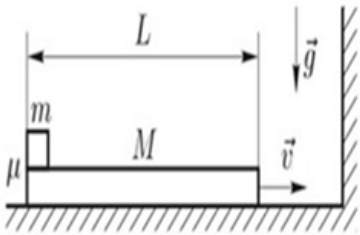


Задача 1: Дошка масою M і довжиною L ковзає з деякою швидкістю по гладкій горизонтальній поверхні. На лівому краю дошки лежить кубик, маса якого m . Коефіцієнт тертя ковзання між кубиком і дошкою дорівнює μ . Дошка зазнає абсолютно пружного удару об вертикальну стінку. При якій максимальній швидкості дошки кубик з неї не впаде?

Розв'язання



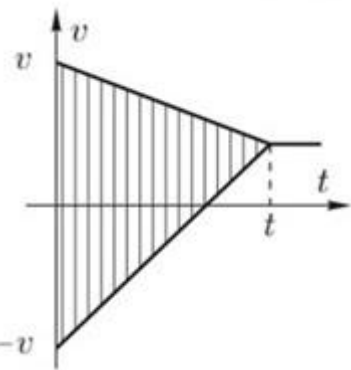
У СВ відносно Землі після удару об стінку дошка змінить напрям руху на протилежний і рухатиметься зі швидкістю v_∂ , а по ній іхатиме кубик зі швидкістю v_κ . Рівняння руху дошки й кубика

$$Ma_\partial = \mu gm$$

$$v_\partial = v - a_\partial t \rightarrow v_\partial = v - \mu g t \frac{m}{M}$$

$$ma_\kappa = \mu gm; \quad v_\kappa = -v + \mu g t$$

Рух кубика припиниться, коли швидкості кубика й дошки зрівняються ($v_\kappa = v_\partial$).



$$v - \mu g t \frac{m}{M} = -v + \mu g t \rightarrow t = \frac{2v}{\mu g} \frac{M}{(m+M)} \text{ — час руху кубика.}$$

Максимально можливе переміщення кубика рівне довжині дошки. З рисунка бачимо, що воно також рівне площі трикутника $L = 0.5 * 2v * t$. Тоді $L = \frac{2v^2 M}{\mu g (m+M)}$. Отже, $v = \sqrt{\frac{\mu g L (m+M)}{2M}}$

У СВ відносно дошки кубик може пройти максимальну відстань L , з початковою швидкістю $2v$ під дією сил тертя та інерції. Прискорення руху дошки $a_\partial = \mu g \frac{m}{M}$, а кубика $a_\kappa = -\mu g$. Тоді відносне прискорення кубика $a = a_\kappa - a_\partial = -\mu g \frac{m+M}{M}$. За формулою визначення переміщення при рівноприскореному русі $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \rightarrow L = \frac{-4v^2}{-2\mu g (1 + \frac{m}{M})} = \frac{2v^2 M}{\mu g (m+M)}$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{\mu g L (m+M)}{2M}}$$

Відповідь. $v = \sqrt{\frac{\mu g L (m+M)}{2M}}$

Задача 2: Дерев'яний кубик занурюють у воду, а поверх наливають шар гасу на рівень з верхньою гранню кубика. Знайти об'єм зануреної у воду частини кубика, якщо його ребро рівне 5 см. Густина дерева становить $0,96 \text{ г/см}^3$, гасу – $0,8 \text{ г/см}^3$, а води – 1 г/см^3 .

Розв'язання

Оскільки кубик плаває, то

$$F_A = gm$$

Виштовхувальна сила є різницею сил тиску рідин та атмосфери на верхню і нижню основи кубика. На верхню основу діє лише сила атмосферного тиску, а на нижню – ще й сила тиску двох рідин. Тому

$$F_A = F_{\text{нов}} + F_{\text{г}} + F_{\text{в}} - F_{\text{нов}} = F_{\text{г}} + F_{\text{в}} \quad (*)$$

$$\text{Сила тиску води } F_{\text{в}} = p_{\text{в}} a^2 = g\rho_{\text{в}} h_1 a^2,$$

де h_1 – глибина занурення кубика у воду. Аналогічно, сила тиску гасу

$$F_{\text{г}} = g\rho_{\text{г}} h_2 a^2$$

Підставляємо отримані вирази в (*)

$$gm = g\rho_{\text{в}} h_1 a^2 + g\rho_{\text{г}} h_2 a^2 = g[\rho_{\text{в}} h_1 a^2 + \rho_{\text{г}} (a - h_1) a^2] = g(\rho_{\text{в}} V_{\text{в}} + \rho_{\text{г}} a^3 - \rho_{\text{г}} V_{\text{в}})$$

де $V_{\text{в}} = h_1 a^2$ – об'єм зануреної у воду частини кубика.

