Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Гнатенко Христина Павлівна

УДК 530.145 + 531.1

Дисертація

ВПЛИВ КВАНТОВАНОСТІ ПРОСТОРУ НА ВЛАСТИВОСТІ КЛАСИЧНИХ І КВАНТОВИХ СИСТЕМ

01.04.02 — Теоретична фізика
10 — Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

Х. П. Гнатенко

Науковий консультант: Ткачук Володимир Михайлович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

ЛЬВІВ — 2020

Зміст

АНОТАЦІЯ

Гнатенко Х. П. Вплив квантованості простору на властивості класичних і квантових систем. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика». – Львівський національний університет імені Івана Франка, МОН України, Львів, 2020.

Робота присвячена дослідженням впливу особливостей структури простору на планківських масштабах на властивості квантових та класичних систем. Значне зростання зацікавлення до таких досліджень у останні роки зумовлене розвитком теорії струн, а також теорії квантової гравітації. Відповідно до цих теорій існує мінімальна довжина, квант простору, яка має порядок планківської довжини. Вивчення фізичних систем у квантованому просторі є актуальними, оскільки вони дозволяють отримати обмеження на мінімальну довжину, знайти ефекти квантованості простору у фізиці одно- та багаточастинкових систем, встановити властивості фізичних систем на які квантованість простору має особливий вплив.

У роботі вивчається теорія квантованого простору, побудована на основі ідеї про те, що звичні комутаційні співвідношення для операторів координат та операторів імпульсів можуть бути деформованими. Розглядаються некомутативні алгебри канонічного типу, Лі типу та нелінійні деформовані алгебри. Деформація комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів зумовлює ряд фундаментальних проблем, серед яких: порушення симетрійних властивостей, порушення принципу еквівалентності, неадитивність кінетичної енергії, залежність кінетичної енергії від композиції, проблема

опису руху макроскопічних тіл, проблема кінематичних змінних. У роботі вивчено ці проблеми в рамках різних деформованих алгебр та запропоновано шляхи для їх розв'язання.

Досліджено властивості кінетичної енергії макроскопічного тіла у просторі, який характеризується нерелятивістською алгеброю Снайдера. Встановлено, що деформація комутаційних співвідношень для координат та імпульсів зумовлює порушення властивостей кінетичної енергії. Знайдено, що у випадку, коли координати та імпульси частинок задовольняють співвідношення алгебри Снайдера з параметрами деформації, які є обернено пропорційним до їх маси, кінетична енергія є адитивною та не залежить від композиції. Крім цього, показано, що у випадку обернено пропорційної залежності параметра деформації від маси комутаційні співвідношення для координат та імпульсів центра мас макроскопічного тіла відповідають співвідношенням алгебри Снайдера, роз'язується проблема кінематичних змінних, а також відновлюється слабкий принцип еквівалентності у всіх порядках за параметрами деформації. Знайдено, що отримані результати можна узагальнити на випадок простору з деформованою алгеброю Кемпфа.

Отримано вираз для мінімальної довжини у шестивимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу на основі розв'язків задачі на власні значення оператора квадрата довжини. Досліджено представлення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів. Знайдено, що у випадку, коли параметри координатної некомутативності обернено пропорційні до маси та параметри імпульсної некомутативності пропорційні до маси, некомутативні координати не залежать від маси та можуть розглядатися як кінематичні змінні, а також некомутативні імпульси пропорційні до маси. Встановлено, що некомутативність імпульсів зумовлює залежність траєкторії руху віль-

ної частинки від маси, а також ефект розлітання системи вільних частинок з однаковими початковими швидкостями. Показано, що навіть для системи вільних частинок відносний рух впливає на рух центра мас. Знайдено, що у випадку пропорційності параметра імпульсної некомутативності, який відповідає частинці, до її маси, траєкторія руху вільних частинок у квантованому фазовому просторі канонічного типу не залежить від їх маси та рух центра мас системи є незалежним від відносного руху. Також встановлено, що у випадку залежності параметрів некомутативної алгебри від маси імпульс центра мас може бути означений як інтеграл руху у некомутативному фазовому просторі канонічного типу.

На основі досліджень зсуву перигелію Меркурію з врахуванням особливостей опису руху макроскопічного тіла у некомутативному фазовому просторі отримано верхню межу для параметра імпульсної некомутативності, яка щонайменше на 10 порядків покращує результати, представлені у літературі. Ми прийшли до висновку, що дослідження впливу імпульсної некомутативності на рух макроскопічних тіл дають можливість отримати сильне обмеження на величину мінімального імпульсу у квантованому фазовому просторі канонічного типу. Розглянуто систему Сонце-Земля-Місяць та знайдено поправки до параметра Етвеша для Землі та Місяця, зумовлені некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Отримано залежності параметрів некомутативної алгебри від маси, при яких параметр Етвеша дорівнює нулю та виконується слабкий принцип еквівалентності.

Досліджено проблему порушення симетрії відносно інверсії часу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Ми показали, що через неінваріантність некомутативної алгебри відносно інверсії часу перетворення для координат та імпульсів при інверсії часу залежать

від їх представлення. Як приклад, розглянуто задачу про рух по колу та знайдено її точний розв'язок у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Отримано, що період руху по колу залежить від його напрямку. На основі ідеї про узагальнення параметрів координатної та імпульсної некомутативностей побудовано некомутативну алгебру, яка є інваріантна відносно інверсії часу, сферично-симетрична, а також еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу.

Отримано вирази для мінімальної довжини та мінімального імпульсу у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі. Встановлено, що у випадку, коли тензор координатної некомутативності обернено пропорційний до маси та тензор імпульсної некомутативності пропорційний до маси, комутаційні співвідношення для координат та імпульсів центра мас системи частинок відповідають співвідношенням сферично-симетричної некомутативної алгебри. Також при таких залежностях тензорів некомутативності від маси класичні рівняння руху частинки (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі не залежать від маси, а квантові рівняння руху залежать від відношення сталої Планка до маси, як і у просторі зі звичними комутаційними співвідношеннями для операторів координат та операторів імпульсів. Отже, ідея залежності параметрів некомутативної алгебри від маси є також важлива для розв'язання проблем опису руху багаточастинкової системи, порушення принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі.

Знайдено вплив некомутативності на спектр вільної частинки з точністю до другого порядку за параметром імпульсної некомутативності. Встановлено, що спектр вільної частинки відповідає спектру гармонічного осцилятора з частотою, яка визначається параметром ім-

пульсної некомутативності. Отримано та досліджено енергетичні рівні симетричної мережі гармонічних осциляторів у однорідному полі та ланцюжка осциляторів. Знайдено, що некомутативність координат та некомутативність імпульсів впливають на частоти системи взаємодіючих осциляторів чи системи частинок з осциляторною взаємодією. Спектр центра мас системи частинок з осциляторною взаємодією у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі не є неперервним, а відповідає спектру гармонічного осцилятора у звичному просторі.

Отримано поправки до енергетичних рівнів двочастинкової системи з кулонівською взаємодією з точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей. Встановлено, що некомутативність координат краще проявляється у спектрах атомів з великою зведеною масою, вплив імпульсної некомутативності є більшим у випадку атомів з малою зведеною масою. Знайдено та проаналізовано поправки до енергетичних рівнів атома водню та екзотичних атомів (мюонний атом водню, антипротонний атом гелію). На основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними отримано верхні межі для параметрів координатної та імпульсної некомутативності. Ми прийшли до висновку, що вплив координатної некомутативності проявляється краще у спектрі антипротонного атома гелію ніж у спектрі атома водню. Отже, дослідження антипротонного атома гелію відкривають можливості для покращення оцінки мінімальної довжини.

Розв'язано проблему опису руху макроскопічного тіла та проблему порушення слабкого принципу еквівалентності у просторі з некомутативною алгеброю Лі типу. Досліджено випадки, коли комутатор координат пропорційний до часу, комутатор координат пропорційний до координати та випадок узагальненої алгебри з некомутативністю

Лі типу. Знайдено залежності параметрів алгебри від маси, при яких комутаційні співвідношення для координат та імпульсів центра мас відповідають співвідношенням некомутативної алгебри Лі типу, а також рух частинки (тіла) у гравітаційному полі не залежить від її маси, а тому зберігається слабкий принцип еквівалентності. Також запропоновано умову на параметр алгебри з деформацією кручення при якій розв'язується проблема кінематичних змінних, координати центра мас не залежать від імпульсів відносного руху та зберігається слабкий принцип еквівалентності у квантованому просторі. На основі отриманих результатів ми прийшли до висновку, що ідея зв'язку параметрів деформації з масою відкриває можливість побудови теорії квантованого простору зі збереженими фундаментальними законами та принципами. Важливість цієї ідеї підтверджується кількістю деформованих алгебр та числом результатів, які можуть бути отримані при її розгляді.

Розглянуто алгебру з квадратичною деформацією комутаційних співвідношень для координат та імпульсів, яка описує простір з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом і пов'язана з q-деформованою алгеброю для операторів породження та знищення. Досліджено часові кореляційні функції q-деформованого бозе-газу. Встановлено, що нулі кореляційних функцій пов'язані з нулями статистичної суми при комплексній температурі (нулями Фішера). Комплексна температура появляється через q-деформацією комутаційних співвідношень для операторів породження та знищення (чи еквівалентно деформацію комутаційних співвідношень для координат та імпульсів, квантованість простору), а також через еволюцією кореляційної функції. Подібний зв'язок нулів статистичної суми з нулями кореляційних функцій знайдено також для взаємодіючого бозе-газу та для спінових систем у

звичному просторі. Отримані результати відкривають нові можливості експериментального спостереження нулів статистичної суми (нулів Лі-Янга, нулів Фішера), які мають фундаментальну важливість у статистичній фізиці.

Ключові слова: квантований фазовий простір, алгебра Снайдера, алгебра Кемпфа, некомутативна алгебра Лі типу, мінімальна довжина, мінімальний імпульс, слабкий принцип еквівалентності, симетрія відносно інверсії часу, сферична симетрія, екзотичні атоми, симетрична мережа осциляторів, ланцюжок гармонічних осциляторів, нулі статистичної суми, властивості кінетичної енергії, проблема макроскопічного тіла.

Список публікацій здобувача

Статті у журналах, які індексуються наукометричними базами SCOPUS та Web of Science

1. Gnatenko Kh. P. Parameters of noncommutativity in Lie-algebraic noncommutative space // *Phys. Rev. D.* 2019. Vol. 99, No. 2. Art. 026009. 9 p.

2. Gnatenko Kh. P. Features of description of composite system's motion in twist-deformed spacetime // *Mod. Phys. Lett. A.* 2019. Vol. 34, No. 9. Art. 1950071. 9 p.

3. Gnatenko Kh. P., Samar M. I., Tkachuk V. M. Time-reversal and rotational symmetries in noncommutative phase space // *Phys. Rev. A.* 2019. Vol. 99, No. 1. Art. 012114. 6 p.

4. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Upper bound on the momentum scale in noncommutative phase space of canonical type // *EPL (Europhysics Letters).* 2019. Vol. 127, No. 2. Art. 20003. 7 p.

5. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Minimal length estimation on the basis of studies of the Sun-Earth-Moon system in deformed space // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2019. Vol.28, No. 8. 13 p.

6. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Macroscopic body in the Snyder space and minimal length estimation // *EPL (Europhysics Letters).* 2019.Vol. 125, No. 5. Art. 50003. 5 p.

7. Gnatenko Kh. P. System of interacting harmonic oscillators in rotationally invariant noncommutative phase space // *Phys. Lett. A.* 2018. Vol. 382, No. 46. P. 3317-3324.

8. Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V. M. Lee-Yang zeros and two-time spin correlation function // *Physica A: Stat. Mech. Appl.* 2018. Vol. 509. P. 1095-1101.

9. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Composite system in rotationally invariant noncommutative phase space // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2018. Vol. 33, No. 7. Art. 1850037. 21 p.

10. Gnatenko Kh. P. Rotationally invariant noncommutative phase space of canonical type with recovered weak equivalence principle //*EPL (Europhysics Letters).* 2018. Vol. 123, No. 5. Art. 50002. 7 p.

11. Gnatenko Kh. P., Laba H. P., Tkachuk V. M. Features of free particles system motion in noncommutative phase space and conservation of the total momentum // *Mod. Phys. Lett. A.* 2018. Vol. 33, No. 23. Art. 1850131. 12 p.

12. Gnatenko Kh. P., Shyiko O. V. Effect of noncommutativity on the spectrum of free particle and harmonic oscillator in rotationally invariant noncommutative phase space // *Mod. Phys. Lett. A.* 2018. Vol.

33, No. 16. Art. 1850091. 11 p.

13. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Influence of noncommutativity on the motion of Sun-Earth-Moon system and the weak equivalence principle // *Int. J. Theor. Phys.* 2018. Vol. 57, No. 11. P. 3359-3368.

14. Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V. M. Two-time correlation functions and the Lee-Yang zeros for an interacting Bose gas // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, No. 3. Art. 032116. 6 p.

15. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Weak equivalence principle in noncommutative phase space and the parameters of noncommutativity // *Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 381, No. 31. P. 2463-2469.

16. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Noncommutative phase space with rotational symmetry and hydrogen atom // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2017. Vol. 32, No. 26. Art. 1750161. 15 p.

17. Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V. M. Time correlation functions and Fisher zeros for q-deformed Bose gas // *EPL (Europhysics Letters).* 2017. Vol. 120, No. 3. Art. 30004. 6 p.

18. Gnatenko Kh. P. Kinematic variables in noncommutative phase space and parameters of noncommutativity // *Mod. Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 32, No. 31. Art. 1750166. 12 p.

19. Gnatenko Kh. P. Harmonic oscillator chain in noncommutative phase space with rotational symmetry // *Ukr. J. Phys.* 2019. Vol. 64, No. 2. P. 131-136.

20. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Two-particle system with harmonic oscillator interaction in noncommutative phase space // *J. Phys. Stud.* 2017. Vol. 21, No. 3. Art. 3001. 6 p.

21. Гнатенко Х. П., Морозко О. О., Криницький Ю. С. Рух частинки у гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу та слабкий принцип еквівалентності // *Журн. фіз. дослідж.* 2018. Т. 22, №1. Ст. 1001. 6 с.

22. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Length in a noncommutative phase space // *Ukr. J. Phys.* 2018. Vol. 63, No. 2. P. 102-109.

23. Гнатенко Х. П., Ткачук В. М. Багаточастинкова система у сферично-симетричному просторі з канонічною некомутативністю координат // Журн. фіз. дослідж. 2017. Т. 21, №4. Ст. 4002. 7 с.

Статті у фахових реферованих журналах

24. Гнатенко Х. П. Особливості опису системи частинок у двовимірному квантованому просторі з некомутативністю координат канонічного типу // *Вісн. Львів. ун ту. Сер. фіз.* 2017. Вип. 53. С. 22-29.

Монографія

25. Гнатенко Х. П. Фізичні проблеми у некомутативному просторі. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2017. 128 с. (розділ 1 (підрозділ 1.3), розділ 4, розділ 5 (підрозділ 5.3), розділ 8).

Тези доповідей на конференціях

26. Gnatenko Kh. P. Parameters of noncommutativity in noncommutative phase space // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv, Zielona Góra - October 16-19 2017: Abstracts. P. 3-4.

27. Гнатенко Х. П. Принцип еквівалентності в некомутативному фазовому просторі [Різдвяні дискусії 2017, Львів, 11-12 січня 2017] // Журн. фіз. дослідж. 2017. Т. 21, №1/2. С. 1998-3-4.

28. Гнатенко Х. Обмеження на довжину площу та об'єм у некомутативному фазовому просторі // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2017", Львів, 16-18 травня 2017 р.: Тези доповідей. С. E6.

29. Гнатенко Х. Екзотичні атоми у квантованому просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів [Різдвяні дискусії 2018, Львів, 11-12 січня 2018] // Журн. фіз. дослідж. 2018. Т. 22, №1. С. 1998-8.

30. Гнатенко Х. П. Фізичні системи у сферично-симетричному квантовому просторі з некомутативністю координат на некомутативністю імпульсів // 18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 7-8 червня 2018. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. С. 37.

31. Gnatenko Kh. P. Effect of noncommutativity of coordinates and noncommutativity of momenta on free particle system motion [Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 03-04 July 2018] // J. Phys. Stud. 2018. Vol. 22, No. 3. Art. 3998. P. 4-5.

32. Гнатенко Х. П., Ткачук В. М. Вплив квантованості простору на рух системи Сонце-Земля-Місяць та принцип еквівалентності// Тези IX наукової конференції "Вибрані питання астрономії та астрофізики", присвяченої пам'яті Богдана Бабія (1936-1993), 1-5 жовтня 2018 р. Львів, 2018. С. 64-65.

33. Gnatenko Kh. Parameters of noncommutative algebra and fundamental problems in quantum space [Різдвяні дискусії 2019, Львів, 10-11 сі-

чня 2019] // Журн. фіз. дослідж. 2019. Т. 23, №1. С. 1998-2.

34. Gnatenko Kh., Samar M. Time reversal invariant noncommutative algebra of canonical type // International Conference of Students and Young Researchers in Theoretical and Experimental Physics "Heureka-2019", May 14-16, 2019. Lviv, Ukraine: Book of Abstracts. P. E6.

35. Gnatenko Kh. Influence of space quantization on the planetary motion and minimal length estimation // International Conference of Students and Young Researchers in Theoretical and Experimental Physics "Heureka-2019", May 14-16, 2019. Lviv, Ukraine: Book of Abst- racts. P. G2.

36. Гнатенко Х. Вплив квантованості простору на властивості багаточастинкових систем // 19-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 13-14 червня 2019. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. С. 16.

37. Gnatenko Kh. P. Time-dependent correlation functions of q-deformed Bose gas and Fisher zeros // The 5th Conference "Statistical Physics: Modern Trends and Applications", dedicated to the 110th anniversary of the birth of M.M. Bogolyubov, 3-6 July 2019, Lviv, Ukraine: Programme and Abstracts. P. 109.

ANNOTATION

Gnatenko Kh. P. Effect of space quantization on the properties of classical and quantum systems. – manuscript copyright. Thesis for a Doctor of Physical and Mathematical Sciences Degree, specialty 01.04.02 «Theoretical physics». – Ivan Franko National University of Lviv, Ministry of Science and Education of Ukraine, Lviv, 2020.

The work is devoted to studies of the influence of features of space structure on the Planck scale on the properties of quantum and classical systems. Significant increasing of interest to such studies in the last years is caused by the development of the String Theory and Quantum Gravity. According to these theories, the minimal length (quantum of space) exists which is of the order of the Planck length. Studies of physical systems in quantum space are actual because they give a possibility to find a restriction on the minimal length, to find effects of space quantization in physics of one- and many-particle physical systems, to find properties of physical systems on which space quantization has a special effect.

In the work, the theory of quantum space constructed on the basis of the idea that the ordinary commutation relations for operators of coordinates and momenta can be deformed is studied. Noncommutative algebras of canonical type, Lie type, and nonlinear deformed algebras are considered. Deformation of commutation relations for operators of coordinates and operators of momenta causes a list of fundamental problems among them violation of the symmetrical properties, violation of equivalence principle, nonadditivity of the kinetic energy, dependence of kinetic energy on composition, the problem of description of motion of macroscopic bodies, the problem of kinematic variables. In the work, these problems were studied in the frame of different algebras and the ways to solve these problems

were suggested.

Properties of the kinetic energy of a macroscopic body were examined in a space that is characterized by nonrelativistic Snyder algebra. It was found that the deformation of commutation relations for coordinates and momenta causes a violation of the properties of the kinetic energy. It was obtained that in the case when coordinates and momenta of a particle satisfy relations of the Snyder algebra with parameters of deformation which are proportional inversely to the mass, the kinetic energy is additive and does not depend on composition. Besides, it was shown that in the case of inverse proportionality of parameters of deformation to mass commutation relations for coordinates and momenta of macroscopic body correspond to relations of the Snyder algebra, the problem of kinematic variables is solved and the weak equivalence principle is recovered in all orders in the parameters of deformation. It was found that the obtained results can be generalized in the case of the Kempf algebra.

