ЗАВДАННЯ

Електрична схема «чорної скриньки» складається лише з трьох резисторів і має три виводи. Визначте за якою схемою («трикутник» чи «зірочка») з'єднані три резистори, якщо сума R_C опорів всіх резисторів задовольняє умову: $1\ кОм < R_C < 3\ кОм$. Експериментально знайдіть опори резисторів.

Обладнання: «чорна скринька» з виведеними назовні трьома провідниками, омметр (цифровий мультиметр).

Розв'язок

Для того, щоб знайти вигляд електричної схеми («трикутник» чи «зірочка»), потрібно виміряти опори на ділянках 12, 23 та 13 (відповідно R_{12}, R_{23}, R_{13}). Матимемо наступні результати: $R_{12} = 0{,}5392$ (кОм), $R_{23} = 0{,}6103$ (кОм), $R_{13} = 0{,}1932$ (кОм). Припустимо, що всередині чорної скриньки – «зірочка» (див. рис. 1). Тоді сума $R_{12} + R_{23} + R_{13} = 2\left(r_1 + r_2 + r_3\right) = 1{,}343$ (кОм). Отже $\left(r_1 + r_2 + r_3\right) = R_c = 0{,}6714$ (кОм).

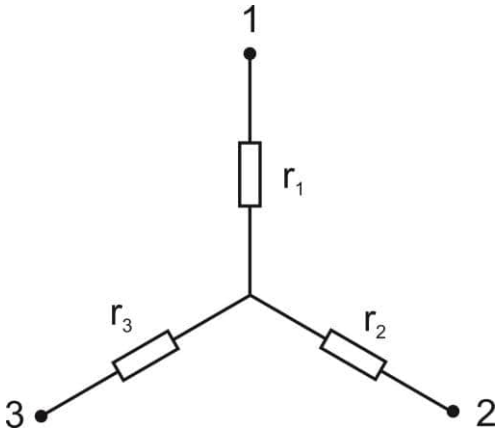

Рис. 1

Тому, можна стверджувати, що дана електрична схема – «трикутник». Розглянемо детальніше дану схему (див. рис. 2).

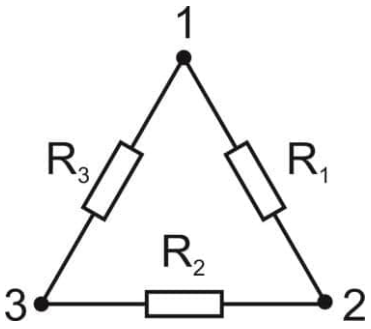

Рис. 2

Введемо позначення опорів згідно рисунка 2. Для знаходження R_1, R_2, R_3 можна скласти систему рівнянь маючи результати вимірів опорів на ділянках 12, 23 та 13. Однак отримані рівняння міститимуть нелінійні члени ($R_{12} = (R_2 + R_3) \| R_1$ і тд.) та й загалом розв'язати її буде доволі складно.

Отже для розв'язання задачі зробимо наступні виміри. Замкнемо накоротко виводи 23 та поміряємо опір $R_{1(23)к}$ (опір між точкою 1 та замкнутими накоротко контактами 23). Аналогічно зробимо із виводами 13 та поміряємо опір $R_{2(13)к}$ (опір між точкою 2 та замкнутими накоротко контактами 13). Також поміряємо опір $R_{3(12)к}$ (опір між точкою 3 та замкнутими накоротко контактами 12). Матимемо $R_{1(23)к}$ = 0,1648 (кОм), $R_{2(13)к}$ = 0,5202 (кОм), $R_{3(12)к}$ = 0,1863 (кОм).

При таких з'єднаннях одним з резисторів можна знехтувати. Наприклад (див. рис. 3) для опору ділянки між точками 1 та замкнутими накоротко контактами 23 можна відкинути резистор R_2.

