула (2.8.6), то визначити модуль кручення можна за умови, коли відомі період коливань T і момент інерції маятника I . Період коливань легко виміряти експериментально, однак момент інерції маятника невідомий. Для того, щоб вилучити з розрахунків момент інерції I , у рамку закріплюють тіло з відомим моментом інерції I_1 (у цій роботі – циліндр, момент інерції якого можна обчислити за формулою $I_1 = md^2/8$, де m – маса, а d – діаметр циліндра). Період крутильних коливань системи рамка – циліндр буде визначатись формулою:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_1}{f}}. \quad (2.8.9)$$

З наведених формул отримаємо:

$$\frac{I_1}{I} = \frac{T_1^2 - T^2}{T^2} \Rightarrow I = \frac{I_1 T^2}{T_1^2 - T^2}. \quad (2.8.10)$$

Водночас із (2.8.6) матимемо

$$I = f \frac{T^2}{4\pi^2}. \quad (2.8.11)$$

Прирівняємо праві частини двох останніх виразів, отримаємо:

$$f = \frac{4\pi^2 I_1}{T_1^2 - T^2}. \quad (2.8.12)$$

Підставимо у формулу (2.8.11) вираз для $I_1 = md^2/8$ та значення f з формули (2.8.12) і одержимо робочу формулу для визначення модуля зсуву:

$$N = \frac{16md^2\pi L_1 L_2}{D^4(L_1 + L_2)(T_1^2 - T^2)}. \quad (2.8.13)$$

2.8.3. Визначення модуля зсуву матеріалу дротини

Для виконання лабораторної роботи треба під'єднати установку (рис. 2.26) до електромережі та натиснути на кнопку “Мережа”. Відпустити кнопку “Пуск” і, повертаючи рамку, наблизити її до електромагніту, який зафіксує її в цьому положенні. Натиснути на кнопку “Скидання”, виставити нулі мілісекундоміра та лічильника кількості коливань. Натиснути на кнопку “Пуск”. У цьому разі електромагніт відпустить рамку, яка почне виконувати крутильні коливання та ввімкне мілісекундомір і лічильник кількості коливань. Потрібно стежити за показом лічильника кількості коливань. Коли на лічильнику з'явиться цифра 9, натиснути кнопку “Стоп”. Через одне коливання закінчиться вимірювання. На лічильнику кількості коливань з'явиться цифра 10, а на мілісекундомірі час t , за який рамка виконала ці коливання.

Вище описані операції повторюють п'ять разів. Результати вимірювань записують у табл. 2.9.

Закріплюють в рамці циліндр і виконують п'ять аналогічних вимірювань часу t_1 десяти коливань рамки з циліндром. Обчислюють середні значення періодів T і T_1 . Штангенциркулем вимірюють довжину верхньої L_1 і нижньої L_2 частин підвісу, а мікрометром – його діаметр D . За допомогою технічних терезів визначають масу циліндра m , а штангенциркулем вимірюють його діаметр d . За усередненими значеннями виміряних величин обчислюють за формулою (2.8.13) середнє значення модуля зсуву N матеріалу дротини підвісу. Оцінюють точність виконаних вимірювань та обчислень.

Для того, щоб записати на підставі формули (2.1.6) формули похибок величин непрямих вимірювань, розраховують частинні похідні, використовуючи робочу формулу (2.8.13):

$$\frac{\partial N}{\partial m} = \frac{16\pi d^4 L_1 L_2}{D^4 (L_1 + L_2) (T_1^2 - T_2^2)},$$

$$\frac{\partial N}{\partial d} = \frac{64\pi m d^3 L_1 L_2}{D^4 (L_1 + L_2) (T_1^2 - T_2^2)},$$

$$\frac{\partial N}{\partial D} = -\frac{64\pi m d^4 L_1 L_2}{D^5 (L_1 + L_2) (T_1^2 - T_2^2)},$$

$$\frac{\partial N}{\partial L_1} = \frac{16\pi m d^4 L_2}{D^4 (T_1^2 - T_2^2)} \frac{L_2}{(L_1 - L_2)^2},$$

$$\frac{\partial N}{\partial L_2} = \frac{16\pi m d^4 L_1}{D^4 (T_1^2 - T_2^2)} \frac{L_1}{(L_1 - L_2)^2},$$

$$\frac{\partial N}{\partial T_1} = -\frac{32\pi m d^4 L_1 L_2 T_1}{D^4 (L_1 + L_2) (T_1^2 - T_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial N}{\partial T_2} = \frac{32\pi m d^4 L_1 L_2 T_2}{D^4 (L_1 + L_2) (T_1^2 - T_2^2)^2}.$$

Формулу для абсолютної похибки величини непрямого вимірювання записують у вигляді:

$$\Delta N = \bar{N} \left\{ \left(\frac{\Delta m}{\bar{m}} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta D}{\bar{D}} \right)^2 + \left(\frac{4\Delta d}{\bar{d}} \right)^2 + \left(\frac{2\bar{T}_1 \Delta T_1}{\bar{T}_1^2 - \bar{T}_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{2\bar{T}_2 \Delta T_2}{\bar{T}_1^2 - \bar{T}_2} \right)^2 + \left(\frac{\bar{L}_2 \Delta L_1}{\bar{L}_1 (\bar{L}_1 - \bar{L}_2)} \right)^2 + \left(\frac{\bar{L}_1 \Delta L_2}{\bar{L}_2 (\bar{L}_1 - \bar{L}_2)} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Результати вимірювань та обчислень записують у табл. 2.9.

Таблиця 2.9

Номер з/п	t_i , с	Δt_i , с	T_i , с	ΔT_i , с	t_{1i} , с	Δt_{1i} , с	N , Па	ΔN , Па	δN , %
1-5									
Сер.зн.									

Кінцевий результат записують у вигляді:

$$m = \bar{m} \pm \Delta m; \quad D = \bar{D} \pm \Delta D; \quad d = \bar{d} \pm \Delta d; \quad L_1 = \bar{L}_1 \pm \Delta L_1;$$

$$L_2 = \bar{L}_2 \pm \Delta L_2; \quad T_1 = \bar{T}_1 \pm \Delta T_1; \quad T_2 = \bar{T}_2 \pm \Delta T_2.$$

$$N = \bar{N} \pm \Delta N; \quad \delta N = .$$

На підставі отриманих результатів формують висновки до лабораторної роботи.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. З якою метою у цій роботі використовують допоміжне тіло з відомим моментом інерції?
2. Як зміниться період коливань крутильного маятника в разі збільшення (зменшення) його моменту інерції?
3. Запишіть закон збереження енергії для маятника, що виконує крутильні коливання.
4. Як залежить період коливань крутильного маятника від довжини дротин підвісу?
5. Назвіть види деформацій.

6. Що називають відносним зсувом?
7. Яку величину називають модулем зсуву?
8. Запишіть вираз закону Гука для деформації зсуву та кручення.
9. Який зв'язок між модулем кручення та зсуву?
10. Що називають моментом сили та моментом інерції?
11. Що називають крутильними коливаннями, від чого залежить їхній період?
12. Сформулюйте основний закон обертового руху та запишіть його математичний вираз.

2.9. Вивчення коливних процесів

Основна мета роботи – дослідження вільних, загасаючих і вимушених коливань; визначення циклічної частоти вільних коливань; визначення логарифмічного декременту загасання загасаючих коливань; дослідження явища резонансу. Теоретичний матеріал, який потрібно знати для виконання лабораторної роботи: пружна (квазіпружна) сила; гармонічні коливання, їхнє рівняння та розв’язок; амплітуда, частота, фаза; загасаючі коливання, їхнє рівняння та розв’язок; коефіцієнт загасання, логарифмічний декремент загасання; вимушені коливання, їхнє рівняння та розв’язок; явище резонансу.

2.9.1. Гармонічний осцилятор

Коливаннями називають фізичні процеси, які характеризуються повторюваністю у часі. У механіці вивчають коливний рух (зміну положення) тіл (наприклад, маятника), за якого існує так звана повертаюча, або квазіпружна сила (яка може бути і суперпозицією багатьох окремих сил), що намагається повернути систему до стійкого (статичного) або динамічного стану. Така сила виникає під час виведення тіла зі стану рівноваги і її часто називають повертаючою, або ж відновлювальною. Систему, яка виконує коливання, називають *осцилятором*.