The expression for the minimal length in six-dimensional noncommutative phase space of canonical type was found on the basis of solution of the problem for eigenvalues of the squared length operator. Representation for noncommutative coordinates and noncommutative momenta was examined. It was found that in the case when parameters of coordinate noncommutativity are proportional inversely to mass and parameters of momentum noncommutativity are proportional to mass, noncommutative coordinates do not depend on mass and can be considered as kinematic variables, noncommutative momenta are proportional to mass. It was obtained that noncommutativity of momenta causes dependence of trajectory of motion of free particle on mass and also the effect of flying away of a system of free particles with the same initial velocities. It was shown that even for a system of free particles the relative motion effects on the motion

of the center-of-mass. It was found that in the case of proportionality of parameter of momentum noncommutativity, which corresponds to a particle, to its mass, trajectories of motion of free particles do not depend on their masses and also the motion of the center-of-mass of system of free particles is independent of the relative motion. Also, it was found that in the case of dependence of parameters of noncommutative algebra on mass the momentum of the canter-of-mass can be defined as an integral of motion in noncommutative phase space of canonical type.

On the basis of studies of the perihelion shift of the Mercury with taking into account features of description of motion of macroscopic body in noncommutative phase space the upper bound for the parameter of momentum of noncommutativity which at least on 10 orders improves results presented in the literature was obtained. We concluded that studies of macroscopic bodies in noncommutative phase space give possibility to find strong restrictions on the value of minimal momentum. The Sun-Earth-Moon system was considered in noncommutative phase space of canonical type and corrections to the E otvos-parameter for the Earth and the Moon caused by noncommutativity of coordinates and noncommutativity of momenta were found. It was obtained dependence of parameters of noncommutative algebra on mass on which the E otvos-parameter is equal to zero and the weak equivalence principle is satisfied.

The problem of violation of the time-reversal symmetry was studied in noncommutative phase space of canonical type. We found that because of noninvariance of noncommutative algebra upon time reversal the transformation of coordinates and momenta upon time-reversal depends on their representation. As an example, the problem of the circular motion was examined and the exact solution of this problem was found in noncommutative phase space of canonical type. It was obtained that the period of circular

motion depends on its direction. On the basis of the idea of generalization of parameters of coordinate and momentum noncommutativity, noncommutative algebra which is time-reversal invariant, rotationally-invariant, and equivalent to the noncommutative algebra of canonical type was constructed.

Expressions for the minimal length and minimal momentum in rotationally-invariant noncommutative phase space of canonical type were obtained. It was found that in the case when tensor of coordinate noncommutativity is proportional inversely to mass and tensor of momentum noncommutativity is proportional to mass commutation relations for coordinates and momenta of the center-of-mass of a system of particles correspond to relations of rotationally-invariant noncommutative algebra. Also, in the case of such dependencies of parameters of noncommutativity on mass classical equations of motion of a particle (a body) in gravitational field in rotationally-invariant noncommutative space do not depend on mass and quantum equations of motion of a particle in gravitational field depend on the ratio of the Planck constant and mass, as it is in a space with ordinary commutation relations for coordinates and momenta. So, the idea to relate parameters of noncommutativity with mass is also important for solving the problem of description of the motion of many-particle system and the problem of violation of the equivalence principle in rotationally-invariant noncommutative phase space.

Influence of noncommutativity on the spectrum of free particle is found up to the second order in the parameter of momentum noncommutativity. It was obtained that the spectrum of free particle corresponds to the spectrum of harmonic oscillator with frequency which is determined by the parameter of momentum noncommutativity. Also, the energy levels of the symmetric network of harmonic oscillators in uniform field, and

energy levels of harmonic oscillator chain were obtained and analyzed. It was found that noncommutativity of coordinates and noncommutativity of momenta affect on the frequencies of the systems of interacting oscillators or systems of particles with harmonic oscillator interaction. The spectrum of the center-of-mass of the system of particles with harmonic oscillator interaction in rotationally-invariant quantized phase space is not continuous, it corresponds to the spectrum of harmonic oscillator in the ordinary space.

Corrections to the energy levels of two-particle system with Coulomb interaction were found up to the second order in the parameters of noncommutativity. It was obtained that noncommutativity of coordinates better appears in spectrum of atoms with large reduced mass, influence of momentum noncommutativity is bigger in the case of atoms with small reduced mass. Corrections to the energy levels of the hydrogen atom and exotic atoms (muonic hydrogen, antiprotonic helium) were found and analyzed. On the basis of comparison of obtained results with experimental ones and the upper bounds for the parameter of coordinate noncommutativity and parameter of momentum, noncommutativity were found. We concluded that influence of coordinate noncommutativity better appears in the spectrum of antiprotonic helium than in the spectrum of hydrogen atom. So, studies of antiprotonic helium open possibilities for improvement of estimations of the minimal length.

The problem of description of motion of macroscopic body and the problem of violation of the weak equivalence principle in a space with noncommutative algebra of Lie type was studied. The cases when commutator for coordinates is proportional to time, commutator of coordinates is proportional to coordinate and the case of generalized algebra with noncommutativity of Lie type were examined. We found dependence of

the parameters of algebra on mass on which commutation relations for coordinates and momenta of the center-of-mass corresponds to relations of noncommutative algebra of Lie type and the motion of a particle (a body) in gravitational field does not depend on its mass, therefore the weak equivalence principle is preserved. Also it was proposed condition on the parameter of algebra with twist deformation on which problem of kinematic variables is solved, coordinates of the center-of-mass do not depend on momenta of the relative motion and the weak equivalence principle is preserved in quantized space. On the basis of the obtained results, we concluded that the idea of relation of parameters with mass opens possibility to build a theory of quantum space with preserved fundamental laws and principles. Importance of this idea is justified by the number of deformed algebras and number of results that can be obtained due to its consideration.

Noncommutative algebra with quadratic deformation of commutation relations for coordinates and momenta, which describes space with minimal length and minimal momenta and is related with q-deformed algebra for creation and annihilation operators was considered. Time-dependent correlation functions of q-deformed Bose gas were examined. It was found that zeros of the correlation functions are related to zeros of partition function at the complex temperature (Fisher zeros). The complex temperature appears because of the q-deformation of commutation relations for creation and annihilation operators (or equivalently because of deformation of commutation relations for coordinates and momenta, space quantization) and also because of the evolution of correlation function. Similar relation of zeros of partition function with zeros of correlation functions was found for the interacting Bose gas and for the spin systems in the ordinary space. The obtained results open new possibilities for experimental

observation of zeros of partition function (Fisher and Lee-Yang zeros), which have fundamental importance in statistical physics.

Keywords: quantized phase space, Snyder algebra, Kempf algebra, noncommutative algebra of Lie type, minimal length, minimal momentum, weak equivalence principle, time-reversal symmetry, rotational symmetry, exotic atoms, symmetric network of harmonic oscillators, harmonic oscillator chain, zeros of partition function, properties of the kinetic energy, problem of macroscopic body.

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження фізичних систем у квантованому просторі є важливими і актуальними на сьогодні, оскільки вони дозволяють знайти ефекти у властивостях класичних та квантових систем, зумовлені особливостями структури простору на планківських масштабах, а також дають можливість встановити властивості фізичних систем на які квантованість простору має найбільший вплив та запропонувати спосіб експериментального підтвердження теорії квантованого простору. На основі порівняння теоретичних результатів таких досліджень з високоточними експериментальними даними можна оцінити верхню межу для мінімальної довжини.

Багато уваги приділялося дослідженням простору з мінімальною довжиною, побудованого на основі ідеї деформації звичних комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів. Про це свідчить велика кількість публікацій з цієї тематики (див., для прикладу, одні з останніх робіт [1–9] та посилання в них). Ідея деформації комутаційних співвідношень випливає з теорії струн та теорії квантової гравітації [10–16]. Для опису особливостей структури простору на планківських масштабах було запропоновано різні деформовані алгебри. Багато уваги приділялося дослідженням фізичних проблем в рамках алгебри Кемпфа [17–19] (ця алгебра є узагальненням історично першої деформованої алгебри, запропонованої Снайде-

ром [20]), некомутативної алгебри канонічного типу [21–25], некомутативної алгебри Лі типу [26–29] та ін. Відомі деформовані алгебри для операторів координат та операторів імпульсів описують простір з мінімальною довжиною, проте вони не узгоджуються з фундаментальними законами та принципами. А саме, у просторах з алгебою Снайдера, алгеброю Кемпфа, алгеброю з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу, некомутативною алгеброю типу Лі існують проблеми порушення адитивності кінетичної енергії та її залежності від композиції. Звідси випливає, що в рамках теорій квантованого простору, побудованих на основі цих алгебр, порушується фундаментальний закон – закон збереження енергії. Також деформація комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів зумовлює проблему кінематичних змінних, порушення принципу еквівалентності. Зважаючи на важливість цих проблем, необхідним є пошук можливостей для їх розв'язання з метою побудови теорії квантованого простору зі збереженими фундаментальними законами та принципами.

Поряд із вище згаданими проблемами важливою проблемою, яка виникає в рамках різних деформованих алгебр, є проблема опису руху системи багатьох частинок з врахуванням квантованості простору на планківських масштабах. Припущення про те, що параметри деформованих алгебр для координат та імпульсів центра мас макроскопічного тіла, а також для координат та імпульсів елементарних частинок є однаковими, приводить до абсурдно малих результатів для мінімальної довжини, які є на багато порядків менші ніж довжина Планка [19, 30, 31]. Для прикладу, такі результати були отримані на основі досліджень зсуву перигелію Меркурію у просторі з алгеброю Снайдера [30, 31]. Автори статей [30, 31] зробили висновок, що теорія

квантованого простору з алгеброю Снайдера не може бути застосована на випадок дослідження макроскопічних тіл. Актуальним є узагальненення відомих алгебр, зокрема і алгебри Снайдера, для координат та імпульсів різних частинок, розв'язання проблеми опису руху центра мас макроскопічного тіла з врахуванням мінімальної довжини, оскільки це дозволить побудувати послідовну теорію квантованого простору та розширити область дослідження, включивши в неї макроскопічні системи.

У просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу також існують проблеми порушення симетрії відносно інверсії часу та сферичної симетрії. Відомі різні типи некомутативних алгебр, які є сферично-симетричні, проте не є інваріантні відносно інверсії часу та не є еквівалентні до некомутативної алгебри канонічного типу. Для прикладу, добре відомими є алгебри з координатно-залежною некомутативністю (комутатор координат є функцією координат) [32–34]. Тому необхідно побудувати сферично-симетричну алгебру з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, яка є інваріантна відносно інверсії часу та еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу.

Дослідження нулів статистичної суми, які після робіт [35–37] мають назву нулі Лі-Янга та нулі Фішера має фундаментальну важливість у статистичній фізиці. Метод аналізу нулів статистичної суми використовується для вивчення фазових переходів. Експериментальне спостереження цих нулів довгий час вважалося неможливим через труднощі з реалізацією фізичних систем з комплексними параметрами. Стаття, у якій було запропоновано метод спостереження нулів Лі-Янга опублікована у 2012 році [38]. У 2015 році було здійснено перше експериментальне спостереження нулів статистичної суми на основі

вимірювання когерентності пробного спіну, який взаємодіє зі спіновою системою [39]. Актуальним є дослідження нулів статистичної суми з врахуванням квантованості простору та пошук нових можливостей для експериментального спостереження нулів статистичної суми.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюджетних тем: "Астрофізичні системи на різних енергетичних і просторово-часових масштабах та ефекти квантування простору" (2017-2019 рр., науковий керівник теми, номер держреєстрації 0117U007190); "Квантові ефекти у фізиці одно- і багаточастинкових систем у просторах зі складною структурою" (2019 р., виконавець теми, номер дежреєстрації 0119U002203); ФФ-30Ф "Класичні і квантові системи з нестандартними комутаційними співвідношеннями і статистиками" (2016-2018 рр., виконавець теми, номер держреєстрації 0116U001539); теми "Фізичні системи у квантованому просторі", яка фінансувалася в рамках Гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених у 2018 році, (номер держреєстрації 0118U005226, науковий керівник теми); проекту ДФФД "Концепція складних мереж у задачах квантової фізики та космології" (2017-2018 рр., виконавець проекту, номери держреєстрації 0117U003869, 0116U001539); проекту ДФФД "Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів: електродинаміка у просторах" (2016-2017 рр., виконавець проекту, номери держреєстрації 0115U004838, 0115U00505); проекту "Structure and Evolution of Complex Systems with Applications in Physics and Life Sciences" approved by the European Commissions 7th Framework Programme Grant Agreement Number: PIRSESGA-2013-612669 (виконавець проекту).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова деформованої алгебри, яка описує квантованість простору на планківських масштабах та дає можливість розвинути послідовну фізичну теорію без порушення фундаментальних фізичних законів та принципів; розв'язання проблеми опису макроскопічних тіл та проблеми порушення слабкого принципу еквівалентності в рамках деформованих алгебр; знаходження впливу особливостей структури простору на планківських масштабах на властивості класичних і квантових систем та виявлення фізичних систем найбільш чутливих до квантованості простору; оцінка величини кванта простору; встановлення зв'язку нулів кореляційних функцій бозе-газу у квантованому просторі з нулями статистичної суми та знаходження можливостей спостереження нулів Лі-Янга та нулів Фішера на експерименті.

Для досягнення мети дослідження поставлено такі задачі: побудувати інваріантну відносно інверсії часу, сферично-симетричну некомутативну алгебру, яка є еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу; знайти вирази для спектрів двочастинкової системи з кулонівською взаємодією (атом водню, екзотичні атоми) та системи взаємодіючих гармонічних осциляторів у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі канонічного типу; розв'язати проблему кінематичних змінних у просторі Снайдера, у некомутативному фазовому просторі канонічного типу, у просторі з деформацією-кручення; встановити особливості опису руху макроскопічного тіла в рамках алгебри Снайдера, алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу, некомутативної алгебри Лі типу, алгебри з деформацією-кручення; дослідити вплив квантованості простору на рух системи Сонце-Земля-Місяць та проаналізувати виконання слабкого принципу еквівалентності; знайти умови на

параметри деформованих алгебр, які дозволяють зберегти принцип еквівалентності; знайти вплив мінімальної довжини на зміщення перигелію Меркурію та на основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними отримати оцінку величини кванта простору; обчислити кореляційні функції бозе газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (q-деформований бозе-газ) та встановити їх зв'язок з нулями статистичної суми; дослідити можливості експериментального спостереженя нулів статистичної суми (нулів Лі-Янга, нулів Фішера) для спінових та бозе-систем.

Об'єктом дослідження є квантований простір, який описується деформованими комутаційними співвідношеннями для координат та імпульсів; класичні та квантові системи у квантованому просторі, кореляційні функції та нулі статистичної суми бозе-газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом.

Предметом дослідження є симетрійні властивості квантованого простору, вплив квантованості простору на властивості класичних та квантових систем, можливості експериментального спостереження нулів статистичної суми.

Методи дослідження. Запропоновано метод дослідження фізичних систем у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі канонічного типу, в основі якого лежить знаходження усередненого за додатковими ступенями вільності гамільтоніану системи. Для знаходження поправок до енергетичних рівнів фізичних систем, зумовлених квантованістю простору, у роботі використано метод теорії збурень, а також метод представлення координат та імпульсів, які задовольняють деформовані комутаційні співвідношення, за допомогою координат та імпульсів, для яких виконуються звичні комутаційні співвідношення. Для обчислення нулів статистичної суми у квантованому

(q-деформованому) просторі, а також у звичному просторі були використані чисельні методи розв'язку алгебраїчних рівнянь.

У першому розділі розглянуто деформовані алгебри для операторів координат та операторів імпульсів, які описують квантований простір. Детально проаналізовано основні типи деформацій комутаційних співвідношень, а саме деформації канонічного типу, Лі типу, нелінійні деформації.

У **другому розділі** представлено результати з досліджень руху макроскопічного тіла у просторах з нелінійною деформацією комутаційних співвідношень для координат та імпульсів (простір з алгеброю Снайдера, простір з алгеброю Кемпфа). Ми знайшли умови на параметри деформації при яких розв'язується проблема опису руху макроскопічного тіла, відома у літературі, як проблема футбольного м'яча, зберігаються властивості кінетичної енергії, відновлюється слабкий принцип еквівалентності, координати не залежать від маси та можуть розглядатися як кінематичні змінні.

У третьому розділі досліджено мінімальну довжину у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Проаналізовано представлення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів та запропоновано умову на параметри некомутативної алгебри при яких координати не залежать від маси, а імпульси пропорційні до маси. Знайдено вплив некомутативності імпульсів на траєкторію руху вільної частинки та проаналізовано особливості руху системи вільних частинок у квантованому фазовому просторі канонічного типу. Запропоновано означення імпульсу центра мас, який є інтегралам руху. Розв'язано проблему опису руху макроскопічного тіла у шестивимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу. Знайдено верхні межі для параметрів координатної та імпульсної некомутатив-

ностей на основі дослідження зсуву перигелію Меркурію з врахуванням особливостей опису руху макроскопічного тіла у квантованому просторі. Отримано вираз для спектру системи двох частинок з осциляторною взаємодією. Досліджено виконання принципу еквівалентності для Землі та Місяця у гравітаційному полі Сонця. Знайдено умови на параметри некомутативної алгебри при яких відновлюється слабкий принцип еквівалентності.

Четвертий розділ присвячено дослідженням симетрії відносно інверсії часу у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. У розділі розглянуто рух по колу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу та показано, що період руху залежить від його напрямку. Також досліджено перетворення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів при інверсії часу. Встановлено, що ці перетворення залежать від представлення. На основі ідеї залучення додаткових імпульсів побудовано інваріантну відносно інверсії часу, сферично-симетричну некомутативну алгебру, яка є еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу.

У п'ятому розділі розглянуто сферично-симетричний некомутативний фазовий простір канонічного типу. Досліджено мінімальну довжину та мінімальний імпульс у такому просторі. Розв'язано проблему опису руху системи багатьох частинок. Знайдено енергетичні рівні системи двох частинок з кулонівською взаємодією та на основі отриманих результатів проаналізовано вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на спектри атома водню, мюонного атома водню, антипротонного гелію. Встановлено, що дослідження спектру антипротонного гелію відкриває можливості для покращення оцінки для мінімальної довжини. Знайдено енергетичні рівні симетричної мережі осциляторів у однорідному полі та ланцюжка осцилято-

рів у некомутативному фазовому просторі зі сферичною симетрією. Встановлено, що некомутативність координат та некомутативність імпульсів впливають на частоти систем. На основі отриманих результатів досліджено також енергетичні рівні систем частинок з осциляторною взаємодією. Встановлено, що некомутативність імпульсів зумовлює дискретність спектру центра мас цих систем. Знайдено класичні та квантові рівняння руху частинки в гравітаційному полі у сферично-симетичному квантованому фазовому просторі та запропоновано вирази для тензорів некомутативності, при яких відновлюється слабкий принцип еквівалентності.

У шостому розділі розглянуто систему багатьох частинок у просторах з різними некомутативними алгебрами Лі типу (комутатор координат пропорційний часу, комутатор координат пропорційний координаті, узагальнена некомутативна алгебра Лі типу). Досліджено особливості некомутативної алгебри для координат та імпульсів центра мас та встановлено умови на параметри некомутативності при яких некомутативна алгебра для координат та імпульсів центра мас відповідає некомутативній алгебрі Лі типу. Також у розділі розв'язано проблему порушення принципу еквівалентності у просторі з некомутативністю Лі типу. Знайдено, що отримані результати можуть бути узагальнені на випадок алгебри з деформацією кручення.

У сьомому розділі розглянуто нелінійну деформовану алгебу для операторів координат та імпульсів, яка описує простір з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом, а також пов'язана з q-деформованою алгеброю для операторів породження та знищення. Досліджено кореляційні функції бозе-газу у квантованому просторі (q-деформованого бозе-газу) та встановлено зв'язок нулів цих функцій з нулями статистичної суми при комплексній температурі (нулі Фіше-

ра). У розділі також знайдено, що подібний зв'язок нулів кореляційних функцій із нулями статистичної суми (нулями Лі-Янга) існує для бозе-газу у звичному просторі та спінових систем.

Дисертаційна робота завершується **Висновками**, **Списком використаних джерел** і **Додатком** зі списком публікацій за темою дисертації та відомостями про апробацію результатів.

Наукова новизна отриманих результатів. У роботі досліджено фізичні системи в рамках різних деформацій комутаційних співвідношень для координат та імпульсів. Встановлено ефекти квантованості простору у властивостях фізичних систем та знайдено оцінки для величини кванта простору. Вперше отримано такі результати:

1. Розв'язано проблеми порушення властивостей кінетичної енергії, опису руху макроскопічного тіла, порушення принципу еквівалентності у просторі з алгеброю Снайдера та у просторі з алгеброю Кемпфа у всіх порядках за параметрами деформації.