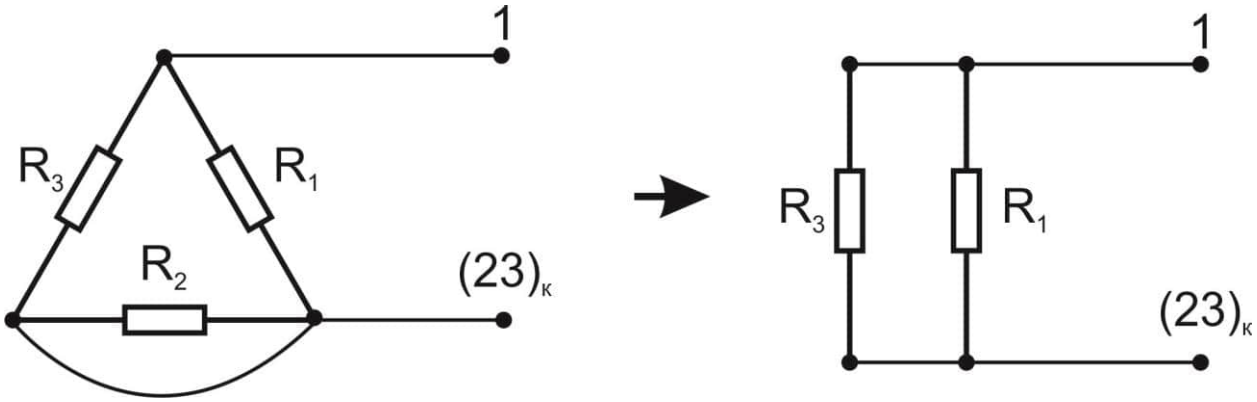

Рис. 3

Таким чином отримуємо паралельне з'єднання двох резисторів R_1 та R_3 ($R_1 \| R_3$). Отже матимемо

$$\begin{cases} R_{1(23)к} = R_1 \| R_3, \\ R_{2(13)к} = R_1 \| R_2, \\ R_{3(12)к} = R_2 \| R_3. \end{cases} \quad (1)$$

Відповідно для обернених величин система (1) матиме вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R_{1(23)к}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3}, \\ \dfrac{1}{R_{2(13)к}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}, \\ \dfrac{1}{R_{3(12)к}} = \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}. \end{cases} \quad (2)$$

Введемо позначення $1/R_1 = x$, $1/R_2 = y$, $1/R_3 = z$, $1/R_{1(23)к} = Y_1$, $1/R_{2(13)к} = Y_2$ та $1/R_{3(12)к} = Y_3$, відповідно. Тоді систему (2) перепишемо згідно нових позначень.

$$\begin{cases} Y_1 = x + z, \\ Y_2 = x + y, \\ Y_3 = y + z. \end{cases} \tag{3}$$

Систему рівнянь (3) розв'язуємо методом віднімання. Віднявши від першого рівняння друге та додавши третє, отримуємо: $Y_1 - Y_2 + Y_3 = (x+z) - (x+y) + (y+z) = 2z$. Отже:

$$z = (Y_1 - Y_2 + Y_3)/2,$$
$$x = Y_1 - z = Y_1 - (Y_1 - Y_2 + Y_3)/2 = (Y_1 + Y_2 - Y_3)/2,$$
$$y = Y_3 - z = Y_3 - (Y_1 - Y_2 + Y_3)/2 = (Y_3 - Y_1 + Y_2)/2.$$

Тепер можна знайти R_1, R_2 та R_3 обчисливши обернені до величин x, y, z значення: R_3 = 0,2102 (кОм), R_1 = 0,7626 (кОм), R_2 = 1,637 (кОм).

Також, задачу можна розв'язати врахувавши, що схеми «трикутник» та «зірочка» є еквівалентними. Врахувавши результати вимірів опорів ділянок R_{12}, R_{23}, R_{13} та схему «зірочки» (див рис. 1), можна укласти рівняння по аналогії з системами (2-3) відносно невідомих величин r_1, r_2 та r_3. Тоді шукані величини опорів резисторів «трикутника» можна розрахувати за допомогою формул:

$$R_1 = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}.$$
$$R_2 = r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1}.$$
$$R_3 = r_1 + r_3 + \frac{r_1 r_3}{r_2}.$$

Опори резисторів задачі є наступними R_1 = 0,75 (кОм), R_2 = 1,8 (кОм), R_3 = 0,2 (кОм) з допуском (похибкою) 10%, тому значення тому результати вимірів для різних «чорних скриньок» можуть відрізнятися в межах допуску.