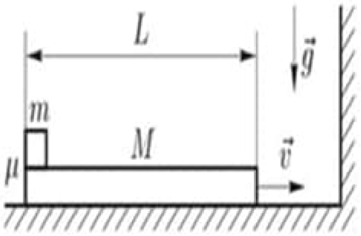
Орієнтовні розв'язки III етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики

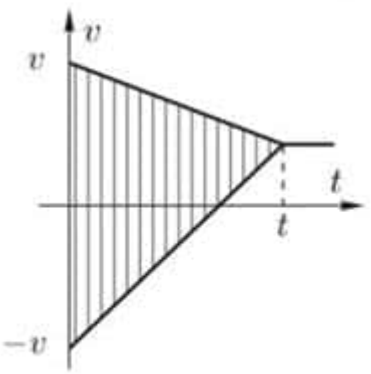
X клас, 2020

Задача 1: Дошка масою M і довжиною L ковзає з деякою швидкістю по гладкій горизонтальній поверхні. На лівому краю дошки лежить кубик, маса якого m. Коефіцієнт тертя ковзання між кубиком і дошкою дорівнює μ. Дошка зазнає абсолютно пружного удару об вертикальну стінку. При якій максимальній швидкості дошки кубик з неї не впаде?

Розв'язання



У СВ відносно Землі після удару об стінку дошка змінить напрям руху на протилежний і рухатиметься зі швидкістю $v_д$, а по ній їхатиме кубик зі швидкістю $v_к$. Рівняння руху дошки й кубика



$$Ma_д = \mu gm$$

$$v_д = v - a_д t \;\Rightarrow\; v_д = v - \mu gt\frac{m}{M}$$

$$ma_к = \mu gm; \qquad v_к = -v + \mu gt$$

Рух кубика припиниться, коли швидкості кубика й дошки зрівняються ($v_к = v_д$).

$v - \mu gt\frac{m}{M} = -v + \mu gt \;\Rightarrow\; t = \frac{2v}{\mu g}\frac{M}{(m+M)}$ – час руху кубика.

Максимально можливе переміщення кубика рівне довжині дошки. З рисунка бачимо, що воно також рівне площі трикутника $L = 0.5*2v*t$. Тоді $L = \frac{2v^2M}{\mu g(m+M)}$. Отже, $v = \sqrt{\frac{\mu gL(m+M)}{2M}}$

У СВ відносно дошки кубик може пройти максимальну відстань L, з початковою швидкістю $2v$ під дією сил тертя та інерції. Прискорення руху дошки $a_д = \mu g\frac{m}{M}$, а кубика $a_к = -\mu g$. Тоді відносне прискорення кубика $a = a_к - a_д = -\mu g\frac{m+M}{M}$. За формулою визначення переміщення при рівноприскореному русі $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ $\Rightarrow$ $L = \frac{-4v^2}{-2\mu g(1+\frac{m}{M})} = \frac{2v^2M}{\mu g(m+M)}$

$\Rightarrow$ $v = \sqrt{\frac{\mu gL(m+M)}{2M}}$

Відповідь. $v = \sqrt{\frac{\mu gL(m+M)}{2M}}$

Задача 2: Дерев'яний кубик занурюють у воду, а поверх наливають шар гасу на рівень з верхньою гранню кубика. Знайти об'єм зануреної у воду частини кубика, якщо його ребро рівне 5 см. Густина дерева становить 0,96 г/см^3, гасу – 0,8 г/см^3, а води – 1 г/см^3.

Розв'язання

Оскільки кубик плаває, то

$F_A = gm$

Виштовхувальна сила є різницею сил тиску рідин та атмосфери на верхню і нижню основи кубика. На верхню основу діє лише сила атмосферного тиску, а на нижню – ще й сила тиску двох двох рідин. Тому

$$F_A = F_{пов} + F_в + F_г - F_{пов} = F_в + F_г \qquad (*)$$

Сила тиску води $F_в = p_в a^2 = g\rho_в h_1 a^2$,

де h_1 – глибина занурення кубика у воду. Аналогічно, сила тиску гасу

$F_г = g\rho_г h_2 a^2$

Підставляємо отримані вирази в (*)

$gm = g\rho_в h_1 a^2 + g\rho_г h_2 a^2 = g[\rho_в h_1 a^2 + \rho_г (a\text{-}h_1)a^2] = g(\rho_в V_в + \rho_г a^3 - \rho_г V_в)$

де $V_в = h_1 a^2$ – об'єм зануреної у воду частини кубика.

