Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Гнатенко

Христина Павлівна

УДК 530.145 + 531.1

ВПЛИВ КВАНТОВАНОСТІ ПРОСТОРУ НА ВЛАСТИВОСТІ КЛАСИЧНИХ І КВАНТОВИХ СИСТЕМ

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

ЛЬВІВ — 2020

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
Ткачук Володимир Михайлович,
завідувач кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка

Офіційні опоненти: академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук
Мриглод Ігор Миронович,
директор Інституту фізики конденсованих систем НАН України;

доктор фізико-математичних наук, професор
Гаврилик Олександр Михайлович,
завідувач відділу математичних методів у теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України;

доктор фізико-математичних наук, професор
Ткач Микола Васильович,
завідувач кафедри теоретичної фізики та комп'ютерного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Захист відбудеться "_____" березня 2020 р. о ___ год. ___ хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.09 при Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79005, м. Львів, вул. Кирила і Мефодія, 8, фізичний факультет, Велика фізична аудиторія.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (79005, м. Львів, вул. Драгоманова, 5) та на веб-сторінці https://physics.lnu.edu.ua/research/zahysty-dysertatsij.

Автореферат розіслано "_____" лютого 2020 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради,
докт. фіз.-мат. наук, професор А. А. Ровенчак

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження фізичних систем у квантованому просторі є важливими та актуальними на сьогодні, оскільки вони дозволяють знайти ефекти у властивостях класичних та кантових систем, зумовлені особливостями структури простору на планківських масштабах, а також дають можливість встановити властивості фізичних систем на які квантованість простору має найбільший вплив та запропонувати спосіб експериментального підтвердження теорії квантованого простору. На основі порівняння теоретичних результатів таких досліджень з високоточними експериментальними даними можна оцінити верхню межу для мінімальної довжини.

Багато уваги приділялося дослідженням простору з мінімальною довжиною, побудованого на основі ідеї деформації звичних комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів. Про це свідчить велика кількість публікацій з цієї тематики (для прикладу, [C. Villalpando, S. K. Modak, Phys. Rev. D **100**, 024054 (2019); L. Menculini, O. Panella, P. Roy, Phys. Rev. D **91**, 045032 (2015)] та посилання в них). Ідея деформації комутаційних співвідношень випливає з теорії струн та теорії квантової гравітації [N. Seiberg, E. Witten, J. High Energy Phys. **1999**, 032 (1999); S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994)]. Для опису особливостей структури простору на планківських масштабах було запропоновано різні деформовані алгебри. Багато уваги приділялося дослідженням фізичних проблем в рамках алгебри Кемпфа (ця алгебра є узагальненням історично першої деформованої алгебри, запропонованої Снайдером), некомутативної алгебри канонічного типу, некомутативної алгебри Лі типу та ін. Відомі деформовані алгебри для операторів координат та операторів імпульсів описують простір з мінімальною довжиною, проте вони не узгоджуються з фундаментальними законами та принципами. А саме, у просторах з алгеброю Снайдера, алгеброю Кемпфа, алгеброю з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу, некомутативною алгеброю типу Лі існують проблеми порушення адитивності кінетичної енергії та її залежності від композиції. Звідси випливає, що в рамках теорій квантованого простору, побудованих на основі цих алгебр, порушується фундаментальний закон – закон збереження енергії. Також деформація комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів зумовлює проблему кінематичних змінних, порушення принципу еквівалентності. Зважаючи на важливість цих проблем, необхідним є пошук можливостей для їх розв’язання з метою побудови теорії квантованого простору зі збереженими фундаментальними законами та принципами.

Поряд із вище згаданими проблемами важливою проблемою, яка виникає в рамках різних деформованих алгебр, є проблема опису руху системи багатьох частинок з врахуванням квантованості простору на планківських масштабах. Припущення про те, що параметри деформованих алгебр для координат та

імпульсів центра мас макроскопічного тіла, а також для координат та імпульсів елементарних частинок є однаковими, приводить до абсурдно малих результатів для мінімальної довжини, які є на багато порядків менші ніж довжина Планка. Для прикладу, такі результати були отримані на основі досліджень зсуву перигелію Меркурію у просторі з алгеброю Снайдера [B. Ivetić, S. Meljanac, S. Mignemi, Class. Quant. Grav. **31**, 105010 (2014); S Mignemi, R Štrajn, Phys. Rev. D **90**, 044019 (2014)]. Автори статей [B. Ivetić, S. Meljanac, S. Mignemi, Class. Quant. Grav. **31**, 105010 (2014); S Mignemi, R Štrajn, Phys. Rev. D **90**, 044019 (2014)] зробили висновок, що теорія квантованого простору з алгеброю Снайдера не може бути застосована на випадок дослідження макроскопічних тіл. Актуальним є узагальнення відомих алгебр, зокрема і алгебри Снайдера, для координат та імпульсів різних частинок, розв'язання проблеми опису руху центра мас макроскопічного тіла з врахуванням мінімальної довжини, оскільки це дозволить побудувати послідовну теорію квантованого простору та розширити область дослідження, включивши в неї макроскопічні системи.

У просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу також існують проблеми порушення симетрії відносно інверсії часу та сферичної симетрії. Відомі різні типи некомутативних алгебр, які є сферично-симетричні, проте не є інваріантні відносно інверсії часу та не є еквівалентні до некомутативної алгебри канонічного типу. Для прикладу, добре відомими є алгебри з координатно-залежною некомутативністю (комутатор координат є функцією координат). Тому необхідно побудувати сферично-симетричну алгебру з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, яка є інваріантна відносно інверсії часу та еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу.

Дослідження нулів статистичної суми, які після робіт [C. N. Yang, T. D. Lee, Phys. Rev **87**, 404 (1952); T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev **87**, 410 (1952); M. E. Fisher, Lectures in Theoretical Physics: Volume VII C (1965)] мають назву нулі Лі-Янга та нулі Фішера, має фундаментальну важливість у статистичній фізиці. Метод аналізу нулів статистичної суми використовується для вивчення фазових переходів. Експериментальне спостереження цих нулів довгий час вважалося неможливим через труднощі з реалізацією фізичних систем з комплексними параметрами. Стаття, в якій було запропоновано метод спостереження нулів Лі-Янга, опублікована у 2012 році [Bo-Bo Wei, Ren-Bao Liu, Phys. Rev. Lett. **109**, 185701 (2012)]. У 2015 році було здійснено перше експериментальне спостереження нулів статистичної суми на основі вимірювання когерентності пробного спіну, який взаємодіє зі спіновою системою [X. Peng, H. Zhou, Bo-Bo Wei et al, Phys. Rev. Lett. **114**, 010601 (2015)]. Актуальним є дослідження нулів статистичної суми з врахуванням квантованості простору та пошук нових можливостей для експериментального спостереження нулів статистичної суми.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюджетних тем: "Астрофізичні системи на різних енергетичних і просторово-часових масштабах та ефекти квантування простору" (2017-2019 рр., науковий керівник теми, номер держреєстрації 0117U007190); "Квантові ефекти у фізиці одно- і багаточастинкових систем у просторах зі складною структурою" (2019 р., виконавець теми, номер держреєстрації 0119U002203); ФФ-30Ф "Класичні і квантові системи з нестандартними комутаційними співвідношеннями і статистиками" (2016-2018 рр., виконавець теми, номер держреєстрації 0116U001539); теми "Фізичні системи у квантованому просторі", яка фінансувалася в рамках Гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених у 2018 році, (номер держреєстрації 0118U005226, науковий керівник теми); проекту ДФФД “Концепція складних мереж у задачах квантової фізики та космології” (2017-2018 рр., виконавець проекту, номери держреєстрації 0117U003869, 0116U001539); проекту ДФФД "Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів: електродинаміка у просторах" (2016-2017 рр., виконавець проекту, номери держреєстрації 0115U004838, 0115U00505); проекту "Structure and Evolution of Complex Systems with Applications in Physics and Life Sciences" approved by the European Commissions 7th Framework Programme Grant Agreement Number: PIRSESGA-2013-612669 (виконавець проекту).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова деформованої алгебри, яка описує квантованість простору на планківських масштабах та дає можливість розвинути послідовну фізичну теорію без порушення фундаментальних фізичних законів та принципів; розв'язання проблеми опису макроскопічних тіл та проблеми порушення слабкого принципу еквівалентності в рамках деформованих алгебр; знаходження впливу особливостей структури простору на планківських масштабах на властивості класичних і квантових систем та виявлення фізичних систем найбільш чутливих до квантованості простору; оцінка величини кванта простору; встановлення зв'язку нулів кореляційних функцій бозе-газу у квантованому просторі з нулями статистичної суми та знаходження можливостей спостереження нулів Лі-Янга та нулів Фішера на експерименті.

Для досягнення мети дослідження поставлено такі задачі: побудувати інваріантну відносно інверсії часу, сферично-симетричну некомутативну алгебру, яка є еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу; знайти вирази для спектрів двочастинкової системи з кулонівською взаємодією (атом водню, екзотичні атоми) та системи взаємодіючих гармонічних осциляторів у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі канонічного типу; розв'язати

проблему кінематичних змінних у просторі Снайдера, у некомутативному фазовому просторі канонічного типу, у просторі з деформацією-кручення; встановити особливості опису руху макроскопічного тіла в рамках алгебри Снайдера, алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу, некомутативної алгебри Лі типу, алгебри з деформацією-кручення; дослідити вплив квантованості простору на рух системи Сонце-Земля-Місяць та проаналізувати виконання слабкого принципу еквівалентності; знайти умови на параметри деформованих алгебр, які дозволяють зберегти принцип еквівалентності; знайти вплив мінімальної довжини на зміщення перигелію Меркурію та на основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними отримати оцінку величини кванта простору; обчислити кореляційні функції бозе-газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (q-деформований бозе-газ) та встановити їх зв'язок з нулями статистичної суми; дослідити можливості експериментального спостереження нулів статистичної суми (нулів Лі-Янга, нулів Фішера) для спінових та бозе-систем.

Об'єктом дослідження є квантований простір, який описується деформованими комутаційними співвідношеннями для координат та імпульсів; класичні та квантові системи у квантованому просторі, кореляційні функції та нулі статистичної суми бозе-газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом.

Предметом дослідження є симетрійні властивості квантованого простору, вплив квантованості простору на властивості класичних та квантових систем, можливості експериментального спостереження нулів статистичної суми.

Методи дослідження. Запропоновано метод дослідження фізичних систем у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі канонічного типу, в основі якого лежить знаходження усередненого за додатковими ступенями вільності гамільтоніану системи. Для знаходження поправок до енергетичних рівнів фізичних систем, зумовлених квантованістю простору, у роботі використано метод теорії збурень, а також метод представлення координат та імпульсів, які задовольняють деформовані комутаційні співвідношення, за допомогою координат та імпульсів, для яких виконуються звичні комутаційні співвідношення. Для обчислення нулів статистичної суми у квантованому (q-деформованому) просторі, а також у звичному просторі були використані чисельні методи розв'язку алгебраїчних рівнянь.

Наукова новизна отриманих результатів. У роботі досліджено фізичні системи в рамках різних деформацій комутаційних співвідношень для координат та імпульсів. Встановлено ефекти квантованості простору у властивостях фізичних систем та знайдено оцінки для величини кванта простору. Вперше отримано такі результати:

– Розв'язано проблеми порушення властивостей кінетичної енергії, опису руху макроскопічного тіла, порушення принципу еквівалентності у просторі з алгеброю Снайдера та у просторі з алгеброю Кемпфа у всіх порядках за параметрами деформації.
– Знайдено вирази для мінімальної довжини у шестивимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу на основі розв'язків задачі на власні значення для оператора квадрата довжини.
– У некомутативному фазовому просторі канонічного типу запропоновано залежності параметрів координатної та імпульсної некомутативностей від маси при яких некомутативні координати можуть розглядатися, як кінематичні змінні; некомутативні імпульси пропорційні до маси; імпульс центра мас може бути означений, як інтеграл руху; траєкторія вільної частинки не залежить від її маси; виконується слабкий принцип еквівалентності, зберігаються властивості кінетичної енергії.
– Отримано точний вираз для спектру системи двох частинок з осциляторною взаємодією у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу.
– Встановлено та проаналізовано вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів канонічного типу на параметр Етвеша для Землі та Місяця.
– Отримано оцінку для мінімального імпульсу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу, яка щонайменше на 10 порядків покращує результати, представлені у літературі.
– Знайдено та досліджено точний вираз для періоду руху по колу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу.
– Побудовано інваріантну відносно інверсії часу сферично-симетричну алгебру з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, яка є еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу та не зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності.
– Знайдено вираз для мінімальної довжини та мінімального імпульсу у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі з точністю до другого порядку за параметрами некомутативності.
– Встановлено вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на спектри симетричної мережі осциляторів в однорідному полі, ланцюжка осциляторів.
– Показано, що дослідження енергетичних рівнів антипротонного гелію відкриває можливість покращити оцінки величини параметра координатної некомутативності.
– Відновлено слабкий принцип еквівалентності та розв'язано проблему опису

руху макроскопічного тіла у просторі з некомутативною алгеброю Лі типу та у просторі з деформацією кручення.