Масу кубика знайдемо з формули

$$m = \rho_{\text{к}} V = \rho_{\text{к}} a^3$$

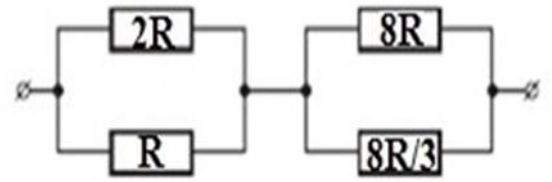
$$\rho_{\text{к}} a^3 = \rho_{\text{в}} V_{\text{в}} + \rho_{\text{г}} a^3 - \rho_{\text{г}} V_{\text{в}}$$

$$(\rho_{\text{к}} - \rho_{\text{г}}) a^3 = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{г}}) V_{\text{в}}$$

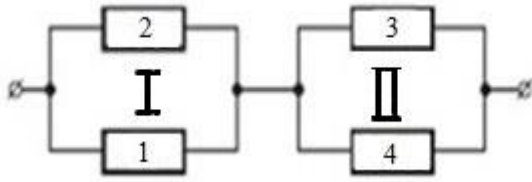
$$V_{\text{в}} = a^3 \frac{\rho_{\text{к}} - \rho_{\text{г}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{г}}} = 100 \text{ см}^3$$

Відповідь. $V_{\text{в}} = 100 \text{ см}^3$

Задача 3: До джерела постійної напруги приєднали 4 резистори так як показано на схемі. Через який з резисторів протікатиме найбільший струм?



Розв'язання



Умовно виділимо дві ділянки і пронумеруємо резистори.

За законами послідовного і паралельного з'єднання

$$I_I = I_{II}$$

$$I_I = I_1 + I_2$$

$$I_{II} = I_3 + I_4$$

Оскільки резистори 1 і 2, а також 3 і 4 з'єднані між собою паралельно, то $U_1 = U_2$, а $U_3 = U_4$.

Звідси

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \rightarrow I_1 / I_2 = R_2 / R_1 = 2 \rightarrow I_2 = I_1 / 2 \rightarrow I_I = 2I_2 + I_2 = 3I_2$$

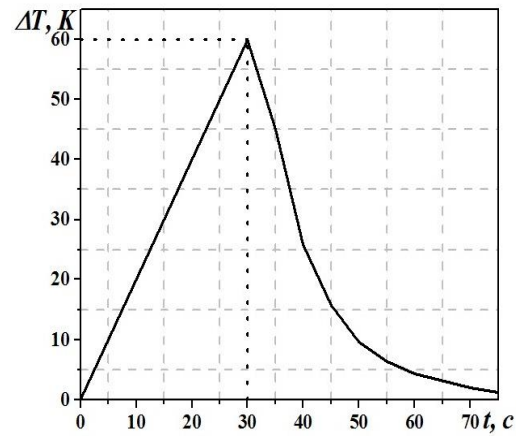
$$I_3 R_3 = I_4 R_4 \rightarrow I_3 / I_4 = R_4 / R_3 = 1/3 \rightarrow I_4 = 3I_3 \rightarrow I_{II} = I_3 + 3I_3 = 4I_3$$

Враховуючи, що $I_I = I_{II} \rightarrow 3I_2 = 4I_3 \rightarrow I_3 = \frac{3}{4}I_2$. Тоді $I_4 = 3I_3 = \frac{9}{4}I_2$

Отже, найбільша сила струму протікатиме через 4 резистор з опором $\frac{8R}{3}$.

Відповідь. Через 4 резистор.