Масу кубика знайдемо з формули

$m = \rho_к V = \rho_к a^3$

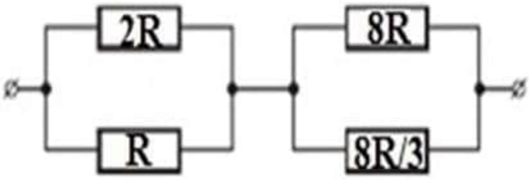
$\rho_к a^3 = \rho_в V_в + \rho_г a^3 - \rho_г V_в$

$(\rho_к - \rho_г)a^3 = (\rho_в - \rho_г)V_в$

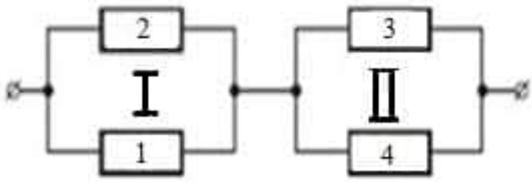
$$V_в = a^3 \frac{\rho_к - \rho_г}{\rho_в - \rho_г} = 100\ см^3$$

Відповідь. $V_в = 100\ см^3$

Задача 3: До джерела постійної напруги приєднали 4 резистори так як показано на схемі. Через який з резисторів протікатиме найбільший струм?



Розв'язання



Умовно виділимо дві ділянки і пронумеруємо резистори.

За законами послідовного і паралельного з'єднання

$I_{\mathrm{I}} = I_{\mathrm{II}}$

$I_{\mathrm{I}} = I_1 + I_2$

$I_{\mathrm{II}} = I_3 + I_4$

Оскільки резистори 1 і 2, а також 3 і 4 з'єднані між собою паралельно, то $U_1 = U_2$, а $U_3 = U_4$. Звідси

$I_1R_1 = I_2R_2 \Rightarrow I_1/I_2 = R_2/R_1 = 2 \Rightarrow I_2 = I_1/2 \Rightarrow I_{\mathrm{I}} = 2I_2 + I_2 = 3I_2$

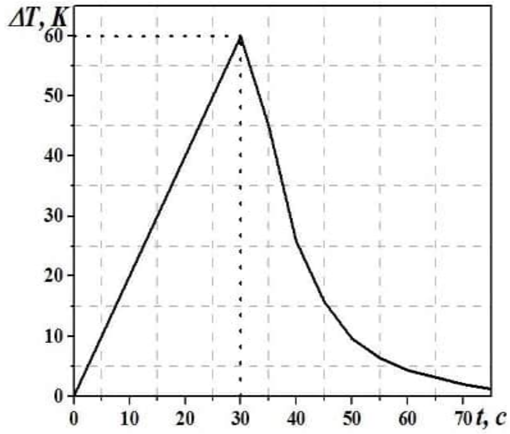
$I_3R_3 = I_4R_4 \Rightarrow I_3/I_4 = R_4/R_3 = 1/3 \Rightarrow I_4 = 3I_3 \Rightarrow I_{\mathrm{II}} = I_3 + 3I_3 = 4I_3$

Враховуючи, що $I_{\mathrm{I}} = I_{\mathrm{II}} \Rightarrow 3I_2 = 4I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{3}{4}I_2$. Тоді $I_4 = 3I_3 = \frac{9}{4}I_2$

Отже, найбільша сила струму протікатиме через 4 резистор з опором $\frac{8R}{3}$.

Відповідь. Через 4 резистор.