– Знайдено зв'язки нулів кореляційних функцій бозе-газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (q-деформованого бозе-газу), взаємодіючого бозе-газу та спінових систем із нулями статистичної суми (нулі Фішера, нулі Лі-Янга). Отримані результати відкривають нові можливості спостереження цих нулів на експерименті.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, представлені у роботі, є важливими для подальших досліджень фізичних систем у квантованому просторі. Зокрема, умови на параметри деформованих алгебр, які пов'язують їх з масами, дають можливість розв'язати фундаментальні проблеми (порушення принципу еквівалентності, проблеми макроскопічного тіла) у некомутативному просторі канонічного типу, некомутативному просторі Лі типу, у просторі з нелінійною деформацією алгебри Гайзенберґа. Це обґрунтовує їх використання у подальших дослідженнях ефектів квантованості простору у властивостях фізичних систем. Розв'язок проблеми опису руху макроскопічних тіл у просторах з деформованими комутаційними співвідношеннями для координат та імпульсів, знайдений у роботі, може бути основою для подальших досліджень впливу особливостей структури простору на планківських масштабах на властивості систем багатьох частинок. Висновки про значний вплив імпульсної некомутативності на рух макроскопічних тіл, значний вплив координатної некомутативності на спектр антипротонного атома гелію є важливими для покращення оцінок мінімальної довжини та мінімального імпульсу, а також для подальшого пошуку можливостей експериментального підтвердження теорії квантованого простору, побудованої на основі ідеї про некомутативність координат та некомутативність імпульсів. Зв'язок нулів кореляційних функцій із нулями статистичної суми відкриває нові можливості для експериментального спостереження нулів Фішера та нулів Лі-Янга, які мають фундаментальну важливість у статистичній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Усі оригінальні результати, викладені в дисертації, автор отримала самостійно або при своїй безпосередній участі. Роботи [1,2,7,10,18,19,24,25] є одноосібними. У роботах, виконаних зі співавторами, здобувачці належить:

– дослідження проблеми порушення симетрії відносно інверсії часу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу, побудова некомутативної алгебри зі сферичною симетрією та симетрією відносно інверсії часу [3];
– встановлення особливостей опису руху системи багатьох частинок у шестивимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу;

знаходження умов на параметри некомутативностей, при яких зберігається принцип еквівалентності; оцінка мінімального імпульсу [4];

– розв'язання проблеми опису руху макроскопічного тіла у просторі з алгеброю Кемпфа [5];
– розв'язання проблем порушення властивостей кінетичної енергії, кінематичних змінних, опису руху макроскопічного тіла у просторі з алгеброю Снайдера, оцінка величини параметра деформації [6];
– дослідження зв'язку нулів двочасових спінових кореляційних функцій з нулями Лі-Янга [8];
– встановлення особливостей опису системи багатьох частинок та знаходження поправок до спектрів екзотичних атомів у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі [9];
– означення імпульсу центра мас, як інтеграла руху; знаходження та аналіз рівнянь руху системи вільних частинок у некомутативному фазовому просторі [11];
– знаходження енергетичних рівнів вільної частинки та виразу для мінімальної довжини у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі [12];
– встановлення впливу некомутативності координат та некомутативності імпульсів на рух системи Сонце-Земля-Місяць [13];
– дослідження зв'язку нулів двочасових кореляційних функцій та нулів Лі-Янга для взаємодіючого бозе-газу [14];
– розв'язання проблем опису руху центра мас системи багатьох частинок, порушення принципу еквівалентності, порушення властивостей кінетичної енергії у некомутативному фазовому просторі [15];
– побудова сферично-симетричної алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу, оцінка величин параметрів координатної та імпульсної некомутативностей [16];
– дослідження зв'язку нулів кореляційних функцій q-деформованого бозе-газу з нулями Фішера [17];
– знаходження точного виразу для спектру двочастинкової системи з осциляторною взаємодією у некомутативному просторі канонічного типу [20];
– отримання та дослідження квантових рівнянь руху для частинки у гравітаційному полі, класичних рівнянь руху для макроскопічного тіла у гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі [21];
– знаходження виразів для мінімальної довжини у шестивимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу [22];
– дослідження особливостей алгебри для координат та імпульсів центра мас та відносного руху у сферично-симетричному некомутативному просторі [23].

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувач представляла особисто на таких конференціях:

- The 5th Conference "Statistical Physics: Modern Trends and Applications", dedicated to the 110th anniversary of the birth of M. M. Bogolyubov, 3-6 July 2019 (Lviv) [26];
- 19-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 13-14 червня 2019 р. (Львів) [27];
- Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2019", 14-16 травня 2019 р. (Львів) [28,29];
- Різдвяні дискусії, 10-11 січня 2019 р. (Львів) [30];
- Workshop on Current Problems in Physics, 03-04 July 2018 (Lviv) [31];
- 18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 7-8 червня 2018 р. (Львів) [32];
- Різдвяні дискусії, 11-12 січня 2018 р. (Львів) [33];
- Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv, October 16-19, 2017 (Zielona Góra, Poland) [34];
- IX наукова конференція "Вибрані питання астрономії та астрофізики", присвячена пам'яті Богдана Бабія (1936-1993), 1-5 жовтня 2018 р. (Львів) [35];
- Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2017", 16-18 травня 2017 р. (Львів) [36];
- Різдвяні дискусії, 11-12 січня 2017 р. (Львів) [37].

Результати роботи також були представлені на наукових семінарах у Віденському університеті (Vienna Theory Lunch Seminar, December 12th, 2017), у Інституті теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова (25 жовтня 2018 р.), а також неодноразово обговорювалися на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано у двадцяти чотирьох журнальних статтях [1-24], розділах монографії [25] (розділ 1 (підрозділ 1.3), розділ 4, розділ 5 (підрозділ 5.3), розділ 8) та дванадцяти тезах доповідей на конференціях [26-37].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел та одного додатка. Робота містить 10 рисунків. Обсяг дисертації становить 335 сторінок включно зі списком використаних джерел, що містить 299 найменувань, та додатком зі списком публікацій за темою дисертації, а також переліком конференцій та семінарів, де були апробовані результати роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджень, представлено мету та основні завдання роботи, її зв'язок з науковими темами, висвітлено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів. Подано перелік публікацій за темою дисертації. Зазначено конференції та семінари, на яких результати представлялися здобувачем особисто.

У **першому розділі** розглянуто деформовані алгебри для операторів координат та операторів імпульсів, які описують квантований простір. Детально проаналізовано основні типи деформацій комутаційних співвідношень (деформації канонічного типу, Лі типу, нелінійні деформації).

У **другому розділі** розглянуто нелінійні деформації алгебри Гайзенберґа, а саме: нерелятивістську алгебру Снайдера

$$\begin{gathered}\left[X_i, X_j\right] = i\hbar\beta^2\left(P_jX_i - P_iX_j\right),\\ \left[X_i, P_j\right] = i\hbar(\delta_{ij} + \beta^2 P_iP_j), \qquad \left[P_i, P_j\right] = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

де β– параметр деформації, $i, j = 1,2,3$ [H. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947)], а також загальний випадок алгебри Кемпфа

$$\begin{gathered}\left[X_i, X_j\right] = i\hbar\frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 + \beta P^2}\left(P_iX_j - P_jX_i\right),\\ \left[X_i, P_j\right] = i\hbar(\delta_{ij}(1 + \beta P^2) + \beta' P_iP_j), \qquad \left[P_i, P_j\right] = 0,\end{gathered} \tag{2}$$

де β, β'– параметри деформації ($\beta \geq 0,\ \beta' \geq 0$), $i, j = 1,2,3$ [A. Kempf, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 2093 (1997)]. Зауважимо, що у (1) та (2) ми зберігаємо позначення, прийняті у літературі. Параметри β у (1) та (2) є різними.

Узагальнено алгебру Снайдера для координат $X_i^{(a)}$та імпульсів $P_i^{(a)}$різних частинок

$$\begin{gathered}\left\{X_i^{(a)}, X_j^{(b)}\right\} = \beta_a^2\left(P_j^{(a)}X_i^{(a)} - P_i^{(a)}X_j^{(a)}\right),\\ \left\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\right\} = \delta_{ab}(\delta_{ij} + \beta_a^2 P_i^{(a)}P_j^{(a)}), \qquad \left\{P_i^{(a)}, P_j^{(b)}\right\} = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

тут індекси a, b позначають частинки, β_a — параметр деформації, який відповідає частинці з індексом a. Знайдено, що обернено пропорційна залежність параметра β_a від маси частинки

$$\beta_a m_a = \gamma = \text{const}, \tag{4}$$

де константа γ є однаковою для частинок з різними масами, є необхідною для збереження фундаментальних законів та принципів у просторі з нерелятивістською алгеброю Снайдера. А саме, встановлено, що при виконанні рівності (4), відношення імпульсу частинки (тіла) до її маси є функцією швидкості частинки та константи γ. На основі цього результату показано, що у всіх порядках за параметром деформації кінетична енергія є адитивна та не залежить від композиції.

Знайдено, що у випадку виконання умови (4), дужки Пуассона для координат

та імпульсів центра мас тіла з масою M відповідають співвідношенням алгебри Снайдера з параметром

$$\tilde{\beta} = \frac{\gamma}{M}. \tag{5}$$

Отже, розв'язується проблема опису руху макроскопічного тіла у просторі з нерелятивістською алгеброю Снайдера.

Встановлено, що врахувавши вираз для параметра деформації (5), можна пояснити екстремально малий результат для мінімальної довжини, отриманий при дослідженні зсуву перигелію Меркурію у статті [B. Ivetić, S. Meljanac, S. Mignemi, Class. Quant. Grav. **31**, 105010 (2014)]. На основі результатів цієї статті та співвідношення (5) у роботі знайдено таку оцінку для мінімальної довжини:

$$\hbar\beta_{nuc} < 10^{-19}\text{м}, \tag{6}$$

де β_{nuc} – параметр деформації, який відповідає нуклонам. Верхня межа (6) є більшою за довжину Планка. Отже, проблема екстремально малих оцінок для мінімальної довжини розв'язується при врахуванні особливостей опису руху макроскопічних тіл у просторі Снайдера.

Знайдено, що рівняння руху частинки (тіла) у гравітаційному полі $V(X_1, X_2, X_3)$ не залежать від її маси m, якщо виконується умова (4)

$$\begin{gathered} \dot{X}_i = P_i'(1 + \gamma^2 (P')^2) + \gamma^2 \left(X_i P_j' - X_j P_i'\right) \frac{\partial V}{\partial X_j}, \\ P_i' = -\frac{\partial V}{\partial X_i} - \gamma^2 P_i' P_j' \frac{\partial V}{\partial X_j}, \end{gathered} \tag{7}$$

тут використано позначення $P_i' = P_i/m$. Отже, рівність (4) дозволяє зберегти слабкий принцип еквівалентності у просторі з нерелятивістською алгеброю Снайдера.

Проаналізовано представлення для координат $X_i^{(a)}$ та імпульсів $P_i^{(a)}$, які задовольняють співвідношення (3). Знайдено, що координати не залежать від маси та можуть розглядатися як кінематичні змінні, а також імпульси пропорційні до маси у випадку, коли виконується рівність (4). Представлення має вигляд:

$$X_i^{(a)} = x_i^{(a)} \sqrt{1 - \gamma^2 \frac{(p^{(a)})^2}{m_a^2}}, \quad P_i^{(a)} = \frac{p_i^{(a)}}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{(p^{(a)})^2}{m_a^2}}}, \tag{8}$$

тут координати $x_i^{(a)}$ та імпульси $p_i^{(a)}$ задовольняють звичні співвідношення $\left\{x_i^{(a)}, x_j^{(b)}\right\} = 0$, $\left\{x_i^{(a)}, p_j^{(b)}\right\} = \delta_{ab}\delta_{ij}$, $\left\{p_i^{(a)}, p_j^{(b)}\right\} = 0$.