Розглянемо як осцилятор частинку масою m , яка перебуває у потенціальній ямі сил і може виконувати лише одновимірний рух вздовж напрямку x . Нехай положення рівноваги частинки відповідає координаті x_0 . Виберемо початок системи координат так, щоб $x_0 = 0$. Потенціальна яма описується потенціальною енергією $\Phi(x)$, яку можна розкласти у степеневий ряд в околі початку координат, обмежуючись квадратичним членом:

$$\Phi(x) \approx \Phi(x = 0) + \frac{d^2\Phi(x = 0)}{dx^2}x. \quad (2.9.1)$$

Зауважимо, що тут немає доданка, що відповідає першій степені розкладу в ряд, оскільки він у початку координат дорівнює нулю, бо ця точка відповідає мінімуму (екстремуму) функції $\Phi(x)$, а отже, $\frac{d\Phi(x=0)}{dx} = 0$.

Введемо позначення $k = \frac{d^2\Phi(x=0)}{dx^2}$. У гармонічному наближенні повертаюча квазіпружна сила є лінійною функцією відхилення частинки від положення рівноваги, яке у вибраній системі координат відповідає координаті x частинки:

$$F(x) = -kx. \quad (2.9.2)$$

Отже, рівняння руху для частинки буде: $m\ddot{x} = -kx$. Поділивши ліву та праву частини рівняння на m і ввівши позначення $\omega_0^2 = k/m$, отримаємо в остаточному вигляді рівняння руху для гармонічного осцилятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.9.3)$$

Загальний розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (2.9.4)$$

де A – амплітуда коливань (максимальне відхилення від положення рівноваги); ω_0 – частота коливань; ϕ – початкова фаза. Вираз у дужках, $\omega_0 t + \phi$, називають фазою коливань. A та ϕ визначають з початкових умов: $x(t=0)$ та $\dot{x}(t=0)$.

Згідно з формулою (2.9.4), подавши кінетичну енергію частинки як $m\dot{x}^2(t)/2$ і використавши вищезгаданий розклад в ряд потенціальної енергії частинки, можна переконатися, що повна (сумарна) енергія гармонічного осцилятора не залежить від часу і визначається квадратом амплітуди. Для одновимірного руху частинки її фазова траєкторія буде еліпсом.

2.9.2. Загасаючі коливання

У реальних системах завжди наявні сили опору (наприклад, тертя твердих поверхонь деталей системи, або ж сила опору середовища, яка діє на тіло під час його переміщення у рідині чи газі). Наявність цих сил призводить до зменшення з часом амплітуди коливань, оскільки витрачається енергія осцилятора на подолання цих сил опору. Це явище називається загасаючими коливаннями.

Розглянемо модель осцилятора, в якій сила опору пропорційна швидкості руху елемента системи. Такий випадок реалізується, наприклад, під час повільного руху тіл у рідинах або в газі, де обтікання рухомих елементів системи має ламінарний (а не турбулентний) характер. У такому випадку силу опору можна зобразити так:

$$F_{\text{оп}} = -b\dot{x}. \quad (2.9.5)$$

Тут b – стала, яку називають коефіцієнтом опору; знак “–” означає, що сила опору спрямована протилежно до вектора швидкості.

Введення сили опору середовища у рівняння руху осцилятора призводить до такого його вигляду: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$. Поділивши, як і у випадку гармонічного осцилятора, ліву і праву частини цього рівняння на m та ввівши ще одне позначення – *коефіцієнт загасання* $\beta = b/(2m)$, отримаємо остаточний вигляд рівняння руху для загасаючих коливань:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.9.6)$$

Загальний розв’язок цього рівняння буде схожий до виразу (2.9.4), однак тепер амплітуда стане функцією часу, а частота коливань $\omega \neq \omega_0$:

$$x(t) = A(t) \sin(\omega t + \phi). \quad (2.9.7)$$

Тут $A(t) = A(t=0) \exp(-\beta t)$ – описує зміну амплітуди з часом; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Ці вирази можна отримати шляхом використання (2.9.7) як пробної функції, з подальшою підстановкою її та похідних за часом від неї у рівняння (2.9.6).

2.9.3. Вимушені коливання

Нехай на осцилятор діє зовнішня періодична сила $F(x, t) = F_0 \sin \Omega t$ (розглядаємо, як і вище, модель одновимірного осцилятора), де F_0 – амплітуда, а Ω – частота цієї сили. Опір осцилятора цій силі виявлятиметься у зсуві фази коливань відносно фази діючої сили, а також у залежності амплітуди коливань від Ω . Рівняння руху осцилятора таке: $m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = F_0 \sin \Omega t$. Поділивши його ліву та праву частини на m і ввівши позначення $f_0 = F_0/m$, отримаємо остаточний вигляд рівняння руху для вимушених коливань:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \Omega t. \quad (2.9.8)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, загальний розв'язок якого є сумою відповідного однорідного рівняння $x_1(t)$ (у нашому випадку він дорівнює загальному розв'язку рівняння (2.9.6) для загасаючих коливань) та часткового розв'язку неоднорідного рівняння $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t), \\ x_1(t) &= e^{-\beta t} \{a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)\}, \\ x_2(t) &= A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (2.9.9)$$

Тут коефіцієнти a , b , A та B є функціями Ω .

Розв'язок рівняння (2.9.8) має відповідати заданим початковим умовам конкретної задачі. У підсумку вигляд для $x_2(t)$ можна подати у такому вигляді:

$$x_2(t) = f_0 \frac{\sin(\Omega t - \alpha(\Omega))}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (2.9.10)$$

де $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ визначає фазовий зсув.

Мінімум знаменника виразу (2.9.10) визначає резонансну частоту

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (2.9.11)$$

в околі якої амплітуда у виразі (2.9.10) досягає максимального значення. З цією частотою пов'язане явище резонансу, яке може виникати у системах з вимушеними коливаннями.

2.9.4. Експериментальне вивчення коливань

Усі вищезгадані види коливань досліджують експериментально за допомогою установки для вивчення коливних процесів (рис. 2.27). Установка змонтована на основі, що має чотири ніжки, висоту яких можна змінювати (вирівнювати установку). На основі закріплені колонка 1 та електричний блок 2, який складається з мілісекундоміра, лічильника періодів, електропривода хитуна, кнопок керування. На колонці закріплені два кронштейни. До верхнього кронштейна прикріплено підвіски 3, в які вмонтовано маятник 4 і хитун 5 (хитун розташований за маятником і на рисунку стержні хитуна і маятника перебувають на одній лінії). На стержні маятника закріплені переривач світлового потоку 6 і гальмівний прапорець 7, за допомогою якого змінюють силу опору повітря.

Вимушені коливання маятника збуджують за допомогою закріпленого на валу електродвигуна диска, який приводить в рух хитуна, з'єданого пружиною зі стержнем маятника.

До нижнього кронштейна прикріплена кутова шкала 8, за допомогою якої визначають амплітуду коливань маятника. У цьому ж кронштейні вмонтований фотоелектричний датчик, який під час проходження через нього переривача світлового потоку 6 вмикає мілісекундомір і лічильник.

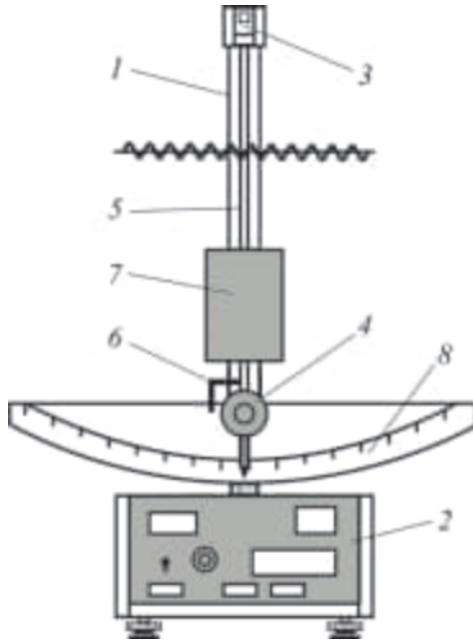


Рис. 2.27. Установка для вивчення коливних процесів

2.9.5. Визначення циклічної частоти вільних коливань і логарифмічного декременту загасання

Частота вільних коливань маятника $\nu = 1/T = n/t$, де T – період коливань; n – кількість коливань; t – час, протягом якого виконується n коливань. Циклічна частота

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi n}{t}. \quad (2.9.12)$$

Для загасаючих коливань їхня амплітуда змінюється за експоненціальним законом

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (2.9.13)$$

Відношення двох послідовних амплітуд $\Theta = A_n/A_{n+1}$ є сталим, не залежить від їхніх значень і називається декрементом загасання, логарифм цього відношення $\ln \Theta = \lambda$ називається *логарифмічним декрементом загасання* і описується формулою:

$$\ln \Theta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T = \lambda. \quad (2.9.14)$$

Нехай у момент часу t_1 амплітуда загасаючих коливань

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}, \quad (2.9.15)$$

а в момент часу t_2

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}. \quad (2.9.16)$$

Розділивши почленово ці вирази, одержимо:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{-\beta(t_1-t_2)} = e^{\beta \Delta t} = e^{\beta n_1 T}. \quad (2.9.17)$$

Після логарифмування

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \beta n_1 T \quad (2.9.18)$$

і звідси

$$\beta = \frac{1}{n_1 T} \ln \frac{A_1}{A_2}, \quad (2.9.19)$$

де β – коефіцієнт загасання, що є фізичною величиною, оберненою до проміжку часу τ , протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів.