Задача 4: До резистора, опір якого залежить від температури за законом $R(T) = R_0(1+\alpha(T-T_0))$, де T_0 – кімнатна температура, α і R_0 – невідомі коефіцієнти, в початковий момент часу під'єднують джерело постійного струму. Через 30 секунд джерело від'єднують. Графік залежності зміни температури резистора від часу показаний на малюнку. Потужність тепловіддачі резистора в навколишнє середовище пропорційна його температурі $P=\beta(T-T_0)$, β – невідомий коефіцієнт. Вважаючи, що температура резистора однакова у всіх його точках, а також, що його тепловтрати ($\frac{\Delta T}{\Delta t}$) постійні в невеликому проміжку часу після відімкнення від джерела, знайти α.



Розв'язання

Запишемо рівняння теплового балансу для резистора в довільний момент часу

$$C\Delta T(t) = I^2R(T)\Delta t - P(t)\,\Delta t$$

$$C\frac{\Delta T}{\Delta t} = I^2R(T) - P(t) \qquad (t \le t_{max}) \qquad (*)$$

$$C\frac{\Delta T}{\Delta t} = -P(t) \qquad (t > t_{max})$$

де C – теплоємність резистора, $P(t)= \beta\Delta T(t)$ – потужність тепловіддачі, що залежить від часу. Розглянемо три різні проміжки часу ($\Delta t_1 = \rightarrow 0$, $\Delta t_2 = t_{max} - t$ *і* $\Delta t_3 = t_{max} + t$, *де* t_{max} *– час, коли температура резистора максимальна,* t *– дуже малий проміжок часу, протягом якого температуру можна вважати постійною*) і запишемо для них рівняння (*):

$$C\frac{\Delta T_1}{\Delta t_1} = I^2R_0 \qquad C\frac{\Delta T_2}{\Delta t_2} = I^2R_2 - P(t_{max}) \qquad C\frac{\Delta T_3}{\Delta t_3} = -P(t_{max}) \qquad (**)$$

Швидкість зміни температури з часом визначимо з графіка. Вона дорівнює тангенсу кута нахилу кривої. Як бачимо, $\frac{\Delta T_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta T_2}{\Delta t_2} = 2\ {}^\circ K/сек$, а $\frac{\Delta T_3}{\Delta t_3} = \frac{45-60}{35-30} = -3\ {}^\circ K/сек$; $P(0) = 0$, $P(t_{max}) = \beta\Delta T_{max}$, а $R_2 = R_0(1 + \alpha\Delta T_{max})$.

Комбінуючи рівняння (**), отримаємо наступний вираз

$$\alpha\Delta T_{max} = \frac{\frac{\Delta T_2}{\Delta t_2} - \frac{\Delta T_3}{\Delta t_3} - \frac{\Delta T_1}{\Delta t_1}}{\frac{\Delta T_1}{\Delta t_1}} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{3}{120}\ {}^\circ K^{-1} = \frac{1}{40}\ {}^\circ K^{-1}$$

Відповідь. $\alpha = \frac{1}{40}\ {}^\circ K^{-1}$

Задача 5: Відстань між свічкою й стіною становить 1 метр. На якій відстані від свічки треба розмістити тонку лінзу з фокусною відстанню 16 см, щоб на стіні одержати чітке зображення свічки?

Розв'язання

Запишемо формулу тонкої лінзи

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

де F – фокусна відстань, d – віддаль від лінзи до свічки, f – відстань між лінзою та зображенням на стіні.

За умовою задачі $d + f = l$. Тоді $f = l – d$. Підставимо цей вираз у формулу тонкої лінзи.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{l - d}$$

Після перетворень отримаємо

$d^2 – ld + Fl = 0$

Дискримінант квадратного рівняння $D = l^2 - 4Fl$

Звідси корені квадратного рівняння d_1 і d_2

$d_1 = \frac{l + \sqrt{D}}{2} = 0.8$ м

$d_2 = \frac{l - \sqrt{D}}{2} = 0.2$ м

Як бачимо, обидва корені задовольняють розв'язок задачі, оскільки в одному випадку свічка розташована між фокусом і подвійним фокусом, а в іншому – за подвійним фокусом, що в результаті призводить до появи чіткого зображення свічки на стіні, але з різним збільшенням.

Відповідь. 0.2 м або 0.8 м.