Отже, ми встановили, що зв'язок параметра алгебри Снайдера з масою (4) дозволяє

– зберегти адитивність кінетичної енергії та її незалежність від композиції, а тому розв'язати проблему порушення закону збереження енергії;
– розглядати координати як кінематичні змінні;
– відновити пропорційність імпульсів до маси;
– розв'язати проблему опису руху макроскопічного тіла;
– відновити виконання слабкого принципу еквівалентності;
– пояснити екстремально малі оцінки для мінімальної довжини, отримані на основі досліджень зсуву перигелію Меркурію.

Кількість результатів, які можуть бути отримані завдяки ідеї залежності параметрів деформованої алгебри від маси, підтверджує її важливість. У розділі показано, що така ідея також дозволяє розв'язати фундаментальні проблеми у просторі з алгеброю Кемпфа. У випадку, коли параметри алгебри (2) задовольняють умови:

$$\sqrt{\beta_a} m_a = \gamma = \text{const}, \ \sqrt{\beta'_a} m_a = \gamma' = \text{const}, \tag{9}$$

(тут β_a, β'_a – параметри деформації, які відповідають частинці з масою m_a, константи γ, γ' не залежать від маси), зберігаються властивості кінетичної енергії, відновлюється принцип еквівалентності.

У **третьому розділі** розглянуто алгебру з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу, яка має такий вигляд:

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \qquad [X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij}), \qquad [P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij}, \tag{10}$$

де θ_{ij}, η_{ij} – елементи сталих антисиметричних матриць, параметри координатної та імпульсної некомутативностей. Константи σ_{ij} залежать від параметрів θ_{ij}, η_{ij}, що випливає з тотожності Якобі. У роботі розглядається випадок, коли $\sigma_{ij} = \theta_{ik}\eta_{kj}/4$, що можна отримати з симетричного представлення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів.

Розв'язано задачу на власні значення оператора квадрата довжини $\boldsymbol{Q}^2 = \alpha^2\boldsymbol{P}^2 + \beta^2\boldsymbol{X}^2$ (тут α, β – константи) у шестивимірному (тривимірному конфігураційному та тривимірному імпульсному) некомутативному фазовому просторі. На основі цього результату знайдено, що мінімальна довжина у фазовому просторі визначається параметрами координатної та імпульсної некомутативностей та має такий вигляд:

$$\Delta Q^{min} = \sqrt{\hbar\sqrt{\left(2\alpha^2 + \frac{\theta^2\beta^2}{2}\right)\left(2\beta^2 + \frac{\eta^2\alpha^2}{2}\right)} + \hbar\eta\alpha^2 + \hbar\theta\beta^2 + \hbar\alpha\beta}\,, \tag{11}$$

$$\theta = \sqrt{\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2}, \ \ \eta = \sqrt{\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2}.$$

Поклавши у (11) $\alpha = 0$ чи $\beta = 0$, отримаємо мінімальну довжину у координатному чи імпульсному просторах, відповідно.

Розглянуто чотиривимірний некомутативний фазовий простір канонічного типу

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \qquad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}(1+\sigma), \qquad [P_1, P_2] = i\hbar\eta, \tag{12}$$

де θ, η – параметри некомутативностей. Досліджено випадки, коли $\sigma=0$ та $\sigma=\theta\eta/4$. Знайдено умови на праметри некомутативностей, при яких розв'язується проблема кінематичних змінних у некомутативному фазовому просторі, а також відновлюється пропорційність імпульсів до маси. А саме, встановлено, що у випадку, коли задовольняються рівності:

$$m\theta = \gamma = \text{const}, \qquad \frac{\eta}{m} = \alpha = \text{const}, \tag{13}$$

(тут θ, η – параметри некомутативності, які відповідають частинці з масою m, γ, α – константи, які не залежать від маси), некомутативні координати та імпульси, для яких виконуються співвідношення (12) з σ=0, можуть бути представлені як

$$\begin{aligned}
X_1 &= \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right)}}\left(x_1 - \frac{1}{\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right)\frac{p_2}{m}\right),\\
X_2 &= \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right)}}\left(x_2 - \frac{1}{\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right)\frac{p_1}{m}\right),\\
P_1 &= \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma})}}\left(p_1 + \frac{m}{\gamma}\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right)x_2\right),\\
P_2 &= \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma})}}\left(p_2 - \frac{m}{\gamma}\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right)x_1\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Для координат x_{i} та імпульсів p_{i} справедливими є рівності $[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$, $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, $(i, j = 1,2)$.

Представлення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів, які задовольняють (12) з $\sigma=\theta\eta/4$, при виконанні (13), має вигляд:

$$\begin{aligned}
X_1 &= x_1 - \frac{\gamma p_2}{2m}, \qquad X_2 = x_2 + \frac{\gamma p_1}{2m},\\
P_1 &= p_1 + \frac{\alpha m x_2}{2}, \quad P_2 = p_2 - \frac{\alpha m x_1}{2}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Зауважимо, що відповідно до (14) та (15) некомутативні координати не залежать від маси та можуть розглядатися як кінематичні змінні, некомутативні імпульси пропорційні до маси. У роботі також знайдено, що при виконанні рівностей (13), імпульси центра мас системи частинок пропорційні до маси системи, координати та імпульси центра мас, які задовольняють співвідношення некомутативної алгебри, можуть бути представлені через координати та імпульси центра мас, які задовольняють звичні співвідношення.

Досліджено особливості руху системи вільних частинок у некомутативному фазовому просторі канонічного типу (12) з σ=0. Знайдено, що траєкторія вільної частинки залежить від її маси m

$$X_1(t) = \upsilon_{01}\frac{m}{\eta}\sin\frac{\eta}{m}t - \upsilon_{02}\frac{m}{\eta}\cos\frac{\eta}{m}t + \upsilon_{02}\frac{m}{\eta} + X_{01},$$
$$X_2(t) = \upsilon_{02}\frac{m}{\eta}\sin\frac{\eta}{m}t + \upsilon_{01}\frac{m}{\eta}\cos\frac{\eta}{m}t - \upsilon_{01}\frac{m}{\eta} + X_{01}, \tag{18}$$

де $X_{0i},\ \upsilon_{0i}$ – початкові координати та швидкості частинки. Встановлено, що навіть у випадку системи вільних частинок відносний рух впливає на рух центра мас, система вільних частинок з однаковими початковими швидкостями розлітається. Знайдено, що ця проблема розв'язується, коли параметр імпульсної некомутативності пропорційний до маси (13).

Отримано вираз для імпульсу центра мас, який є інтегралом руху у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Знайдено, що коли виконуються рівності (13), імпульси, означені як

$$\tilde{P}_1' = \tilde{P}_1 - \tilde{\eta}\tilde{X}_2, \qquad \tilde{P}_2' = \tilde{P}_2 + \tilde{\eta}\tilde{X}_1, \tag{19}$$

зберігаються. У (19) $\tilde{X}_i,\ \tilde{P}_i$ – координати та імпульси центра мас, визначені традиційно ($\tilde{X}_i = \sum_a \mu_a P_i^{(a)},\ \ \tilde{P}_i = \sum_a P_i^{(a)},\ \mu_a = m_a/M,\ M = \sum_a m_a$). Запропоновано означення для координат центра мас, які спряжені до імпульсів (19)

$$\tilde{X}_i' = \frac{\tilde{X}_i}{1 - \tilde{\eta}\tilde{\theta}}. \tag{20}$$

Також у розділі знайдено точний вираз для енергетичних рівнів системи двох частинок з осциляторною взаємодією у чотиривимірному некомутативному просторі канонічного типу (12) з σ=0:

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\Omega_1\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_2\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_3\left(n_3 + \frac{1}{2}\right),$$
$$\Omega_1 = \frac{\tilde{\eta}}{M},\ \Omega_2 = \tilde{\omega} + \left(\frac{\eta^r}{2\mu} + \frac{k\theta^r}{2}\right),\ \Omega_3 = \tilde{\omega} - \left(\frac{\eta^r}{2\mu} + \frac{k\theta^r}{2}\right),$$
$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\theta^r\eta^r}{2\mu\left(1 - \sqrt{1 - \theta^r\eta^r}\right)} + \frac{k\theta^r\left(1 - \sqrt{1 - \theta^r\eta^r}\right)}{2\eta^r}} \times$$
$$\sqrt{\frac{k\theta^r\eta^r}{2(1 - \sqrt{1 - \theta^r\eta^r})} + \frac{\eta^r\left(1 - \sqrt{1 - \theta^r\eta^r}\right)}{2\mu\theta^r}}. \tag{21}$$

Тут k – константа взаємодії, M, μ – повна та зведена маса системи, $\tilde{\eta}$ – параметр імпульсної некомутативності, який відповідає руху центра мас, $\theta^r,\ \eta^r$ – параметри некомутативностей, які відповідають відносному руху. Встановлено, що через некомутативність імпульсів спектр центра мас системи не є неперервний та відповідає спектру гармонічного осцилятора з частотою $\tilde{\eta}/M$.

Запропоновано узагальнення некомутативної алгебри для координат та

імпульсів різних частинок:

$$\left\{X_i^{(a)}, X_j^{(b)}\right\} = \delta_{ab}\theta_{ij}^{(a)}, \qquad \left\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\right\} = \delta_{ab}\delta_{ij} + \delta_{ab}\sum_k \frac{\theta_{ik}^{(a)}\eta_{jk}^{(a)}}{4},$$
$$\left\{P_i^{(a)}, P_j^{(b)}\right\} = \delta_{ab}\eta_{ij}^{(a)}, \tag{22}$$

тут параметри $\theta_{ij}^{(a)}$, $\eta_{ij}^{(a)}$ відповідають частинці з індексом a. Показано, що у шестивимірному некомутативному просторі канонічного типу дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас не відповідають співвідношенням некомутативної алгебри (22). Знайдено, що ця проблема розв'язується при виконанні рівностей:

$$m_a\theta_{ij}^{(a)} = \gamma_{ij} = \text{const}, \qquad \frac{\eta_{ij}^{(a)}}{m_a} = \alpha_{ij} = \text{const}, \tag{23}$$

(тут γ_{ij}, α_{ij} − константи, які є однакові для різних частинок, $\theta_{ij}^{(a)}, \eta_{ij}^{(a)}$ − параметри координатної та імпульсної некомутативностей, які відповідають частинці з масою m_a).

Встановлено, що при виконанні умов на параметри некомутативної алгебри (23), розв'язується проблема кінематичних змінних, некомутативні імпульси пропорційні до маси, рух вільної частинки не залежить від маси у шестивимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу (22).

У розділі знайдено та досліджено траєкторію вільного падіння частинки (тіла) у квантованому фазовому просторі (12) з $\sigma = 0$. Проаналізовано рівняння руху для частинки (тіла) у неоднорідному гравітаційному полі у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Досліджено вплив некомутативності на рух системи Сонце-Земля-Місяць. Знайдено поправки до параметра Етвеша для Землі та Місяця, зумовлені некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a^\eta}{a} + \frac{\Delta a^\theta}{a},$$
$$\frac{\Delta a^\eta}{a} = \frac{\upsilon_E R^2}{G m_S}\left(\frac{\eta_E}{m_E} - \frac{\eta_M}{m_M}\right), \qquad \frac{\Delta a^\theta}{a} = \frac{\upsilon_E}{R}\left(\theta_E m_E - \theta_M m_M\right), \tag{24}$$

де $\upsilon_E -$ орбітальна швидкість Землі, m_E, m_M, m_S — маси Землі, Місяця та Сонця, $\theta_E, \eta_E, \theta_M, \eta_M$ – параметри некомутативностей для Землі та Місяця, R – відстань від Землі до Сонця та від Місяця до Сонця, G – гравітаційна стала. Ми показали, що у некомутативному фазовому просторі параметр Етвеша не дорівнює нулю навіть у випадку рівності інерційної та гравітаційної мас. Модифікація дужок Пуассона для координат та імпульсів зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності. Знайдено, що при виконанні рівностей (23), зберігається слабкий принцип еквівалентності у шестивимірному квантованому фазовому просторі (22).

Отримано верхні межі для параметрів імпульсної некомутативності для нуклонів та електронів

$$\hbar|\eta_{nuc}| \leq 3.3 \cdot 10^{-80}\text{кг}^2\text{м}^2/c^2,$$
$$\hbar|\eta_e| \leq 1.8 \cdot 10^{-83}\text{кг}^2\text{м}^2/c^2, \tag{25}$$

які щонайменше на 10 порядків покращують результати, представлені у літературі [O. Bertolami et al, Phys. Rev. D **72**, 025010 (2005), O. Bertolami, R. Queiroz, Phys. Lett. A **375**, 4116 (2011)]. Результати (25) знайдено на основі дослідження зсуву перигелію Меркурію з врахуванням особливостей опису макроскопічного тіла у квантованому фазовому просторі канонічного типу (22).