Тоді логарифмічний декремент загасання визначається формулою:

$$\lambda = \beta T = \frac{1}{n_1} \ln \frac{A_1}{A_2}. \quad (2.9.20)$$

2.9.6. Дослідження вільних, загасаючих та вимушених коливань

Для виконання лабораторної роботи потрібно увімкнути установку (рис. 2.27) в електромережу. Закріпити переривач світлового потоку, який зв'язаний з маятником так, щоб він під час його коливання переривав світловий потік фотоелектричного датчика. Відхилити маятник на $(5 - 10)^\circ$ і відпустити його. Натиснути кнопку “Скидання”, а коли на лічильнику періодів засвітиться цифра “9”, натиснути кнопку “Стоп”. Через один період закінчиться цикл вимірювання і на індикаторах засвітяться цифри кількості періодів “10” і час, протягом якого маятник виконав ці коливання. Записати дані вимірювань у таблицю. Дослід повторити п'ять разів. За результатами вимірювань обчислити період коливань та їхню циклічну частоту.

Надати маятнику коливного руху так, щоб його амплітуда була дещо більшою від початкової A_1 , заданої викладачем. У момент, коли амплітуда дорівнюватиме зазначеній величині, натиснути кнопку “Пуск”, а коли амплітуда досягне кінцевого значення A_2 – кнопку “Стоп”. Записати дані вимірювань A_1 , A_2 , n_1 у табл. 2.10. Дослід повторити п'ять разів. За формулою (2.9.20) обчислити логарифмічний декремент загасання. Аналогічні вимірювання виконати для інших орієнтацій гальмівного прaporkця і визначити для них логарифмічний декремент.

Обчислити похибки циклічної частоти $\Delta\omega$ і $\delta\omega$ та логарифмічного декремента загасання $\Delta\lambda$ і $\delta\lambda$. Зробити відповідні висновки.

Для вивчення вимушених коливань треба піднести угору переривач світлового потоку на стержні маятника, а переривач світлового потоку на стержні хитуна опустити у щілину фотоелектричного датчика. Увімкнути електродвигун, визначити частоту коливань хитуна і максимальну амплітуду коливань маятника для цієї частоти. Вимірювання виконати для різних частот коливань хитуна (змушувальної сили) до і після досягнення

резонансу (не менше семи-дев'яти). Результати вимірювань записати у табл. 2.10 і зобразити графічно, відклавши по осі абсцис циклічну частоту хитуна, а по осі ординат – амплітуду коливань маятника. Визначити з графіка резонансу частоту $\omega_{\text{рез}}$.

Робочі формули:

$$\omega = \frac{2\pi n}{t}; \quad \lambda = \frac{1}{n_1} \ln \frac{A_1}{A_2}. \quad (2.9.21)$$

Щоб записати на підставі формули (2.1.6) формули похибок величин непрямих вимірювань, розраховують такі частинні похідні, використовуючи робочу формулу (2.9.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\frac{2\pi n}{t^2}; & \frac{\partial \lambda}{\partial n_1} &= -\frac{1}{n_1^2} \ln \frac{A_1}{A_2}; \\ \frac{\partial \lambda}{\partial A_1} &= \frac{1}{n_1} \frac{A_2}{A_1}, & \frac{\partial \lambda}{\partial A_2} &= \frac{1}{n_1} \frac{A_2}{A_1}. \end{aligned}$$

Тоді формули для похибок величин непрямих вимірювань набувають вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta \omega &= \bar{\omega} \frac{\Delta t}{\bar{t}}; & \delta \omega &= \frac{\Delta \omega}{\bar{\omega}}; \\ \Delta \lambda &= \frac{\bar{\lambda}}{n_1} \sqrt{\left(\frac{\Delta A_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A_2}{A_2}\right)^2}; & \delta \lambda &= \frac{\Delta \lambda}{\bar{\lambda}}. \end{aligned}$$

Результати вимірювань та обчислень записують у табл. 2.11.

Кінцевий результат записують у вигляді:

$$\begin{aligned} A_1 &= \bar{A}_1 \pm \Delta A_1; & A_2 &= \bar{A}_2 \pm \Delta A_2; & t &= \bar{t} \pm \Delta t_1; \\ n_1 &= \bar{n}_1 \pm \Delta n_1; & \omega &= \bar{\omega} \pm \Delta \omega; & \lambda &= \bar{\lambda} \pm \Delta \lambda; \\ & & \delta \omega &= ; & \delta \lambda &= . \end{aligned}$$

Таблиця 2.10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t_{1i}, c											
ω_i, c^{-1}											
A_i, o											

Таблиця 2.11

Номер з/п	t_i с	$\omega,$ c^{-1}	$\Delta\omega,$ c^{-1}	$\delta\omega,$ %	$A_1,$ o	$A_2,$ o	n_{1i}	λ	$\Delta\lambda$	$\delta\lambda,$ %
1-5										
Сер.зн.										

Будують графік залежності $A = f(\omega)$ та з отриманих результатів формують висновки до лабораторної роботи.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. Який тип руху називається гармонічним коливанням?
2. Які сили можуть спричинити появу гармонічних коливань?
3. Запишіть диференціальне рівняння коливного руху, якщо наявні сила опору та періодична за значенням зовнішня сила.
4. Що називається фазою гармонічного коливання?
5. Що називається логарифмічним декрементом згасання? Як він пов'язаний з коефіцієнтом згасання?
6. Побудувати графік залежності зміщення від часу для загасаючих коливань.

7. Який фізичний зміст і розмірність коефіцієнта згасання?
8. Які коливання називають вимушеними? Запишіть їх рівняння.
9. Охарактеризуйте умови виникнення резонансу.

2.10. Дослідження прецесії гіроскопа та визначення його моменту інерції

Основна мета роботи – дослідження явища прецесії гіроскопа та визначення його моменту інерції. Прилади, необхідні для виконання роботи – це дослідне обладнання з гіроскопом. Теоретичний матеріал – момент сили; момент імпульсу та момент інерції твердого тіла; тензор інерції; основне рівняння динаміки обертового руху; закон збереження моменту імпульсу; рух вільного гіроскопа; вимушена прецесія гіроскопа.

2.10.1. Опис гіроскопів

Гіроскопом називається масивне однорідне тіло, яке швидко обертається навколо однієї з головних осей інерції. Отже, гіроскоп має вісь симетрії, яка є також однією з головних осей інерції, оскільки матеріал гіроскопа однорідний. Зазвичай за вісь обертання гіроскопа вибирається головна вісь інерції, якій відповідає максимальний момент інерції. Цю вісь будемо називати *віссю гіроскопа*.

Слово “гіроскоп” буквально означає “вказівник обертання”. Його ввів у 1852 році французький фізик Фуко, який назвав так сконструйований ним прилад для демонстрації добового обертання Землі.

Розглянемо кілька прикладів гіроскопів.

1. Дзига (рис. 2.28), яка обертається навколо осі симетрії, що є також головною віссю симетрії диска (відносно масивного тіла). Однак такий гіроскоп важко стабілізувати і його стійкий рух (обертання) триває порівняно недовго. Тому його важко назвати повноцінним приладом, який би дав змогу визначати певні параметри руху такого гіроскопа.

2. Найбільш простим гіроскопічним приладом є гіроскоп у карданному підвісі (рис. 2.29).

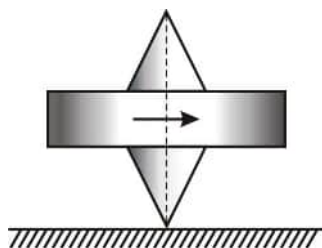


Рис. 2.28. Дзига

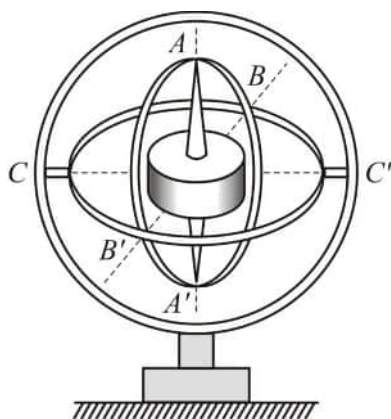


Рис. 2.29. Гіроскоп у карданному підвісі

Карданний підвіс – це шарнірна опора, яка дає змогу закріпленому об'єкту обертатися довкола осі. Тривісний підвіс, зображений на рис. 2.29, складається з трьох закріплених між собою за допомогою підшипників підвісів з перпендикулярними осями.