2. Знайдено вирази для мінімальної довжини у шестивимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу на основі розв'язків задачі на власні значення для оператора квадрата довжини.

3. У некомутативному фазовому просторі канонічного типу запропоновано залежності параметрів координатної та імпульсної некомутативностей від маси при яких некомутативні координати можуть розглядатися, як кінематичні змінні; некомутативні імпульси пропорційні до маси; імпульс центра мас може бути означений, як інтеграл руху; траєкторія вільної частинки не залежить від її маси; виконується слабкий принцип еквівалентності, зберігаються властивості кінетичної енергії.

4. Отримано точний вираз для спектру системи двох частинок з осциляторною взаємодією у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу.

5. Встановлено та проаналізовано вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів канонічного типу на параметр Етвеша для Землі та Місяця.

6. Отримано оцінку для мінімального імпульсу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу, яка щонайменше на 10 порядків покращує результати, представлені у літературі.

7. Знайдено та досліджено точний вираз для періоду руху по колу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу.

8. Побудовано інваріантну відносно інверсії часу сферично-симетричну алгебру з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, яка є еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу та не зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності.

9. Знайдено вираз для мінімальної довжини та мінімального імпульсу у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі з точністю до другого порядку за параметрами некомутативності.

10. Встановлено вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на спектри симетричної мережі осциляторів в однорідному полі, ланцюжка осциляторів.

11. Показано, що дослідження енергетичних рівнів антипротонного гелію відкриває можливість покращити оцінки величини параме-

тра координатної некомутативності.

12. Відновлено слабкий принцип еквівалентності та розв'язано проблему опису руху макроскопічного тіла у просторі з некомутативною алгеброю Лі типу та у просторі з деформацією кручення.

13. Знайдено зв'язки нулів кореляційних функцій бозе-газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (q-деформованого бозе-газу), взаємодіючого бозе-газу та спінових систем із нулями статистичної суми (нулі Фішера, нулі Лі-Янга). Отримані результати відкривають нові можливості спостереження цих нулів на експерименті.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, представлені у роботі, є важливими для подальших досліджень фізичних систем у квантованому просторі. Зокрема, умови на параметри деформованих алгебр, які пов'язують їх з масами, дають можливість розв'язати фундаментальні проблеми (порушення принципу еквівалентності, проблеми макроскопічного тіла) у некомутативному просторі канонічного типу, некомутативному просторі Лі типу, у просторі з нелінійною деформацією алгебри Гайзенберґа. Це обґрунтовує їх використання у подальших дослідженнях ефектів квантованості простору у властивостях фізичних систем. Розв'язок проблеми опису руху макроскопічних тіл у просторах з деформованими комутаційними співвідношеннями для координат та імпульсів, знайдений у роботі, може бути основою для подальших досліджень впливу особливостей структури простору на планківських масштабах на властивості систем багатьох частинок. Висновки про значний вплив імпульсної некомутативності на рух макроскопічних тіл, значний вплив координатної некомутативності на спектр антипротонного атома гелію є важливими

для покращення оцінок мінімальної довжини та мінімального імпульсу, а також для подальшого пошуку можливостей експериментального підтвердження теорії квантованого простору, побудованої на основі ідеї про некомутативність координат та некомутативність імпульсів. Зв'язок нулів кореляційних функцій із нулями статистичної суми відкриває нові можливості для експериментального спостереження нулів Фішера та нулів Лі-Янга, які мають фундаментальну важливість у статистичній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Усі оригінальні результати, викладені в дисертації, автор отримала самостійно або при своїй безпосередній участі. Роботи [40–47] є одноосібними. У роботах [48–64] виконаних зі співавторами, здобувачці належить:

- дослідження проблеми порушення симетрії відносно інверсії часу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу, побудова некомутативної алгебри зі сферичною симетрією та симетрією відносно інверсії часу [48];
- встановлення особливостей опису руху системи багатьох частинок у шестивимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу; знаходження умов на параметри некомутативностей, при яких зберігається принцип еквівалентності; оцінка мінімального імпульсу [49];
- розв'язання проблеми опису руху макроскопічного тіла у просторі з алгеброю Кемпфа [50];
- розв'язання проблем порушення властивостей кінетичної енергії, кінематичних змінних, опису руху макроскопічного тіла у просторі з алгеброю Снайдера; оцінка величини параметра деформації [51];

- дослідження зв'язку нулів двочасових спінових кореляційних функцій з нулями Лі-Янга [52];
- встановлення особливостей опису системи багатьох частинок та знаходження поправок до спектрів екзотичних атомів у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі [53];
- означення імпульсу центра мас, як інтеграла руху; знаходження та аналіз рівнянь руху системи вільних частинок у некомутативному фазовому просторі [54];
- знаходження енергетичних рівнів вільної частинки та виразу для мінімальної довжини у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі [55];
- встановлення впливу некомутативності координат та некомутативності імпульсів на рух системи Сонце-Земля-Місяць [56];
- дослідження зв'язку нулів двочасових кореляційних функцій та нулів Лі-Янга для взаємодіючого бозе-газу [57];
- розв'язання проблем опису руху центра мас системи багатьох частинок, порушення принципу еквівалентності, порушення властивостей кінетичної енергії у некомутативному фазовому просторі [58];
- побудова сферично-симетричної алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу; оцінка величин параметрів координатної та імпульсної некомутативностей [59];
- дослідження зв'язку нулів кореляційних функцій q-деформованого бозе-газу з нулями Фішера [60];

- знаходження точного виразу для спектру двочастинкової системи з осциляторною взаємодією у некомутативному просторі канонічного типу [61];
- отримання та дослідження квантових рівнянь руху для частинки у гравітаційному полі, класичних рівнянь руху для макроскопічного тіла у гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі [62];
- знаходження виразів для мінімальної довжини у шестивимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу [63];
- дослідження особливостей алгебри для координат та імпульсів центра мас та відносного руху у сферично-симетричному некомутативному просторі [64].

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, викладених в дисертації, автор представляла особисто на таких конференціях:

- The 5th Conference "Statistical Physics: Modern Trends and Applications", dedicated to the 110th anniversary of the birth of M.M. Bogolyubov, 3-6 July 2019 (Lviv) [65];
- 19-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 13-14 червня 2019 р. (Львів) [66];
- Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2019", 14-16 травня 2019 р. (Львів) [67, 68];
- Різдвяні дискусії 10-11 січня 2019 р. (Львів) [69];

- Workshop on Current Problems in Physics, 03-04 July 2018 (Lviv) [70];
- 18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 7-8 червня 2018 р. (Львів) [71];
- Різдвяні дискусії 11-12 січня 2018 р. (Львів) [72];
- Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv, October 16-19, 2017 (Zielona Góra, Poland) [73];
- IX наукова конференція "Вибрані питання астрономії та астрофізики присвячена пам'яті Богдана Бабія (1936-1993), 1-5 жовтня 2018 р. (Львів) [74];
- Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2017", 16-18 травня 2017 р. (Львів) [75];
- Різдвяні дискусії 11-12 січня 2017 р. (Львів) [76];

  Результати роботи також були представлені на наукових семінарах у Віденському університеті (Vienna Theory Lunch Seminar, December 12th, 2017), у Інституті теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова (25 жовтня 2018 р.), а також неодноразово обговорювалися на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано у двадцяти чотирьох журнальних статтях [40–46, 48–64], розділах монографії [47] (розділ 1 (підрозділ 1.3), розділ 4, розділ 5 (підрозділ 5.3), розділ 8) та дванадцяти тезах доповідей на конференціях [65–76].

Розділ 1

Деформації комутаційних співвідношень для операторів координат та імпульсів

1.1 Вступ

Значне зростання зацікавленості до ідеї про деформацію комутаційних співвідношень у останні роки зумовлене розвитком теорії струн та теорії квантової гравітації (див., для прикладу, [10–16]). Дослідження з цих теорій передбачають існування ненульової мінімальної невизначеності координати, мінімальної довжини, величина якої є порядку планківської довжини.

Різні деформовані алгебри було запропоновано для опису квантованого простору (простору з мінімальною довжиною). Ці алгебри можуть бути поділені на три типи, а саме: некомутативні алгебри канонічного типу (комутатори координат та комутатори імпульсів дорівнюють константам), некомутативні алгебри Лі типу (комутатори координат та імпульсів дорівнюють лінійним функціям координат та імпульсів) та нелінійні деформовані алгебри (комутатори координат та імпульсів дорівнюють нелінійним функціям координат та імпульсів).

Ідея про те, що комутаційні співвідношення для координат та імпульсів можуть бути деформованими, була запропонована Гайзенбер-

ґом для вирішення проблеми ультрафіолетових розбіжностей у квантовій теорії поля [77, 78]. У 1947 році ця ідея була оформлена Снайдером у його роботі [20]. Алгебра Снайдера характеризується такими співвідношеннями:

$$[X_\mu, X_\mu] = i\hbar\beta^2 J_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\eta_{\mu\nu} + \beta^2 P_\mu P_\nu), \tag{1.2}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{1.3}$$

де $J_{\mu\nu}$ – генератори Лоренца, β – константа, $\nu, \mu = (0, 1, 2, 3)$, $\eta_{\mu\nu}$ – метричний тензор, $[\eta_{\mu\nu}] = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. У нерелятивістському випадку алгебра Снайдера має такий вигляд:

$$[X_i, X_j] = i\hbar\beta^2(P_j X_i - P_i X_j), \tag{1.4}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \beta^2 P_i P_j), \tag{1.5}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.6}$$

тут $i, j = (1, 2, 3)$ (див., для прикладу, [79–83]).

У цьому розділі ми представляємо добре відомі у літературі деформовані алгебри, які описують квантований простір. Підрозділ 1.2 присвячено некомутативним алгебрам канонічного типу. У підрозділі 1.3 розглянуто різні випадки алгебр з некомутативністю Лі типу. У підрозділі 1.4 представлено алгебри з нелінійною деформацією, які описують простір з мінімальною довжиною.

1.2 Некомутативні алгебри канонічного типу

Найпростішою алгеброю, яка описує квантований простір, є некомутативна алгебра канонічного типу. У двовимірному випадку ця алгебра

має такий вигляд:

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \tag{1.7}$$

$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar, \tag{1.8}$$

$$[P_1, P_2] = [X_1, P_2] = [X_2, P_1] = 0, \tag{1.9}$$

де θ – константа, яку називають параметром координатної некомутативності, [84–88]. Величина $\hbar\theta$ має розмірність площі. Із (1.7) випливає таке співвідношення невизначеностей для координат

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{\hbar|\theta|}{2}, \tag{1.10}$$

де використано позначення

$$\Delta X_i = \sqrt{\langle \Delta X_i^2 \rangle}. \tag{1.11}$$

У просторі з некомутативними координатами (1.7) існує мінімальна довжина $\sqrt{\hbar|\theta|}$ та мінімальна площа $\hbar|\theta|$ [63, 89].

Координати та імпульси, які задовольняють комутаційні співвідношення (1.7)-(1.9), можуть бути представлені через координати та імпульси x_i, p_i, для яких виконуються звичні комутаційні співвідношення:

$$[x_i, x_j] = 0, \tag{1.12}$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.13}$$

$$[p_i, p_j] = 0, \tag{1.14}$$

$i, j = (1, 2)$. Це представлення має такий вигляд:

$$X_1 = x_1 - \tilde{q}\theta p_2, \tag{1.15}$$

$$X_2 = x_2 + (1 - \tilde{q})\theta p_1, \tag{1.16}$$

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_2, \tag{1.17}$$

де $\tilde{q}$ – константа, яка може бути вибрана довільно. Зручно використовувати симетричне представлення. А саме у випадку, коли $q = 1/2$, маємо:

$$X_1 = x_1 - \frac{\theta}{2} p_2, \tag{1.18}$$

$$X_2 = x_2 + \frac{\theta}{2} p_1, \tag{1.19}$$

(див., для прикладу, [90, 91]).

Важливо відзначити, що некомутативність координат виникає у задачі про рух частинки у сильному магнітному полі. А саме, частинка з зарядом e у сильному магнітному полі $\mathbf{B}$, напрям якого збігається з віссю X_3, рухається на некомутативній площині. Координати частинки задовольняють співвідношення $[X_1, X_2] = -i\hbar c/eB$, де c – швидкість світла [78, 92–95].

У більш загальному випадку, співвідношення некомутативної алгебри мають такий вигляд:

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{1.20}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij}), \tag{1.21}$$

$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij}, \tag{1.22}$$

де θ_{ij}, η_{ij} – елементи сталих антисиметричних матриць, які називають параметрами координатної некомутативності та параметрами імпульсної некомутативності, відповідно, σ_{ij} – константи, $i, j = (1, 2, 3)$ [21–25, 96–101]. Параметри σ_{ij} залежать від параметрів некомутативності θ_{ij}, η_{ij}, що випливає з тотожності Якобі.

Із симетричного представлення для координат та імпульсів, які

задовольняють комутаційні співвідношення (1.20), (1.22):

$$X_i = x_i - \frac{1}{2}\sum_j \theta_{ij} p_j, \tag{1.23}$$

$$P_i = p_i + \frac{1}{2}\sum_j \eta_{ij} p_j, \tag{1.24}$$

(координати x_i та імпульси p_i задовольняють звичні комутаційні співвідношення (1.12)-(1.14)) випливає, що параметри σ_{ij} визначаються як

$$\sigma_{ij} = \sum_k \frac{\theta_{ik}\eta_{jk}}{4}, \tag{1.25}$$

(див., для прикладу, [99, 102]).

У некомутативному просторі канонічного типу сферична симетрія не зберігається. Некомутативна алгебра (1.20)-(1.22) з параметрами θ_{ij}, η_{ij}, σ_{ij}, які є константами, не є інваріантна відносно поворотів [33, 34, 103, 104].

Відомі різні сферично-симетричні алгебри з некомутативністю координат [32–34, 105]. Зокрема, багато уваги приділялося вивченням алгебр з координатно-залежною некомутативністю [32, 106–111], які характеризуються тим, що комутатор координат дорівнює функції цих координат. Найпростішою алгеброю з координатно-залежною некомутативністю є некомутативна алгебра Лі типу (ця алгебра буде детально розглянута у наступному підрозділі). Також багато робіт присвячено дослідженню алгебри зі спіновою некомутативністю координат, яка характеризується такими співвідношеннями:

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta^2 \varepsilon_{ijk} s_k, \tag{1.26}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.27}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.28}$$

$$[s_i, s_j] = i\hbar\theta\varepsilon_{ijk}s_k, \tag{1.29}$$

$$[X_i, s_j] = i\hbar\theta\varepsilon_{ijk}s_k, \tag{1.30}$$

де θ – параметри некомутативностей, які є константами, s_i – компоненти оператора спіну (див., для прикладу, [112–117]).

Важливо зауважити, що у випадку, коли параметри координатної некомутативності θ_{ij} не є константами, а залежать від операторів координат чи від спінових операторів, порушується співвідношення:

$$[\theta_{ij}, X_k] = [\theta_{ij}, P_k] = 0, \tag{1.31}$$

яке характерне для некомутативної алгебри канонічного типу (1.20)-(1.22) з $\eta_{ij} = \sigma_{ij} = 0$. Тому алгебри з координатно-залежною некомутативністю, чи алгебри зі спіновою некомутативністю не є еквівалентними до некомутативної алгебри (1.20)-(1.22) з $\eta_{ij} = \sigma_{ij} = 0$. Крім того, варто відзначити, що у випадку координатно-залежної некомутативності маємо проблему порушення інваріантності алгебри відносно трансляцій. Залучення спінових операторів для побудови алгебри (1.26)-(1.30) вносить додаткові труднощі у дослідження. Для прикладу, у випадку, коли оператори s_i є операторами спіна-1/2, при дослідженні квантових задач у просторі зі спіновою некомутативністю (1.26)-(1.30) є необхідність розглядати двокомпонентну хвильову функцію.

Проблема побудови некомутативної алгебри, яка є сферично-симетрична та еквівалентна некомутативній алгебрі канонічного типу, вивчалася у роботах [105, 118–120]. Для розв'язання цієї проблеми автор статей [105, 118, 119] запропонував розглядати оператор координатної некомутативності θ^{lm}, який комутує з координатами та імпуль-

сами, а також означати імпульс π^{jk}, спряжений до цього оператора. Сферично-симетрична алгебра, запропонована у [105, 118, 119] має такий вигляд:

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}, \quad [x^i, p_j] = i\delta^i_j, \quad [p^i, p^j] = 0, \tag{1.32}$$

$$[\theta^{lm}, \theta^{jk}] = 0, \quad [\theta^{lm}, \pi^{jk}] = i(\delta^l_j \delta^m_k - \delta^l_k \delta^m_j). \tag{1.33}$$

У роботі [120] побудовано сферично-симетричну алгебру з некомутативністю координат канонічного типу, розглянувши ідею залучення додаткових координат a_i, які відповідають сферично-симетричній системі, для прикладу гармонічному осцилятору. Сферично-симетрична алгебра канонічного типу має такий вигляд:

$$[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk} l_0 a_k, \tag{1.34}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.35}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.36}$$

де координати a_i та спряжені до них імпульси p^a_i задовольняють звичні співвідношення:

$$[a_i, a_j] = [p^a_i, p^a_j] = 0, \tag{1.37}$$

$$[a_i, p^a_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.38}$$

а також комутують з координатами та імпульсами X_i, P_i [120].

У наступному підрозділі розглянуто випадок, коли комутатори для координат пропорційні координаті. У підрозділі вивчаються різні некомутативні алгебри Лі типу.

1.3 Некомутативні алгебри Лі типу

Багато робіт присвячено вивченням некомутативної алгебри Лі типу (див. для прикладу [26–29, 121–127], та посилання в них). Ця алгебра характеризується такими співвідношеннями:

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}^k X_k, \tag{1.39}$$

де константи θ_{ij}^k антисиметричні за нижніми індексами параметри некомутативності.

В залежності від вибору констант θ_{ij}^k розрізняють випадки, коли комутатор координат пропорційний часу:

$$[X_i, X_j] = \frac{i\hbar t}{\kappa}\left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}\right), \tag{1.40}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.41}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.42}$$

(індекси ρ, τ є фіксовані та різні $i, j = (1, 2, 3)$, κ – параметр [26, 128]), комутатор координат пропорційний координаті

$$[X_k, X_\gamma] = i\hbar\frac{X_l}{\tilde{\kappa}}, \quad [X_l, X_\gamma] = -i\hbar\frac{X_k}{\tilde{\kappa}}, \tag{1.43}$$

$$[P_k, X_\gamma] = i\hbar\frac{P_l}{\tilde{\kappa}}, \quad [P_l, X_\gamma] = -i\hbar\frac{P_k}{\tilde{\kappa}}, \tag{1.44}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [X_\gamma, P_\gamma] = i\hbar, \tag{1.45}$$

$$[X_k, X_l] = [P_m, P_n] = 0, \tag{1.46}$$

(індекси k, l, γ є фіксовані та різні $k, l, \gamma = (1, 2, 3)$, $i \neq \gamma$, $j \neq \gamma$, $m, n = (1, 2, 3)$, $\tilde{\kappa}$ – константа [26]).