У **четвертому розділі** досліджено проблему порушення симетрії відносно інверсії часу (Т-симетрії) у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу. Некомутативна алгебра канонічного типу не є інваріантна відносно інверсії часу. Розглянувши перетворення для координат та імпульсів при інверсії часу, як у випадку звичного простору, а саме: $X_i \to X_i, P_i \to -P_i$, та врахувавши, що у квантовій механіці перетворення інверсії часу включає комплексне спряження, отримаємо, що при інверсії часу алгебра (12) перейде у

$$[X_1, X_2] = -i\hbar\theta, \qquad [X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar(1+\sigma), \qquad [P_1, P_2] = -i\hbar\eta. \tag{26}$$

У розділі показано, що через неінваріантність некомутативної алгебри канонічного типу відносно інверсії часу, перетворення для координат та імпульсів при інверсії часу залежать від їх представлення. А саме, координати та імпульси, які задовольняють (12), можна представити через координати та імпульси x_i, p_i, для яких виконуються звичні співвідношення $[x_i, x_j]= [p_i, p_j]= 0$, $[x_i, p_j]= i\hbar\delta_{ij}$, $(i, j = 1,2)$

$$X_1 = \varepsilon(x_1 + \theta_1' p_2), \quad X_2 = \varepsilon(x_2 + \theta_2' p_1),$$
$$P_1 = \varepsilon(p_1 + \eta_1' x_2), \quad P_2 = \varepsilon(p_2 + \eta_2' x_1), \tag{27}$$

тут ε, $\theta_1', \theta_2', \eta_1', \eta_2'$ – константи, які пов'язані з θ, η, σ та можуть бути вибрані певним чином. Розглянувши звичні перетворення для координат та імпульсів при інверсії часу $x_i \to x_i, p_i \to -p_i$, із (27) отримаємо, що Т-перетворення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів залежать від констант ε, $\theta_1', \theta_2', \eta_1', \eta_2'$

$$X_1 \to X_1' = \varepsilon(x_1 - \theta_1' p_2),$$
$$X_2 \to X_2' = \varepsilon(x_2 - \theta_2' p_1),$$
$$P_1 \to P_1' = \varepsilon(-p_1 + \eta_1' x_2),$$
$$P_2 \to P_1' = \varepsilon(-p_2 + \eta_2' x_1), \tag{28}$$

а, отже, залежать від представлення.

Як приклад для дослідження симетрії відносно інверсії часу, розглянуто рух по колу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Для частинки у гравітаційному полі

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - \frac{k}{X}, \tag{29}$$

де k – константа, $X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, знайдено, що період руху по колу радіуса R_0 залежить від напрямку руху. А саме, отримано такі розв'язки рівнянь руху:

$$X_1(t) = R_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad X_2(t) = R_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

$$\mathrm{T} = 4\pi \left(\sqrt{\frac{4k}{mR_0^3}\left((1+\sigma^2) - \theta\eta\right) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} - \frac{\eta}{m} - \frac{k\theta}{R_0^3} \right)^{-1}, \tag{30}$$

та

$$X_1(t) = R_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T'} t\right), \quad X_2(t) = -R_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T'} t\right),$$

$$\mathrm{T}' = 4\pi \left(\sqrt{\frac{4k}{mR_0^3}\left((1+\sigma^2) - \theta\eta\right) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} + \frac{\eta}{m} + \frac{k\theta}{R_0^3} \right)^{-1}. \tag{31}$$

Зауважимо, що вирази для періодів руху (30), (31) відрізняються знаками параметрів координатної та імпульсної некомутативності.

Для розв'язання проблеми порушення симетрії відносно інверсії часу у некомутативному фазовому просторі запропоновано означати тензори координатної та імпульсної некомутативностей за допомогою додаткових імпульсів p_i^a, p_i^b, а саме:

$$\theta_{ij} = \frac{\bar{c}_\theta}{\hbar} \varepsilon_{ijk} p_k^a, \quad \eta_{ij} = \frac{\bar{c}_\eta}{\hbar} \varepsilon_{ijk} p_k^b, \tag{49}$$

де $\bar{c}_\theta, \bar{c}_\eta$ – константи. Для збереження також сферичної симетрії розглянуто випадок, коли додаткові імпульси p_i^a, p_i^b відповідають сферично-симетричній системі, для прикладу, гармонічним осциляторам. У результаті, побудовано некомутативну алгебру канонічного типу, яка інваріантна відносно інверсії часу та сферично-симетрична. Ця алгебра має вигляд:

$$\begin{gathered} [X_i, X_j] = i\, \bar{c}_\theta \varepsilon_{ijk} p_k^a, \\ [X_i, P_j] = i\hbar \left(\delta_{ij} + \frac{\bar{c}_\theta \bar{c}_\eta}{4\hbar^2} (\boldsymbol{p}^a \cdot \boldsymbol{p}^b) \delta_{ij} - \frac{\bar{c}_\theta \bar{c}_\eta}{4\hbar^2} p_j^a p_i^b \right), \\ [P_i, P_j] = i\bar{c}_\eta \varepsilon_{ijk} p_k^b. \end{gathered} \tag{50}$$

У **п'ятому розділі** досліджено властивості одно- та багаточастинкових фізичних систем у квантованому фазовому просторі зі збереженою сферичною симетрією. Простір характеризується такими комутаційними співвідношеннями для операторів координат та операторів імпульсів:

$$\left[X_i^{(n)}, X_j^{(m)}\right] = i\delta_{nm}\frac{c_\theta^{(n)} l_P^2}{\hbar^2}\varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k,$$

$$\left[X_i^{(n)}, P_j^{(m)}\right] = i\delta_{nm}\left(\delta_{ij} + \frac{c_\theta^{(n)} c_\eta^{(n)}}{4\hbar}(\tilde{\boldsymbol{a}} \cdot \tilde{\boldsymbol{p}}^b)\delta_{ij} - \frac{c_\theta^{(n)} c_\eta^{(n)}}{4\hbar}\tilde{a}_j \tilde{p}_i^b\right), \tag{51}$$

$$\left[P_i^{(n)}, P_j^{(m)}\right] = i\delta_{nm}\frac{c_\eta^{(n)}\hbar^2}{l_p^2}\varepsilon_{ijk}\tilde{p}_k^b,$$

де $X_i^{(n)}$, $P_i^{(n)}$ – координати та імпульси частинки з індексом n, l_P^2 – довжина Планка, $c_\theta^{(n)}, c_\eta^{(n)}$– константи, які залежать від маси m_n частинки як

$$c_\theta^{(n)} m_n = \tilde{\gamma} = \text{const}, \qquad \frac{c_\theta^{(n)}}{m_n} = \tilde{\alpha} = \text{const}, \tag{52}$$

(тут константи $\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}$ є однакові для різних частинок), $\tilde{a}_k, \tilde{p}_k^b$ – додаткові координати та імпульси, які відповідають сферично-симетричним системам та задовольняють звичні комутаційні співвідношення. Координати та імпульси $\tilde{a}_k, \tilde{p}_k^b$ комутують між собою.

Досліджено оператор Гамільтона у некомутативному фазовому просторі канонічного типу зі сферичною симетрією:

$$H = H_s + H_{osc}^a + H_{osc}^b = H_0 + \Delta H, \tag{53}$$

де H_s – гамільтоніан системи, H_{osc}^a, H_{osc}^b – гамільтоніани гармонічних осциляторів:

$$H_{osc}^a = \hbar\omega_{osc}\left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2}\right), \quad H_{osc}^b = \hbar\omega_{osc}\left(\frac{(\tilde{p}^b)^2}{2} + \frac{\tilde{b}^2}{2}\right). \tag{54}$$

Оператори H_0 та ΔH у (53) визначаються як:

$$\begin{gathered} H_0 = \langle H_s \rangle_{ab} + H_{osc}^a + H_{osc}^b, \\ \Delta H = H - H_0 = H_s - \langle H_s \rangle_{ab}, \end{gathered} \tag{55}$$

тут $\langle \ldots \rangle_{ab}$ позначає усереднення за хвильовими функціями гармонічних осциляторів (54) у основних станах. Знайдено, що з точністю до другого порядку за ΔH поправки до енергетичних рівнів H_0 дорівнюють нулю. Отже, при дослідженні фізичних систем у некомутативному фазовому просторі зі сферичною симетрією з точністю до другого порядку за ΔH можемо розглядати гамільтоніан H_0, який отримується усередненням гамільтоніана системи за хвильовими функціями основних станів гармонічних осциляторів (54). Варто зауважити, що гамільтоніан H_0 не містить доданків, лінійних за тензорами некомутативності, та є інваріантний відносно інверсії часу.

Розв'язано задачу на власні значення оператора квадрата довжини $\boldsymbol{Q}^2 = \alpha^2\boldsymbol{P}^2 + \beta^2\boldsymbol{X}^2$ (тут α, β – константи) у некомутативному фазовому просторі зі сферичною симетрією (51) з точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей та знайдено вираз для мінімальної довжини:

$$q_{min} = \sqrt{\hbar}\sqrt[4]{2\beta^2 + \frac{\alpha^2\langle\eta^2\rangle}{3}}\sqrt[4]{2\alpha^2 + \frac{\beta^2\langle\theta^2\rangle}{3}}, \tag{56}$$

де $\langle\theta^2\rangle = \langle\theta^2\rangle_{ab}$, $\langle\eta^2\rangle = \langle\eta^2\rangle_{ab}$ – середні значення квадрату модуля векторів $\boldsymbol{\theta}$ та $\boldsymbol{\eta}$ у основних станах гармонічних осциляторів. Компоненти векторів $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\eta}$ визначаються як

$$\theta_i = \frac{c_\theta^{(n)} l_P^2}{\hbar^2}\tilde{a}_i, \qquad \eta_i = \frac{c_\eta^{(n)}\hbar^2}{l_p^2}\tilde{p}_i^b. \tag{57}$$

Досліджено проблему опису системи багатьох частинок у сферично-симетричному фазовому просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Знайдено, що у випадку, коли виконуються рівності (52), координати та імпульси центра мас X_i^c, P_i^c, означені звично, задовольняють співвідношення некомутативної алгебри

$$\begin{gathered}\left[X_i^c, X_j^c\right] = i\hbar\theta_{ij}^c, \quad \left[X_i^c, P_j^c\right] = i\hbar\left(\delta_{ij} + \frac{\theta_{ik}^c\eta_{kj}^c}{4}\right), \\ \left[P_i^c, P_j^c\right] = i\hbar\eta_{ij}^c,\end{gathered} \tag{58}$$

з тензорами координатної та імпульсної некомутативностей $\theta_{ij}^c, \eta_{ij}^c$, які залежать від повної маси системи M

$$\theta_{ij}^c = \frac{\tilde{\gamma} l_P^2}{M\hbar^2}\varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k, \qquad \eta_{ij}^c = \frac{\tilde{\alpha}\hbar^2 M}{l_p^2}\varepsilon_{ijk}\tilde{p}_k^b. \tag{59}$$

Отримано та проаналізовано поправки до енергетичних рівнів системи двох частинок з кулонівською взаємодією

$$H = \frac{(\boldsymbol{P}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(\boldsymbol{P}^{(2)})^2}{2m_2} - \frac{\kappa}{|\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{X}^{(2)}|} + H_{osc}^a + H_{osc}^b, \tag{60}$$

де $\kappa -$ константа, m_1, m_2 – маси частинок, координати $X_i^{(n)}$ та імпульси $P_i^{(n)}$ задовольняють співвідношеняння сферично-симетричної алгебри (51). Знайдено, що ці поправки мають різні залежності від квантових чисел та від параметрів системи (зведена маса $\mu = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$, параметр взаємодії κ). Зважаючи на це, ми прийшли до висновку, що існують системи, енергетичні рівні яких є більш чутливі до некомутативності координат чи до некомутативності імпульсів. А саме, ми встановили, що вплив імпульсної некомутативності добре проявляється для енергетичних рівнів з $l = 0$ та великим квантовим числом n для атомів з малою зведеною масою. Вплив некомутативності координат добре проявляється для ns енергетичних рівнів з малими квантовими числами n для атомів з великою зведеною масою. Поправки до енергетичних рівнів з $l = 0$ мають вигляд:

$$\Delta H_{n,0}^{(\theta\eta)} = \frac{a^3\kappa\langle(\eta^r)^2\rangle}{24\hbar^2}n^2(5n^2+1) + \frac{1.72\hbar\langle\theta^r\rangle\pi\kappa}{8a^3n^2}, \tag{61}$$

де $\mathrm{a} = \hbar^2/(\mu\kappa)$, n – квантове число, $\langle\ldots\rangle$ позначає усереднення за хвильовими функціями гармонічних осциляторів (54) в основних станах, компоненти векторів $\boldsymbol{\theta}^r$ та $\boldsymbol{\eta}^r$ мають вигляд:

$$\theta_i^r = \frac{\tilde{\gamma} l_P^2}{\mu\hbar^2}\tilde{a}_i, \qquad \eta_i^r = \frac{\tilde{\alpha}\hbar^2\mu}{l_p^2}\tilde{p}_i^b. \tag{62}$$

На основі отриманих поправок до енергетичних рівнів системи двох частинок з кулонівською взаємодією проаналізовано вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на спектри атома водню та екзотичних атомів (мюонний водень, антипротонний гелій). Ми прийшли до висновку, що поправки до енергетичних рівнів з $l > 1$ мюонного атома водню, зумовлені некомутативністю координат, є у $8.8 \cdot 10^6$ разів більші від цих поправок для атома водню. Вплив некомутативності імпульсів на енергетичні рівні мюонного атома водню є у 206.8 разів меншим ніж на енергетичні рівні атома водню, що пов'язано із великою зведеною масою атома. Отже, вивчення спектру мюонного атома водню дозволяють краще дослідити відмінність впливу координатної та імпульсної некомутативностей на енергетичні рівні системи.