Тут гіроскопом є диск, який обертається навколо своєї осі симетрії AA' . Одним з підвісів є внутрішнє кільце, яке обертається навколо осі BB' , а також зовнішнє кільце – обертається навколо осі CC' . Обертання з мінімальним тертям відбувається за допомогою підшипників, які розташовані в точках A, A', B, B', C, C' ,

що забезпечує три незалежних один від одного обертання – диска, внутрішнього та зовнішнього кілець. Всі три осі обертання перетинаються у центрі диска в одній точці, яка залишається нерухомою. Зауважимо, що в цій точці розташований центр мас диска та обох кілець, тобто центр мас усієї системи.

3. Для проведення експерименту зручний гіроскоп, зображений на рис. 2.30. На основі з чотирма ніжками, висоту яких можна змінювати для вирівнювання установки, закріплені блок керування 1 і колонка 2. До колонки прикріплено кронштейн, на якому у вилиці 3 змонтовано гіроскоп з електроприводом 4 і фотоелектричний датчик для вимірювання кута повороту гіроскопа у горизонтальній площині. Гіроскоп з електроприводом і вилкою може обертатися навколо вертикальної осі, а гіроскоп з електроприводом – навколо горизонтальної, яка проходить через вилку. На валу електропривода закріплено масивний металевий диск, захищений екраном 6. Диск має прорізи, через які світло потрапляє на фотоелектричний датчик, імпульси якого дають інформацію про швидкість обертання гіроскопа. До корпусу електропривода прикріплений важіль 7 з міліметровою шкалою. Уздовж важеля може переміщуватися і закріплюватися тягарець 8, яким можна зрівноважувати гіроскоп або прикладати до нього різні моменти зовнішніх сил. На основі установки розміщений також блок живлення електропривода гіроскопа та блоки вимірювання параметрів його руху. На передній панелі блока є кнопки “Мережа”, “Скидання”, “Стоп”; ручка потенціометра, за допомогою якої вмикають напругу живлення електропривода гіроскопа та змінюють швидкість його обертання; покажчик швидкості обертання гіроскопа, цифровий індикатор кута повороту гіроскопа та мілісекундомір.

Гіроскопи мають кілька специфічних властивостей, які дають змогу широко використовувати їх в техніці, особливо в системах навігаційного обладнання, а також в позиціюванні та

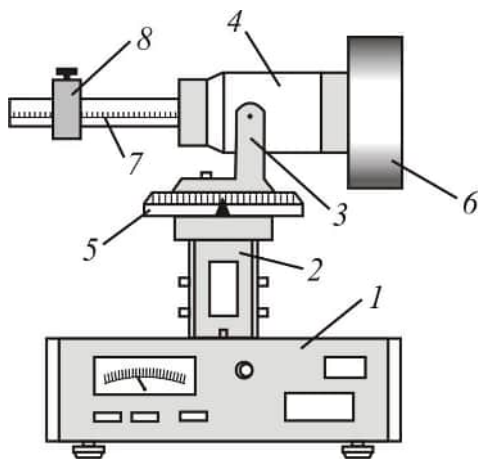


Рис. 2.30. Гіроскоп для проведення експериментів

маневруванні космічних апаратів. Наприклад, космічний телескоп Габбла маневрує для виставлення оптичної осі телескопа на спостережуваний астрофізичний об'єкт за допомогою системи гіроскопів, у яких регулюється вісь нахилу. Джерелом живлення електродвигунів є акумуляторні батареї, які заряджаються від сонячних батарей. Отже, така система не потребує місії з дозаправлення паливом, а також не створює хмар газових викидів, як це було б у випадку використання ракетних двигунів.

2.10.2. Момент інерції гіроскопа

Гіроскоп є симетричним масивним тілом, обертання якого підлягає основному закону обертання твердого тіла:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (2.10.1)$$

де \mathbf{L} – вектор моменту імпульсу, а \mathbf{M} – вектор моменту сили.

Коли на гіроскоп не діють зовнішні сили та їх рівнодія дорівнює нулю (гіроскоп у карданному підвісі), матимемо:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \mathbf{L} = \text{const.} \quad (2.10.2)$$

Вектор $\mathbf{L} = I\omega_0$ (тут I – момент інерції гіроскопа, а ω_0 – кутова швидкість його обертання), направлений вздовж осі обертання гіроскопа, залишається нерухомим в просторі, отже, вісь гіроскопа зберігає своє положення в просторі незмінним. Саме цю властивість гіроскопа в карданному підвісі (рис. 2.29) широко використовують під час конструювання гіроскопічних компасів у сучасних навігаційних пристроях.

Під дією зовнішніх сил (наприклад, сил тертя, сил тяжіння) момент \mathbf{M} відрізняється від нуля і вектор \mathbf{L} буде змінювати своє положення в просторі. Рух осі моменту імпульсу гіроскопа внаслідок дії на нього зовнішніх сил називають *прецесією*. У цьому випадку спостерігають обертання не тільки навколо осі гіроскопа, але і навколо інших можливих осей обертання (див. рис. 2.29).

Опишемо рух гіроскопа у декартовій системі координат, яку сумістимо з гіроскопом-дзигою так, як зображено на рис. 2.31.

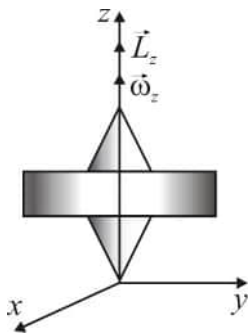


Рис. 2.31. Вільний рух гіроскопа

За вільного руху гіроскопа проєкції вектора моменту імпульсу будуть такими:

$$L_x = L_y = 0, \quad L_z = I_z \omega_z, \quad (2.10.3)$$

тобто ненульовим буде лише його компонент L_z , який визначають моментом інерції гіроскопа, I_z та кутовою швидкістю ω_z , вектор якої також направлений вздовж осі Z (інші компоненти цього вектора дорівнюють нулю).

Розглянемо випадок (див. рис. 2.30), коли гіроскоп перебуває в горизонтальному положенні, в якому саме тіло гіроскопу зрівноважене противагою. Якщо точка опори такого гіроскопа збігається з центром мас системи, то на гіроскоп не діють зовнішні моменти сил тяжіння. Коли немає зовнішніх сил і сума моментів дорівнює нулю, то гіроскоп називається *вільним*. У цьому випадку $\mathbf{M} = 0$ і, відповідно, момент імпульсу $\mathbf{L} = \text{const}$.

Якщо такий гіроскоп обертається навколо осі симетрії, то, як ми вже бачили вище, його момент імпульсу можна виразити через добуток моменту інерції I гіроскопа та його кутової швидкості обертання $\boldsymbol{\omega}$: $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$. Якщо $\mathbf{L} = \text{const}$, то постійними є також напрям осі обертання (оскільки вектор $\mathbf{L} = \text{const}$ лежить на осі обертання) та значення вектора кутової швидкості обертання $\boldsymbol{\omega}$. Якщо ж напрями осей обертання і симетрії відрізняються, то тоді вісь симетрії гіроскопа (її називають віссю фігури) рівномірно обертається навколо вектора \mathbf{L} , який вже не дорівнює $I\boldsymbol{\omega}$. Рух цього типу називають *вільною прецесією гіроскопа*.

У випадку коли момент зовнішніх сил \mathbf{M} не дорівнює нулю, тобто на гіроскоп діють зовнішні моменти сил, результуюча векторна сума яких не дорівнює нулю, і гіроскоп обертається точно навколо осі симетрії, то він виконує новий тип руху, який називають *вимушеною прецесією*.

Виведемо співвідношення, які описують вимушену прецесію гіроскопа в експериментальній установці, зображеній на рис. 2.30.