У більш загальному випадку некомутативна алгебра Лі типу ха-

рактеризується такими співвідношеннями

$$[X_i, X_j] = i\hbar(\theta^0_{ij} t + \theta^k_{ij} X_k), \tag{1.47}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \bar{\theta}^k_{ij} X_k + \tilde{\theta}^k_{ij} P_k), \tag{1.48}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.49}$$

де $i, j, k = (1, 2, 3)$. Параметри θ^0_{ij}, θ^k_{ij}, $\bar{\theta}^k_{ij}$, $\tilde{\theta}^k_{ij}$ є антисиметричними відносно нижніх індексів. Зауважимо, що комутатор координат та часу дорівнює нулю [121]. Із тотожності Якобі випливає, що ми не можемо розглядати довільні параметри θ^0_{ij}, θ^k_{ij}, $\bar{\theta}^k_{ij}$, $\tilde{\theta}^k_{ij}$. Досліджуючи рівняння на θ^0_{ij}, θ^k_{ij}, $\bar{\theta}^k_{ij}$, $\tilde{\theta}^k_{ij}$, які випливають з тотожності Якобі, у роботі [121] запропоновано два типи некомутативних алгебр:

$$[X_k, X_\gamma] = i\hbar\left(-\frac{t}{\kappa} + \frac{X_l}{\tilde{\kappa}}\right), \quad [X_l, X_\gamma] = i\hbar\left(\frac{t}{\kappa} - \frac{X_k}{\tilde{\kappa}}\right), \tag{1.50}$$

$$[X_k, X_l] = i\hbar\frac{t}{\kappa}, \quad [P_k, X_\gamma] = i\hbar\frac{P_l}{\tilde{\kappa}}, \tag{1.51}$$

$$[P_l, X_\gamma] = -i\hbar\frac{P_k}{\tilde{\kappa}}, \quad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.52}$$

$$[X_\gamma, P_\gamma] = i\hbar, \quad [P_m, P_n] = 0, \tag{1.53}$$

та

$$[X_k, X_\gamma] = i\hbar\left(-\frac{t}{\kappa} + \frac{X_l}{\tilde{\kappa}}\right), \quad [X_l, X_\gamma] = i\hbar\left(\frac{t}{\kappa} - \frac{X_k}{\tilde{\kappa}}\right), \tag{1.54}$$

$$[P_k, X_\gamma] = i\hbar\left(\frac{X_l}{\bar{\kappa}} + \frac{P_l}{\tilde{\kappa}}\right), \quad [P_l, X_\gamma] = i\hbar\left(\frac{X_k}{\bar{\kappa}} - \frac{P_k}{\tilde{\kappa}}\right), \tag{1.55}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [X_\gamma, P_\gamma] = i\hbar, \tag{1.56}$$

$$[X_k, X_l] = [P_m, P_n] = 0, \tag{1.57}$$

де індекси k, l, γ є різні та фіксовані. Алгебра (1.50)-(1.53) може бути отримана із узагальненої алгебри Лі типу (1.47)-(1.49), поклавши

$$\theta^0_{kl} = -\theta^0_{k\gamma} = \frac{1}{\kappa}, \tag{1.58}$$

$$\theta^0_{l\gamma} = \frac{1}{\kappa} \tag{1.59}$$

$$\theta^l_{k\gamma} = -\theta^k_{l\gamma} = \tilde{\theta}^l_{k\gamma} = -\tilde{\theta}^k_{l\gamma} = \frac{1}{\tilde{\kappa}}. \tag{1.60}$$

Алгебра (1.54)-(1.57) відповідає такому вигляду параметрів:

$$\theta^0_{l\gamma} = -\theta^0_{k\gamma} = \frac{1}{\kappa}, \tag{1.61}$$

$$\theta^l_{k\gamma} = -\theta^k_{l\gamma} = \frac{1}{\tilde{\kappa}}, \tag{1.62}$$

$$\tilde{\theta}^l_{k\gamma} = -\tilde{\theta}^k_{l\gamma} = \bar{\theta}^l_{k\gamma} = -\bar{\theta}^k_{l\gamma} = \frac{1}{\bar{\kappa}}. \tag{1.63}$$

У більш загальному випадку комутатори для координат та імпульсів можуть бути нелінійними функціями цих координат та імпульсів. У наступному підрозділі представлено нелінійні деформовані алгебри, які описують простір з мінімальною довжиною.

1.4 Нелінійні деформовані алгебри

Важливим передбаченням теорії струн та теорії квантової гравітації є узагальнене співвідношення невизначеностей

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\Delta P} + \beta \Delta P\right), \tag{1.64}$$

де β – константа ($\beta \geq 0$), ΔX та ΔP визначаються як

$$\Delta X = \sqrt{\langle \Delta X^2 \rangle}, \tag{1.65}$$

$$\Delta P = \sqrt{\langle \Delta P^2 \rangle}. \tag{1.66}$$

Зауважимо, що ми зберігаємо позначення, прийняті у літературі. Параметри β у (1.64) та (1.4)-(1.6) є різними. Із нерівності (1.64) випливає, що мінімальна невизначеність координати не дорівнює нулю. Маємо:

$$\Delta X_{min} = \hbar\sqrt{\beta}. \tag{1.67}$$

Вважається, що ΔX_{min} є порядку довжини Планка $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.6 \times 10^{-35}$м (див., для прикладу, [12]).

Узагальнене співвідношення невизначеностей (1.64) можна отримати, розглянувши деформацію комутаційних співвідношень для операторів координати та імпульсу

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2). \tag{1.68}$$

Параметр β називають параметром деформації [129–131]. У границі $\beta \to 0$ співвідношення (1.68) переходить у звичне комутаційне співвідношення $[X, P] = i\hbar$.

Координати та імпульси, які задовольняють деформоване співвідношення (1.68), можуть бути представлені через координати та імпульси x, p, для яких виконується звична рівність $[x, p] = i\hbar$. А саме, справедливим є таке представлення:

$$X = x, \tag{1.69}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\mathrm{tg}(\sqrt{\beta}p). \tag{1.70}$$

Більш загальна деформація комутаційних співвідношень з доданками квадратичними за координатою та імпульсом

$$[X, P] = i\hbar(1 + \alpha X^2 + \beta P^2), \tag{1.71}$$

(де α, β – константи, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha\beta < \hbar^{-2}$) описує квантований простір з мінімальними невизначеностями координати та імпульсу, які

мають вигляд:

$$\Delta X_0 = \hbar\sqrt{\frac{\beta}{1-\hbar^2\alpha\beta}}, \quad \Delta P_0 = \hbar\sqrt{\frac{\alpha}{1-\hbar^2\alpha\beta}}. \tag{1.72}$$

(див. [131–135]). Алгебра (1.71) з $\beta = 0$, а також більш загальна алгебра

$$[X, P] = i\hbar g(X), \tag{1.73}$$

($g(X)$ – функція деформації) описують частинку з масою залежною від координати [134, 136, 137].

Одновимірна деформована алгебра (1.68) була узагальнена Кемпфом на випадки більших вимірностей

$$[X_i, X_j] = i\hbar\frac{(2\beta-\beta')+(2\beta+\beta')\beta P^2}{1+\beta P^2}(P_iX_j - P_jX_i), \tag{1.74}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij}(1+\beta P^2) + \beta' P_iP_j), \tag{1.75}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.76}$$

тут $\beta \geq 0$, $\beta' \geq 0$ – параметри деформації [17] (див. також [18, 19, 129, 138–144]). Деформація комутаційних співвідношень (1.74)-(1.76) приводить до існування мінімальної довжини, яка визначається величинами параметрів деформації $\hbar\sqrt{\beta+\beta'}$.

Алгебру (1.74)-(1.76) можна узагальнити як

$$[X_i, X_j] = G(P^2)(X_iP_j - X_jP_i), \tag{1.77}$$

$$[X_i, P_j] = f(P^2)\delta_{ij} + F(P^2)P_iP_j, \tag{1.78}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{1.79}$$

У роботі [145] знайдено, що з тотожності Якобі випливає таке співвід-

ношення для функцій $G(P^2)$, $F(P^2)$, $f(P^2)$

$$f(F-G)-2f'(f+FP^2)=0, \tag{1.80}$$

$$f'=\frac{\partial f}{\partial P^2}. \tag{1.81}$$

Варто відзначити, що для опису квантованого простору було розглянуто різні функції деформацій [146–154]. Для прикладу, поклавши $f=1+\beta P^2$, $F=\beta'$, отримаємо, що співвідношення (1.77)-(1.79) відтворюють співвідношення алгебри (1.74)-(1.76). Якщо $f=1$, $F=\beta^2$, алгебра (1.77)-(1.79) відповідає нерелятивістській алгебрі Снайдера (1.4)-(1.6). Розглянувши функції $f=\sqrt{1+\beta P^2}$, $F=\beta\sqrt{1+\beta P^2}$, побудуємо алгебру з комутативними координатами та комутативними імпульсами [155]

$$[X_i,X_j]=[P_i,P_j]=0, \tag{1.82}$$

$$[X_i,P_j]=i\hbar\sqrt{1+\beta P^2}(\delta_{ij}+\beta P_iP_j). \tag{1.83}$$

Зауважимо, що алгебру з комутативними координатами та комутативними імпульсами можна також отримати з співвідношень (1.74)-(1.76), поклавши $\beta'=2\beta$ та записавши їх з точністю до першого порядку за параметрами деформації. Алгебра має такий вигляд:

$$[X_i,X_j]=[P_i,P_j]=0, \tag{1.84}$$

$$[X_i,P_j]=i\hbar(\delta_{ij}(1+\beta P^2)+2\beta P_iP_j), \tag{1.85}$$

(див. [156,157]). Алгебри (1.82)-(1.83), (1.84)-(1.85) на відміну від (1.77)-(1.79) є інваріантними відносно трансляцій у координатному просторі.

У наступних розділах роботи будуть досліджені властивості фізичних систем у просторах з нелінійною деформованою алгеброю (нерелятивістська алгебра Снайдера, алгебра Кемпфа), некомутативною алгеброю канонічного типу, некомутативною алгеброю Лі типу.

Розділ 2

Рух макроскопічного тіла у просторі з нелінійною деформацією алгебри Гайзенберґа та принцип еквівалентності

2.1 Вступ

Історично перша алгебра, запропонована Снайдером [20], характеризується нелінійною деформацією комутаційних співвідношень для координат та імпульсів та має вигляд (1.1)-(1.3). Різні проблеми досліджувалися в рамках алгебри Снайдера. Серед них, для прикладу, квантування площі [82], вільна частинка [79, 80], гармонічний осцилятор [79,80], симетрійні властивості простору [158,159]. Багато уваги також приділялося вивченням властивостей фізичних систем у просторі з алгеброю Кемпфа (1.74)-(1.76), яка є узагальненням нерелятивістської алгебри Снайдера (1.4)-(1.6). Вивчалися, зокрема, гармонічний осцилятор [17,129,133,138,140,160], атом водню [18,156,161–165], оператор моменту кількості руху [165], електростатичне поле [166], частинка в постійному магнітному полі [161], та інші.

Важливим є дослідження проблем багатьох частинок у просторі з нелінійною деформацією комутаційних співвідношень для координат та імпульсів, пошук ефектів, зумовлених квантованістю простору,

у властивостях макроскопічних тіл. Рух планет з врахуванням особливостей стуктури простору на планківських масштабах аналізувався у роботах [19, 30, 31, 167]. У статті [19] досліджено орбіту частинки у гравітаційному полі у просторі з алгеброю Кемпфа, проаналізовано вплив мінімальної довжини на зсув перигелію Меркурію. Автори статей [30, 31] дослідили зсув перигелію Меркурію у просторі з алгеброю Снайдера. На основі порівняння теоретичних результатів з даними спостережень у роботах [19, 30, 31] отримано екстремально малі (значно менші за довжину Планка) оцінки для мінімальної довжини. Для прикладу, у статті [19] знайдено оцінку для мінімальної довжини 10^{-68}м, яка є на 33 порядки менша за довжину Планка. Автори статей [19, 30, 31] зробили висновок, що існує проблема опису макроскопічних тіл у просторі з алгеброю Снайдера, алгеброю Кемпфа. Ця проблема є подібною до проблеми, яка виникає в подвійній спеціальній теорії відносності (Double Special Relativity) та є відома під назвою проблема футбольного м'яча ("the soccer-ball problem" [168–172]).

Проблема опису руху системи багатьох частинок у рамках нелінійної деформованої алгебри з комутативними координатами, що відповідає частковому випадку алгебри Кепфа ($\beta' = 2\beta$ (1.84)-(1.85)), з точністю до першого порядку за параметром деформації β досліджувалася у статті [157]. У роботі [157] показано, що рух системи частинок у деформованому просторі з мінімальною довжиною описується ефективним параметром деформації. На основі цього результату переобчислено екстремально малу оцінку для мінімальної довжини, отриману у статті [19]. Показано, що у просторі (1.84)-(1.85) існують проблеми порушення властивостей кінетичної енергії (адитивність, незалежність від композиції) та слабкого принципу еквівалентності [173]. З точністю до першого порядку за параметром деформації знайдено, що властиво-

сті кінетичної енергії зберігаються та слабкий принцип еквівалентності відновлюється у деформованому просторі (1.84)-(1.85), якщо припустити, що параметр деформації залежить обернено квадратично від маси [173].

У цьому розділі ми розглядаємо нелінійні деформації алгебри Гайзенберґа, а саме: нерелятивістську алгебру Снайдера (1.4)-(1.6), а також загальний випадок алгебри Кемпфа (1.74)-(1.76). У просторі Снайдера досліджується проблема опису руху макроскопічного тіла. Ми показуємо, що координати та імпульси центра мас макроскопічного тіла задовольняють комутаційні співвідношення, які не відповідають алгебрі Снайдера. Відповідність цих співвідношень алгебрі Снайдера можна відновити, якщо припустити, що параметр алгебри залежить від маси. Ми встановлюємо, що рух центра мас макроскопічного тіла у просторі Снайдера описується ефективним параметром, який є меншим від параметра, що відповідає елементарним частинкам. Автори статтей [30, 31] отримали екстремально малу оцінку для мінімальної довжини через те, що вони припустили, що координати та імпульси центра мас задовольняють співвідношення алгебри Снайдера з параметрами, які є такі самі, як і для елементарних частинок. Врахувавши те, що координати та імпульси центра мас задовольняють алгебру Снайдера з ефективними параметрами, результат для мінімальної довжини [30], можна переобчислити та отримати мінімальну довжину, яка узгоджується з результатами, представленими у літературі.

Також у цьому розділі досліджується проблема порушення властивостей кінетичної енергії, порушення принципу еквівалентності, проблема кінематичних змінних у просторі з алгеброю Снайдера. Ми знаходимо, що всі ці проблеми розв'язуються у всіх порядках за параметром деформації, якщо припустити, що параметр алгебри Снайдера є

обернено пропорційний до маси. Отримані результати узагальнюються на випадок алгебри Кемпфа.

Розділ має таку структуру. Підрозділ 2.2 присвячено дослідженням проблеми опису руху макроскопічного тіла, вивченням властивостей кінетичної енергії у просторі Снайдера. У підрозділі 2.3 розглядається вплив деформації комутаційних співвідношень на виконання слабкого принципу еквівалентності та пропонується умова на параметр алгебри Снайдера, при якій принцип еквівалентності зберігається. У підрозділі 2.4 знаходиться зсув перигелію для Меркурію з врахуванням особливостей опису руху макроскопічних тіл у просторі з деформованою алгеброю Снайдера. На основі отриманих результатів обчислюється верхня межа для мінімальної довжини. Проблема макроскопічного тіла та принцип еківвалентності у просторі з алгеброю Кемпфа вивчаються у підрозділі 2.5. Завершується розділ висновками 2.6.

Представлені результати опубліковано у статтях [50, 51].

2.2 Проблема опису руху макроскопічного тіла у просторі з нерелятивістською алгеброю Снайдера

Дослідімо рух макроскопічного тіла з масою M в рамках нерелятивістської алгебри Снайдера (1.4)-(1.6). У класичній границі $\hbar \to 0$ комутатори переходять в дужки Пуассона $[A, B]/i\hbar \to \{A, B\}$. Отже, при $\hbar \to 0$, співвідношенням алгебри Снайдера (1.4)-(1.6) відповідають

такі дужки Пуассона:

$$\{X_i, X_j\} = \beta^2 J_{ij}, \tag{2.1}$$

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij} + \beta^2 P_i P_j, \tag{2.2}$$

$$\{P_i, P_j\} = 0, \tag{2.3}$$

де $i, j = (1, 2, 3)$ (див., для прикладу, [30]).

Для тіла з масою M, яке описується гамільтоніаном:

$$H = \frac{P^2}{2M}, \tag{2.4}$$

($P^2 = \sum_i P_i^2$), врахувавши співвідношення алгебри Снайдера (2.1)-(2.3), отримаємо:

$$\dot{X}_i = \{X_i, H\} = \frac{P_i}{M}(1 + \beta^2 P^2), \tag{2.5}$$

$$\dot{P}_i = 0. \tag{2.6}$$

Із (2.5), з точністю до першого порядку за β^2 знайдемо:

$$P_i = M\dot{X}_i(1 - \beta^2 M^2 \dot{X}^2), \tag{2.7}$$

де $\dot{X}^2 = \sum_i \dot{X}_i^2$. Отже, з точністю до першого порядку за β^2 гамільтоніан (2.4) можна переписати, як функцію швидкості тіла, у такому вигляді:

$$H = \frac{M\dot{X}^2}{2}(1 - 2\beta^2 M^2 \dot{X}^2). \tag{2.8}$$

Розгляньмо випадок, коли тіло з масою M можна поділити на N частин з масами m_a, які можуть розглядатися, як точкові частинки. Ці частини є жорстко зв'язані та рухаються зі швидкістю руху центра мас тіла. Отже, з іншого боку відповідно до властивості адитивності кінетичної енергії, кінетична енергія тіла може бути записана як

$$H = \sum_a \frac{(P^{(a)})^2}{2m_a}, \tag{2.9}$$

де індекс a позначає частинки,

$$\sum_a m_a = M. \tag{2.10}$$

Узагальнимо співвідношення алгебри Снайдера для координат та імпульсів частинок $X_i^{(a)}$, $P_i^{(a)}$. Координати та імпульси різних частинок можуть задовольняти алгебру (2.1)-(2.3) з різними параметрами β. Позначимо β_a параметр деформації, який відповідає частинці з індексом a. Отже, співвідношення алгебри Снайдера для $X_i^{(a)}$, $P_i^{(a)}$ можуть бути записані у такому вигляді

$$\{X_i^{(a)}, X_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\beta_a^2 J_{ij}^{(a)}, \tag{2.11}$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}(\delta_{ij} + \beta_a^2 P_i^{(a)} P_j^{(a)}), \tag{2.12}$$

$$\{P_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = 0, \tag{2.13}$$

де

$$J_{ij}^{(a)} = X_i^{(a)} P_j^{(a)} - X_j^{(a)} P_i^{(a)}. \tag{2.14}$$

Індекси a, b позначають частинки. Записуючи (2.11)-(2.13), ми припустили, що дужки Пуассона для координат та імпульсів різних частинок дорівнюють нулю.

Розглянувши гамільтоніан (2.9) та взявши до уваги рівності (2.11)-(2.13), можемо знайти вираз для швидкості частинки з індексом a

$$\dot{X}_i^{(a)} = \{X_i^{(a)}, H\} = \frac{P_i^{(a)}}{m_a}\left(1 + \beta_a^2 (P^{(a)})^2\right). \tag{2.15}$$

Отже, з точністю до першого порядку за β_a^2 маємо:

$$P_i^{(a)} = m_a \dot{X}_i^{(a)}\left(1 - \beta_a^2 m_a^2 (\dot{X}^{(a)})^2\right), \tag{2.16}$$

та кінетична енергія (2.9), як функція швидкості, може бути записана у такому вигляді:

$$H = \sum_a \frac{m_a \dot{X}^2}{2}(1 - 2\beta_a^2 m_a^2 \dot{X}^2) = \frac{M\dot{X}^2}{2}(1 - 2M^2 \sum_a \beta_a^2 \mu_a^3 \dot{X}^2). \tag{2.17}$$

Тут ми врахували те, що частинки рухаються з однаковими швидкостями, які дорівнюють швидкості руху тіла:

$$\dot{X}_i^{(a)} = \dot{X}_i, \tag{2.18}$$

а також (2.10).

Якщо ми, як розглядалося у роботах [30, 31], припустимо, що параметр алгебри Снайдера є однаковий для різних частинок та макроскопічних тіл, а саме:

$$\beta = \beta_a, \tag{2.19}$$

із (2.8), (2.17) отримаємо, що фундаментальна властивість кінетичної енергії, її адитивність, порушується. Отже, припущення (2.19) не має фізичного змісту.

Порівнявши вирази (2.8), (2.17), маємо, що кінетична енергія є адитивною, якщо параметр алгебри Снайдера, який відповідає макроскопічному тілу, визначається як

$$\tilde{\beta}^2 = \sum_a \beta_a^2 \mu_a^3. \tag{2.20}$$

Інша властивість кінетичної енергії – незалежність від композиції – також порушується у просторі з алгеброю Снайдера. Зауважимо, що кінетична енергія (2.17) залежить від ефективного параметра (2.20), який визначається масами частинок, які формують макроскопічне тіло, та параметрами алгебри Снайдера для координат та імпульсів частинок β_a. Отже, відповідно до (2.17) кінетична енергія залежить від способу поділу макроскопічного тіла на частини (частинки). Для макроскопічних тіл з однаковими масами M, проте різним складом, відповідно до (2.17) ми отримаємо різні вирази для кінетичної енергії. Отже, кінетична енергія тіла у просторі Снайдера залежить від його композиції.