Знайдено оцінки для параметрів некомутативностей

$$\hbar\sqrt{\langle(\theta^r)^2\rangle} \leq 10^{-27}\text{м}^2, \;\; \hbar\sqrt{\langle(\eta^r)^2\rangle} \leq 10^{-50}\text{кг}^2\text{м}^2/c^2, \tag{63}$$

на основі експериментального результату для частоти переходу (n,l)=(36,34)→(34,32) антипротонного гелію (її величина 1522107062МГц виміряна з точністю 3.5МГц [M. Hori, A. Soter, D. Barn et al, Nature **475**, 484 (2011)]). Нерівності (63) не накладають строгих обмежень на величини параметрів некомутативностей у порінянні з верхніми межами для параметрів некомутативностей, які отримані на основі досліджень енергетичних рівнів атома водню:

$$\hbar\langle\theta^r\rangle \leq 10^{-36}\text{м}^2, \;\; \hbar\sqrt{\langle(\eta^r)^2\rangle} \leq 6.4 \cdot 10^{-56}\text{кг}^2\text{м}^2/c^2. \tag{64}$$

Це пов'язано з малою точністю експериментальних даних для спектру антипротонного гелію. Важливо зауважити, що антипротонний гелій є більш чутливий до впливу некомутативності координат у порівнянні з атомом водню, оскільки зведена маса цього атома є на 3 порядки більша від зведеної маси атома водню. Зважаючи на це, покращення точності експериментальних даних для спектру антипротонного атома гелію відкриє можливість отримати більш строге обмеження для величини параметра координатної некомутативності.

Знайдено енергетичні рівні симетричної мережі N осциляторів у однорідному полі, яка описується гамільтоніаном:

$$H=\sum_{n}\frac{(P^{(n)})^2}{2m}+\sum_{n}\frac{m\omega^2(X^{(n)})^2}{2}+\frac{k}{2}\sum_{n,m}(X^{(n)}-X^{(m)})^2+\kappa\sum_{n}X_1^{(n)}+ \\ +H_{osc}^{a}+H_{osc}^{b}, \tag{65}$$

де k, κ – константи, координати та імпульси $X_i^{(n)}, P_i^{(n)}$ задовольняють комутаційні співвідношення (51). Встановлено, що некомутативність впливає на частоти системи. Однорідне поле зумовлює зміщення спектру системи на константу. З точністю до другого порядку за праметрами некомутативностей енергетичні рівні симетричної мережі N осциляторів у однорідному полі мають такий вигляд:

$$E_{\{n_1\}\{n_2\}\{n_3\}}=\sum_{a=1}^{N}\hbar\omega_a\left(n_1^{(a)}+n_2^{(a)}+n_3^{(a)}+\frac{3}{2}\right)-\frac{N\kappa^2}{3m_{eff}\omega_{eff}}+3\hbar\omega_{osc}, \\ \omega_1=\omega_{eff}, \\ \omega_2=\omega_3=\cdots=\omega_N=\left(\omega_{eff}^2+\frac{2kN}{m_{eff}}+\frac{kN\langle\theta^2\rangle m_{eff}\omega_{eff}^2}{3}+\frac{2k^2\langle\theta^2\rangle N^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{66}$$

тут використано позначення:

$$m_{eff}=m\left(1+\frac{m^2\omega^2\langle\theta^2\rangle}{6}\right)^{-1}, \\ \omega_{eff}=\left(\omega^2+\frac{\langle\eta^2\rangle}{6m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{m^2\omega^2\langle\theta^2\rangle}{6}\right)^{1/2}, \tag{67}$$

$n_i^{(a)}$ – квантові числа, ($n_i^{(a)}=0,1,2\ldots$).

На основі отриманого результату досліджено часткові випадки, а саме: систему частинок з осциляторною взаємодією (ω=0 у (65)) та систему вільних частинок ($\omega=k=0$ у (65)). Встановлено, що спектр системи вільних частинок у квантованому фазовому просторі зі сферичною симетрією не є неперервний. Енергетичні рівні системи вільних частинок відповідають енергетичним рівням системи N осциляторів з частотами, які визначаються параметрами імпульсної некомутативності та масами частинок $\langle\eta^2\rangle/(6m^2)$. Знайдено, що некомутативність імпульсів також зумовлює дискретність спектру центра мас системи частинок з осциляторною взаємодією. Некомутативність координат та некомутативність імпульсів впливають на частоти у спектрі відносного руху. Ми прийшли до висновку, що вплив некомутативності координат та енергетичні рівні симетричної мережі осциляторів, а також на енергетичні рівні системи частинок, які взаємодіють всі зі всіма з осциляторною взаємодією, збільшується при збільшенні числа частинок, що формують системи.

З точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей знайдено вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на спектр ланцюжка N гармонічних осциляторів

$$H_s = \sum_n \frac{(P^{(n)})^2}{2m} + \sum_n \frac{m\omega^2 (X^{(n)})^2}{2} + k\sum_n (X^{(n+1)} - X^{(n)})^2 + H_{osc}^a + H_{osc}^b, \quad (68)$$

з періодичними граничними умовами $X^{(N+1)} = X^{(1)}$. Встановлено, що з точністю до другого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативності форма спектру системи у квантованому просторі відповідає спектру цієї системи у звичному просторі. Квантованість простору впливає лише на частоти системи:

$$E_{\{n_1\}\{n_2\}\{n_3\}} = \sum_{a=1}^{N} \hbar\omega_a \left(n_1^{(a)} + n_2^{(a)} + n_3^{(a)} + \frac{3}{2}\right) + 3\hbar\omega_{osc},$$
$$\omega_a^2 = \left(\omega^2 + \frac{\langle\eta^2\rangle}{6m^2}\right)\left(1 + \frac{m^2\omega^2\langle\theta^2\rangle}{6} + \frac{4k^2 m\langle\theta^2\rangle}{3}\sin^2\frac{\pi a}{N}\right) + \quad (69)$$
$$+\frac{8k}{m}\sin^2\frac{\pi a}{N} + \frac{32k^2\langle\theta^2\rangle}{3}\sin^4\frac{\pi a}{N},$$

тут $n_i^{(a)}$ – квантові числа, ($n_i^{(a)} = 0,1,2 \ldots$).

Також у розділі досліджено рух частинки у гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі зі сферичною симетрією та показано, що слабкий принцип еквівалентності зберігається, коли виконуються рівності (52).

Важливо відзначити, що результати з дослідження фізичних систем у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі, отримані у цьому розділі, можуть бути легко узагальнені на випадок різних означень тензорів координатної та імпульсної некомутативностей, для яких $\langle\theta_{ij}\rangle = \langle\eta_{ij}\rangle = 0$, оскільки вони явно не залежать від виглядів цих тензорів, а визначаються середніми $\langle\theta^2\rangle = \langle\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{13}^2\rangle$, $\langle\eta^2\rangle = \langle\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{13}^2\rangle$.

У **шостому розділі** розглянуто простір з некомутативною алгеброю Лі типу

$$\{X_i, X_j\} = \theta_{ij}^0 t + \theta_{ij}^k X_k,$$
$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij} + \bar{\theta}_{ij}^k X_k + \tilde{\theta}_{ij}^k P_k, \quad (70)$$
$$\{P_i, P_j\} = 0,$$

θ_{ij}^0, $\theta_{ij}^k, \bar{\theta}_{ij}^k$, $\tilde{\theta}_{ij}^k$ — антисиметричні за нижніми індексами параметри некомутативності, $i, j, k = (1,2,3)$. Параметри θ_{ij}^0, $\theta_{ij}^k, \bar{\theta}_{ij}^k$, $\tilde{\theta}_{ij}^k$ не є довільні, що пов'язано з тотожністю Якобі.

Запропоновано таке узагальнення некомутативної алгебри для координат $X_i^{(a)}$та імпульсів $P_i^{(a)}$частинок:

$$\left\{X_i^{(a)}, X_j^{(b)}\right\} = \delta_{ab}(\theta_{ij}^{0(a)} t + \theta_{ij}^{k(a)} X_k^{(a)}),$$
$$\left\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\right\} = \delta_{ab}(\delta_{ij} + \bar{\theta}_{ij}^{k(a)} X_k^{(a)} + \tilde{\theta}_{ij}^{k(a)} P_k^{(a)}), \quad (71)$$

$$\left\{P_i^{(a)}, P_j^{(b)}\right\} = 0,$$

тут індекси a, b – позначають частинки, $\theta_{ij}^{0(a)}$, $\theta_{ij}^{k(a)}, \bar{\theta}_{ij}^{k(a)}$, $\tilde{\theta}_{ij}^{k(a)}$— параметри некомутативної алгебри, які відповідають частинці з індексом a.

Розглянуто систему N частинок з масами m_n у просторі (71). Означивши координати та імпульси центра мас традиційно ($\tilde{X}_i = \sum_a \mu_a P_i^{(a)}$, $\tilde{P}_i = \sum_a P_i^{(a)}$, $\mu_a = m_a/M, M = \sum_a m_a$), ми отримали, що співвідношення для координат та імпульсів центра мас не відповідають некомутативній алгебрі Лі типу. Маємо:

$$\begin{gathered}\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = \delta_{ab}\left(\sum_a \mu_a^2\, \theta_{ij}^{0(a)} t + \sum_a \mu_a^2\, \theta_{ij}^{k(a)} X_k^{(a)}\right),\\ \{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ab}\left(\delta_{ij} + \sum_a \mu_a\, \bar{\theta}_{ij}^{k(a)} X_k^{(a)} + \sum_a \mu_a\, \tilde{\theta}_{ij}^{k(a)} P_k^{(a)}\right),\\ \{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = 0.\end{gathered} \tag{72}$$

Запропоновано такі залежності параметрів $\theta_{ij}^{0(a)}$, $\theta_{ij}^{k(a)}, \bar{\theta}_{ij}^{k(a)}$, $\tilde{\theta}_{ij}^{k(a)}$ від маси:

$$\begin{gathered}\theta_{ij}^{0(a)} m_a = \gamma_{ij}^0 = \text{const},\\ \theta_{ij}^{k(a)} m_a = \gamma_{ij}^k = \text{const}, \quad \tilde{\theta}_{ij}^{k(a)} m_a = \tilde{\gamma}_{ij}^k = \text{const},\end{gathered} \tag{73}$$

де γ_{ij}^0, γ_{ij}^k, $\tilde{\gamma}_{ij}^k$ – константи, які не залежать від мас частинок. Показано, що коли виконуються рівності (73), та параметри $\theta_{ij}^{k(a)}$є однакові для різних частинок

$$\bar{\theta}_{ij}^{k(a)} = \bar{\theta}_{ij}^k, \tag{74}$$

алгебра для координат та імпульсів центра мас відповідає некомутативній алгебрі Лі типу

$$\begin{gathered}\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = \delta_{ab}\left(\theta_{ij}^{0(eff)} t + \theta_{ij}^{k(eff)} \tilde{X}_k\right),\\ \{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ab}\left(\delta_{ij} + \bar{\theta}_{ij}^k \tilde{X}_k + \tilde{\theta}_{ij}^{k(eff)} \tilde{P}_k\right),\\ \{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = 0,\end{gathered} \tag{75}$$

з параметрами, які обернено пропорційні до маси системи:

$$\theta_{ij}^{0(eff)} = \frac{\gamma_{ij}^0}{M}, \qquad \theta_{ij}^{k(eff)} = \frac{\gamma_{ij}^k}{M}, \qquad \tilde{\theta}_{ij}^{k(eff)} = \frac{\tilde{\gamma}_{ij}^k}{M}. \tag{76}$$

Встановлено, що коли виконуються співвідношення (73), (74), також зберігається слабкий принцип еквівалентності у некомутативному просторі Лі типу. Якщо задовольняються рівності (73), (74), рівняння руху частинки (тіла) з масою m у гравітаційному полі $V(X_1, X_2, X_3)$ мають вигляд:

$$\begin{gathered}\dot{X}_i = P_i' + \left(\bar{\theta}_{ij}^k \tilde{X}_k + \tilde{\gamma}_{ij}^k P_k'\right) P_j' + \left(\gamma_{ij}^0 t + \gamma_{ij}^k X_k\right) \frac{\partial V}{\partial X_j},\\ P_i' = -\frac{\partial V}{\partial X_i} - \left(\bar{\theta}_{ij}^k \tilde{X}_k + \tilde{\gamma}_{ij}^k P_k'\right) \frac{\partial V}{\partial X_j},\end{gathered} \tag{77}$$

де $P_i' = P_i/m$. Рівняння руху (77) не залежать від маси, тому їх розв'язок $X_i(t)$, $P_i'(t)$ також не залежить від маси. Отже, слабкий принцип еквівалентності зберігається у просторі з некомутативністю Лі типу.