визначити з формули, яка пов'язує dL , L та $d\phi$:

$$dL = I d\phi. \quad (2.10.4)$$

Продиференціюємо цей вираз за часом:

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\phi}{dt} = I\Omega, \quad (2.10.5)$$

звідки, з урахуванням 2.10.1, одержимо:

$$\Omega = \frac{M}{I\omega}. \quad (2.10.6)$$

Напрями векторів \mathbf{M} , $\boldsymbol{\omega}$ та $\boldsymbol{\Omega}$ пов'язані співвідношенням:

$$\mathbf{M} = [\boldsymbol{\Omega}, I\boldsymbol{\omega}] = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{L}]. \quad (2.10.7)$$

Це співвідношення можна отримати також із формули Пуансо, яка стверджує: *якщо вектор \mathbf{A} (у нашому випадку його роль відіграє вектор \mathbf{L}) обертається з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$, не змінюючи свого модуля, то $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{A}]$.*

Якщо $\boldsymbol{\Omega}$ перпендикулярний до \mathbf{L} , то $|\mathbf{M}| = |\boldsymbol{\Omega}| \cdot |\mathbf{L}|$, або ж

$$M = L\Omega. \quad (2.10.8)$$

У випадку вимушеної прецесії гіроскопа

$$M = mgd, \quad (2.10.9)$$

де m – маса тягарця δ на рис. 2.30; g – прискорення вільного падіння; d – плече сили тяжіння, яка діє на вісь гіроскопа.

Кутову швидкість прецесії Ω можна одержати, вимірявши час t , впродовж якого гіроскоп повернувся на кут α радіанів унаслідок прецесійного руху. Тоді

$$\Omega = \frac{\alpha}{t}. \quad (2.10.10)$$

Підставивши (2.10.9) і (2.10.10) у вираз (2.10.8) та врахувавши, що $L = I\omega$, одержимо робочу формулу для визначення моменту інерції гіроскопа:

$$I = \frac{tmgd}{\alpha\omega}. \quad (2.10.11)$$

Перевівши радіани у градуси, а кутову швидкість у частоту обертання ν гіроскопа ($\omega = 2\pi\nu$), одержимо робочу формулу у величинах, які безпосередньо вимірюємо:

$$I = \frac{90^\circ tmgd}{\alpha^\circ \pi^2 \nu}. \quad (2.10.12)$$

2.10.3. Експериментальне визначення моменту інерції гіроскопа

Встановити тягарець 8 на важелі 7 (див. рис. 2.30) так, щоб гіроскоп був у положенні байдужої рівноваги. Натиснути кнопку “Мережа” і, плавно повертаючи ручку потенціометра “Рег. швидкості” за годинниковою стрілкою, встановити оберти гіроскопа в інтервалі 6000-8000 обертів за хвилину. Дочекатися стабільної швидкості обертання гіроскопа. Переконалися, що гіроскоп не виконує прецесійного руху. Перемістити тягарець на важелі на відстань більше 6 см від положення рівноваги у бік кінця важеля. Натиснути кнопку “Скидання” і після повороту гіроскопа на кут, заданий викладачем, натиснути кнопку “Стоп”. Записати у табл. 2.12 значення кута повороту та час прецесії. Дослід повторити п’ять разів.

Перемістити тягарець на важелі в інший бік від положення рівноваги. Переконалися, що напрям кутової швидкості прецесії змінився на протилежний. Обчислити значення моменту інерції гіроскопа, оцінити точність експерименту.

Щоб записати на підставі (2.1.6) формули похибок величин непрямих вимірювань, розраховують такі частинні похідні, використовуючи робочу формулу (2.10.12):

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{90^\circ mgd}{\alpha^\circ \pi^2 \nu}, \quad \frac{\partial I}{\partial m} = \frac{90^\circ tgd}{\alpha^\circ \pi^2 \nu}, \quad \frac{\partial I}{\partial d} = \frac{90^\circ tmg}{\alpha^\circ \pi^2 \nu},$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha^\circ} = -\frac{90^\circ tmgd}{(\alpha^\circ)^2 \pi^2 \nu}, \quad \frac{\partial I}{\partial \nu} = -\frac{90^\circ tmgd}{\alpha^\circ \pi^2 \nu^2}.$$

Формула для визначення абсолютної похибки непрямого вимірювання моменту інерції гіроскопа набуває вигляду:

$$\Delta I = \bar{I} \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \alpha}{\bar{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \nu}{\bar{\nu}}\right)^2}.$$

Результати вимірювань та обчислень записують у табл. 2.12.

Таблиця 2.12

Номер з/п	$\alpha, ^\circ$	$\Delta\alpha, ^\circ$	$t_i,$ с	$\Delta t_i,$ с	$\nu,$ с ⁻¹	$\Delta\nu,$ с ⁻¹	$I,$ кг·м ²	$\Delta I,$ кг·м ²	$\delta I,$ %
1-5									
С. зн.									

$$m = (0.375 \pm 0.001) \text{ кг}; \quad g = (9.81 \pm 0.01) \text{ м/с}^2.$$

Кінцеві результати записують у вигляді:

$$\alpha = \bar{\alpha} \pm \Delta\alpha; \quad \nu = \bar{\nu} \pm \Delta\nu; \quad t = \bar{t} \pm \Delta t; \quad d = \bar{d} \pm \Delta d;$$

$$I = \bar{I} \pm \Delta I; \quad \delta I = .$$

На підставі отриманих результатів формують висновки до лабораторної роботи.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. Що таке гіроскоп?
2. Що таке момент імпульсу?
3. Що таке момент сили?
4. Що таке момент інерції матеріальної точки; момент інерції твердого тіла?
5. Сформулюйте основний закон динаміки обертового руху.
6. Як спричинити прецесію гіроскопа?
7. Який напрям мають вектори кутової швидкості; момент сили; момент імпульсу?
8. Значення яких величин потрібно виміряти в цій роботі, щоб визначити момент інерції гіроскопа?
9. Як пов'язані між собою напрями векторів \mathbf{M} , \mathbf{L} і $\boldsymbol{\Omega}$?
10. Наведіть приклади застосування гіроскопів.

2.11. Визначення швидкості поширення звуку в повітрі методом стоячої хвилі

Основна мета роботи – визначення швидкості звуку в повітрі методом стоячої хвилі. Прилади, які потрібні для виконання лабораторної роботи – установка для визначення довжини звукової хвилі, звуковий генератор. Теоретичний матеріал, який треба засвоїти під час підготовки до виконання роботи – хвильовий процес; рівняння біжучої хвилі; стояча хвиля та її рівняння; резонанс; розподіл амплітуд коливань у стоячих хвилях різного типу; швидкість поширення звуку в пружному середовищі.

2.11.1. Звук

Через взаємодію частинок пружного середовища, при виведенні з положення рівноваги навіть однієї частинки, вона почне коливатися відносно положення рівноваги і залучає до коливного процесу сусідні частинки, які, з деяким запізненням, повторюють коливання цієї частинки. Поширення таких коливань у просторі називають *хвилею*. Частинки середовища, які коливаються в однаковій фазі, належать одній хвильовій поверхні. Залежно від форми цієї поверхні, хвилі можуть бути, наприклад, *сферичними* або *плоскими*. Якщо коливання частинок відбувається у напрямі поширення хвилі, то такі хвилі називають *повздовжніми*. Коли ж частинки коливаються у напрямі перпендикулярному до напрямі поширення хвилі, то такі хвилі називаються *поперечними*. Якщо середовище має пружність об'єму та форми, то у ньому можуть поширюватися і повздовжні, і поперечні хвилі. У середовищах, які мають пружність лише об'єму (гази, рідини), можуть поширюватися лише повздовжні хвилі. У широкому фізичному розумінні такі хвилі можна назвати *звуком*, проте у більш вузькому (біологічному) визначенні звуком називають лише ті з вищезгаданих хвиль, які сприймає сенсорна сис-

тема людей і тварин. Частота звукових хвиль лежить у діапазоні від 20 Гц до 20 кГц. Хвилі з нижчими частотами називають *інфразвуковими*, а з більшими, ніж у цьому діапазоні – *ультразвуковими*.

Якщо зустрічаються декілька хвиль, то вони можуть *інтерферувати* між собою (накладатись), утворюючи за певних умов стійку картину підсилення коливань частинок середовища в одних точках простору і послаблення – в інших. Умовами виникнення такої стійкої картини є однаковість частот коливання хвиль, що накладаються, та їх *когерентність* (стала різниця фаз у кожній точці середовища). Часто до цих умов додають ще однаковий напрям поширення хвиль. Однак інтерферувати можуть і хвилі, які поширюються у протилежних напрямках. Така інтерференція приводить до утворення *стоячих хвиль*.

2.11.2. Стояча хвиля

Розглянемо детальніше процес утворення стоячої хвилі. Нехай маємо дві плоскі хвилі, які поширюються назустріч одна одній уздовж осі OX .

Рівняння цих хвиль запишемо у вигляді

$$\xi_1 = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \text{і} \quad \xi_2 = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right),$$

де A – амплітуда; ω – частота; λ – довжина хвилі; x – поточне значення координати.

