Обласна олімпіада з фізики для школярів

11 клас. Розв'язки.

23 лютого 2019 р, м. Львів

1. Скористаємося формулою для пройденого шляху при рівноприскореному (рівносповільненому) русі:

$$s = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a}, \tag{1}$$

де v_0 – початкова швидкість, v_f – кінцева швидкість, a – прискорення тіла. Згідно умови задачі прискорення (сповільнення) обидвох автомобілів буде однаковим, однаковим є і шлях пройдений від початку гальмування до зустрічі із перешкодою, тому використавши наведену вище формулу одержуємо:

$$\frac{v_{f_1}^2 - v_1^2}{2a} = \frac{v_{f_2}^2 - v_2^2}{2a}. \tag{2}$$

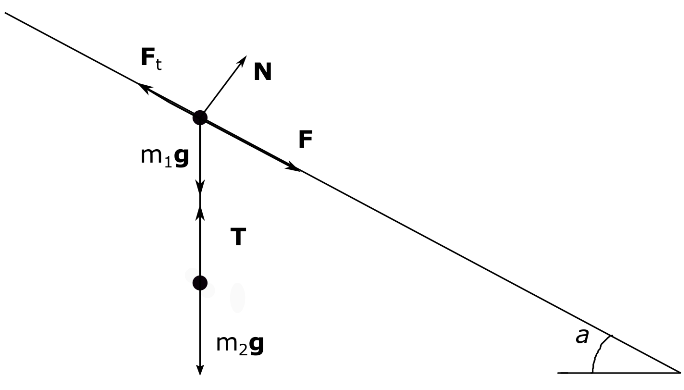
Звідки одержуємо:

$$v_{f_1} = \sqrt{v_1^2 + v_{f_2}^2 - v_2^2}. \tag{3}$$

Врахувавши, що другий автомобіль зупиняється якраз перед перешкодою $v_{f_2} = 0$ отримаємо:

$$v_{f_1} = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = \sqrt{100^2 - 60^2} = 80 \quad \text{(км/год)} \tag{4}$$

2. На кільце, яке одягнуте на стрижень, у момент відпускання кільця діють сили: сила тяжіння – $m_1\mathbf{g}$, сила натягу нитки $\mathbf{T}$, сила реакції стрижня $\mathbf{N}$ і сила тертя $\mathbf{F}_t$ (всі вони наведені на рисунку). На кульку, яка висить на нитці діють сила тяжіння $m_2\mathbf{g}$ та сила натягу нитки $\mathbf{T}$. Запишемо рівняння руху для обидвох тіл у момент відпускання кільця:



$$m_1\mathbf{a}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_t; \tag{5}$$

$$m_2\mathbf{a}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}. \tag{6}$$

Спроектувавши сили, які діють на кільце на вісь спрямовану вздовж стрижня та перпендикулярну до неї, отримаємо:

$$\begin{aligned} m_1a_1 &= m_1g\sin\alpha + T\sin\alpha - \mu N; & (7)\\ N &= (m_1g + T)\cos\alpha & (8)\end{aligned}$$

Оскільки в момент одразу після відпускання кільця нитка є практично вертикальною, то для тягарця який висить на нитці матимемо:

$$m_2a_2 = m_2g - T. \tag{9}$$

Зрозуміло, що одразу після відпускання кільця прискорення тягарця який висить на нитці може бути лише вертикальним, причому внаслідок нерозтяжності нитки матимемо:

$$a_2 = a_1\sin\alpha \tag{10}$$

Виключивши прискорення із наведених вище рівнянь (7)-(9) знайдемо силу натягу нитки:

$$T = \frac{m_1g\cos\alpha(\mu + \mathrm{ctg}\alpha)}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha + \frac{m_1}{m_2\sin\alpha}}. \tag{11}$$

Однак, якщо $\mu \geqslant \mathrm{tg}\alpha$ дана система буде знаходитися в рівновазі і після відпускання кільця, тому в цьому випадку сила натягу нитки рівна вазі тягарця:

$$T = m_2g. \tag{12}$$

Варто зауважити, що останнє співвідношення можна отримати із виразу (11), якщо для коефіцієнта тертя скористатися співвідношенням: $\mu = \mathrm{tg}\alpha$.

3. Як відомо, тиск при основі в обох капілярних трубках буде однаковим. Тому використавши співвідношення для капілярного та гідростатичного тисків отримаємо:

$$-\frac{4\sigma_1}{d_1} + \rho g h_1 = -\frac{4\sigma_1}{d_2} + \rho g h_2, \tag{13}$$

тут h_1 та h_2 – висоти підняття води у першій та другій капілярних трубках відповідно. Записане співвідношення дає можливість легко знайти різницю рівнів води у капілярах:

$$\Delta h_1 = \frac{4\sigma_1}{\rho g}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right). \tag{14}$$