У розділі також розглянуто простір з деформацією кручення, який характеризується такими комутаційними співвідношеннями:

$$[t, X_i] = 0, \qquad [X_i, X_j] = i\hbar f\left(\frac{t}{\tau}\right)\theta_{ij}, \tag{78}$$

де θ_{ij} – параметри некомутативностей, $\tau-$ параметр, який має розмірність часу, $f(t/\tau)$ – деяка функція часу, $f(t/\tau)$=f(sh(t/τ), ch(t/τ)) чи $f(t/\tau)$=f(sin(t/τ), cos(t/τ)) [M. Daszkiewicz, Phys. Scripta **93**, 085202 (2018)].

Ми узагальнили алгебру (78) для координат та імпульсів різних частинок та показали, що залежність параметра некомутативності $\theta_{ij}^{(a)}$ від маси частинки m_a

$$\theta_{ij}^{(a)} m_a = \gamma_{ij} = \text{const}, \tag{79}$$

(константи γ_{ij} є однаковими для різних частинок) дозволяє відновити незалежність координат центра мас від імпульсів відносного руху; розглядати некомутативні координати, як кінематичні змінні; зберегти принцип еквівалентності.

Отже, на основі ідеї про те, що параметри алгебр, які описують квантований простір, залежать від маси, можна розв'язати важливі проблеми у некомутативному просторі типу Лі, у просторі з деформацією кручення. Також, як було показано у попередніх розділах роботи, залежність параметрів деформованих алгебр від маси важлива у просторі з деформованою алгеброю Снайдера, у просторі з деформованою алгеброю Кемпфа, квантованому фазовому просторі канонічного типу. Отримані результати дозволяють зробити висновок, що ідея про те, що параметри деформованих алгебр є різні для різних частинок та визначаються їхніми масами, є важлива для побудови послідовної теорії квантованого простору зі збереженими фундаментальними законами та принципами.

У **сьомому розділі** досліджено зв'язок нулів кореляційних функцій бозе-газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом з нулями статистичної суми. Розглянуто таку деформацію комутаційного співвідношення для координати та імпульсу:

$$[X, P] = i\hbar(1 + \alpha X^2 + \beta P^2), \tag{80}$$

де α, β – константи $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Для $\alpha\beta < 1/\hbar^2$ деформація описує простір з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом. Деформована алгебра для операторів координати та імпульсу (80) пов'язана з q-деформованою алгеброю для бозонних операторів породження та знищення a, a^+

$$[a, a^+]_{\mathrm{q}} = aa^+ - qa^+a = 1, \tag{81}$$

де q – параметр деформації, який визначається через параметри α, β як

$$q = \frac{1 + \hbar\sqrt{\alpha\beta}}{1 - \hbar\sqrt{\alpha\beta}}, \tag{82}$$

[C. Quesne, K. A. Penson, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **313**, 29 (2003)].

Розглянуто систему N бозе частинок на s рівнях ϵ_i ($i=1,2..s$) у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (q-деформований бозе-газ). Гамільтоніан системи має вигляд:

$$H = \sum_{i=1}^{s} \epsilon_i a_i^+ a_i, \tag{83}$$

де оператори породження на знищення a_i, a_i^+ задовольняють q-деформовані комутаційні співвідношення (81). Досліджено двочасові кореляційні функції q-деформованого бозе-газу

$$\langle \prod_{j=1}^{s} a_j^+(t_1)\, a_j(t_2) \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \mathrm{Tr} e^{-\beta H} a_1^+(t_1) a_1(t_2) \dots a_s^+(t_1) a_s(t_2), \tag{82}$$

$$\mathrm{Z}(\beta) = \mathrm{Tr} e^{-\beta H}, \quad \beta = \frac{1}{kT}, \;\; a_j(t) = e^{iHt/\hbar} a_j e^{-iHt/\hbar}.$$

Ввівши комплексну температуру

$$\tilde{\beta} = \beta - i\left(1 - \frac{1}{q}\right)\frac{\tau}{\hbar}, \quad \tau = t_1 - t_2, \tag{83}$$

кореляційні функції переписано у такому вигляді:

$$\langle \prod_{j=1}^{s} a_j^+(t_1)\, a_j(t_2) \rangle = e^{i\sum_j \epsilon_j \tau/q\hbar} \frac{1}{Z(\beta)} \mathrm{Tr} e^{-\tilde{\beta} H} \prod_{j=1}^{s} a_j^+ a_j. \tag{84}$$

Важливо зазначити, що уявна частина комплексної температури появляється через квантованість простору, а також пов’язана з еволюцією системи.

Звернімо увагу, що знайдена рівність (84) пов’язує нулі статистичної суми (нулі Фішера) з експериментально спостережуваними величинами (нулями кореляційних функцій). Тому результат (84) дає нові можливості для спостереження нулів Фішера. Нещодавно q-деформований осцилятор був експериментально реалізований з використанням коливального контуру [J. Batouli M. E. Baz, A. Maaouni A. Phys. Lett. A. **379**, 1619 (2015)]. Тому ми сподіваємося, що отриманий результат (84) відкриє можливість експериментального спостереження нулів Фішера для системи, описаної у роботі [J. Batouli M. E. Baz, A. Maaouni A. Phys. Lett. A. **379**, 1619 (2015)].

Проаналізовано нулі кореляційних функцій та нулі Фішера для дворівневої системи. Нулі Фішера та нулі статистичної суми у цьому випадку представлено на рис. 1.

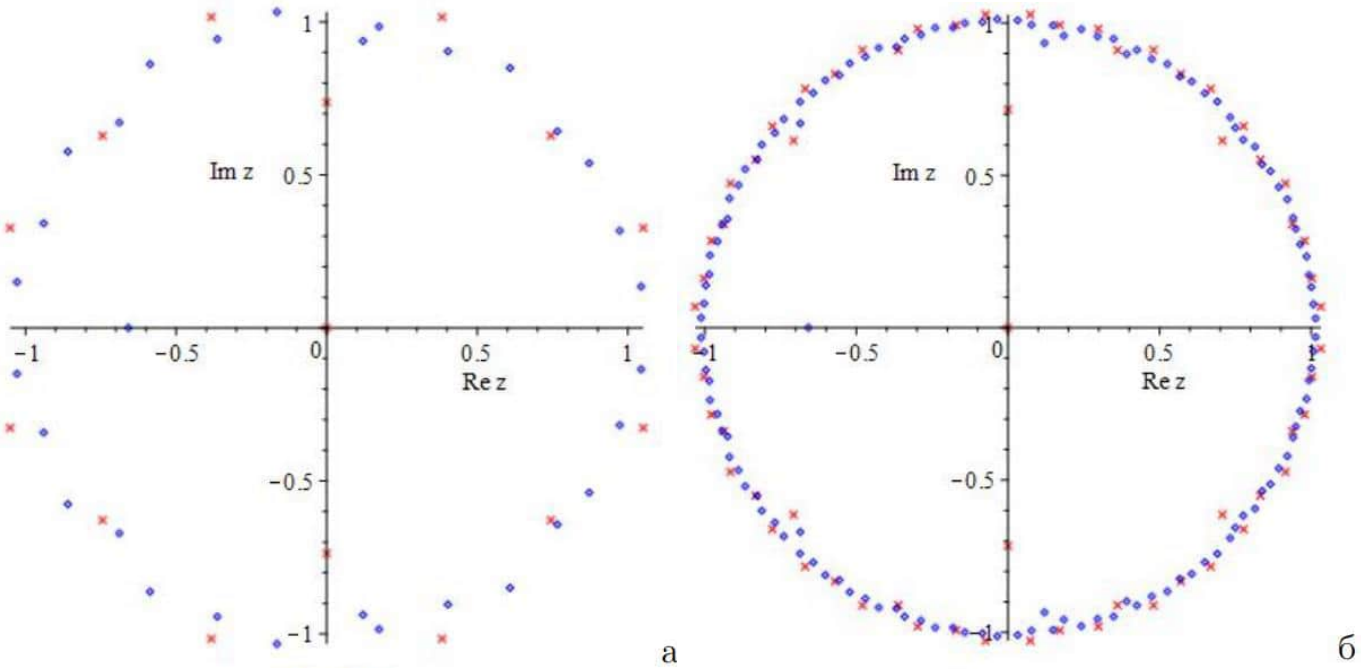

Рис. 1 Нулі Фішера (позначені хрестиками) та нулі кореляційної функції (позначені колами) для q = 2, ϵ_2 = 0 (а) N = 5, (б) N = 7, на площині $z = \exp(-\tilde{\beta}\epsilon_1)$.

Зауважимо, що кількість нулів Фішера є більшою від числа частинок N. Це пов'язано з тим, що залежність енергії від кількості q-деформованих бозе частинок на заданому рівні є експоненційною.

Розглянуто систему N бозе-частинок, яка описується гамільтоніаном:

$$H = \sum_{i=1}^{s} \epsilon_i n_i + \gamma \sum_{i=1}^{s} n_i^2, \tag{85}$$

тут $n_i = a_i^+ a_i$ – оператор кількості частинок на i-тому рівні, a_i^+, a_i – оператори породження знищення частинки i-тому рівні, $[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$, ϵ_i – енергетичні рівні невзаємодіючих частинок, s – кількість рівнів, γ – константа взаємодії. Двочасові кореляційні функції системи записано як

$$\begin{gathered}
\langle a_j^+(t_1) a_j(t_2)\rangle = -\frac{i\hbar}{2\gamma}\frac{e^{\frac{i(\epsilon_j-\gamma)\tau}{\hbar}}}{Z}\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tau}, \\
\mathrm{Z} = \mathrm{Tr}e^{-\beta H}, \qquad \tilde{Z} = \mathrm{Tr}e^{-\beta \tilde{H}}, \quad \beta = \frac{1}{kT}, \\
\tilde{H} = \sum_{k=1}^{s} \tilde{\epsilon}_k n_k + \gamma \sum_{k=1}^{s} n_k^2, \\
\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k, \text{якщо } k \neq j, \qquad \tilde{\epsilon}_j = \epsilon_j - \frac{i2\gamma\tau}{\beta\hbar}.
\end{gathered} \tag{86}$$

Звернімо увагу, що у статистичній сумі $\tilde{Z}$ гамільтоніан $\tilde{H}$ містить комплексні параметри. Тому статистична сума $\tilde{Z}$ може мати нулі, які відомі у літературі, як

нулі Лі-Янга. Важливо зауважити, що відповідно до (86) ці нулі пов'язані з нулями кореляційної функції.