Після інтерференції (накладання) цих хвиль утвориться нова хвиля

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos(\omega t). \quad (2.11.1)$$

Це стояча хвиля, амплітуда якої

$$A_{\text{ст}} = 2|A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)| \quad (2.11.2)$$

залежить від координати x за законом косинуса. Координати, для яких амплітуда дорівнює нулю, називаються *вузлами* стоячої хвилі, а координати, за яких амплітуда стоячої хвилі максимальна, називаються *пучностями*. Максимального значення $A_{ст}$ набуває за умови

$$2\pi x = \pi n, \text{ де } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.11.3)$$

Звідси легко визначити координати пучностей (видуг) стоячої хвилі

$$x_n = n \frac{\lambda}{2}. \quad (2.11.4)$$

Отже, як бачимо із (2.11.4), відстань між двома сусідніми пучностями стоячої хвилі є сталою і дорівнює $\lambda/2$. У цій роботі цю відстань будемо визначати експериментально.

2.11.3. Визначення довжини звукової хвилі та швидкості поширення звуку

Експериментальна установка на рис. 2.33 складається зі скляної трубки 1 та резервуара з водою 2, з'єданого з помпою 3. Поряд з трубкою встановлена лінійка 4 з міліметровою шкалою для визначення положення рівня води. За допомогою помпи воду з резервуара можна перекачувати в трубку, змінюючи висоту повітряного стовпа всередині трубки. Над відкритим кінцем трубки закріплено динамік 5, мембрана якого коливається з частотою, заданою звуковим генератором 6. Моменти підсилення звуку можна реєструвати на слух або осцилографом 7 від мікрофона 8, встановленого над трубкою.

Коливання мембрани динаміка збуджують поздовжні коливання стовпа повітря у трубці, які поширюються в ній, відбиваються від поверхні води та йдуть у зворотному напрямі. Ці дві системи зустрічних хвиль, інтерферуючи одна з одною, утворюють у трубці стоячу хвилю (рис. 2.34), тобто періодичний ряд вузлів і

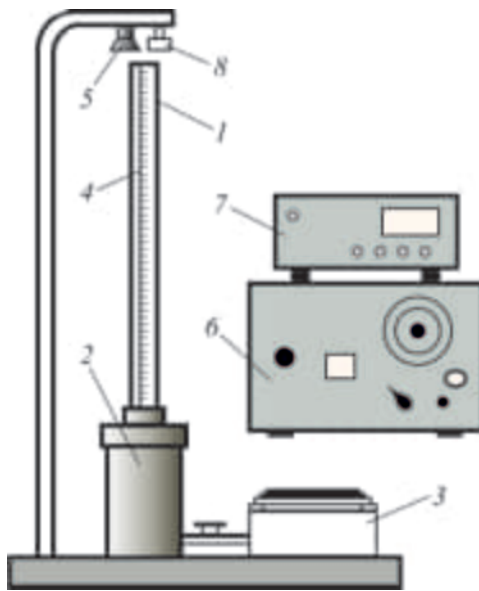


Рис. 2.33. Установка для визначення довжини звукової хвилі

пучностей (видугів) коливань. На поверхні води за цих умов завжди утворюється вузол. Залежно від висоти повітряного стовпа, а також від частоти коливань мембрани між рівнем води і верхнім кінцем труби розміститься певна кількість вузлів і пучностей стоячих хвиль. Якщо неперервно змінювати висоту повітряного стовпа, накачуючи або випускаючи воду з труби, то простежуватимуться послідовні підсилення звуку. Вірогідно, що повторення підсилення звуку настає тоді, коли висота повітряного стовпа у трубці змінюється на $\lambda/2$.

Отже, фіксуючи положення рівня води L за кожного наступного підсилення, матимемо

$$L_n - L_{n-1} = \frac{\lambda}{2}. \quad (2.11.5)$$

З іншого боку, відомо, що довжина хвилі λ пов'язана зі швидкістю її поширення v і частотою ν співвідношенням

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \quad (2.11.6)$$

Підставивши (2.11.6) у (2.11.5), отримаємо робочу формулу для визначення швидкості звуку в повітрі

$$v = 2\nu(L_n - L_{n-1}). \quad (2.11.7)$$

Визначена за формулою (2.11.7) швидкість звуку в повітрі – це швидкість звуку за температури досліду. Тому одержаний результат потрібно стандартизувати, тобто звести до 0°C за формулою

$$v_0 = \frac{v}{(1 + \alpha t)^{1/2}}, \quad (2.11.8)$$

де α – коефіцієнт об'ємного розширення повітря ($\alpha = 0.004 \text{ град}^{-1}$);
 t – температура приміщення під час досліду.

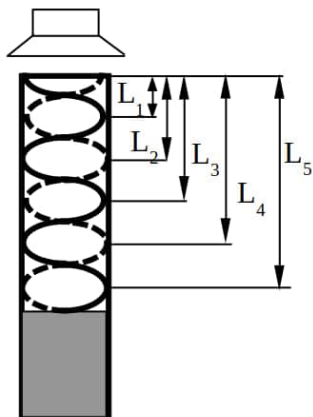


Рис. 2.34. Схематичне зображення установки для визначення довжини звукової хвилі

Для експериментального визначення швидкості поширення звуку потрібно увімкнути в електромережу генератор звукової частоти ν (рис. 2.33) та задати потрібну частоту ν . Відкрити кран, який сполучає помпу 3 із водяним резервуаром 2 і, накачуючи повітря, підняти рівень води в трубці 1 на 10 см нижче від її верхнього кінця. (**Обережно! Не перелийте воду через край!**). Повернути кран у таке положення, щоб рівень води почав повільно знижуватися. За шкалою лінійки відмічати кожне положення рівня води у момент підсилення звуку. Зафіксувати шість підсилень звуку. Дослід повторити п'ять разів. Результати вимірювань записати в табл. 2.13.

Аналогічні вимірювання виконати для інших частот, заданих викладачем. За усередненими значеннями L_i обчислити швидкість поширення звуку в повітрі за формулою (2.11.7).

На підставі (2.1.6) розраховують такі частинні похідні, використовуючи робочу формулу (2.11.7):

$$\frac{\partial v}{\partial L_n} = 2\nu, \quad \frac{\partial v}{\partial L_{n-1}} = -2\nu; \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 2(L_n - L_{n-1});$$

$$\frac{\partial v_o}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha t}}; \quad \frac{\partial v_o}{\partial t} = -\frac{v\alpha}{2(1 + \alpha t)^{3/2}}.$$

Формули для обчислення похибок непрямих вимірювань мають вигляд:

$$\Delta v = \bar{v} \sqrt{\left(\frac{\Delta \nu}{\bar{\nu}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L_n}{\bar{L}_n - \bar{L}_{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L_{n-1}}{\bar{L}_n - \bar{L}_{n-1}}\right)^2};$$

$$\Delta v_0 = \bar{v}_0 \sqrt{\left(\frac{\Delta \nu}{\bar{\nu}}\right)^2 + \left(\frac{0.002\Delta t}{1 + 0.004\bar{t}}\right)^2};$$

$$\delta v = \frac{\Delta v}{\bar{v}} \cdot 100\%; \quad \delta v_0 = \frac{\Delta v_0}{\bar{v}_0} \cdot 100\%.$$

Результати вимірювань та обчислень записують у табл. 2.13 і 2.14.

Таблиця 2.13

Номер з/п	L_{1i} , см	L_{2i} , см	L_{3i} , см	L_{4i} , см	L_{5i} , см	L_{6i} , см
1-5						
Сер. зн.						

Таблиця 2.14

Номер з/п	$\Delta \bar{L}_i = \bar{L}_n - \bar{L}_{n+1}$, м	v , м/с	Δv , м/с
1-5			
Сер. зн.			

Кінцеві результати записують у вигляді:

$$\nu = \bar{\nu} \pm \Delta\nu; \quad t = \bar{t} \pm \Delta t.$$

$$v_0 = \bar{v}_0 \pm \Delta v_0; \quad \delta v_0 = ; \quad v_1 = \bar{v}_1 \pm \Delta v_1; \quad \delta v_1 = .$$

Аналогічно для v_2, v_3, v_4, v_5 та результуючої v :

$$v = \bar{v} \pm \Delta v; \quad \delta v_1 = .$$

На підставі отриманих результатів формують висновки до лабораторної роботи.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. Що називають звуком?
2. Якими параметрами характеризують звук?
3. Від яких параметрів залежить швидкість поширення звуку?
4. Яка різниця між біжучою та стоячою хвилями?
5. Запишіть рівняння біжучої та стоячої хвилі.
6. Яку хвилю називають поздовжньою; поперечною?
7. Від чого залежить тип хвилі, яка виникає в тому чи іншому пружному середовищі?
8. У чому полягає явище резонансу?
9. У якому випадку відбувається підсилення звуку мембрани, що розміщена біля відкритого краю труби?