Звернімо увагу, що, якщо ми розглянемо ідею пов'язати параметр алгебри Снайдера з масою, а саме, якщо ми припустимо, що виконується таке співвідношення:

$$\beta_a m_a = \gamma = \text{const}, \tag{2.21}$$

(тут m_a – маса частинки, γ – константа, яка не залежить від маси) із (2.20) отримаємо:

$$\tilde{\beta} = \frac{\gamma}{M} \tag{2.22}$$

Врахувавши (2.22), кінетична енергія макроскопічного тіла (2.17) запишеться у такому вигляді:

$$H = \frac{M\dot{X}^2}{2}(1 - 2\gamma^2\dot{X}^2). \tag{2.23}$$

Отже, при виконанні рівності (2.21), кінетична енергія залежить від повної маси системи та не залежить від її композиції. Властивості кінетичної енергії відновлюються у просторі з алгеброю Снайдера.

На додаток, завдяки співвідношенню (2.21), дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас, означених традиційно:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_a \mu_a \mathbf{X}^{(a)}, \tag{2.24}$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \sum_a \mathbf{P}^{(a)}, \tag{2.25}$$

відтворюють співвідношення алгебри Снайдера (2.1)-(2.3) з ефективним параметром (2.22).

Врахувавши (2.11)-(2.13), для координат та імпульсів центра мас (2.24), (2.25) знайдемо:

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = \sum_a \mu_a^2 \beta_a^2 J_{ij}^{(a)} \tag{2.26}$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ij} + \sum_a \mu_a \beta_a^2 P_i^{(a)} P_j^{(a)} \tag{2.27}$$

$$\{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = 0. \tag{2.28}$$

Звернімо увагу, що співвідношення (2.26), (2.27) не відтворюють співвідношення алгебри Снайдера (2.1), (2.2).

Якщо виконується умова (2.21), використавши (2.15), можемо записати:

$$\frac{P_i^{(a)}}{m_a}\left(1 + \gamma^2 \left(\frac{P^{(a)}}{m_a}\right)^2\right) = \dot{X}_i^{(a)}. \tag{2.29}$$

Із (2.29) маємо, що відношення $P_i^{(a)}/m_a$ визначається константою γ та швидкістю $\dot{X}_i^{(a)}$.

$$\frac{P_i^{(a)}}{m_a} = f(\dot{X}_i^{(a)}, \gamma). \tag{2.30}$$

Отже, у просторі Снайдера для частинок, які рухаються з однаковими швидкостями, маємо:

$$\frac{P_i^{(a)}}{m_a} = \frac{\tilde{P}_i}{M}. \tag{2.31}$$

Врахувавши (2.26)-(2.28), (2.31), для координат та імпульсів центра мас тіла отримаємо співвідношення алгебри Снайдера з параметром $\tilde{\beta}$, який визначається як (2.22). А саме, можемо записати:

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = \tilde{\beta}^2 \tilde{J}_{ij}, \tag{2.32}$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ij} + \tilde{\beta}^2 \tilde{P}_i \tilde{P}_j, \tag{2.33}$$

$$\{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = 0, \tag{2.34}$$

де

$$\tilde{J}_{ij} = \tilde{X}_i \tilde{P}_j - \tilde{X}_j \tilde{P}_i. \tag{2.35}$$

Важливо зауважити, що співвідношення (2.32), (2.33) отримано без наближень, пов'язаних з малістю величини β. У всіх порядках за параметром β завдяки умові (2.21), співвідношення для координат та імпульсів центра мас макроскопічного тіла відтворюють співвідношення алгебри Снайдера. Також із (2.31) маємо, що у всіх порядках за параметром β

$$\sum_a \frac{(P^{(a)})^2}{m_a} = \frac{\tilde{P}^2}{M}. \tag{2.36}$$

Отже, кінетична енергія є адитивною та не залежить від композиції.

Важливо, що параметр $\tilde{\beta}$, який описує рух центра мас тіла, є менший ніж параметри β_a, які відповідають частинкам, що його формують. На основі рівностей (2.21) та (2.22) можемо записати:

$$\tilde{\beta} = \beta_a \frac{m_a}{M}, \tag{2.37}$$

де m_a – маса частинки з параметром деформації β_a, M – маса тіла, рух якого описується параметром $\tilde{\beta}$. Зважаючи на це, можемо зробити висновок, що вплив особливостей структури простору на планківських масштабах на рух макроскопічних тіл є меншим ніж на елементарні частинки. Це твердження є зрозумілим, та має бути врахованим при дослідженні руху макроскопічних тіл у просторі Снайдера.

На закінчення цього підрозділу, важливо зауважити ще один важливий результат, який можна отримати завдяки умові (2.21). Координати та імпульси, які задовольняють співвідношення (2.11)-(2.13) можуть бути представлені як

$$X_i^{(a)} = x_i^{(a)} \sqrt{1 - \beta_a^2 (p^{(a)})^2}, \tag{2.38}$$

$$P_i^{(a)} = \frac{p_i^{(a)}}{\sqrt{1 - \beta_a^2 (p^{(a)})^2}}, \tag{2.39}$$

де

$$(p^{(a)})^2 = \sum_i (p_i^{(a)})^2, \tag{2.40}$$

Для координат та імпульсів $x_i^{(a)}$, $p_i^{(a)}$ виконуються такі рівності:

$$\{x_i^{(a)}, x_j^{(b)}\} = 0, \tag{2.41}$$

$$\{x_i^{(a)}, p_j^{(b)}\} = \delta_{ij}\delta_{ab}, \tag{2.42}$$

$$\{p_i^{(a)}, p_j^{(b)}\} = 0. \tag{2.43}$$

Імпульси є обмежені як

$$(p^{(a)})^2 < \frac{1}{\beta_a}, \tag{2.44}$$

(див., для прикладу, [79]). Із (2.38) випливає, що координати залежать від імпульсів, а тому залежать від маси. Також, із (2.39) маємо, що імпульси не є пропорційні до маси, оскільки вираз під квадратним коренем залежить від квадрату імпульсу. Важливо відзначити, що при виконанні умови (2.21), можемо записати:

$$X_i^{(a)} = x_i^{(a)} \sqrt{1 - \gamma^2 \frac{(p^{(a)})^2}{m_a^2}}, \tag{2.45}$$

$$P_i^{(a)} = \frac{p_i^{(a)}}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{(p^{(a)})^2}{m_a^2}}}. \tag{2.46}$$

Зауважимо, що координати (2.38) не залежать від маси. Отже, координати у просторі Снайдера можуть розглядатися як кінематичні змінні, якщо виконується рівність (2.21). Звернімо також увагу, що при виконанні умови (2.21) імпульси (2.39) пропорційні до маси, як це є у просторі зі звичними дужками Пуассона ($\beta = 0$).

2.3 Вплив деформації комутаційних співвідношень на виконання слабкого принципу еквівалентності

Дослідімо рух частинки з масою m у гравітаційному полі у просторі Снайдера. Розгляньмо такий гамільтоніан

$$H = \frac{P^2}{2m} + mV(X_1, X_2, X_3). \tag{2.47}$$

Координати X_i та імпульси P_i задовольняють співвідношення (2.1)-(2.3). Функція $V(X_1, X_2, X_3)$ описує поле. Врахувавши співвідношення алгебри Снайдера (2.11)-(2.13), можемо записати такі рівняння руху:

$$\dot{X}_i = \frac{P_i}{m}\left(1 + \beta^2 P^2\right) + m\beta^2 J_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{2.48}$$

$$\dot{P}_i = -m\frac{\partial V}{\partial X_i} - m\beta^2 P_i P_j \frac{\partial V}{\partial X_j}. \tag{2.49}$$

Зауважимо, що через деформацію дужок Пуассона (2.1), (2.2) швидкість частинки у гравітаційному полі (2.48) залежить від її маси. Відповідно до слабкого принципу еквівалентності (принципу рівності інерційної та гравітаційної мас) траєкторія та швидкість частинки у гравітаційному полі не залежать від її маси та композиції (див., для прикладу, [174]). Отже, деформація дужок Пуассона (2.1)-(2.3) зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності.

Важливо відзначити, що якщо виконується рівність (2.21), знайдемо:

$$\dot{X}_i = P'_i\left(1 + \gamma^2 (P')^2\right) + \gamma^2 (X_i P'_j - X_j P'_i)\frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{2.50}$$

$$\dot{P}'_i = -\frac{\partial V}{\partial X_i} - \gamma^2 P'_i P'_j \frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{2.51}$$

де ми ввели таке позначення:

$$P_i' = \frac{P_i}{m}. \tag{2.52}$$

Рівняння (2.50), (2.51) не залежать від маси. Тому розв'язки цих рівнянь $X_i(t)$, $P_i'(t)$ також не залежать від маси. Отже, слабкий принцип еквівалентності зберігається у просторі Снайдера, якщо параметр β залежить від маси як (2.21).

У більш загальному випадку руху тіла з масою M у гравітаційному полі, якщо виконується умова (2.21), записавши гамільтоніан

$$H = \frac{\tilde{P}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3), \tag{2.53}$$

та врахувавши (2.32), (2.33), отримаємо рівняння руху для центра мас з ефективним параметром (2.22), який не залежить від маси тіла та мас частинок, які входять до його складу:

$$\dot{\tilde{X}}_i = \frac{\tilde{P}_i}{M}\left(1 + \tilde{\beta}^2\tilde{P}^2\right) + M\tilde{\beta}^2\tilde{J}_{ij}\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_j} =$$

$$= \frac{\tilde{P}_i}{M}\left(1 + \frac{\gamma^2}{M^2}\tilde{P}^2\right) + \frac{\gamma^2}{M}\tilde{J}_{ij}\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_j}, \tag{2.54}$$

$$\dot{\tilde{P}}_i = -M\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_i} - M\tilde{\beta}^2\tilde{P}_i\tilde{P}_j\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_j} = -M\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_i} - \frac{\gamma^2}{M}\tilde{P}_i\tilde{P}_j\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_j}. \tag{2.55}$$

Рівняння (2.54), (2.55) можуть бути переписані у вигляді (2.50), (2.51) Отже, слабкий принцип відновлюється у просторі з алгеброю Снайдера, якщо параметр деформації β залежить від маси частинки, а саме, якщо виконується рівність (2.22).

2.4 Оцінка мінімальної довжини у просторі Снайдера на основі досліджень зсуву перигелію Меркурію

У роботах [19,30] розв'язано задачу Кеплера у просторі Снайдера (2.1)-(2.3) та отримано такий вираз для зсуву перигелію Меркурію, зумовленого деформацією:

$$\delta\theta = -\frac{2\pi\beta^2 G m^2 M}{a(1-e^2)}, \tag{2.56}$$

тут G – гравітаційна стала, M – маса Сонця, m – маса планети Меркурій, e – ексцентриситет орбіти, a – велика піввісь. Порівнявши отриманий результат із невідповідністю між передбаченнями загальної теорії відносності та даними спостережень, яка є порядку $10^{-12}\mathrm{r}ad/rev$, було знайдено дуже сильне обмеження на величину β [30]. Такий парадоксальний ефект отримано через припущення, що рух планети Меркурій описується таким самим параметром β, як і рух елементарної частинки. Як було показано у підрозділі 2.2, рух макроскопічного тіла у просторі Снайдера описується параметром $\tilde{\beta}$. Отже, у виразі (2.56) параметр β має бути замінений на $\tilde{\beta}$, який визначається як (2.22).

Відповідно до (2.21), (2.22) ми можемо знайти зв'язок параметра алгебри Снайдера $\tilde{\beta}$, який описує рух планети Меркурій, з параметром β_{nuc}, який описує рух нуклонів у просторі Снайдера. Маємо:

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta_{nuc} m_{nuc}}{m}, \tag{2.57}$$

де m_{nuc} – маса нуклона. Врахувавши (2.57) та припустивши, що

$$\frac{2\pi\tilde{\beta}^2 G m^2 M}{a(1-e^2)} < 10^{-12}, \tag{2.58}$$

як було зроблено у роботі [30], отримаємо таку оцінку для мінімальної

довжини

$$\hbar\beta_{пис} < 10^{-19}\text{м}. \tag{2.59}$$

Цей результат є на 16 порядків більший за довжину Планка та узгоджується з оцінкою мінімальної довжини у квантованому просторі (1.84)-(1.85). А саме, у роботі [157] було отримано, верхню межу для мінімальної довжини для нуклонів $8 \cdot 10^{-18}$м.

Отже, проблема макроскопічного тіла, відома, як проблема футбольного м'яча, розв'язується у просторі з алгеброю Снайдера, при врахуванні виразу для параметра деформації для макроскопічних тіл (2.22) та умови (2.21).

У наступному підрозділі результати та висновки з досліджень руху макроскопічного тіла у просторі з нерелятивістською алгеброю Снайдера будуть узагальнені на випадок деформованого простору з алгеброю Кемпфа.

2.5 Проблема макроскопічного тіла та принцип еквівалентності у просторі з алгеброю Кемпфа

У більш загальному випадку, деформована алгебра, яка описує простір з мінімальною довжиною має вигляд (1.74)-(1.76). Алгебра була запропонована Кемпфом [17]. Дослідімо особливості опису руху макроскопічного тіла у квантованому просторі, який характеризується співвідношеннями (1.74)-(1.76).

У класичній границі з (1.74)-(1.76) отримаємо такі дужки Пуассона:

$$\{X_i, X_j\} = \frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 + \beta P^2}(P_i X_j - P_j X_i), \tag{2.60}$$

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij}(1 + \beta P^2) + \beta' P_i P_j, \tag{2.61}$$

$$\{P_i, P_j\} = 0. \tag{2.62}$$

Узагальнимо співвідношення алгебри Кемпфа (2.60)-(2.62) для координат та імпульсів частинок. Розгляньмо випадок, коли координати та імпульси різних частинок задовольняють (2.60)-(2.62) з різними параметрами деформації β, β', а також, коли дужки Пуассона для координат та імпульсів різних частинок дорівнюють нулю. Маємо:

$$\{X_i^{(a)}, X_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\frac{(2\beta_a - \beta'_a) + (2\beta_a + \beta'_a)\beta_a(P^{(a)})^2}{1 + \beta_a(P^{(a)})^2} \times$$

$$\times(P_i^{(a)}X_j^{(a)} - P_j^{(a)}X_i^{(a)}), \tag{2.63}$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\delta_{ij}(1 + \beta_a(P^{(a)})^2) + \delta_{ab}\beta'_a P_i^{(a)} P_j^{(a)}, \tag{2.64}$$

$$\{P_i^{(a)}, P_j^{(a)}\} = 0, \tag{2.65}$$

де індекси a, b позначають частинки, $X_i^{(a)}$, $P_i^{(a)}$, β_a, β'_a – координати, імпульси та параметри деформації, які відповідають частинці з масою m_a.

Із (2.9), врахувавши (2.63)-(2.65), отримаємо рівняння руху:

$$\dot{X}_i^{(a)} = \frac{P_i^{(a)}}{m_a}(1 + (\beta_a + \beta'_a)(P^{(a)})^2), \tag{2.66}$$

$$\dot{P}_i^{(a)} = 0. \tag{2.67}$$

Розгляньмо такі залежності параметрів деформації від маси:

$$\sqrt{\beta_a} m_a = \gamma = \text{const}, \tag{2.68}$$

$$\sqrt{\beta'_a} m_a = \gamma' = \text{const}, \tag{2.69}$$

де параметри β_a, β'_a відповідають частинці з масою m_a, γ, γ' – константи, які є однаковими для різних частинок. При виконанні рівностей

(2.68), (2.69) для частинок, які рухаються з тими самими швидкостями, на основі (2.66) отримаємо, що відношення імпульсів до маси

$$P_i^{(a)\prime} = \frac{P_i^{(a)}}{m_a}, \tag{2.70}$$

є однаковими, а саме:

$$P_i^{(a)\prime}\left(1 + (\gamma^2 + (\gamma')^2)(P_i^{(a)\prime})^2\right) = \dot{X}_i, \tag{2.71}$$

Врахувавши (2.70), (2.71) знайдемо, що у всіх порядках за параметрами деформації дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас (2.24), (2.25) відповідають співвідношенням деформованої алгебри (2.60)-(2.62). А саме, маємо:

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = \sum_a \mu_a^2 \frac{(2\beta_a - \beta_a') + (2\beta_a + \beta_a')\beta_a (P^{(a)})^2}{1 + \beta_a (P^{(a)})^2} \times$$

$$\times (P_i^{(a)} X_j^{(a)} - P_j^{(a)} X_i^{(a)}) = \frac{(2\tilde{\beta} - \tilde{\beta}') + (2\tilde{\beta} + \tilde{\beta}')\tilde{\beta}\tilde{P}^2}{1 + \tilde{\beta}\tilde{P}^2} \times$$

$$\times (\tilde{P}_i \tilde{X}_j - \tilde{P}_j \tilde{X}_i), \tag{2.72}$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \sum_a \mu_a \delta_{ij} (1 + \beta_a (P^{(a)})^2) +$$

$$+ \sum_a \mu_a \beta_a' P_i^{(a)} P_j^{(a)} = \delta_{ij}(1 + \tilde{\beta}\tilde{P}^2) + \tilde{\beta}' \tilde{P}_i \tilde{P}_j, \tag{2.73}$$

$$\{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = 0, \tag{2.74}$$

де параметри $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}'$ визначаються як

$$\tilde{\beta} = \frac{\gamma^2}{M^2}, \quad \tilde{\beta}' = \frac{(\gamma')^2}{M^2}. \tag{2.75}$$

тут $M = \sum_a m_a$.

Зауважимо, що умова на параметр деформації (2.68) була запропонована у роботі [173] для відновлення незалежності кінетичної енергії тіла від композиції у частковому випадку алгебри Кемпфа $\beta' = 2\beta$,

записаної з точністю до першого порядку за параметром деформації, (1.84)-(1.85).

Із отриманого співвідношення (2.71) випливає, що у всіх порядках за параметрами деформації виконуються рівності (2.31), (2.36). Отже, у випадку, коли задовольняються умови (2.68), (2.69) у всіх порядках за параметрами деформації кінетична енергія тіла у просторі з алгеброю Кемпфа (2.60)-(2.62) є адитивною та не залежить від композиції. З точністю до першого порядку за параметрами деформації, врахувавши зв'язок імпульсу з швидкістю:

$$P_i^{(a)} = m_a \dot{X}_i^{(a)}(1 - (\beta_a + \beta'_a) m_a^2 (\dot{X}^{(a)})^2), \tag{2.76}$$

(рівність (2.76) записано на основі результату (2.66)) та взявши до уваги, що частинки, які формують тіло, рухаються зі швидкостями, які дорівнюють швидкості центра мас

$$\dot{X}_i^{(a)} = \dot{\tilde{X}}_i, \tag{2.77}$$

отримаємо такий вираз для кінетичної енергії макроскопічного тіла з масою M:

$$H = \sum_a \frac{(P^{(a)})^2}{m_a} = \sum_a \frac{m_a \dot{X}^2}{2}(1 - 2m_a^2(\beta_a + \tilde{\beta}'_a)\dot{X}^2) =$$

$$= \frac{M\dot{\tilde{X}}^2}{2}(1 - 2(\tilde{\beta} + \tilde{\beta}')M^2\dot{\tilde{X}}^2). \tag{2.78}$$

Рівності (2.68), (2.69) також дозволяють відновити принцип еквівалентності у квантованому просторі з алгеброю Кемпфа (2.60)-(2.62). Для частинки з масою m у гравітаційному полі $V(X_1, X_2, X_3)$ з гамільтоніаном (2.47), взявши до уваги співвідношення алгебри (2.60)-(2.62),

отримаємо, що рівняння руху мають такий вигляд:

$$\dot{X}_i = \frac{P_i}{m}\left(1 + (\beta + \beta')P^2\right) +$$

$$+m\frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 + \beta P^2}(P_i X_j - P_j X_i)\frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{2.79}$$

$$\dot{P}_i = -m\left(1 + \beta P^2\right)\frac{\partial V}{\partial X_i} - m\beta' P_i P_j \frac{\partial V}{\partial X_j}. \tag{2.80}$$

Звернімо увагу, що через деформацію дужок Пуассона (2.60)-(2.62) рух частинки у гравітаційному полі залежить від маси. Отже, із (2.79), (2.80) випливає, що слабкий принцип еквівалентності порушується у просторі з алгеброю Кемпфа.