У розділі також розглянуто спінову систему з гамільтоніаном:

$$H_T = H + H_0 + H_{int},$$
$$H = H' - h\sum_{i=1}^{N}\sigma_j^z, \qquad H_0 = -h_0\sigma_0^z, \tag{87}$$
$$H_{int} = -\lambda\sigma_0^z\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z,$$

тут H' – гамільтоніан, який може бути гамільтоніаном Ізінга, Гайзенберґа чи іншим гамільтоніаном. Єдине обмеження на H', це виконання рівності:

$$\left[H', \sum_{i=1}^{N}\sigma_j^z\right] = 0. \tag{88}$$

Доданок H_{int} описує взаємодію пробного спіна-1/2 з системою (λ – константа зв'язку), H_0 – гамільтоніан пробного спіна в магнітному полі.

Знайдено зв'язок двочасової кореляційної функції зі статистичною сумою спінової системи у комплексному магнітному полі:

$$\langle\sigma_0^+(t+\tau)\sigma_0^-(t)\rangle = e^{(\beta h_0 - 2ih_0\tau/\hbar)}\frac{Z(\beta,\tilde{h})}{Z_T},$$
$$\sigma_0^{\pm} = \frac{\sigma_0^x \pm i\sigma_0^y}{2}, \qquad Z_T = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_T}, \tag{89}$$

де $Z(\beta,\tilde{h})$ – статистична сума з гамільтоніаном H (87). Магнітне поле $\tilde{h}$ має вигляд:

$$\tilde{h} = h + \lambda - \frac{i2\lambda\tau}{\beta\hbar}. \tag{90}$$

Відповідно до (89) нулі кореляційної функції є нулями статистичної суми $Z(\beta,\tilde{h})$ з гамільтоніаном H (87) в комплексному магнітному полі (90).

Отримані результати відкривають нові можливості експериментального спостереження нулів статистичної суми для бозе- та спінових систем.

На завершення дисертаційної роботи представлено **Висновки**, **Список використаних джерел**, а також **додаток** із списком публікацій за темою дисертації та інформацією про апробацію представлених результатів.

Основні результати та висновки дисертації

У роботі досліджено проблеми порушення фундаментальних законів та принципів у квантованому просторі. Побудовано алгебру, яка описує квантований фазовий простір зі збереженими симетрійними властивостями (симетрія відносно інверсії часу, сферична симетрія). Знайдено та проаналізовано вплив квантованості простору на властивості класичних та квантових систем.

Серед основних наукових результатів можна виділити такі:

– Знайдено умову на параметр алгебри Снайдера, при якій координати не залежать від маси та можуть розглядатися як кінематичні змінні; імпульси пропорційні до маси; координати та імпульси центра мас задовольняють співвідношення алгебри Снайдера; кінетична енергія є адитивною та незалежною від композиції; виконується слабкий принцип еквівалентності.
– Розв'язано проблеми опису руху макроскопічного тіла, порушення властивостей кінетичної енергії, порушення слабкого принципу еквівалентності у просторі з алгеброю Кемпфа у всіх порядках за параметрами деформації.
– Отримано вираз для мінімальної довжини у шестивимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу на основі розв'язків задачі на власні значення оператора квадрату довжини.
– Встановлено, що некомутативність імпульсів канонічного типу зумовлює залежність траєкторії вільної частинки від маси, залежність руху центра мас системи вільних частинок від відносного руху, ефект розлітання системи вільних частинок з однаковими початковими швидкостями.
– Запропоновано залежності параметрів координатної та імпульсної некомутативностей від маси, при яких некомутативні координати можуть розглядатися як кінематичні змінні; некомутативні імпульси пропорційні до маси; імпульс центра мас може бути означений, як інтеграл руху; траєкторія вільної частинки не залежить від її маси; виконується слабкий принцип еквівалентності; зберігаються властивості кінетичної енергії у квантованому фазовому просторі канонічного типу.
– Знайдено верхню межу для параметра імпульсної некомутативності, яка щонайменше на 10 порядків покращує (накладає сильніше обмеження на його величину) результати, відомі у літературі. Оцінку отримано на основі досліджень зсуву перигелію Меркурію з врахуванням особливостей опису руху макроскопічних тіл у некомутативному фазовому просторі.
– Встановлено вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів канонічного типу на параметр Етвеша для Землі та Місяця. Показано, що параметр Етвеша не дорівнює нулеві навіть у випадку рівності гравітаційної та інерційної мас.
– Знайдено точний вираз для спектру системи двох частинок з осциляторною взаємодією у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу.
– Отримано точний розв'язок для періоду руху по колу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Встановлено, що некомутативність координат та некомутативність імпульсів зумовлюють залежність періоду руху по колу від його напрямку.

- Побудовано алгебру з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, яка є інваріантна відносно інверсії часу, сферично-симетрична, еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу та не зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності.
- Запропоновано узагальнення сферично-симетричної алгебри канонічного типу для координат та імпульсів різних частинок, яке дозволяє розглядати співвідношення алгебри також для координат та імпульсів центра мас системи частинок.
- З точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей знайдено енергетичні рівні системи двох частинок з кулонівською взаємодією у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі. На основі отриманого результату проаналізовано вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на енергетичні рівні атома водню, мюонного атома водню, антипротонного гелію. Встановлено, що дослідження енергетичних рівнів антипротонного гелію дають можливість покращити оцінки для величини кванта простору.
- Знайдено енергетичні рівні симетричної мережі осциляторів у однорідному полі та ланцюжка осциляторів у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі.
- Отримано квантові та класичні рівняння руху у гравітаційному полі у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі. Запропоновано залежності тензорів координатної та імульсної некомутативностей від маси, при яких класичні рівняння руху у гравітаційному полі не залежать від маси, квантові рівняння руху залежать від відношення сталої Планка до маси, отже, відновлюється слабкий принцип еквівалентності.
- Розв'язано проблеми опису руху системи частинок та порушення слабкого принципу еквівалентності в рамках різних некомутативних алгебр Лі типу (комутатор координат пропорційний до часу, комутатор координат пропорційний координаті, узагальнена некомутативна алгебра). Знайдено умови на параметри алгебр, при яких комутаційні співвідношення для координат та імпульсів центра мас відповідають співвідношенням алгебри Лі типу, рух частинки (системи частинок) в гравітаційному полі не залежить від маси.
- Знайдено умову на параметр алгебри з деформацією кручення при якій розв'язується проблема кінематичних змінних, координати центра мас системи частинок не залежать від імпульсів відносного руху, зберігається слабкий принцип еквівалентності.
- Встановлено зв'язок нулів кореляційних функцій бозе-газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (q-деформованого бозе-газу), взаємодіючого бозе-газу, спінових систем з нулями статистичної суми.

На основі отриманих результатів запропоновано новий спосіб експериментального спостереження нулів Лі-Янга та нулів Фішера.

Результати, представлені у дисертації, можуть бути використаними для подальших досліджень фізичних систем в рамках теорії квантованого простору, побудованої на основі ідеї про деформацію комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів. Зокрема, важливим є продовження досліджень фізичних систем у квантованому просторі, який характеризується інваріантною відносно інверсії часу, сферично-симетричною некомутативною алгеброю.

У роботі встановлено, що ідея про те, що комутаційні співвідношення для координат та імпульсів частинки можуть залежати від маси є важливою для розв'язання фундаментальних проблем (проблеми опису руху макроскопічних тіл, проблеми порушення слабкого принципу еквівалентності) в рамках різних алгебр (алгебра Снайдера, алгебра Кемпфа, алгебра з канонічними некомутативностями координат та імпульсів, некомутативна алгебра Лі типу, алгебра з деформацією кручення). Це підтверджує важливість цієї ідеї та обґрунтовує її використання у подальших дослідженнях фізичних систем у квантованому просторі, які можуть відбуватися у таких напрямках: узагальнення результатів дослідження на випадок релятивістських багаточастинкових систем, визначення одно- та багато-частинкових фізичних систем на які квантованість простору має особливий вплив з метою експериментального підтвердження теорії квантованого простору з деформованими комутаційними співвідношеннями для координат та імпульсів.

Основні результати дисертації опубліковано в таких роботах:

Статті у журналах, індексованих наукометричними базами SCOPUS та Web of Science

[1] Gnatenko Kh. P. Parameters of noncommutativity in Lie-algebraic noncommutative space // *Phys. Rev. D.* 2019. Vol. 99, No. 2. Art. 026009. 9 p.

[2] Gnatenko Kh. P. Features of description of composite system's motion in twist-deformed spacetime // *Mod. Phys. Lett. A.* 2019. Vol. 34, No. 9. Art. 1950071. 9 p.

[3] Gnatenko Kh. P., Samar M. I., Tkachuk V. M. Time-reversal and rotational symmetries in noncommutative phase space // *Phys. Rev. A.* 2019. Vol. 99, No. 1. Art. 012114. 6 p.

[4] Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Upper bound on the momentum scale in noncommutative phase space of canonical type // *EPL (Europhysics Letters).* 2019. Vol. 127, No. 2. Art. 20008. 7 p.

[5] Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Minimal length estimation on the basis of studies of the Sun-Earth-Moon system in deformed space // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2019. Vol. 28, No. 8. Art. 1950107. 13 p.

[6] Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Macroscopic body in the Snyder space and minimal length estimation // *EPL (Europhysics Letters).* 2019. Vol. 125, No. 5. Art. 50003. 5 p.

[7] Gnatenko Kh. P. System of interacting harmonic oscillators in rotationally invariant noncommutative phase space // *Phys. Lett. A.* 2018. Vol. 382, No. 46. P. 3317-3324.

[8] Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V. M. Lee-Yang zeros and two-time spin correlation function // *Physica A. Stat. Mech. Appl.* 2018. Vol. 509. P. 1095-1101.

[9] Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Composite system in rotationally invariant noncommutative phase space // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2018. Vol. 33, No. 7. Art. 1850037. 21 p.

[10] Gnatenko Kh. P. Rotationally invariant noncommutative phase space of canonical type with recovered weak equivalence principle // *EPL (Europhysics Letters).* 2018. Vol. 123, No. 5. Art. 50002. 7 p.

[11] Gnatenko Kh. P., Laba H. P., Tkachuk V. M. Features of free particles system motion in noncommutative phase space and conservation of the total momentum // *Mod. Phys. Lett. A.* 2018. Vol. 33, No. 23. Art. 1850131. 12 p.

[12] Gnatenko Kh. P., Shyiko O. V. Effect of noncommutativity on the spectrum of free particle and harmonic oscillator in rotationally invariant noncommutative phase space // *Mod. Phys. Lett. A.* 2018. Vol. 33, No. 16. Art. 1850091. 11 p.

[13] Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Influence of noncommutativity on the motion of Sun-Earth-Moon system and the weak equivalence principle // *Int. J. Theor. Phys.* 2018. Vol. 57, No. 11. P. 3359-3368.

[14] Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V. M. Two-time correlation functions and the Lee-Yang zeros for an interacting Bose gas // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, No. 3. Art. 032116. 6 p.

[15] Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Weak equivalence principle in noncommutative phase space and the parameters of noncommutativity // *Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 381, No. 31. P. 2463-2469.

[16] Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Noncommutative phase space with rotational symmetry and hydrogen atom // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2017. Vol. 32, No. 26. Art. 1750161. 15 p.

[17] Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V. M. Time correlation functions and Fisher zeros for q-deformed Bose gas // *EPL (Europhysics Letters).* 2017. Vol. 120, No. 3. Art. 30004. 6 p.

[18] Gnatenko Kh. P. Kinematic variables in noncommutative phase space and parameters of noncommutativity // *Mod. Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 32, No. 31. Art. 1750166. 12 p.

[19] Gnatenko Kh. P. Harmonic oscillator chain in noncommutative phase space with rotational symmetry // *Ukr. J. Phys.* 2019. Vol. 64, No. 2. P. 131-136.

[20] Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Two-particle system with harmonic oscillator interaction in noncommutative phase space // *J. Phys. Stud.* 2017. Vol. 21, No. 3. Art. 3001. 6 p.

[21] Гнатенко Х. П., Морозко О. О., Криницький Ю. С. Рух частинки у гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу та слабкий принцип еквівалентності // *Журн. фіз. дослідж.* 2018. Т. 22, №1. Ст. 1001. 6 с.

[22] Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Length in a noncommutative phase space // *Ukr. J. Phys.* 2018. Vol. 63, No. 2. P. 102-109.

[23] Гнатенко Х. П., Ткачук В. М. Багаточастинкова система у сферично-симетричному просторі з канонічною некомутативністю координат // *Журн. фіз. дослідж.* 2017. Т. 21, №4. Ст. 4002. 7 с.

Статті у фахових реферованих журналах

[24] Гнатенко Х. П. Особливості опису системи частинок у двовимірному квантованому просторі з некомутативністю координат канонічного типу // *Вісн. Львів. ун ту. Сер. фіз.* 2017. Вип. 53. С. 22-29.