2.12. Визначення швидкості польоту кулі за допомогою крутильно-балістичного маятника

Основна мета роботи – визначити, використовуючи закони збереження, швидкість польоту кулі за допомогою крутильно-балістичного маятника. До необхідних приладів для роботи належить крутильно-балістичний маятник, пружинний пістолет, секундомір, міліметрова лінійка, штангенциркуль, куля. Теоретичний матеріал – момент інерції, момент сили, момент імпульсу, механічна енергія поступального та обертального рухів, основний закон обертального руху, закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії, рівняння руху балістичного маятника, абсолютно пружне та непружне зіткнення.

2.12.1. Крутильно-балістичний маятник та опис його коливань

Крутильно-балістичний маятник (рис. 2.35) змонтований на основі 1, що опирається на чотири ніжки, висоту яких можна регулювати (вирівнювати прилад). На основі закріплені електричний блок 2 та колонка 3. До колонки прикріплені верхній, нижній і середній кронштейни. До середнього кронштейна прикріплені пружинний пістолет 4, прозорий екран 5 з градусною шкалою та фотоелектричний датчик 6. Верхній і нижній кронштейни мають затискачі для кріплення сталеві дротини 7, на якій розташовані переривач світлового потоку 10 і маятник, що складається з двох мисочок 9, наповнених пластиліном, двох стержнів, по яких можуть пересуватися закріплені на них тягарі 8. Фотоелектричний датчик 6 з'єднаний з мілісекундоміром. На передній панелі електричного блока 2 розміщені вікна цифрових індикаторів мілісекундоміра, лічильника періодів і три кнопки керування. Кнопкою “Мережа” вмикають установку в електромережу; кнопкою “Скидання” обнулюють мілісекундомір і лічильник пе-

ріодів; кнопкою “Стоп” зупиняють цикл вимірювання через один період після її натискання.

Виведення робочої формули. Після попадання кулі в мішень балістичного маятника, він починає виконувати крутильні коливання навколо своєї вертикальної осі. Якщо під час його руху знехтувати моментом сил тертя, то можна використати два закони збереження. На підставі закону збереження моменту імпульсу, вважаючи удар абсолютно непружним, можна записати рівність (до удару і після):

$$mvr = (I_1 + mr^2)\omega, \quad (2.12.1)$$

де m – маса кулі; v – її швидкість до удару; r – відстань від осі обертання маятника до точки удару кулі; ω – кутова швидкість маятника; I_1 – момент інерції маятника; mr^2 – момент інерції кулі.

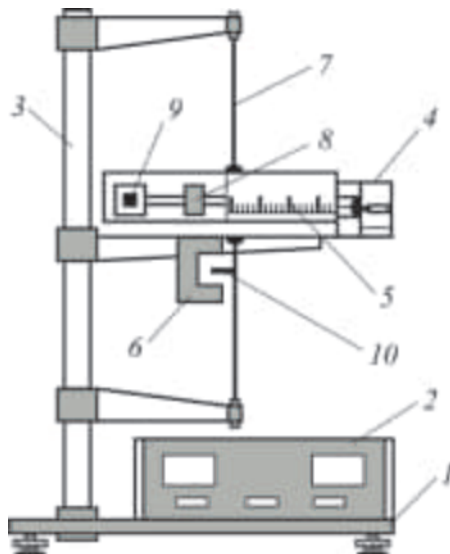


Рис. 2.35. Установа балістичного маятника для експерименту

Закон збереження механічної енергії (після удару)

$$\frac{1}{2}(I_1 + mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}f\varphi^2, \quad (2.12.2)$$

де φ – найбільший кут повороту маятника; f – модуль кручення підвісу маятника.

З рівнянь (2.12.1) та (2.12.2) одержуємо:

$$v^2 = \frac{f\varphi^2(I_1 + mr^2)}{m^2r^2}. \quad (2.12.3)$$

Оскільки момент інерції кулі mr^2 набагато менший від I_1 , то рівняння (2.12.3) можна записати у вигляді

$$v^2 = \frac{f\varphi^2 I_1}{m^2r^2}. \quad (2.12.4)$$

Будемо вважати, що час дії кулі на маятник набагато менший від періоду коливань балістичного маятника, тобто $\tau \ll T$. Рівняння руху балістичного маятника за цих умов можна записати у вигляді

$$I_1\varepsilon = -f\varphi. \quad (2.12.5)$$

Тут $\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$ – кутове прискорення. Розв'язок цього рівняння приводить до виразу для періоду крутильних коливань

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{f}}. \quad (2.12.6)$$

Для вилучення з останньої формули невідомої величини f змінимо момент інерції балістичного маятника, змістивши тягарі на іншу відстань від осі маятника, тоді

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{f}}, \quad (2.12.7)$$

де T_2 – період коливання маятника за нового значення моменту інерції I_2 .

З формул (2.12.6) і (2.12.7) одержимо

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \quad (2.12.8)$$

Якщо різницю моментів інерції маятника позначимо через ΔI , тобто

$$\Delta I = I_1 - I_2, \quad (2.12.9)$$

то з формули (2.12.8) одержимо

$$I_1 \Delta I = \frac{T_1^2}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (2.12.10)$$

З формули (2.12.6)

$$f = 4\pi^2 \frac{I_1}{T_1^2}. \quad (2.12.11)$$

Підставивши в рівняння (2.12.4) значення f з (2.12.11), а значення I_1 з (2.12.10), для швидкості кулі отримаємо вираз

$$v = \frac{2\pi\varphi T_1 \Delta I}{mr(T_1^2 - T_2^2)}. \quad (2.12.12)$$

Величину ΔI можна визначити, використавши такі рівняння:

$$I_1 = I_0 + 2MR_1^2, \quad (2.12.13)$$

$$I_2 = I_0 + 2MR_2^2,$$

де I_0 – момент інерції маятника без тягарів; I_1 – момент інерції маятника, якщо обидва тягарі розташовані на відстані R_1 від осі обертання; I_2 – на відстані R_2 ; M – маса одного тягаря.

Нехай $R_1 > R_2$, тоді з рівнянь (2.12.9) і (2.12.13) одержуємо:

$$\Delta I = I_1 - I_2 = 2M(R_1^2 - R_2^2). \quad (2.12.14)$$

Із рівнянь (2.12.12) і (2.12.14) визначаємо робочу формулу для обчислення швидкості польоту кулі:

$$v = \frac{4\pi MT_1(R_1^2 - R_2^2)\varphi}{mr(T_1^2 - T_2^2)}, \quad (2.12.15)$$

де φ – кут максимального відхилення маятника після вцілення в нього кулі, виражений у радіанах:

$$\varphi = \frac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}.$$

Примітка. Якщо кут повороту маятника визначають за відхиленням світлового “зайчика”, то

$$\varphi = \frac{n}{2L},$$

де L – відстань від дзеркальця до світлового “зайчика”; n – кількість поділок шкали, на яке він зміщується.

2.12.2. Визначення швидкості кулі та оцінка точності експерименту

Для виконання лабораторної роботи треба увімкнути установку балістичного маятника (рис. 2.35) в електромережу (натисніть кнопку “Мережа”). Перевірити чи маятник є в нульовому положенні. Якщо потрібно, то виконати коректування. Установити додаткові тягарі на відстані R_1 . Вистрілити і виміряти кут максимального відхилення маятника φ . Вимірювати можна в тому випадку, якщо кулька прилипла до пластиліну. Натиснути кнопку “Скидання”. У цьому випадку обнуляться цифрові індикатори і розпочнеться цикл вимірювання часу та кількості періодів. Якщо на лічильнику періодів з’явиться число 9, то натисніть

кнопку “Стоп”. Через один період закінчиться цикл вимірювання. На лічильнику періодів засвітиться число 10, а мілісекундомір покаже час t_1 , протягом якого маятник виконав десять коливань. Вимірювання виконують п’ять разів.

Установити тягарі на відстані R_2 . П’ять разів виміряти час t_2 (аналогічно до вимірювання часу t_1). На аналітичній вазі визначити масу кульки m . По шкалі, нанесеній на чашці з пластиліном, виміряти відстань r . Результати вимірювань записати у табл. 2.15. Обчислити періоди T_1 і T_2 . За робочою формулою обчислити швидкість кулі v та оцінити точність експерименту.

