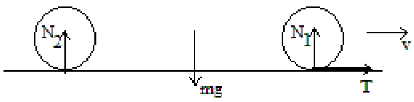
Обласна олімпіада з фізики для школярів 11 клас, 2017р, м. Львів

1. Розглянемо рух автомобіля по горизонтальній ділянці дороги. Оскільки автомобіль рухається рівномірно, тому можемо записати умови рівності сил, які діють на автомобіль. Розглянемо два випадки, коли в якості ведучих коліс використовуються передні або задні колеса. У випадку, коли ведучими є передні колеса будемо мати:

$$N_1 + N_2 = mg, \quad T_1 = F_{t_1} = \mu N_1, \tag{1}$$

тут T_1 — сила тяги, яку розвиває автомобіль, а F_{t_1} — сила тертя передніх коліс об поверхню дороги.



Аналогічно можна записати умови рівності сил для випадку, коли ведучими будуть задні колеса:

$$N_1 + N_2 = mg, \quad T_2 = F_{t_2} = \mu N_2 \tag{2}$$

Для того, щоб знайти ці сили, потрібно також записати рівняння для моментів сил, які діють на автомобіль, відносно центра мас (сумарний момент сил, які діють на автомобіль, має бути рівним нулю). У першому випадку ми одержуємо:

$$N_1 \frac{L}{2} + T_1 h = N_2 \frac{L}{2} \tag{3}$$

Використавши друг з рівнянь (1) можемо знайти силу реакції на передні колеса і, як наслідок, отрмаємо вираз для сили тяги автомобіля, коли ведучими є передні колеса:

$$T_1 = \frac{\mu mgL}{2(L + \mu h)} \tag{4}$$

У випадку, коли ведучими є задні колеса, рівняння для моментів буде мати вигляд:

$$N_1 \frac{L}{2} + T_2 h = N_2 \frac{L}{2} \tag{5}$$

Як наслідок, сила тяги, яку розвиватиме автомобіль, коли ведучими будуть задні колеса:

$$T_2 = \frac{\mu mgL}{2(L - \mu h)} \tag{6}$$

Як бачимо, сила тяги автомобіля у другому випадку буде більшою ніж у першому:

$$T_2 > T_1 \tag{7}$$

Звідси випливає, що при фіксованій потужності двигуна швидкість автомобіля буде більшою у першому випадку (коли ведучими є передні колеса):

$$v = \frac{N}{T_1} = \frac{2N(L+\mu h)}{\mu mgL} \tag{8}$$

Остання формула дозоляє отримати вираз для коефцієнта тертя коліс об дорожнє покриття:

$$\mu = \frac{2NL}{vmgL - 2hN} \tag{9}$$

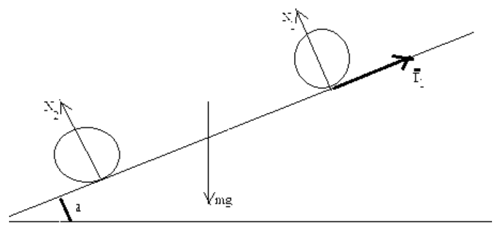
Розглянемо рух автомобіля вгору. Знову розглядатимемо два випадки — коли ведучими є або передні або задні колеса. Запишемо рівняння для сил та моментів сил, які діють на автомобіль, коли ведучими є передні колеса:

$$mg\cos\alpha = N_1 + N_2, \quad \tilde{T}_1 = \mu N_1 + mg\sin\alpha, \quad N_1\frac{L}{2} + \tilde{T}_1 h = N_2\frac{L}{2} \tag{10}$$

Звідки знаходимо силу тяги автомобіля:

$$\tilde{T}_1 = \frac{mgL(\mu\cos\alpha + 2\sin\alpha)}{2(L+\mu h)} \tag{11}$$

Легко переконатися у тому, що при всіх $0 < \alpha < \pi/2$ справджується нерівність $\mu\cos\alpha + 2\sin\alpha > \mu$. Це означає, що $\tilde{T}_1 > T_1$. Дана нерівність означає, що при фіксованій потужності двигуна автомобіля, його швидкість на підйомі буде меншою, що повністю відповідає реальній фізичній ситуації.