Задача 4: До резистора, опір якого залежить від температури за законом $R(T) = R_0(1 + \alpha(T - T_0))$, де T_0 – кімнатна температура, α і R_0 – невідомі коефіцієнти, в початковий момент часу під'єднують джерело постійного струму. Через 30 секунд джерело від'єднують. Графік залежності зміни температури резистора від часу показаний на малюнку. Потужність тепловіддачі резистора в навколишнє середовище пропорційна його температурі $P = \beta(T - T_0)$, β – невідомий коефіцієнт. Вважаючи, що температура резистора однакова у всіх його точках, а також, що його тепловтрати $(\frac{\Delta T}{\Delta t})$ постійні в невеликому проміжку часу після відімкнення від джерела, знайти α .



Розв'язання

Запишемо рівняння теплового балансу для резистора в довільний момент часу

$$C \Delta T(t) = I^2 R(T) \Delta t - P(t) \Delta t$$

$$C \frac{\Delta T}{\Delta t} = I^2 R(T) - P(t) \quad (t \leq t_{max}) \quad (*)$$

$$C \frac{\Delta T}{\Delta t} = -P(t) \quad (t > t_{max})$$

де C – теплоємність резистора, $P(t) = \beta \Delta T(t)$ – потужність тепловіддачі, що залежить від часу. Розглянемо три різні проміжки часу ($\Delta t_1 = \rightarrow 0$, $\Delta t_2 = t_{max} - t$ і $\Delta t_3 = t_{max} + t$, де t_{max} – час, коли температура резистора максимальна, t – дуже малий проміжок часу, протягом якого температуру можна вважати постійною) і запишемо для них рівняння (*):

$$C \frac{\Delta T_1}{\Delta t_1} = I^2 R_0 \quad C \frac{\Delta T_2}{\Delta t_2} = I^2 R_2 - P(t_{max}) \quad C \frac{\Delta T_3}{\Delta t_3} = -P(t_{max}) \quad (**)$$

Швидкість зміни температури з часом визначимо з графіка. Вона дорівнює тангенсу кута нахилу кривої. Як бачимо, $\frac{\Delta T_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta T_2}{\Delta t_2} = 2 \text{ } ^\circ\text{K/сек}$, а $\frac{\Delta T_3}{\Delta t_3} = \frac{45-60}{35-30} = -3 \text{ } ^\circ\text{K/сек}$; $P(0) = 0$, $P(t_{max}) = \beta \Delta T_{max}$, а $R_2 = R_0(1 + \alpha \Delta T_{max})$.

Комбінуючи рівняння (**), отримаємо наступний вираз

$$\alpha \Delta T_{max} = \frac{\frac{\Delta T_2}{\Delta t_2} - \frac{\Delta T_3}{\Delta t_3} - \frac{\Delta T_1}{\Delta t_1}}{\frac{\Delta T_1}{\Delta t_1}} \rightarrow \alpha = \frac{3}{120} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1} = \frac{1}{40} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$$

Відповідь. $\alpha = \frac{1}{40} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$

Задача 5: Відстань між свічкою й стіною становить 1 метр. На якій відстані від свічки треба розмістити тонку лінзу з фокусною відстанню 16 см, щоб на стіні одержати чітке зображення свічки?

Розв'язання

Запишемо формулу тонкої лінзи

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

де F – фокусна відстань, d – віддаль від лінзи до свічки, f – відстань між лінзою та зображенням на стіні.

За умовою задачі $d + f = l$. Тоді $f = l - d$. Підставимо цей вираз у формулу тонкої лінзи.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{l - d}$$

Після перетворень отримаємо

$$d^2 - ld + Fl = 0$$

Дискримінант квадратного рівняння $D = l^2 - 4Fl$

Звідси корені квадратного рівняння d_1 і d_2

$$d_1 = \frac{l + \sqrt{D}}{2} = 0.8 \text{ м}$$

$$d_2 = \frac{l - \sqrt{D}}{2} = 0.2 \text{ м}$$

Як бачимо, обидва корені задовольняють розв'язок задачі, оскільки в одному випадку свічка розташована між фокусом і подвійним фокусом, а в іншому – за подвійним фокусом, що в результаті призводить до появи чіткого зображення свічки на стіні, але з різним збільшенням.

Відповідь. 0.2 м або 0.8 м.