У випадку, коли виконуються рівності (2.68), (2.69), рівняння (2.79), (2.80) можна переписати як

$$\dot{X}_i = P'_i\left(1 + (\gamma + \gamma')(P')^2\right) +$$

$$+\frac{(2\gamma - \gamma') + (2\gamma + \gamma')\gamma(P')^2}{1 + \gamma(P')^2}(P'_i X_j - P'_j X_i)\frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{2.81}$$

$$\dot{P}'_i = -\left(1 + \gamma(P')^2\right)\frac{\partial V}{\partial X_i} - \gamma' P'_i P'_j \frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{2.82}$$

де ми використали позначення $P'_i = P_i/m$. Звернімо увагу, що рівняння (2.81), (2.82) не залежать від маси m. Тому їхні розв'язки $X_i(t)$, $P'_i(t)$ також не залежать від маси. Отже, частинки в гравітаційному полі у деформованому просторі рухаються по однакових траєкторіях. Слабкий принцип еквівалентності зберігається, якщо параметри алгебри Кемпфа залежить від маси як (2.81), (2.82).

У більш загальному випадку, для макроскопічного тіла з масою M у гравітаційному полі з гамільтоніаном (2.53), взявши до уваги (2.72)-

(2.74) та (2.68), (2.69), можемо записати такі рівняння руху:

$$\dot{\tilde{X}}_i = \tilde{P}'_i \left(1 + (\gamma + \gamma')(\tilde{P}')^2\right) +$$

$$+\frac{(2\gamma - \gamma') + (2\gamma + \gamma')\gamma(\tilde{P}')^2}{1 + \gamma(\tilde{P}')^2}(\tilde{P}'_i\tilde{X}_j - \tilde{P}'_j\tilde{X}_i)\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_j}, \tag{2.83}$$

$$\dot{\tilde{P}}'_i = -\left(1 + \gamma(\tilde{P}')^2\right)\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_i} - \gamma'\tilde{P}'_i\tilde{P}'_j\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_j}, \tag{2.84}$$

де ми використали позначення: $\tilde{P}'_i = \tilde{P}_i/M$. Розв'язки рівнянь (2.83)-(2.84) не залежать від маси тіла та його композиції. Отже, рух тіла у гравітаційному полі у просторі з деформованою алгеброю Кемпфа не залежить від його маси, якщо параметри деформації задовольняють рівності (2.68), (2.69).

2.6 Висновки до розділу 2

У розділі розглянуто нелінійні деформації алгебри Гайзенберґа, які описують простір з мінімальною довжиною (квантований простір). А саме, розглянуто нерелятивістську алгебру Снайдера та алгебру Кемпфа.

Знайдено, що властивості кінетичної енергії порушується у просторі з алгеброю Снайдера, якщо припустити, що параметр алгебри β є однаковим для елементарних частинок та макроскопічних тіл. При такому припущенні кінетична енергія макроскопічного тіла не є адитивною та залежить від його композиції. Крім того, припущення про те, що параметр алгебри Снайдера є однаковий для координат та імпульсів частинок (макроскопічних тіл), приводить до парадоксального ефекту, а саме до екстремально малої оцінки для мінімальної довжини, яка була отримана у роботі [30].

Встановлено особливості опису руху макроскопічного тіла у просторі з алгеброю Снайдера. Ми узагальнили співвідношення алгебри для координат та імпульсів різних частинок, розглянувши загальний випадок, коли параметри деформованої алгебри є різні для різних частинок (2.11)-(2.13). Знайдено, що кінетична енергія є адитивною, якщо рух макроскопічного тіла описується ефективним параметром (2.20), який визначається параметрами алгебри Снайдера для координат та імпульсів частинок, які утворюють тіло, а також їхніми масами. Важливо, що ефективний параметр є меншим від параметрів алгебри Снайдера, що відповідають елементарним частинкам. Отже, вплив квантованості простору на макроскопічні системи є меншим ніж на елементарні частинки. Цей висновок дозволяє розв'язати проблему екстримально малої верхньої верхньої межі для мінімальної довжини, отриманої у роботі [30].

Знайдено, що дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас не відповідають співвідношенням алгебри Снайдера. Запропоновано умову на параметр алгебри Снайдера β (2.21), при якій дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас макроскопічного тіла відтворюють співвідношення цієї алгебри з ефективним параметром $\tilde{\beta}$ (2.32), (2.34). Результат отримано без наближень, пов'язаних з малістю параметра алгебри Снайдера. Відповідно до умови (2.21) параметри β, які відповідають частинкам, є обернено пропорційні до їх маси. Важливо, що з цієї умови випливає, що ефективний параметр, який описує рух макроскопічного тіла, є обернено пропорційний до маси тіла та не залежить від його композиції. Це дозволяє відновити незалежність кінетичної енергії макроскопічного тіла від його композиції, а також адитивність кінетичної енергії у всіх порядках за параметром деформації.

Досліджено рух частинки та макроскопічного тіла у гравітаціному полі у просторі з алгеброю Снайдера. Знайдено, що траєкторія та швидкість частинки (макроскопічного тіла) не залежать від її маси та композиції у випадку виконання умови (2.21). Отже, рівність (2.21), яка пов'язує параметр алгебри Снайдера з масою, дозволяє відновити також слабкий принцип еквівалентності.

Проаналізовано представлення для координат та імпульсів, які задовольняють співвідношення алгебри Снайдера. Знайдено, що при виконанні умови (2.21) координати не залежать від маси та можуть розглядатися, як кінематичні змінні, імпульси пропорційні до маси, як це є у звичному просторі.

Отже, ми встановили, що припущення про обернено пропорційну залежність параметра алгебри Снайдера від маси (2.21) дає можливість побудувати теорію квантованого простору зі збереженими фундаментальними законами та принципами. А саме, при виконанні рівності (2.21) координати та імпульси центра мас задовольняють співвідношення алгебри Снайдера, координати можуть розглядатися як кінематичні змінні та імпульси є пропорційні до маси, зберігаються властивості кінетичної енергії, відновлюється слабкий принцип еквівалентності.

Врахувавши те, що рух макроскопічного тіла у просторі Снайдера описується ефективним параметром деформації, на основі результатів досліджень зсуву перигелію для планети Меркурій, представлених у статті [30], ми отримали верхню межу для мінімальної довжини 10^{-19}м (2.59), яка є більшою від довжини Планка. Отже, проблема екстремально малих результатів для мінімальної довжини розв'язується при врахуванні особливостей опису руху макроскопічних тіл у просторі Снайдера.

Встановлено, що ідея про залежність параметрів деформації від маси є також важлива у просторі з алгеброю Кемпфа (2.60)-(2.62). А саме, ми знайшли, що у випадку, коли для параметрів деформованої алгебри (2.60)-(2.62) задовольняються рівності (2.68), (2.69), дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас відповідають співвідношенням деформованої алгебри з ефективним параметром деформації (2.72)-(2.74), відновлюються властивості кінетичної енергії, рівняння руху частинки (тіла) у гравітаційному полі не залежать від її маси та композиції та зберігається слабкий принцип еквівалентності.

Кількість результатів, які можуть бути отримані завдяки ідеї залежності параметрів деформованої алгебри від маси, підтверджує її важливість. У наступних розділах ми покажемо, що така ідея також дозволяє розв'язати фундаментальні проблеми у квантованих просторах, які характеризуються алгеброю з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу, алгеброю типу Лі, алгеброю з деформацією кручення.

Розділ 3

Властивості фізичних систем у квантованому фазовому просторі канонічного типу

3.1 Вступ

Багато фізичних проблем вивчалися у просторі з канонічною некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів (квантованому фазовому просторі канонічного типу), серед них: вільна частинка [21], система вільних частинок [175], атом водню [21–23, 99], гармонічний осцилятор [21,24,25,96–98,176–178], нейтрони в гравітаційній квантовій ямі [100,179], гравітаційні хвилі [180], задача Ландау [178], задачі квантової інформації [181, 182] та інші. Такі дослідження є необхідні для встановлення впливу некомутативності координат та некомутативності імпульсів на властивості фізичних систем, для оцінки мінімальної довжини, мінімального імпульсу.

Важливим є розв'язання проблеми опису руху макроскопічних систем у некомутативному фазовому просторі, визначення особливостей опису руху центра мас багаточастинкової системи з врахуванням некомутативності координат та некомутативності імпульсів частинок, які входять до її складу. У просторі з канонічною некомутативністю координат задача багатьох частинок досліджувалася у статті [183]. Автори

роботи [184] вивчали систему двох заряджених частинок у некомутативному просторі ((1.20)-(1.22) з $\sigma_{ij} = \eta_{ij} = 0$). Також система двох частинок розглядалася у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів [21]. Особливості опису руху системи багатьох частинок у двовимірному просторі з некомутативністю координат канонічного типу представлено у роботі [185].

У цьому розділі досліджується проблема опису руху макроскопічного тіла у квантованому фазовому просторі канонічного типу (1.20)-(1.22). Ми приходимо до висновку, що некомутативність імпульсів зумовлює ряд проблем, які є фундаментальними і потребують розв'язання. А саме, встановлюється, що некомутативність імпульсів зумовлює вплив відносного руху на рух центра мас навіть у випадку системи вільних частинок. Рух вільної частинки залежить від її маси, тому система вільних частинок не рухається разом навіть у випадку однакових початкових швидкостей частинок. Кінетична енергія макроскопічного тіла не є адитивною, що зумовлює порушення закону збереження енергії у некомутативному фазовому просторі. Співвідношення для координат та імпульсів центра мас, визначених звично, не відтворюють співвідношення некомутативної алгебри. Імпульс центра мас, означений як сума імпульсів частинок системи, не є інтегралом руху та не є пропорційний до маси системи. Розв'язок цих проблем знаходиться у цьому розділі.

Серед фундаментальних проблем у квантованому фазовому просторі канонічного типу також варто звернути увагу на проблему порушення слабкого принципу еквівалентності [100]. У просторі з некомутативністю координат принцип еквівалентності досліджувався у роботах [185,186]. У статті [185] знайдено, що слабкий принцип еквівалентності відновлюється у двовимірному просторі з некомутативністю

координат у випадку, коли параметри координатної некомутативності є обернено пропорційні до маси. У просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів проблема порушення принципу еквівалентності вивчалася у статтях [100, 187]. Автори роботи [187] прийшли до висновку, що порушення принципу еквівалентності зумовлює анізотропія параметрів некомутативності. У розділі досліджується рух в гравітаційному полі у квантованому фазовому просторі канонічного типу, розглядається зміщення перигелію Меркурію, система Сонце-Земля Місяць та пропонуються умови на параметри некомутативної алгебри (1.20)-(1.22) при яких розв'язується проблема порушення слабкого принципу еквівалентності.

Розділ побудовано таким чином. У підрозділі 3.2 досліджується обмеження на довжину у шестивимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу. У підрозділі 3.3 проаналізовано представлення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів, розв'язано проблему кінематичних змінних. У підрозділі 3.4 знаходиться вплив імпульсної некомутативності на рух системи вільних частинок. Підрозділ 3.5 присвячено дослідженню представлення для координат та імпульсів центра мас. У підрозділі 3.6 знаходиться означення для імпульсу центра мас, як інтеграла руху. Точний вираз для спектру системи частинок з осциляторною взаємодією знаходиться у підрозділі 3.7. Проблема опису руху макроскопічного тіла у шестивимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу розв'язується у підрозділі 3.8. Підрозділ 3.9 присвячено дослідженням вільного падіння частинки (тіла) у некомутативному фазовому просторі. У підрозділі 3.10 знаходиться оцінка для мінімального імпульсу, на основі зсуву перигелію Меркурію. Підрозділ 3.11 присвячено вивченням руху системи Сонце-Земля-Місяць та дослідженням принципу

еквівалентності. Розділ завершується висновками.

Результати, представлені у розділі, опубліковано у статтях: [41, 46,49,54,56,58,61,63] та у розділах монографії [47] (розділ 1 (підрозділ 1.3), розділ 4, розділ 5 (підрозділ 5.3), розділ 8).

3.2 Мінімальна довжина у некомутативному фазовому просторі канонічного типу

У некомутативному фазовому просторі, який характеризується співвідношеннями (1.20)-(1.22), існують додаткові обмеження на довжину. Врахувавши (1.20)-(1.22), можемо записати такі співвідношення невизначеностей:

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta X_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \theta_{ij}^2}{4}, \tag{3.1}$$

$$\langle \Delta P_i^2 \rangle \langle \Delta P_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \eta_{ij}^2}{4}, \tag{3.2}$$

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta P_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 (\delta_{ij} + 2\sigma_{ij}\delta_{ij} + \sigma_{ij}^2)}{4}. \tag{3.3}$$

Зауважимо, що у (3.3) нема сумування за індексами i та j.

Знайдемо та дослідімо обмеження на довжину у фазовому просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу. Розгляньмо для початку довжину, визначену у координатному просторі:

$$\Delta R = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle} = \sqrt{\langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle + \langle \Delta X_3^2 \rangle}. \tag{3.4}$$

Вираз для мінімальної довжини може бути отриманий із співвідношень невизначеностей, а також на основі результатів для власних значень оператора квадрату довжини. У роботі [188] зі співвідношень

невизначеностей (3.1) було отримано таку нерівність:

$$\Delta R \geq \sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{2}\left(\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2\right)}. \tag{3.5}$$

Знайдемо також вираз для мінімальної довжини на основі розв'язку задачі на власні значення оператора квадрата довжини:

$$\mathbf{R}^2 = \sum_i X_i^2, \tag{3.6}$$

де координати X_i задовольняють комутаційні співвідношення (1.20), $i = 1, 2, 3$.

Розгляньмо для початку двовимірний випадок. Оператор квадрата довжини має вигляд:

$$R_{12}^2 = X_1^2 + X_2^2. \tag{3.7}$$

Оператори X_1, X_2 у (3.7) не комутують ($[X_1, X_2] = i\hbar\theta_{12}$) та можуть бути представлені за допомогою координат та імпульсів x_i, p_i, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення (1.12)-(1.14) як

$$X_1 = x_1 - \frac{1}{2}\theta_{12}p_2, \tag{3.8}$$

$$X_2 = x_2 + \frac{1}{2}\theta_{12}p_1, \tag{3.9}$$

(див., для прикладу, [189]). Отже, можемо переписати оператор R_{12}^2 у такому вигляді:

$$R_{12}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \frac{\theta_{12}^2}{4}\left(p_1^2 + p_2^2\right) - \theta_{12}(x_1p_2 - x_2p_1). \tag{3.10}$$

Власні значення оператора (3.10) були знайдені у роботі [89] та визначаються як

$$r_{n_{12}}^2 = 2\hbar|\theta_{12}|\left(n_{12} + \frac{1}{2}\right), \tag{3.11}$$

тут n_{12} – квантове число, $n_{12} = 0, 1, 2, ...$ Отже, врахувавши (3.11), ми можемо записати такі нерівності

$$\langle \Delta R_{12}^2 \rangle \geq \hbar |\theta_{12}|, \tag{3.12}$$

$$\Delta R_{12} \geq \sqrt{\hbar |\theta_{12}|}, \tag{3.13}$$

де

$$\langle \Delta R_{12}^2 \rangle = \langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle, \tag{3.14}$$

$$\Delta R_{12} = \sqrt{\langle \Delta R_{12}^2 \rangle}, \tag{3.15}$$

та $\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle = 0$. Аналогічно для операторів

$$R_{23}^2 = X_2^2 + X_3^2, \quad R_{31}^2 = X_3^2 + X_1^2, \tag{3.16}$$

де координати X_i, X_j задовольняють співвідношення (1.20), можемо записати власні значення

$$r_{n_{23}}^2 = 2\hbar |\theta_{23}| \left(n_{23} + \frac{1}{2} \right), \quad r_{n_{31}}^2 = 2\hbar |\theta_{31}| \left(n_{31} + \frac{1}{2} \right), \tag{3.17}$$

тут n_{23}, n_{31} – квантові числа, $n_{23} = 0, 1, 2, ...$, $n_{31} = 0, 1, 2, ...$ Отже, виконуються такі нерівності:

$$\langle \Delta R_{23}^2 \rangle \geq \hbar |\theta_{23}|, \quad \Delta R_{23} \geq \sqrt{\hbar |\theta_{23}|}, \tag{3.18}$$

$$\langle \Delta R_{31}^2 \rangle \geq \hbar |\theta_{31}|, \quad \Delta R_{31} \geq \sqrt{\hbar |\theta_{31}|}, \tag{3.19}$$

де $\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle = \langle X_3 \rangle = 0$,

$$\langle \Delta R_{ij}^2 \rangle = \langle \Delta X_i^2 \rangle + \langle \Delta X_j^2 \rangle, \tag{3.20}$$

$$\Delta R_{ij} = \sqrt{\langle \Delta R_{ij}^2 \rangle}. \tag{3.21}$$

Важливо зауважити, що у загальному випадку

$$|\theta_{12}| \neq |\theta_{23}| \neq |\theta_{31}|. \tag{3.22}$$

Отже, на основі результатів (3.12), (3.18), (3.19), можемо зробити висновок, що некомутативність координат зумовлює обмеження на довжину, які є анізотропними. Додавши нерівності (3.12), (3.18), (3.19), отримаємо:

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle + \langle \Delta X_3^2 \rangle \geq \frac{\hbar}{2} \left(|\theta_{12}| + |\theta_{23}| + |\theta_{31}| \right), \quad (3.23)$$

та

$$\Delta R \geq \sqrt{\frac{\hbar}{2} \left(|\theta_{12}| + |\theta_{23}| + |\theta_{31}| \right)}. \quad (3.24)$$

Знайдемо власні значення оператора $\mathbf{R}^2$ (3.6) у тривимірному випадку. Використавши представлення

$$X_i = x_i - \frac{1}{2} \sum_j \theta_{ij} p_j, \quad (3.25)$$

(див., для прикладу, [99]) перепишемо оператор квадрата довжини у такому вигляді:

$$\mathbf{R}^2 = \sum_i \left(x_i - \frac{1}{2} \sum_j \theta_{ij} p_j \right)^2 =$$

$$= \mathbf{x}^2 + \frac{1}{4} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) = \mathbf{x}^2 + \frac{1}{4} \theta^2 p^2 - \frac{1}{4} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{p})^{\mathbf{2}} - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}), \quad (3.26)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$,

$$\mathbf{L} = [\mathbf{x} \times \mathbf{p}], \quad (3.27)$$

компоненти вектора $\boldsymbol{\theta}$ визначаються як

$$\theta_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \theta_{ij}. \quad (3.28)$$

Звернімо увагу, що перші два доданки у (3.26) є інваріантні відносно поворотів. Отже, зручно вибрати систему координат з напрямком осі

x_3, який співпадає з напрямком вектора $\boldsymbol{\theta}$. У цьому випадку можемо записати

$$\mathbf{R}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{4}\theta^2 p_1^2 + \frac{1}{4}\theta^2 p_2^2 - \theta(x_1 p_2 - x_2 p_1), \tag{3.29}$$

де ми використали такі самі позначення для координат x_i у вибраній системі координат, θ визначається як

$$\theta = |\boldsymbol{\theta}| = \sqrt{\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2}. \tag{3.30}$$

Зауважимо, що x_3^2 комутує з $\mathbf{R}^2$

$$\left[x_3^2, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \theta(x_1 p_2 - x_2 p_1) + \frac{1}{4}(\theta^2 p_1^2 + \theta^2 p_2^2)\right] = 0. \tag{3.31}$$

Отже, поворотом системи координат задачу на власні значення оператора квадрата довжини у тривимірному просторі зведено до задачі на власні значення оператора квадрата довжини, визначеної на площині. Врахувавши (3.11), можемо записати власні значення оператора $\mathbf{R}^2$ у такому вигляді:

$$R^2 = 2\hbar\theta\left(n + \frac{1}{2}\right) + r_3^2, \tag{3.32}$$

де r_3^2 – власні значення оператора x_3^2, n – квантові числа ($n = 0, 1, 2...$). На основі власних значень для оператора квадрату довжини (3.32) знайдемо:

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle \geq \hbar\theta. \tag{3.33}$$

Отже, для $\Delta R = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle}$ отримаємо нерівність:

$$\Delta R \geq \sqrt[4]{\hbar^2\left(\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2\right)}, \tag{3.34}$$

яка накладає обмеження на довжину в координатному просторі.