Тепер запишемо рівняння для сил і моментів, коли ведучими є задні колеса автомобіля:

$$mg\cos\alpha = N_1 + N_2, \quad \tilde{T}_2 = \mu N_2 + mg\sin\alpha, \quad N_1\frac{L}{2} + \tilde{T}_2 h = N_2\frac{L}{2} \tag{12}$$

Звідки отримуємо вираз для сили тяги автомобіля:

$$\tilde{T}_2 = \frac{mgL(\mu\cos\alpha + 2\sin\alpha)}{2(L-\mu h)} \tag{13}$$

Як бачимо і отриманого виразу $\tilde{T}_2 > T_2$ та $\tilde{T}_2 > \tilde{T}_1$, тобто в цьому випадку сила тяги автомобіля є максимальною і, як наслідок, швидкість автомобіля буде найменшою. Найбільшу швидкість на підйомі автомобіль розвиває подібно до горизонтальної ділянки дороги використовуючи передні колеса в якості ведучих. Цю швидкість ми легко знаходимо:

$$v_1 = \frac{N}{\tilde{T}_1} = \frac{vLN}{N(L\cos\alpha - 2h\sin\alpha) + vmgL\sin\alpha} \tag{14}$$

2. Оскільки густина поплавка менша ніж густина рідини ($\rho < \rho_0$) то виконуватиметься умова плавання. Знайдемо глибину занурення:

$$mg = F_A \leftrightarrow \frac{4}{3}\pi\rho g a^3 = \pi\rho_0 g h^2(a^2 - \frac{h}{3}) \tag{15}$$

Із останнього рівняння отримуємо:

$$h = a((1 - 2b + 2\sqrt{b^2 - b})^{1/3} + 1/(1 - 2b + 2\sqrt{b^2 - b})^{1/3} + 1), \tag{16}$$

тут $b = \rho/\rho_0$. Останнє співвідношення дозволяє отримати вираз для радіусу основи кульового сегмента:

$$r = \sqrt{a^2 - (a - h)^2} \tag{17}$$

Припустимо, що під дією раптового збурення поплавок виведено із стану рівноваги. Нехай він додатково занурений на глибину Δh по відношенню до рівноважного положення, тоді виникатиме додаткова нескомпенсована сила Архімеда, яка і спричинятиме малі коливання. Оскільки $\Delta h \ll h$, то додаткову занурену частину кулі можна вважати циліндром із радіусом основи r і висотою Δh. Додаткова нескомпенсована сила Архімеда буде мати вигляд:

$$\Delta F_A = \pi\rho_0 g r^2 \Delta h \tag{18}$$

Запишемо рівняння руху для кульки під дією сили (18):

$$m\Delta\ddot{h} = \pi\rho_0 g r^2 \Delta h \tag{19}$$

З останнього співвідношення отримуємо вираз для частоти малих коливань:

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi\rho_0 g r^2}{m}} \tag{20}$$

3. Запишемо рівняння стану для трьох підсистем у початковий момент часу:

$$p_0V_0 = \nu_0 RT_0, \quad p_0V_1 = \nu_1 RT_0, \quad p_0V_2 = \nu_2 RT_0 \tag{21}$$

Аналогічно можемо записати рівняння стану для трьох підсистем після встановлення рівноваги:

$$pV_0' = \nu_0 RT, \quad pV' = \nu_1' RT_0, \quad pV_2 = \nu_2' RT_2 \tag{22}$$

Оскільки права частина посудини з поршнем сполучена з посудиною об'ємом V_2, то кількість речовини в цій підсистемі не зміниться після нагрівання газу в правій посудині, що приводить в свою чергу до рівності:

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2' \tag{23}$$

Після нагрівання газу у лівій частині посудини з поршнем, поршень змінить своє положення, однак сумарний об'єм у посудині з поршнем залишиться незмінним, що приводить до рівності:

$$V_0 + V_1 = V_0' + V_1' \tag{24}$$

Написані рівняння утворюють повну систему рівнянь, розв'язавши яку одержимо вираз для тиску газу в системі після встановлення рівноваги:

$$p = p_0 \frac{T_2}{T} \frac{(V_1 + V_2)T_0 + TV_0}{(V_0 + V_1)T_2 + V_2 T_0} \tag{25}$$

4. Даний конденсатор можна трактувати, як два паралельно з'єднані конденсатори.

Оскільки сфери радіусами R_1 та R_3 з'єднані провідником, то при підключенні до батареї, потенціали на їхній поверхні будуть однаковими:

$$\varphi_1 = \varphi_3 \leftrightarrow k\frac{q_1}{R_1} = k\frac{q_3}{R_3} \tag{26}$$

В той же час заряд, який накопичується на обкладці радіусом R_2 рівний за величиною і протилежний за знаком сумарному заряду, що накопичується на двох інших обкладках. Таким чином, можемо записати:

$$q_2 = q_1 + q_3 \tag{27}$$

Запишемо вирази для різниці потенціалів між обкладками $1-2$ та $2-3$':

$$\Delta\varphi_{21} = k\left(\frac{q_2}{R_2} - \frac{q_1}{R_1}\right), \quad \Delta\varphi_{23} = k\left(\frac{q_2}{R_2} - \frac{q_3}{R_3}\right) \tag{28}$$

Використавши співвідношення для рівності потенціалів (26) легко переконатися у тому, що $\Delta\varphi_{21} = \Delta\varphi_{23}$ як і має бути при паралельному з'єднанні. Ємності конденсаторів $1-2$ та $2-3$ розраховуємо за формулами:

$$C_{12} = \frac{q_1}{\Delta\varphi_{21}} = \frac{q_1}{k\left(\frac{q_2}{R_2} - \frac{q_1}{R_1}\right)}, \quad C_{23} = \frac{q_3}{\Delta\varphi_{23}} = \frac{q_3}{k\left(\frac{q_2}{R_2} - \frac{q_3}{R_3}\right)} \tag{29}$$

Використавши співвідношення (26) та (27) перепишемо наведені вище вирази для ємностей у вигляді:

$$C_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_3 - R_2}, \quad C_{23} = \frac{R_3 R_2}{R_1 + R_3 - R_2} \tag{30}$$

Отже, ємність для сферичного конденсатора запишеться у вигляді:

$$C = C_{12} + C_{23} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 - R_2} \tag{31}$$

5. Розглянемо заломлення променів, які проходять через плоскопаралельну пластинку. Оскільки показники заломлення для променів світла різної довжини є різними, тому за законом заломлення матимемо:

$$n_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1}, \quad n_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2} \tag{32}$$

Оскільки пучок світла падає під кутом до скляної пластинки, то на поверхні пластинки, він матиме ширину (відстань між “крайніми” променями, які утворюють пучок на поверхні пластинки):

$$a_1 = \frac{a}{\cos\alpha} \tag{33}$$

Пучки променів різної довжини будуть розходиться при виході із пластинки назовні, якщо зміщення крайнього лівого променя частоти, якій відповідає менший показник заломлення l_2 буде не меншим ніж зміщення крайнього правого променя із більшим показником заломлення l_1:

$$l_2 \geq l_1 + a_1 \tag{34}$$

Зміщення променів l_1 та l_2 знаходимо із геометричних міркувань:

$$l_1 = d\tan\beta_1, \quad l_2 = d\tan\beta_2 \tag{35}$$

Із співвідношень (34) та (35) отримаємо:

$$d \geq \frac{2a}{\sin 2\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha}}\right)^{-1} \tag{36}$$