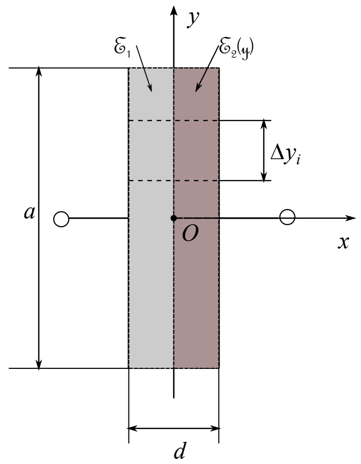
Подібний вираз одержуємо і для різниці рівнів після нагрівання води:

$$\Delta h_2 = \frac{4\sigma_2}{\rho g}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right). \tag{15}$$

У результаті зміна різниці рівнів буде мати вигляд:

$$\Delta h = \Delta h_1 - \Delta h_2 = \frac{4(\sigma_1 - \sigma_2)}{\rho g}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = 1.8(\text{см}). \tag{16}$$

4. Оскільки діелектрична проникність одного із діелектриків не є сталою (залежить від координати y), тому зручно розбити даний конденсатор на велику сукупність паралельно з'єднаних маленьких конденсаторів, висотою Δy_i, кожен із яких являє собою послідовне з'єднання двох конденсаторів із сталими діелектричними проникностями. Таким чином, для кожного із маленьких конденсаторів можемо записати:



$$\frac{1}{\Delta C_i} = \frac{1}{\Delta C_{i(1)}} + \frac{1}{\Delta C_{i(2)}}, \tag{17}$$

причому:

$$\Delta C_{i(1)} = 2\varepsilon_1\varepsilon_0 \frac{a\Delta y_i}{d}, \quad \Delta C_{i(2)} = 2\varepsilon_1\varepsilon_0\left(1 - \frac{|y_i|}{a}\right)\frac{a\Delta y_i}{d}. \tag{18}$$

Із останніх двох співвідношень отримуємо вираз для ΔC_i:

$$\Delta C_i = 2\varepsilon_1\varepsilon\varepsilon_0 \frac{a}{d}\frac{\left(1 - \frac{|y_i|}{a}\right)}{\varepsilon_1 + \varepsilon\left(1 - \frac{|y_i|}{a}\right)}\Delta y_i. \tag{19}$$

Тепер використовуючи формулу для паралельного з'єднання та переходячи від підсумовування до інтегрування отримаємо:

$$C = \sum_i \Delta C_i = 2\varepsilon_1\varepsilon\varepsilon_0\frac{a}{d}\sum_i \frac{\left(1 - \frac{|y_i|}{a}\right)}{\varepsilon_1 + \varepsilon\left(1 - \frac{|y_i|}{a}\right)}\Delta y_i =$$

$$2\varepsilon_1\varepsilon\varepsilon_0\frac{a}{d}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{\left(1 - \frac{|y|}{a}\right)}{\varepsilon_1 + \varepsilon\left(1 - \frac{|y|}{a}\right)}dy = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{d}\left(1 - \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon/2}\right)\right). \tag{20}$$

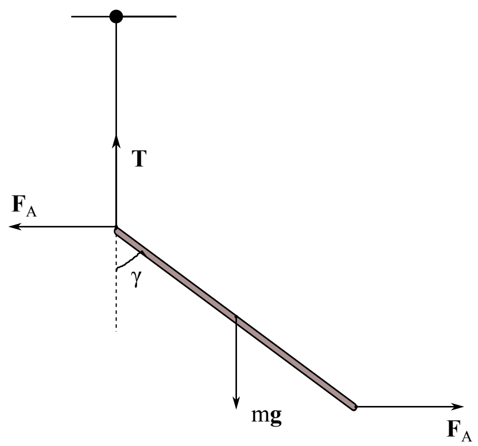
5. Якщо по рамці пропустити постійний струм, то на ділянку сторони рамки довжиною Δl буде діяти сила Ампера:

$$\Delta F = IB\sin\alpha\Delta l, \tag{21}$$

тут α – кут між вектором магнітної індукції $\mathbf{B}$ та напрямком струму I. Напрямок сили Ампера, яка діє на сторони рамки визначається за правилом лівої руки. Зрозуміло, що сили, які діють на протилежні сторони рамки рівні за величиною і протилежні за напрямком, причому пара сил, які діють на горизонтальні сторони (сторона, за яку підвішена рамка і протилежна до неї) приводять до появи обертового моменту, а сили, що діють на дві інші сторони, будуть деформувати рамку (якою нехтуємо). Сумарна сила, яка діє на кожну із горизонтальних сторін рівна:

$$F = IBa. \tag{22}$$

Окрім сил Ампера, які діють на рамку, коли по ній тече струм, на рамку діє сила тяжіння $F_G = mg$, яка зрівноважується силою натягу нитки T. Як бачимо всі сили, які діють на рамку повністю компенсують одна одну, а це означатиме, що рамка займе певне рівноважне положення (див. рисунок). Як відомо, умовою рівноваги тіл є рівність не тільки сил, які діють на тіло,



але також і рівність їхніх моментів, а це означає що моменти сил, які діють на рамку також компенсують один одного. Запишемо умову рівності моментів сил:

$$mg \sin\gamma \frac{a}{2} = IBa^2 \cos\gamma, \tag{23}$$

де γ – кут відхилення рамки від вертикального положення. Із попереднього співвідношення отримуємо:

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{2IBa}{mg}. \tag{24}$$

Зауважимо, що рівність моментів виконується стосовно будь-якої точки.