Відповіді до задач очного туру. 11 клас

1. Позначимо a_1, t_1 та a_2, t_2 – прискорення і час руху потяга при розгоні та модуль прискорення з яким потяг сповільнювався і час гальмування. Тоді, повний шлях

$$L = \frac{a_1 t_1^2}{2} + \frac{a_2 t_2^2}{2} + v(T - t). \tag{1}$$

Враховуючи, що $v = a_1 t_1 = a_2 t_2$ і $t_1 + t_2 = t$ маємо

$$L = \frac{v t_1}{2} + \frac{v t_2}{2} + v(T - t) = v\left(T - \frac{t}{2}\right). \tag{2}$$

Звідки

$$v = \frac{2L}{2T - t}. \tag{3}$$

2. Максимально чітко розгледіти мурашку можна, коли її зображення в лінзі строго попаде на поверхню дзеркала (тобто, буде на вістані L від лінзи). В цей момент часу відстань від мурашки до лінзи буде vt. Тоді, з формули лінзи

$$\frac{1}{vt} + \frac{1}{L} = \frac{1}{F}, \tag{4}$$

отримуємо

$$t = \frac{LF}{v(L - F)}. \tag{5}$$

3. Розглянемо систему після першого накачування

$$pV^{5/3} = p_1 V_1^{5/3} = p_1 \left(\frac{V}{2}\right)^{5/3}, \quad p_1 \frac{V}{2} = \nu R T_1 \tag{6}$$

де $p_1 = 2^{5/3} p$ та T_1 – тиск та температура ν молей газу в положені b (див. Рис. 1 з умов задач) поршня. Якщо поршень швидко повернути в положення a, то температура газу при розширенні в порожнечу не зміниться, а тиск буде $p_1' = \frac{p_1}{2} = 2^{2/3} p$ після встановлення рівноваги. Ще після $k - 1$ повторень тиск в системі $p_k' = 2^{2k/3} p$, а температура газу $T_k = p_k' V/(\nu R)$. Найпростіший спосіб розрахувати роботу виконану над системою – знайти зміну внутрішньої енергії газу

$$A = \frac{3}{2}\nu R(T_k - T) = \frac{3}{2} pV \left(2^{2k/3} - 1\right). \tag{7}$$

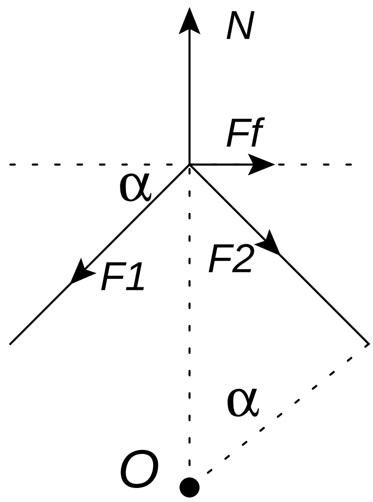

Рис. 1

4. Розглянемо сили на одному з країв балки (див. Рис. 1). Тут N та F_f – сили реакції опори та тертя, F_1 і F_2 – сили натягу нитки. Кут α дорівнює $\frac{\pi}{4}$ для квадратного перерізу балки і $\frac{\pi}{n}$ у випадку правильного n-кутника, а точка O – його центр. З умови рівності нулю векторної суми всіх сил

$$N = (F_1 + F_2)\sin\alpha, \quad F_1\cos\alpha = F_f + F_2\cos\alpha, \tag{8}$$

та враховуючи, що $F_f = \mu N$ отримуємо

$$F_2 = F_1\frac{1 - \mu\,\mathrm{tg}\alpha}{1 + \mu\,\mathrm{tg}\alpha}. \tag{9}$$

Послідовно виконуючи описані вище розрахунки ще $n-1$ раз, та враховуючи граничні значення сил натягу mg і F маємо

$$F = mg\left(\frac{1 - \mu\,\mathrm{tg}\alpha}{1 + \mu\,\mathrm{tg}\alpha}\right)^n. \tag{10}$$

В граничному випадку $n \to \infty$ круглого перерізу балки $F = mge^{-2\pi\mu}$.

5. Початкової кінетичної енергії першої частинки повинно вистачити для подолання кулонівського відштовхування при зближенні на мінімальну відстань a і руху двох частинок, як мінімум, з однаковими швидкостями u після зближення

$$\frac{mv^2}{2} \geq 2\frac{mu^2}{2} + \frac{kq^2}{a}. \tag{11}$$

Оскільки повний імпульс системи зберігається, то $mv = 2mu$. Звідки

$$v \geq 2q\sqrt{\frac{k}{ma}}. \tag{12}$$