На підставі (2.1.6) розраховують такі частинні похідні, використовуючи робочу формулу (2.12.15):

$$\frac{\partial v}{\partial M} = \frac{4\pi T_1 \varphi (R_1^2 - R_2^2)}{mr(T_1^2 - T_2^2)}; \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{4\pi M T_1 (R_1^2 - R_2^2)}{mr(T_1^2 - T_2^2)};$$

$$\frac{\partial v}{\partial R_1} = \frac{8\pi M T_1 \varphi R_1}{mr(T_1^2 - T_2^2)}; \quad \frac{\partial v}{\partial R_2} = -\frac{8\pi M T_1 \varphi R_2}{mr(T_1^2 - T_2^2)};$$

$$\frac{\partial v}{\partial m} = -\frac{4\pi M T_1 \varphi (R_1^2 - R_2^2)}{m^2 r (T_1^2 - T_2^2)}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{4\pi M T_1 \varphi (R_1^2 - R_2^2)}{m r^2 (T_1^2 - T_2^2)};$$

$$\frac{\partial v}{\partial T_1} = -\frac{4\pi M \varphi (R_1^2 - R_2^2) (T_1^2 + T_2^2)}{mr(T_1^2 - T_2^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial T_2} = \frac{4\pi M \varphi (R_1^2 - R_2^2) T_2}{mr(T_1^2 - T_2^2)^2}.$$

Формули похибок для величин непрямих вимірювань мають вигляд:

$$\Delta v = \bar{v} \left\{ \left[\frac{\Delta M}{\bar{M}} \right]^2 + \left[\frac{\Delta m}{\bar{m}} \right]^2 + \left[\frac{\Delta \varphi}{\bar{\varphi}} \right]^2 + \left[\frac{\Delta r}{\bar{r}} \right]^2 + \left[\frac{2\bar{R}_1 \Delta R_1}{(\bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2)} \right]^2 + \left[\frac{2\bar{R}_2 \Delta R_2}{(\bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2)} \right]^2 + \left[\frac{2\bar{T}_2 \Delta T_2}{(\bar{T}_1^2 - \bar{T}_2^2)} \right]^2 + \left[\frac{\Delta T_1 (\bar{T}_1^2 + \bar{T}_2^2)}{\bar{T}_1 (\bar{T}_1^2 - \bar{T}_2^2)} \right]^2 \right\}^{1/2};$$

$$\delta v = \frac{\Delta v}{\bar{v}}.$$

Результати вимірювань та обчислень записують у табл. 2.15.

Таблиця 2.15

Номер з/п	n	t_{1i} , с	T_{1i} , с	$\varphi_i, ^\circ$	t_{2i} , с	T_{2i} , с	v , м/с	Δv , м/с	δv , %
1-5									
Сер.зн.									

Кінцеві результати записують у вигляді:

$$M = \bar{M} \pm \Delta M; \quad m = \bar{m} \pm \Delta m; \quad r = \bar{r} \pm \Delta r; \quad R_1 = \bar{R}_1 \pm \Delta R_1;$$

$$R_2 = \bar{R}_2 \pm \Delta R_2; \quad T_1 = \bar{T}_1 \pm \Delta T_1; \quad T_2 = \bar{T}_2 \pm \Delta T_2; \quad \varphi = \bar{\varphi} \pm \Delta \varphi.$$

$$v = \bar{v} \pm \Delta v; \quad \delta v = .$$

З отриманих результатів формують висновки лабораторної роботи.

Питання для самостійного опрацювання матеріалу

1. Що називається моментом інерції?
2. Що називається моментом сили?
3. Що називається моментом імпульсу?
4. Сформулюйте та запишіть закон збереження моменту імпульсу.
5. Сформулюйте закон збереження механічної енергії.
6. Який удар називається непружним?
7. Запишіть і поясніть закон збереження моменту імпульсу для випадку непружного зіткнення кулі з балістичним маятником.
8. Запишіть закон збереження механічної енергії для маятника, який виконує крутильні коливання.
9. Виведіть робочу формулу.

ДОДАТОК

Форма звіту до лабораторної роботи

1. Титульна сторінка.
2. Завдання.
3. Рисунок установки.
4. Робочі формули з розшифруванням величин, які входять до них.
5. Формули для розрахунку похибок величин, які безпосередньо не вимірюються.
6. Результати вимірювань і обчислень, подані у вигляді таблиць.
7. Кінцеві результати.
8. Висновки.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ФІЗИЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ	9
1.1. Основні поняття. Вимірювання та типи похибок	9
1.2. Похибки прямих вимірювань фізичних величин	12
1.2.1. Визначення випадкової похибки	13
1.2.2. Похибка приладу	15
1.2.3. Похибка заокруглення	18
1.2.4. Сумарна похибка досліду	18
1.3. Похибки непрямих вимірювань фізичних величин	19
2. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З МЕХАНІКИ ТА МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЇХ ВИКОНАННЯ	22
2.1. Визначення густини речовини тіл правильної геометричної форми	22
2.1.1. Визначення лінійних розмірів	22
2.1.2. Визначення маси тіла за допомогою терезів. Правила зважування	27
2.1.3. Визначення густини тіл	29
2.2. Перевірка основного закону динаміки обертового руху за допомогою маятника Обербека	34

2.2.1.	Основні поняття та формули динаміки твердого тіла	34
2.2.2.	Вивчення обертального руху на маятнику Обербека	39
2.3.	Визначення моменту інерції тіла за допомогою маятника Максвелла	45
2.3.1.	Закон збереження енергії. Момент інерції маятника Максвелла	45
2.3.2.	Визначення моменту інерції маятника Максвелла	50
2.4.	Дослідження залежності моменту інерції дволанкової системи від її геометричних параметрів . . .	55
2.4.1.	Момент інерції. Рух центра мас системи матеріальних точок	55
2.4.2.	Дволанкова система як фізичний маятник	57
2.4.3.	Вимірювання моменту інерції дволанкової системи	58
2.5.	Перевірка закону збереження моменту імпульсу .	63
2.5.1.	Момент імпульсу тіла та закон його зміни .	63
2.5.2.	Дослідження обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Опис установки	67
2.5.3.	Експериментальна перевірка закону збереження моменту імпульсу	74
2.6.	Визначення прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника	78
2.6.1.	Коливання. Фізичний і математичний маятники	78
2.6.2.	Експериментальне визначення прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника	80
2.7.	Дослідження процесу пружної деформації розтягу дротини	89

2.7.1.	Деформація твердих тіл. Закон Гука	89
2.7.2.	Експериментальне визначення модуля Юнга	93
2.8.	Дослідження пружної деформації кручення	99
2.8.1.	Модуль кручення та період коливань кру- тального маятника	99
2.8.2.	Визначення модуля зсуву	101
2.8.3.	Визначення модуля зсуву матеріалу дротини	104
2.9.	Вивчення коливних процесів	108
2.9.1.	Гармонічний осцилятор	108
2.9.2.	Загасаючі коливання	110
2.9.3.	Вимушені коливання	111
2.9.4.	Експериментальне вивчення коливань . . .	112
2.9.5.	Визначення циклічної частоти вільних ко- ливань і логарифмічного декременту за- гасання	113
2.9.6.	Дослідження вільних, загасаючих та виму- шених коливань	115
2.10.	Дослідження прецесії гіроскопа та визначення його моменту інерції	119
2.10.1.	Опис гіроскопів	119
2.10.2.	Момент інерції гіроскопа	122
2.10.3.	Експериментальне визначення моменту інер- ції гіроскопа	127
2.11.	Визначення швидкості поширення звуку в повітрі методом стоячої хвилі	130
2.11.1.	Звук	130
2.11.2.	Стояча хвиля	131
2.11.3.	Визначення довжини звукової хвилі та швид- кості поширення звуку	132
2.12.	Визначення швидкості польоту кулі за допомогою крутильно-балістичного маятника	138

2.12.1. Крутильно-балістичний маятник та опис його коливань	138
2.12.2. Визначення швидкості кулі та оцінка точності експерименту	142

ДОДАТОК	146
Форма звіту до лабораторної роботи	146

Навчальне видання

Чорнодольський Ярослав Миколайович,
Мелех Богдан Ярославович,
Конопельник Оксана Ігорівна,
Кошмак Ігор Олександрович,
Стельмах Оксана Миколаївна

ЗАГАЛЬНИЙ ФІЗИЧНИЙ ПРАКТИКУМ З МЕХАНІКИ

Навчальний посібник
За загальною редакцією Я. М. Чорнодольського

Редактор *Н. Й. Плиса*
Комп'ютерне верстання *Н. К. Гладка*
Дизайн обкладинки *І. М. Чайка*

Формат 60 × 84/16. Умовн. друк. арк. 8.83
Тираж 100 прим. Зам.

Видавець і виготовлювач:
Львівський національний університет імені Івана Франка
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.