Монографія

[25] Гнатенко Х. П. Фізичні проблеми у некомутативному просторі. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2017. 128 с. (розділ 1 (підрозділ 1.3), розділ 4, розділ 5 (підрозділи 5.3), розділ 8).

Тези доповідей на конференціях

[26] Gnatenko Kh. P. Time-dependent correlation functions of q-deformed Bose gas and Fisher zeros // The 5th Conference "Statistical Physics: Modern Trends and Applications", dedicated to the 110th anniversary of the birth of M. M. Bogolyubov, 3-6 July 2019, Lviv, Ukraine: Programme and Abstracts. P. 109.

[27] Гнатенко Х. Вплив квантованості простору на властивості багаточастинкових систем // 19-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 13-14 червня 2019. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. С. 16.

[28] Gnatenko Kh. Samar M. Time reversal invariant noncommutative algebra of canonical type // International Conference of Students and Young Researchers in Theoretical and Experimental Physics "Heureka-2019", May 14-16, 2019. Lviv, Ukraine: Book of Abstracts. P. E6.

[29] Gnatenko Kh. Influence of space quantization on the planetary motion and minimal length estimation // International Conference of Students and Young Researchers in Theoretical and Experimental Physics "Heureka-2019", May 14-16, 2019. Lviv, Ukraine: Book of Abstracts. P. G2.

[30] Gnatenko Kh. Parameters of noncommutative algebra and fundamental problems in quantum space [Різдвяні дискусії 2019, Львів, 10-11 січня 2019] // *Журн. фіз. дослідж.* 2019. Т. 23, №1. С. 1998-2.

[31] Gnatenko Kh. P. Effect of noncommutativity of coordinates and noncommutativity of momenta on free particle system motion [Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 03-04 July 2018] // *J. Phys. Stud*. 2018. Vol. 22, No. 3. Art. 3998. P. 4-5.

[32] Гнатенко Х. П. Фізичні системи у сферично-симетричному квантовому просторі з некомутативністю координат на некомутативністю імпульсів // 18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 7-8 червня 2018. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. С. 37.

[33] Гнатенко Х. Екзотичні атоми у квантованому просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів [Різдвяні дискусії 2018, Львів, 11-12 січня 2018] // *Журн. фіз. дослідж.* 2018. Т. 22, №1. С. 1998-8.

[34] Gnatenko Kh. P. Parameters of noncommutativity in noncommutative phase space // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv, Zielona Góra - October 16-19 2017: Abstracts. P. 3-4.

[35] Гнатенко Х. П., Ткачук В. М. Вплив квантованості простору на рух системи Сонце-Земля-Місяць та принцип еквівалентності // Тези IX наукової конференції "Вибрані питання астрономії та астрофізики", присвяченої пам'яті Богдана Бабія (1936-1993), 1-5 жовтня 2018 р. Львів, 2018. С. 64-65.

[36] Гнатенко Х. Обмеження на довжину площу та об'єм у некомутативному фазовому просторі // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2017", Львів, 16-18 травня 2017 р.: Тези доповідей. С. Е6.

[37] Гнатенко Х. П. Принцип еквівалентності в некомутативному фазовому просторі [Різдвяні дискусії 2017, Львів, 11-12 січня 2017] // *Журн. фіз. дослідж.* 2017. Т. 21, №1/2. С. 1998-3-4.

Анотація

Гнатенко Х. П. Вплив квантованості простору на властивості класичних та квантових систем. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика, Львівський національний університет імені Івана Франка, МОН України, Львів, 2020.

Робота присвячена дослідженням впливу особливостей структури простору на планківських масштабах на властивості квантових та класичних систем. У дисертації вивчається теорія квантованого простору, побудована на основі ідеї деформації звичних комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів.

Встановлено, що ідея про зв'язок параметрів деформованих алгебр з масою відкриває можливість побудови теорії квантованого простору зі збереженими фундаментальними законами та принципами. Важливість цієї ідеї підтверджується кількістю деформованих алгебр (алгебра Снайдера, алгебра Кемпфа, алгебра канонічного типу, некомутативна алгебра Лі типу, алгебра з деформацією кручення) та числом результатів (збереження властивостей кінетичної енергії,

розв’язання проблеми кінематичних змінних, збереження пропорційності імпульсів масі, відновлення принципу еквівалентності, незалежність руху вільної частинки від маси), які можуть бути отримані при її розгляді. Досліджено симетрійні властивості некомутативного фазового простору. Побудовано сферично-симетричну алгебру, яка є інваріантна відносно інверсії часу та не зумовлює порушення принципу еквівалентності.

Знайдено вплив квантованості простору на властивості фізичних систем (вільна частинка, симетрична мережа гармонічних осциляторів, ланцюжок осциляторів, атом водню, антипротонний гелій). Досліджено вплив некомутатавності координат та некомутативності імпульсів на рух системи Сонце-Земля-Місяць та зсув перигелію Меркурію. Отримано верхню межу для параметра імпульсної некомутативності, яка щонайменше на 10 порядків покращує результати, представлені у літературі.

Знайдено зв’язок нулів кореляційних функцій бозе-газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (q-деформованого бозе-газу) з нулями статистичної суми. Встановлено нові можливості експериментального спостереження нулів статистичної суми, які мають фундаментальну важливість у статистичній фізиці.

Ключові слова: квантований фазовий простір, алгебра Снайдера, алгебра Кемпфа, некомутативна алгебра Лі типу, мінімальна довжина, мінімальний імпульс, слабкий принцип еквівалентності, симетрія відносно інверсії часу, сферична симетрія, екзотичні атоми, симетрична мережа осциляторів, ланцюжок гармонічних осциляторів, нулі статистичної суми, властивості кінетичної енергії, проблема макроскопічного тіла.

Аннотация

Гнатенко Х. П. Влияние квантованности пространства на свойства классических и квантовых систем. – Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика, Львовский национальный университет имени Ивана Франко, МОН Украины, Львов, 2020.

Работа посвящена исследованию влияния особенностей структуры пространства на планковских масштабах на свойства квантовых и классических систем. В диссертации изучается теория квантованного пространства, построенная на основе идеи деформации привычных коммутационных соотношений для операторов координат и операторов импульсов.

Установлено, что идея о связи параметров деформированных алгебр с массой открывает возможность построения теории квантованного пространства с сохранением фундаментальных законов и принципов. Важность этой идеи

подтверждается количеством деформированных алгебр (алгебра Снайдера, алгебра Кемпфа, алгебры канонического типа, некоммутативная алгебра типа Ли, алгебра с деформацией кручения) и числом результатов (сохранение свойств кинетической энергии, решения проблемы кинематических переменных, сохранение пропорциональности импульсов массе, восстановление принципа эквивалентности, независимость движения свободной частицы от массы), которые могут быть получены при ее рассмотрении. Исследованы симметричние свойства некоммутативного фазового пространства. Построена сферически-симметричная алгебра, которая является инвариантной относительно инверсии времени и не вызывает нарушения принципа эквивалентности.

Найдено влияние квантованости пространства на свойства физических систем (свободная частица, симметричная сеть гармонических осцилляторов, цепочка осцилляторов, атом водорода, антипротонный гелий). Исследовано влияние некомутатавности координат и некоммутативности импульсов на движение системы Солнце-Земля-Луна, смещение перигелия Меркурия. Получена верхняя граница для параметра импульсной некоммутативности, которая минимум на 10 порядков улучшает результаты, представленые в литературе.

Найдена связь нулей корреляционных функций бозе-газа в пространстве с минимальной длиной и минимальным импульсом (q-деформированного бозе-газа) с нулями статистической суммы. Установлены новые возможности экспериментального наблюдения нулей статистической суммы, которые имеют фундаментальное значение в статистической физике.

Ключевые слова: квантованное фазовое пространство, алгебра Снайдера, алгебра Кемпфа, некоммутативная алгебра Ли типа, минимальная длина, минимальной импульс, слабый принцип эквивалентности, симметрия относительно инверсии времени, сферическая симметрия, экзотические атомы, симметричная сеть осцилляторов, цепочка гармонических осцилляторов, нули статистической суммы, свойства кинетической энергии, проблема макроскопического тела.

Abstract

Gnatenko Kh. P. Effect of space quantization on the properties of classical and quantum systems. – Manuscript copyright.

Thesis for a Doctor of Physical and Mathematical Sciences Degree, specialty 01.04.02 Theoretical physics. – Ivan Franko National University of Lviv, Ministry of Science and Education of Ukraine, Lviv, 2020.

The work is devoted to studies of influence of features of space structure on the Planck scale on the properties of quantum and classical systems. Significant increasing of interest to such studies in the last years is caused by the development of the String Theory and Quantum Gravity. In the work, the theory of quantum space constructed on

the basis of the idea that the ordinary commutation relations for operators of coordinates and momenta can be deformed was studied. Noncommutative algebras of canonical type, Lie type, and nonlinear deformed algebras were considered.

Properties of the kinetic energy of a macroscopic body, independence of coordinates of mass, the weak equivalence principle were recovered in a space which is characterized by nonrelativistic Snyder algebra and in the space with deformed Kempf algebra.

We obtained that in the case when parameters of coordinate noncommutativity are proportional inversely to mass and parameters of momentum noncommutativity are proportional to mass the noncommutative coordinates do not depend on mass and can be considered as kinematic variables, the properties of the kinetic energy are preserved, the problem of description of motion of a composite system is solved (the total momentum can be introduced as integrals of motion, the motion of the center-of-mass is independent of the relative motion), the weak equivalence principle is recovered, the trajectory of motion of free particle does not depend on mass.

The motion of the Sun-Earth-Moon system was studied in noncommutative phase space of canonical type and the corrections to the Eötvös-parameter for Earth and Moon caused by noncommutativity were analyzed. On the basis of studies of perihelion shift of the Mercury planet with taking into account features of description of motion of a macroscopic body in noncommutative phase space the upper bound for the parameter of momentum of noncommutativity which at least 10 orders less than results presented in literature was obtained.

The problem of violation of the time reversal and rotational symmetries was studied in noncommutative phase space of canonical type. We found that because of noninvariance of noncommutative algebra upon time reversal the transformation of coordinates and momenta upon time reversal depend on their representation, period of the circular motion depends on its direction. Noncommutative algebra which is rotationally-invariant, time reversal invariant and equivalent to the noncommutative algebra of canonical type was constructed. It was found that idea to relate parameters of noncommutativity with mass is also important for solving the problem of description of motion of many-particle system and problem of violation of the equivalence principle in rotationally-invariant noncommutative phase space.

The spectrum of system of interacting harmonic oscillators (symmetric network of harmonic oscillators, harmonic oscillator chain) was obtained in the noncommutative phase space with rotational symmetry. It was shown that noncommutativity of coordinates and noncommutativity of momenta affect on the frequencies of the systems.

It was found that noncommutativity of coordinates better appears in spectrum of atoms with large reduced mass, the influence of momentum noncommutativity is bigger in the case of atoms with small reduced mass. The influence of noncommutativity on the spectrum of the hydrogen atom and exotic atoms (muonic hydrogen, antiprotonic helium) was found and analyzed. On the basis of comparison of obtained results with experimental

ones the upper bounds for the parameter of coordinate noncommutativity and parameter of momentum noncommutativity were found. It was concluded that studies of antiprotonic helium open good possibilities for estimation of the minimal length.

The problem of description of motion of macroscopic body and the problem of violation of the equivalence principle in a space with noncommutative algebra of Lie type was solved due to relation of parameters of noncommutativity with mass. Therefore we concluded that the idea of relation of parameters with mass opens possibility to build theory of quantum space with preserved fundamental laws and principles. Importance of this idea is justified by the number of deformed algebras and number of results that can be obtained due to its consideration.

It was found that zeros of the correlation functions of Bose gas in a space with minimal length and minimal momentum (q-deformed Bose gas) are related with zeros of partition function (Fisher zeros). Complex temperature is caused by q-deformation and evolution of correlation function. Similar relation of zeros of partition function with zeros of correlation functions was found for the interacting Bose gas and for spin systems in the ordinary space. The obtained results open new possibilities for experimental observation of zeros of partition function (Fisher and Lee-Yang zeros), which have fundamental importance in statistical physics.

Keywords: quantized phase space, Snyder algebra, Kempf algebra, noncommutative algebra of Lie type, minimal length, minimal momentum, weak equivalence principle, time reversal symmetry, rotational symmetry, exotic atoms, symmetric network of harmonic oscillators, harmonic oscillator chain, zeros of partition function, properties of the kinetic energy, problem of macroscopic body.