Дослідімо отримані нерівності. Порівняймо результати (3.5), (3.24), (3.34) та знайдемо нерівність, яка накладає найсильніше обмеження на довжину. Легко бачити, що нижня межа $\sqrt[4]{\hbar^2\left(\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2\right)}$,

яка представлена у нерівності (3.34), є більша за межу із нерівності (3.5) $\sqrt[4]{\hbar^2\left(\theta_{12}^2+\theta_{23}^2+\theta_{31}^2\right)/2}$. Отже, нерівність (3.34) накладає сильніше обмеження на величину ΔR. Щоб порівняти результати (3.24) та (3.34) запишемо:

$$\hbar^2(\theta_{12}^2+\theta_{23}^2+\theta_{31}^2)-\frac{\hbar^2}{4}(|\theta_{12}|+|\theta_{23}|+|\theta_{31}|)^2=$$

$$=\frac{\hbar^2}{4}\left(|\theta_{12}|-|\theta_{23}|-|\theta_{31}|\right)^2+\frac{\hbar^2}{4}\left(|\theta_{23}|-|\theta_{12}|-\right.$$

$$\left.-|\theta_{31}|\right)^2+\frac{\hbar^2}{4}\left(|\theta_{31}|-|\theta_{23}|-|\theta_{12}|\right)^2\geq 0. \tag{3.35}$$

Отже, нерівність (3.34), отримана на основі виразів для власних значень оператора квадрату довжини, накладає сильніше обмеження на ΔR у некомутативному просторі у порівнянні з нерівностями (3.24) та (3.5)

$$\sqrt[4]{\hbar^2\left(\theta_{12}^2+\theta_{23}^2+\theta_{31}^2\right)}\geq\sqrt{\frac{\hbar}{2}\left(|\theta_{12}|+|\theta_{23}|+|\theta_{31}|\right)}. \tag{3.36}$$

Мінімальна довжина у координатному просторі визначається параметрами координатної некомутативності θ_{ij} та має такий вигляд:

$$\Delta R^{min}=\sqrt[4]{\hbar^2\left(\theta_{12}^2+\theta_{23}^2+\theta_{31}^2\right)}. \tag{3.37}$$

Дослідімо мінімальну довжину, визначену в імпульсному просторі. У двовимірному випадку, оператор квадрата довжини має вигляд:

$$P_{12}^2=P_1^2+P_2^2, \tag{3.38}$$

де імпульси P_1, P_2 задовольняють співвідношення $[P_1,P_2]=i\hbar\eta_{12}$. Використавши представлення:

$$P_1=p_1+\frac{1}{2}\eta_{12}x_2, \tag{3.39}$$

$$P_2=p_2-\frac{1}{2}\eta_{12}x_1, \tag{3.40}$$

(див., для прикладу, [190]), де координати x_i та імпульси p_i задовольняють звичні комутаційні співвідношення, маємо:

$$P_{12}^2 = p_1^2 + p_2^2 + \frac{\eta_{12}^2}{4}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \eta_{12}(x_1 p_2 - x_2 p_1). \tag{3.41}$$

На основі результатів статті [21], де було знайдено енергетичні рівні вільної частинки у некомутативному фазовому просторі канонічного типу, власні значення оператора (3.38) (чи еквівалентно (3.41)) можемо записати у такому вигляді:

$$p_{m_{12}}^2 = 2\hbar|\eta_{12}|\left(m_{12} + \frac{1}{2}\right), \tag{3.42}$$

де m_{12} – квантові числа $m_{12} = 0, 1, 2, 3, ...$ Отже, отримаємо такі нерівності:

$$\langle \Delta P_1^2 \rangle + \langle \Delta P_2^2 \rangle \geq \hbar|\eta_{12}|, \tag{3.43}$$

$$\Delta P_{12} \geq \sqrt{\hbar|\eta_{12}|}, \tag{3.44}$$

де $\langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle = 0$ та $\Delta P_{12} = \sqrt{\langle \Delta P_{12}^2 \rangle}$. Аналогічно на основі розв'язків на власні значення операторів $P_{ij}^2 = P_i^2 + P_j^2$, знайдемо:

$$\Delta P_{ij} \geq \sqrt{\hbar|\eta_{ij}|}, \tag{3.45}$$

$$\Delta P_{ij} = \sqrt{\langle \Delta P_{ij}^2 \rangle}. \tag{3.46}$$

Оскільки

$$|\eta_{12}| \neq |\eta_{23}| \neq |\eta_{31}|, \tag{3.47}$$

проаналізувавши (3.45), можемо зробити висновок, що некомутативність імпульсів зумовлює анізотропію мінімальної довжини у імпульсному просторі.

Врахувавши отримані нерівності (3.45), знайдемо:

$$\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle \geq \frac{\hbar}{2}\left(|\eta_{12}| + |\eta_{23}| + |\eta_{31}|\right), \tag{3.48}$$

$$\Delta P \geq \sqrt{\frac{\hbar}{2}\left(|\eta_{12}| + |\eta_{23}| + |\eta_{31}|\right)}. \tag{3.49}$$

У тривимірному випадку, використавши представлення:

$$P_i = p_i + \frac{1}{2}\sum_j \eta_{ij} x_j, \tag{3.50}$$

(див., для прикладу, [99]), оператор

$$\mathbf{P}^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2, \tag{3.51}$$

може бути записаний у такому вигляді:

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{4}\eta^2 p^2 - \frac{1}{4}(\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{x})^{\mathbf{2}} - (\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{L}). \tag{3.52}$$

Координати та імпульси x_i, p_i задовольняють звичні комутаційні співвідношення. Компоненти вектора $\boldsymbol{\eta}$ визначаються як

$$\eta_k = \varepsilon_{ijk}\frac{\eta_{ij}}{2}. \tag{3.53}$$

Модуль вектора $\boldsymbol{\eta}$ має такий вигляд:

$$\eta = |\boldsymbol{\eta}| = \sqrt{\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2}. \tag{3.54}$$

Перші два доданки у (3.52) є сферично-симетричні. Отже, вибравши систему координат, в якій вісь x_3 співпадає з напрямком вектора $\boldsymbol{\eta}$, маємо:

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{x}]^2 - \eta(x_1p_2 - x_2p_1) = p_1^2 + p_2^2 +$$

$$+p_3^2 + \frac{1}{4}\eta^2 x_1^2 + \frac{1}{4}\eta^2 x_2^2 - \eta(x_1p_2 - x_2p_1). \tag{3.55}$$

Оператор p_3^2 комутує з $\mathbf{P}^2$, $[p_3^2, \mathbf{P}^2] = 0$. Отже, задачу на знаходження власних значень оператора квадрату довжини, означеного в тривимірному імпульсному просторі, можна звести до двох незалежних задач

на знаходження власних значень оператора p_3^2 та оператора квадрату довжини, означеного в двовимірному імпульсному просторі. Власні значення оператора $\mathbf{P}^2$ мають вигляд:

$$P^2 = 2\hbar\eta\left(m + \frac{1}{2}\right) + \hbar^2 k^2, \tag{3.56}$$

тут m – квантові числа, $m = 0, 1, 2...$, та $\hbar^2 k^2$ – власні значення оператора p_3^2. На основі результату (3.56) маємо таку нижню межу для ΔP у тривимірному некомутативному імпульсному просторі

$$\Delta P \geq \sqrt{\hbar\eta}, \tag{3.57}$$

$$\Delta P = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle}, \tag{3.58}$$

(тут ми розглядаємо $\langle P_i \rangle = 0$).

Отже, мінімальна довжина у тривимірному некомутативному імпульсному просторі визначається параметрами імпульсної некомутативності та має вигляд:

$$\Delta P^{min} = \sqrt[4]{\hbar^2(\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2)}. \tag{3.59}$$

Дослідімо загальний випадок, а саме розгляньмо оператор квадрату довжини у фазовому просторі, визначений як:

$$\mathbf{Q}^2 = \alpha^2 \sum_i P_i^2 + \beta^2 \sum_i X_i^2, \tag{3.60}$$

де α, β – константи. Із міркувань розмірностей, константа β є безрозмірною, константа α має розмірність с/кг. Координати X_i та імпульси P_i задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (1.20)-(1.22).

У двовимірному випадку, використавши представлення (3.8), (3.9),

(3.39), (3.40), оператор квадрата довжини може бути записаний як

$$Q_{12}^2 = \alpha^2(P_1^2 + P_2^2) + \beta^2(X_1^2 + X_2^2) =$$

$$= \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4}\theta^2\right)\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2}{4}\eta^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2\right) -$$

$$-(\alpha^2\eta + \beta^2\theta)(x_1p_2 - x_2p_1). \qquad (3.61)$$

Власні значення Q_{12}^2 мають такий вигляд:

$$Q_{12,n_1n_2}^2 =$$

$$= \hbar(\sqrt{\left(2\alpha^2 + \frac{\theta_{12}^2\beta^2}{2}\right)\left(2\beta^2 + \frac{\eta_{12}^2\alpha^2}{2}\right)} + \eta_{12}\alpha^2 + \theta_{12}\beta^2)\,(n_1 + 1) +$$

$$+\hbar(\sqrt{\left(2\alpha^2 + \frac{\theta_{ij}^2\beta^2}{2}\right)\left(2\beta^2 + \frac{\eta_{12}^2\alpha^2}{2}\right)} - \eta_{12}\alpha^2 - \theta_{ij}\beta^2)n_2.$$

(3.62)

Тут ми врахували, що оператор (3.60) відповідає оператору Гамільтона для гармонічного осцилятора з масою $1/2\alpha^2$ та частотою $2\alpha\beta$ у некомутативному фазовому просторі. Вплив некомутативності на енергетичні рівні двовимірного гармонічного осцилятора є добре дослідженим [21,25,86,91,97,98,176,191–201]. На основі результату (3.62) можемо записати таку нерівність:

$$\Delta Q_{12} \geq \sqrt{\hbar\sqrt{\left(2\alpha^2 + \frac{\theta_{ij}^2\beta^2}{2}\right)\left(2\beta^2 + \frac{\eta_{12}^2\alpha^2}{2}\right)} + \hbar\eta_{12}\alpha^2 + \hbar\theta_{ij}\beta^2},$$

(3.63)

де

$$\Delta Q_{12} = \sqrt{\langle\Delta Q_{12}^2\rangle} =$$

$$= \sqrt{\alpha^2\langle\Delta P_i^2\rangle + \alpha^2\langle\Delta P_j^2\rangle + \beta^2\langle\Delta X_i^2\rangle + \beta^2\langle\Delta X_j^2\rangle}, \qquad (3.64)$$

$\langle X_i \rangle = 0$, $\langle P_i \rangle = 0$, $i, j = (1, 2)$. Отже, мінімальна довжина у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі визначається як

$$\Delta Q_{12}^{min} = \tag{3.65}$$

$$= \sqrt{\hbar\sqrt{\left(2\alpha^2 + \frac{\theta_{12}^2\beta^2}{2}\right)\left(2\beta^2 + \frac{\eta_{12}^2\alpha^2}{2}\right)} + \hbar\eta_{12}\alpha^2 + \hbar\theta_{12}\beta^2}. \tag{3.66}$$

У шестивимірному фазовому просторі (тривимірному координатному та тривимірному імпульсному просторі), використавши представлення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів (3.25), (3.50), запишемо оператор квадрата довжини у такому вигляді:

$$\mathbf{Q}^2 = \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4}\theta^2\right)p^2 + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2}{4}\eta^2\right)x^2 -$$

$$-\frac{\alpha^2}{4}(\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{x})^2 - \frac{\beta^2}{4}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{p})^2 - \alpha^2(\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{L}) - \beta^2(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}). \tag{3.67}$$

Для зручності виберемо систему координат так, щоб напрямок осі x_3 збігався з напрямком вектора $\alpha^2\boldsymbol{\eta} + \beta^2\boldsymbol{\theta}$. Розгляньмо також вектори $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\eta}$, як такі, що мають однаковий напрям

$$\boldsymbol{\theta} \| \boldsymbol{\eta}. \tag{3.68}$$

У цьому випадку оператор квадрата довжини може бути переписаний як

$$\mathbf{Q}^2 = \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4}\theta^2\right)\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2}{4}\eta^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2\right) +$$

$$+\alpha^2 p_3^2 + \beta^2 x_3^2 - (\alpha^2\eta + \beta^2\theta)(x_1 p_2 - x_2 p_1), \tag{3.69}$$

тут ми залишили ті самі позначення для координат та імпульсів у новій системі координат. Звернімо увагу, що оператор $\alpha^2 p_3^2 + \beta^2 x_3^2$ комутує з оператором $\mathbf{Q}^2$. Також зауважимо, що доданки

$$\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4}\theta^2\right)\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2}{4}\eta^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2\right) -$$

$$-(\alpha^2\eta + \beta^2\theta)(x_1 p_2 - x_2 p_1), \tag{3.70}$$

відповідають гамільтоніану двовимірного гармонічного осцилятора з масою $1/2\alpha^2$ та частотою $2\alpha\beta$ у некомутативному фазовому просторі (див. (3.61)). Отже, задачу на знаходження власних значень оператора квадрату довжини у шестивимірному некомутативному фазовому просторі зведено до задачі знаходження власних значень оператора квадрата довжини у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі. Врахувавши (3.62), маємо такий вираз для власних значень оператора $\mathbf{Q^2}$

$$Q^2_{n_1n_2n_3} =$$

$$\hbar\left(\sqrt{\left(2\alpha^2+\frac{\theta^2\beta^2}{2}\right)\left(2\beta^2+\frac{\eta^2\alpha^2}{2}\right)}+\eta\alpha^2+\theta\beta^2\right)n_1+$$

$$\hbar\left(\sqrt{\left(2\alpha^2+\frac{\theta^2\beta^2}{2}\right)\left(2\beta^2+\frac{\eta^2\alpha^2}{2}\right)}-\eta\alpha^2-\theta\beta^2\right)n_2+$$

$$\hbar\sqrt{\left(2\alpha^2+\frac{\theta^2\beta^2}{2}\right)\left(2\beta^2+\frac{\eta^2\alpha^2}{2}\right)}+2\hbar\alpha\beta\left(n_3+\frac{1}{2}\right), \qquad (3.71)$$

та можемо записати таку нерівність:

$$\langle\Delta\mathbf{Q}^2\rangle \geq \hbar\sqrt{\left(2\alpha^2+\frac{\theta^2\beta^2}{2}\right)\left(2\beta^2+\frac{\eta^2\alpha^2}{2}\right)}+\hbar\eta\alpha^2+\hbar\theta\beta^2+\hbar\alpha\beta. \qquad (3.72)$$

Отже, мінімальна довжина у шестивимірному некомутативному фазовому просторі визначається величинами параметрів координатної та імпульсної некомутативностей θ_{ij}, η_{ij} та має такий вигляд:

$$\Delta Q^{min} =$$

$$=\left(\hbar\left(2\alpha^2+\frac{(\theta_{12}^2+\theta_{23}^2+\theta_{31}^2)\beta^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2\beta^2+\frac{(\eta_{12}^2+\eta_{23}^2+\eta_{31}^2)\alpha^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+\hbar\alpha^2(\eta_{12}^2+\eta_{23}^2+\eta_{31}^2)^{\frac{1}{2}}+\hbar\beta^2(\theta_{12}^2+\theta_{23}^2+\theta_{31}^2)^{\frac{1}{2}}+\hbar\alpha\beta\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.73)$$

тут $\Delta Q=\sqrt{\langle\Delta\mathbf{Q}^2\rangle}$.

Зауважимо, що при $\beta=0$, маємо мінімальну довжину у координатному просторі $\Delta Q^{min}=\Delta R^{min}$, що узгоджується з виразом (3.37). У випадку $\alpha=0$, на основі результату (3.73) отримаємо мінімальну довжину у імпульсному просторі, що відповідає (3.59).

3.3 Проблема кінематичних змінних

Розгляньмо чотиривимірний некомутативний фазовий простір канонічного типу, який характеризується такими комутаційними співвідношеннями для операторів координат та операторів імпульсів

$$[X_1,X_2]=i\hbar\theta, \qquad (3.74)$$

$$[X_i,P_j]=i\hbar\delta_{ij}(1+\sigma), \qquad (3.75)$$

$$[P_1,P_2]=i\hbar\eta, \qquad (3.76)$$

тут θ, η, σ – константи. Дослідімо для початку випадок, коли $\sigma=0$ та комутаційні співвідношення для координат та імпульсів є звичними $[X_i,P_j]=i\hbar\delta_{ij}$.

Координати X_i та імпульси P_i, які задовольняють некомутативну алгебру (3.74)-(3.76) з $\sigma=0$ можуть бути представлені через координати та імпульси x_i, p_i, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення (1.12)-(1.14). Представлення має такий вигляд:

$$X_1=\varepsilon(x_1-\frac{1}{2}\theta' p_2), \qquad (3.77)$$

$$X_2=\varepsilon(x_2+\frac{1}{2}\theta' p_1), \qquad (3.78)$$

$$P_1 = \varepsilon(p_1 + \frac{1}{2}\eta' x_2), \tag{3.79}$$

$$P_2 = \varepsilon(p_2 - \frac{1}{2}\eta' x_1), \tag{3.80}$$

де

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\theta'\eta'}{4}}}, \tag{3.81}$$

та θ', η' – константи [202]. Параметри θ', η' пов'язані з θ, η як

$$\theta = \frac{\theta'}{1 + \frac{\theta'\eta'}{4}}, \tag{3.82}$$

$$\eta = \frac{\eta'}{1 + \frac{\theta'\eta'}{4}}, \tag{3.83}$$

(див. [202]). Із (3.82), (3.83) отримаємо:

$$\theta' = \frac{2}{\eta}(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta}), \tag{3.84}$$

$$\eta' = \frac{2}{\theta}(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta}). \tag{3.85}$$

Врахувавши (3.77)-(3.80), (3.84), (3.85), можемо записати:

$$X_1 = \sqrt{\frac{\theta\eta}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta})}} \left(x_1 - \frac{1}{\eta}\left(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta}\right) p_2 \right), \tag{3.86}$$

$$X_2 = \sqrt{\frac{\theta\eta}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta})}} \left(x_2 + \frac{1}{\eta}\left(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta}\right) p_1 \right), \tag{3.87}$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{\theta\eta}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta})}} \left(p_1 + \frac{1}{\theta}\left(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta}\right) x_2 \right), \tag{3.88}$$

$$P_2 = \sqrt{\frac{\theta\eta}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta})}} \left(p_2 - \frac{1}{\theta}\left(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta}\right) x_1 \right). \tag{3.89}$$

Отже, маємо два представлення, які відповідають вибору знаку “+” чи “-” у виразах (3.86)-(3.89). Ці представлення пов’язані такими канонічними перетвореннями

$$X_1^{(-)} = -\sqrt{\frac{\theta}{\eta}} P_2^{(+)}, \quad X_2^{(-)} = \sqrt{\frac{\theta}{\eta}} P_1^{(+)}, \tag{3.90}$$

$$P_1^{(-)} = \sqrt{\frac{\eta}{\theta}} X_2^{(+)}, \quad P_2^{(-)} = -\sqrt{\frac{\eta}{\theta}} X_1^{(+)}, \tag{3.91}$$

де ми використали позначення $X_i^{(+)}$, $P_i^{(+)}$, $X_i^{(-)}$, $P_i^{(-)}$ для координат та імпульсів, які означені як (3.86)-(3.89) з відповідним вибором знаку “+” чи “-”. Зауважимо, що існування представлення для координат та імпульсів X_i, P_i, які задовольняють співвідношення некомутативної алгебри, через координати та імпульси x_i, p_i, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення, гарантує виконання тотожності Якобі для будь-якої трійки операторів.

У границі $\theta \to 0$, $\eta \to 0$ із (3.86)-(3.89) отримаємо:

$$X_i^{(-)} = x_i, \tag{3.92}$$

$$P_i^{(-)} = p_i, \tag{3.93}$$

де координати та імпульси x_i, p_i задовольняють звичні комутаційні співвідношення. У випадку вибору знаку “+” у (3.86)-(3.89) у границі $\theta \to 0$, $\eta \to 0$ знайдемо:

$$X_1^{(+)} = -\sqrt{\frac{\theta}{\eta}} p_2, \quad X_2^{(+)} = \sqrt{\frac{\theta}{\eta}} p_1, \tag{3.94}$$

$$P_1^{(+)} = \sqrt{\frac{\eta}{\theta}} x_2, \quad P_2^{(+)} = -\sqrt{\frac{\eta}{\theta}} x_1. \tag{3.95}$$

Важливо зауважити, що відповідно до виразів (3.86)-(3.89) некомутативні координати залежать від імпульсів p_i, тому залежать від

маси. Отже, координати у некомутативному фазовому просторі канонічного типу не можуть розглядатися як кінематичні змінні.

