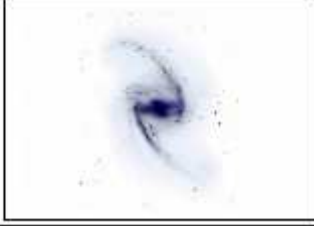


Обласна олімпіада з астрономії м. Львів, 1 лютого 2020 р.		Теоретичний тур 11 клас
--	--	------------------------------------

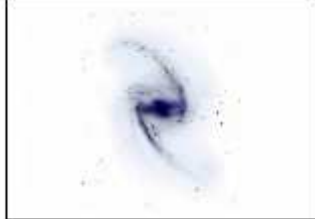
1. **Планетарна туманність.** Зоря масою $1M_{\odot}$ наприкінці своєї еволюції скинула верхні шари, утворивши планетарну туманність (ПТ) у вигляді сферичного шару з ядром (білим карликом) всередині, маса якого становить $0.6M_{\odot}$. Туманність розширюється зі сталою швидкістю, її вік становить 1000 років. Відносні зміщення емісійних ліній в її спектрі, які утворюються поблизу зовнішнього радіуса ПТ, становить 10^{-4} . Сталим в часі є також відношення товщини сферичного шару (різниця між зовнішнім та внутрішнім радіусами ПТ) до діаметру туманності, яке становить 0.3. Газ в оболонці туманності розподілений однорідно, відношення концентрацій гелію та водню $He/H=0.11$, вмістом важчих елементів можна знехтувати. Знайти концентрацію водню в туманності. Вважати радіус ядра туманності нехтовно малим у порівнянні з її розмірами. Маса протона $1.67 \cdot 10^{-24}$ г, маса Сонця — $1.989 \cdot 10^{33}$ г.

Розв'язання

Якщо R_{in} – внутрішній, а R_{out} – зовнішній радіуси сферичної оболонки ПТ, а $\Delta R = R_{out} - R_{in}$, то, згідно з умовою, $\frac{\Delta R}{2R_{out}} = 0.3$.

Далі:

1. $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$; $v = c \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 30 \text{ км/с}$.
2. $R_{out} = V_{exp} \cdot t = 30 \text{ км/с} \cdot 1000 \text{ років} = 9.47 \cdot 10^{11} \text{ км} = 9.47 \cdot 10^{16} \text{ см}$.
3. $\frac{\Delta R}{2R_{out}} = \frac{R_{out} - R_{in}}{2R_{out}} = 0.3$; $R_{out} - R_{in} = 0.6R_{out}$; $R_{in} = 0.4R_{out} = 3.79 \cdot 10^{16} \text{ см}$.
4. $\rho = \frac{N_H \cdot m_H + N_{He} \cdot m_{He}}{V} = \frac{N_H m_H (1 + 0.11 \times 4)}{V} = \frac{1.44 N_H m_H}{V}$, де m_H – маса атома водню, яку можна вважати рівною масі протона (газ у ПТ в основному іонізований, до того ж маса електрона набагато менша за масу протона), а $V = \frac{4}{3}\pi(R_{out}^3 - R_{in}^3)$ – об'єм оболонки ПТ.
5. $M_{PN} = 1M_{\odot} - 0.6M_{\odot} = 0.4M_{\odot}$ – маса оболонки ПТ.
6. $M_{PN} = \frac{4}{3}\pi(R_{out}^3 - R_{in}^3) \cdot \rho$. Отже, $n_H = \frac{3 \cdot 0.4 M_{\odot}}{5.76\pi \cdot m_H \cdot (R_{out}^3 - R_{in}^3)} \approx 94335 \text{ см}^{-3}$.

<p style="text-align: center;">Обласна олімпіада з астрономії м. Львів, 1 лютого 2020 р.</p>		<p style="text-align: center;">Теоретичний тур 11 клас</p>
---	--	---

2. Енергія планети. Довести, що механічна енергія планети масою m (сума її кінетичної та потенціальної енергій без врахування власного обертання), яка рухається по еліпсу з великою піввіссю a навколо зорі масою M_* , визначається співвідношенням цих трьох величин.

Розв'язання

Планета рухається в гравітаційному полі зорі (поле центральної сили), тому для неї виконується закон збереження енергії

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM_*}{r} = \text{const.}$$

Нехай r_1 — перицентр планети, а r_2 — її апоцентр, тоді $r_1 + r_2 = 2a$.

З закону збереження енергії маємо

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{GM_*}{r_1} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{GM_*}{r_2}. \quad (1)$$

З II-го закону Кеплера: маємо $r_1 v_1 = r_2 v_2$, звідки знаходимо зв'язок між швидкостями планети на відстанях r_1 та r_2 :

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1. \quad (2)$$

Підставивши v_2 в (1) та згрупувавши подібні доданки, отримаємо:

$$\frac{v_1^2}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = GM_* \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

звідки знаходимо v_1^2 :

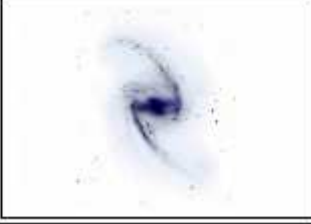
$$v_1^2 = \frac{2GM_*(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{GM_* r_2}{r_1 a}. \quad (3)$$

Використовуючи знайдений вираз, обчислимо механічну енергію планети в перицентрі:

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GmM_*}{r_1} = \frac{GmM_* r_2}{2ar_1} - \frac{GmM_*}{r_1} = \frac{GmM_*}{2ar_1} \cdot (r_2 - 2a),$$

звідки остаточно знаходимо:

$$E = -\frac{GmM_*}{2a}.$$

<p style="text-align: center;">Обласна олімпіада з астрономії м. Львів, 1 лютого 2020 р.</p>		<p style="text-align: center;">Теоретичний тур 11 клас</p>
---	--	---

3. **Бетельгейзе змінюється.** У січні 2020 року порівняно з груднем 2019 року температура яскравої зорі в сузір'ї Оріона – Бетельгейзе зменшилася на 2.8%, а світність – на 25%. На скільки відсотків змінився (збільшився чи зменшився) радіус зорі?

Розв'язання

За умовою задачі:

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% = 2.8\% \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = (1 - 0.028) = 0.972,$$

$$\frac{L_1 - L_2}{L_1} \cdot 100\% = 25\% \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = (1 - 0.25) = 0.75.$$

Відповідно до закону Стефана-Больцмана:

$$L_1 = 4\pi R_1^2 \sigma T_1^4, \quad L_2 = 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4.$$

З останнього співвідношення знаходимо радіуси R_1 та R_2 :

$$R_1^2 = \frac{L_1}{4\pi\sigma T_1^4}, \quad R_2^2 = \frac{L_2}{4\pi\sigma T_2^4}.$$

Остаточно:

$$\frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{1/2} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = (0.75)^{1/2} \left(\frac{1}{0.972}\right)^2 = (1 - 0.91664) = 8.3\%.$$

Отже, радіус зменшується.