У загальному випадку співвідношення некомутативної алгебри для координат та імпульсів різних частинок можуть містити різні параметри. Зауважимо, що, якщо параметри некомутативної алгебри, які відповідають частинці з масою m, залежать від її маси як

$$m\theta = \gamma = \text{const}, \tag{3.96}$$

$$\frac{\eta}{m} = \alpha = \text{const}, \tag{3.97}$$

де γ, α – константи, які не залежать від маси, представлення (3.86)-(3.89) може бути переписане у такому вигляді:

$$X_1 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma})}} \left(x_1 - \frac{1}{\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right)\frac{p_2}{m}\right), \tag{3.98}$$

$$X_2 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma})}} \left(x_2 + \frac{1}{\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right)\frac{p_1}{m}\right), \tag{3.99}$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma})}} \left(p_1 + \frac{m}{\gamma}\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right) x_2\right), \tag{3.100}$$

$$P_2 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma})}} \left(p_2 - \frac{m}{\gamma}\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right) x_1\right). \tag{3.101}$$

Звернімо увагу, що координати X_i не залежать від маси та можуть бути розглянуті як кінематичні змінні. Зауважимо також, що у випадку, коли виконуються рівності (3.96), (3.97), маємо, що імпульси (3.100), (3.101) є пропорційними до маси, як це є у звичному просторі (просторі зі звичними співвідношеннями для координат та імпульсів, $\theta = \eta = 0$).

На завершення підрозділу дослідімо також випадок, коли константи у співвідношеннях (3.77)-(3.80) вибрані як

$$\varepsilon = 1, \quad \eta' = \eta, \quad \theta' = \theta. \tag{3.102}$$

Такий вибір констант розглядався у роботі [202]. У цьому випадку представлення має простіший вигляд:

$$X_1 = x_1 - \frac{1}{2}\theta p_2, \tag{3.103}$$

$$X_2 = x_2 + \frac{1}{2}\theta p_1, \tag{3.104}$$

$$P_1 = p_1 + \frac{1}{2}\eta x_2, \tag{3.105}$$

$$P_2 = p_2 - \frac{1}{2}\eta x_1, \tag{3.106}$$

проте комутатор для координат та імпульсів є деформованим. Із співвідношень (3.103)-(3.106) маємо

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}\left(1 + \frac{\theta\eta}{4}\right). \tag{3.107}$$

Величину

$$\hbar_{eff} = \hbar\left(1 + \frac{\theta\eta}{4}\right) \tag{3.108}$$

називають ефективною сталою Планка [202]. У випадку, коли виконуються рівності (3.96), (3.97), представлення (3.103)-(3.106) можна переписати як

$$X_1 = x_1 - \frac{1}{2}\gamma\frac{p_2}{m}, \tag{3.109}$$

$$X_2 = x_2 + \frac{1}{2}\gamma\frac{p_1}{m}, \tag{3.110}$$

$$P_1 = p_1 + \frac{1}{2}\alpha m x_2, \tag{3.111}$$

$$P_2 = p_2 - \frac{1}{2}\alpha m x_1. \tag{3.112}$$

Зауважимо, що некомутативні координати не залежать від маси, та некомутативні імпульси пропорційні до маси, як це є у звичному просторі ($\theta = \eta = 0$). Також при виконанні умов (3.96), (3.97) комутатор

для координат та імпульсів не залежить від маси. Маємо:

$$[X_i, P_j] = i\hbar_{eff} = i\delta_{ij}\hbar\left(1 + \frac{\alpha\gamma}{4}\right). \tag{3.113}$$

У наступних підрозділах буде показано, що співвідношення (3.96), (3.97) є також важливими для розв'язання проблеми опису руху системи частинок, для збереження властивостей кінетичної енергії та для відновлення слабкого принципу еквівалентності у квантованому фазовому просторі канонічного типу.

3.4 Особливості руху системи вільних частинок у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі

Дослідімо вплив квантованості простору на рух системи вільних частинок у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу (3.74)-(3.76) з $\sigma = 0$. У класичній границі $\hbar \to 0$ на основі співвідношень (3.74)-(3.76) з $\sigma = 0$ можемо записати такі деформовані дужки Пуассона:

$$\{X_1, X_2\} = \theta, \tag{3.114}$$

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij}, \tag{3.115}$$

$$\{P_1, P_2\} = \eta. \tag{3.116}$$

Для початку знайдемо траєкторію руху вільної частинки з масою m у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Запишемо гамільтоніан вільної частинки у традиційному вигляді:

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m}. \tag{3.117}$$

Звернімо увагу, що дужки Пуассона для імпульсів P_1, P_2 не дорівнюють нулю (3.116). Врахувавши (3.114)-(3.116), (3.117), знайдемо рівняння руху, які мають такий вигляд:

$$\dot{X}_1 = \frac{P_1}{m}, \quad \dot{X}_2 = \frac{P_2}{m}, \tag{3.118}$$

$$\dot{P}_1 = \eta\frac{P_2}{m}, \quad \dot{P}_2 = -\eta\frac{P_1}{m}. \tag{3.119}$$

Розв'яжемо отримані рівняння (3.118)-(3.119), розглянувши початкові умови

$$X_1(0) = X_{01}, \quad X_2(0) = X_{02}, \tag{3.120}$$

$$\dot{X}_1(0) = \upsilon_{01}, \quad \dot{X}_2(0) = \upsilon_{02}, \tag{3.121}$$

де X_{0i}, υ_{0i} – початкові координати та швидкості частинки. Отримаємо такі вирази для траєкторії частинки та швидкості її руху у некомутативному фазовому просторі

$$X_1(t) = \upsilon_{01}\frac{m}{\eta}\sin\frac{\eta}{m}t - \upsilon_{02}\frac{m}{\eta}\cos\frac{\eta}{m}t + \upsilon_{02}\frac{m}{\eta} + X_{01}, \tag{3.122}$$

$$X_2(t) = \upsilon_{02}\frac{m}{\eta}\sin\frac{\eta}{m}t + \upsilon_{01}\frac{m}{\eta}\cos\frac{\eta}{m}t - \upsilon_{01}\frac{m}{\eta} + X_{02}, \tag{3.123}$$

$$\dot{X}_1(t) = \upsilon_{01}\cos\frac{\eta}{m}t + \upsilon_{02}\sin\frac{\eta}{m}t, \tag{3.124}$$

$$\dot{X}_2(t) = \upsilon_{02}\cos\frac{\eta}{m}t - \upsilon_{01}\sin\frac{\eta}{m}t. \tag{3.125}$$

Звернімо увагу, що канонічна некомутативність імпульсів зумовлює залежність траєкторії та швидкості вільної частинки (3.122)-(3.125) від її маси m.

Розглянувши границю $\eta \to 0$, що відповідає звичному простору, із рівнянь (3.122), (3.123) отримаємо добре відомі результати:

$$X_1(t) = \upsilon_{01}t + X_{01}, \tag{3.126}$$

$$X_2(t) = \upsilon_{02}t + X_{02}. \tag{3.127}$$

Для дослідження особливостей руху системи вільних частинок запишемо співвідношення некомутативної алгебри для координат та імпульсів різних частинок. Ми пропонуємо таке узагальнення алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу:

$$[X_1^{(a)}, X_2^{(b)}] = i\hbar\delta_{ab}\theta_a, \tag{3.128}$$

$$[X_i^{(a)}, P_j^{(b)}] = i\hbar\delta_{ab}\delta_{ij}, \tag{3.129}$$

$$[P_1^{(a)}, P_2^{(b)}] = i\hbar\delta_{ab}\eta_a, \tag{3.130}$$

де індекси a, b позначають частинки, $X_i^{(a)}$, $P_i^{(a)}$ – координати та імпульси частинки з індексом a, θ_a, η_a – параметри некомутативності, які описують вплив квантованості простору на частинку a, $i = (1, 2)$, $j = (1, 2)$. У класичній границі $\hbar \to 0$ з співвідношень (3.128)-(3.130) отримаємо деформовані дужки Пуассона

$$\{X_1^{(a)}, X_2^{(b)}\} = \delta_{ab}\theta_a, \tag{3.131}$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}, \tag{3.132}$$

$$\{P_1^{(a)}, P_2^{(b)}\} = \delta_{ab}\eta_a. \tag{3.133}$$

Дослідімо рух системи N вільних частинок. Запишемо гамільтоніан:

$$H = \sum_a \frac{(\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + \sum_a \frac{(\Delta\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a}, \tag{3.134}$$

де m_1, m_2,...,m_N – маси частинок. Координати та імпульси $X_i^{(a)}$, $P_i^{(a)}$ у гамільтоніані (3.134) задовольняють співвідношення некомутативної

алгебри (3.131)-(3.133). У (3.134) ми використали позначення $\tilde{P}_i$, $\Delta P_i^{(a)}$ для імпульсів центра мас та імпульсів відносного руху, означених традиційно:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \sum_a \mathbf{P}^{(a)}, \tag{3.135}$$

$$\Delta \mathbf{P}^a = \mathbf{P}^{(a)} - \mu_a \tilde{\mathbf{P}}, \tag{3.136}$$

$$\mu_a = \frac{m_a}{M}, \quad M = \sum_a m_a. \tag{3.137}$$

Звернімо увагу, що імпульси центра мас та імпульси відносного руху задовольняють такі співвідношення:

$$\{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2\} = \tilde{\eta}, \tag{3.138}$$

$$\{\Delta P_1^{(a)}, \Delta P_2^{(b)}\} = -\{\Delta P_2^{(a)}, \Delta P_1^{(b)}\} =$$

$$= \delta_{ab}\eta_a - \mu_b\eta_a - \mu_a\eta_b + \mu_a\mu_b\tilde{\eta}, \tag{3.139}$$

де параметри $\tilde{\eta}$ мають вигляд:

$$\tilde{\eta} = \sum_a \eta_a. \tag{3.140}$$

Отже, дужки Пуассона для імпульсів центра мас дорівнюють параметру некомутативності, який визначається, як сума параметрів імпульсної некомутативності частинок системи. Величина параметра імпульсної некомутативності збільшується зі збільшенням кількості частинок у системі. У випадку, коли $\mu_a = 1/N$ (маси частинок однакові), із (3.140) маємо:

$$\tilde{\eta} = N\eta. \tag{3.141}$$

Звідси випливає, що вплив імпульсної некомутативності на рух макроскопічних систем є більшим ніж на рух частинок.

Із (3.139) маємо, що дужки Пуассона для імпульсів відносного руху залежать від параметрів імпульсної некомутативності частинок системи, а також від мас частинок. Важливо також відзначити, що дужки Пуассона для імпульсів центра мас та імпульсів відносного руху не дорівнюють нулеві. Врахувавши (3.135), (3.136) та (3.133), отримаємо:

$$\{\tilde{P}_1, \Delta P_2^{(a)}\} = -\{\tilde{P}_2, \Delta P_1^{a}\} = \eta_a - \mu_a \sum_b \eta_b. \tag{3.142}$$

Із співвідношеня (3.142) випливає, що у просторі з некомутативністю імпульсів ми не можемо розглядати рух центра мас незалежно від відносного руху. Відносний рух впливає на рух центра мас, та навпаки. Навіть у випадку системи вільних частинок рух центра мас системи є залежним від відносного руху.

Важливо звернути увагу на ефект розлітання системи вільних частинок, який зумовлений некомутативністю імпульсів. Відомо, що у звичному просторі ($\theta = 0$, $\eta = 0$) вільні частинки з однаковими початковими швидкостями рухаються разом, відносні координати частинок не залежать від часу. У квантованому фазовому просторі канонічного типу навіть у випадку рівності початкових швидкостей частинок в початковий момент часу

$$\dot{X}_1^{(a)}(0) = \upsilon_{01}, \quad \dot{X}_2^{(a)}(0) = \upsilon_{02}, \tag{3.143}$$

$a = (1...N)$, маємо:

$$\dot{X}_1^{(a)}(t) \neq \dot{X}_1^{(b)}(t), \quad \dot{X}_2^{(a)}(t) \neq \dot{X}_2^{(b)}(t), \tag{3.144}$$

для $a \neq b$. Врахувавши (3.124), (3.125), знайдемо:

$$\dot{X}_1^{(a)}(t) = \upsilon_{01} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t + \upsilon_{02} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t, \tag{3.145}$$

$$\dot{X}_2^{(a)}(t) = \upsilon_{02} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t - \upsilon_{01} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t, \tag{3.146}$$

де параметр імпульсної некомутативності η_a відповідає частинці з масою m_a.

Запишемо також траєкторію руху центра мас системи N вільних частинок. На основі отриманих результатів (3.145), (3.146) маємо:

$$\tilde{X}_1(t) = \sum_a \mu_a X_1^{(a)}(t) = \sum_a \left(\upsilon_{01} \frac{m_a^2}{M\eta_a} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t - \right.$$

$$\left. -\upsilon_{02} \frac{m_a^2}{M\eta_a} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t + \upsilon_{02} \frac{m_a^2}{M\eta_a} + \frac{m_a}{M} X_{01}^{(a)} \right), \qquad (3.147)$$

$$\tilde{X}_2(t) = \sum_a \mu_a X_1^{(a)}(t) = \sum_a \left(\upsilon_{02} \frac{m_a^2}{M\eta_a} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t + \right.$$

$$\left. +\upsilon_{01} \frac{m_a^2}{M\eta_a} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t - \upsilon_{01} \frac{m_a^2}{M\eta_a} + \frac{m_a}{M} X_{02}^{(a)} \right), \qquad (3.148)$$

тут

$$X_{01}^{(a)} = X_1^{(a)}(0), \quad X_{02}^{(a)} = X_2^{(a)}(0). \qquad (3.149)$$

Відзначимо, що відносні координати не є константами, вони залежать від часу як:

$$\Delta X_1^a(t) = X_1^{(a)}(t) - \tilde{X}_1(t) =$$

$$= \upsilon_{01} \frac{m_a}{\eta_a} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t - \upsilon_{02} \frac{m_a}{\eta_a} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t + \upsilon_{02} \frac{m_a}{\eta_a} + X_{01}^{(a)} -$$

$$- \sum_b \left(\upsilon_{01} \frac{m_b^2}{M\eta_b} \sin \frac{\eta_b}{m_b} t - \upsilon_{02} \frac{m_b^2}{M\eta_b} \cos \frac{\eta_b}{m_b} t + \right.$$

$$\left. +\upsilon_{02} \frac{m_b^2}{M\eta_b} + \frac{m_b}{M} X_{01}^{(b)} \right), \qquad (3.150)$$

$$\Delta X_2^a(t) = X_2^{(a)}(t) - \tilde{X}_2(t) =$$

$$= \upsilon_{02} \frac{m_a}{\eta_a} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t + \upsilon_{01} \frac{m_a}{\eta_a} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t - \upsilon_{01} \frac{m_a}{\eta_a} + X_{02}^{(a)} -$$

$$-\sum_b \left(\upsilon_{02} \frac{m_b^2}{M\eta_b} \sin \frac{\eta_b}{m_b} t + \upsilon_{01} \frac{m_b^2}{M\eta_b} \cos \frac{\eta_b}{m_b} t - \right.$$

$$\left. -\upsilon_{01} \frac{m_b^2}{M\eta_b} + \frac{m_b}{M} X_{02}^{(b)} \right). \tag{3.151}$$

Із виразів (3.145), (3.146), (3.150), (3.151) можемо зробити висновок, що некомутативність імпульсів зумовлює розлітання системи вільних частинок. У некомутативному фазовому просторі канонічного типу вільні частинки з однаковими початковими швидкостями не рухаються разом, як це є у просторі зі звичними комутаційними співвідношеннями.

Зауважимо, що коли параметр імпульсної некомутативності пропорційний до маси, а саме виконується умова (3.97), маємо, що дужки Пуассона для імпульсу центра мас та імпульсів відносного руху дорівнюють нулю:

$$\{\tilde{P}_1, \Delta P_2^{(a)}\} = 0, \tag{3.152}$$

та з (3.145), (3.146) отримаємо, що швидкості руху вільних частинок є однакові та дорівнюють швидкості руху центра мас системи:

$$\dot{X}_1^{(a)}(t) = \sum_a \mu_a \dot{X}_1^{(a)}(t) = \upsilon_{01} \cos \alpha t + \upsilon_{02} \sin \alpha t, \tag{3.153}$$

$$\dot{X}_2^{(a)}(t) = \sum_a \mu_a \dot{X}_2^{(a)}(t) = \upsilon_{02} \cos \alpha t - \upsilon_{01} \sin \alpha t. \tag{3.154}$$

Також при виконанні рівності (3.97), із (3.150), (3.151) отримаємо, що координати відносного руху є константами:

$$\Delta X_1^{(a)} = X_{01}^{(a)} - \sum_b \mu_b X_{01}^{(b)}, \tag{3.155}$$

$$\Delta X_2^{(a)} = X_{02}^{(a)} - \sum_b \mu_b X_{02}^{(b)}. \tag{3.156}$$

Траєкторія руху вільної частинки не залежить від маси. Взявши до уваги (3.97), (3.122), (3.123), знайдемо:

$$X_1^{(a)}(t) = \frac{\upsilon_{01}}{\alpha}\sin\alpha t - \frac{\upsilon_{02}}{\alpha}\cos\alpha t + \frac{\upsilon_{02}}{\alpha} + X_{01}^{(a)}, \tag{3.157}$$

$$X_2^{(a)}(t) = \frac{\upsilon_{02}}{\alpha}\sin\alpha t + \frac{\upsilon_{01}}{\alpha}\cos\alpha t - \frac{\upsilon_{01}}{\alpha} + X_{02}^{(a)}. \tag{3.158}$$

Отже, у випадку виконання умови (3.97) рух вільної частинки не залежить від її маси, система вільних частинок з однаковими початковими швидкостями не розлітається (частинки рухаються разом зі швидкістю, яка дорівнює швидкості руху центра мас системи) у квантованому фазовому просторі канонічного типу.

3.5 Представлення для координат та імпульсів центра мас

Координати та імпульси частинок, які задовольняють співвідношення алгебри (3.131)-(3.133), можуть бути представлені через координати та імпульси $x_i^{(a)}$, $p_i^{(a)}$, які задовольняють звичні співвідношення

$$\{x_i^{(a)}, x_j^{(b)}\} = \{p_i^{(a)}, p_j^{(b)}\} = 0, \tag{3.159}$$

$$\{x_i^{(a)}, p_j^{(b)}\} = \delta_{ij}\delta_{ab}. \tag{3.160}$$

Індекси a, b позначають частинки. На основі результатів, отриманих в підрозділі 3.3, можемо записати представлення у такому вигляді:

$$X_1^{(a)} = \sqrt{\frac{\theta_a\eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1-\theta_a\eta_a})}} \times$$

$$\times \left(x_1^{(a)} - \frac{1}{\eta_a}\left(1 \pm \sqrt{1-\theta_a\eta_a}\right) p_2^{(a)} \right), \tag{3.161}$$

$$X_2^{(a)} = \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a})}} \times$$

$$\times \left(x_2^{(a)} + \frac{1}{\eta_a} \left(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a} \right) p_1^{(a)} \right), \tag{3.162}$$

$$P_1^{(a)} = \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a})}} \times$$

$$\times \left(p_1^{(a)} + \frac{1}{\theta_a} \left(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a} \right) x_2^{(a)} \right), \tag{3.163}$$

$$P_2^{(a)} = \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a})}} \times$$

$$\times \left(p_2^{(a)} - \frac{1}{\theta_a} \left(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a} \right) x_1^{(a)} \right). \tag{3.164}$$

Використавши вирази (3.161)-(3.164), та означення для координат

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_a \frac{m_a}{M} \mathbf{X}^{(a)}, \tag{3.165}$$

та імпульсів центра мас системи частинок (3.135), отримаємо таке представлення:

$$\tilde{X}_1 = \sum_a \frac{m_a}{M} \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a})}} \times$$

$$\times \left(x_1^{(a)} - \frac{1}{\eta_a} \left(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a} \right) p_2^{(a)} \right), \tag{3.166}$$

$$\tilde{X}_2 = \sum_a \frac{m_a}{M} \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a})}} \times$$

$$\times \left(x_2^{(a)} + \frac{1}{\eta_a} \left(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a} \right) p_1^{(a)} \right), \tag{3.167}$$

$$\tilde{P}_1 = \sum_a \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a})}} \times$$

$$\times \left(p_1^{(a)} + \frac{1}{\theta_a} \left(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a}\right) x_2^{(a)} \right), \tag{3.168}$$

$$\tilde{P}_2 = \sum_a \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a})}} \times$$

$$\times \left(p_2^{(a)} - \frac{1}{\theta_a} \left(1 \pm \sqrt{1-\theta_a \eta_a}\right) x_1^{(a)} \right), \tag{3.169}$$

де m_a – маси частинок, які формують систему, системи, M – повна маса системи. Зауважимо, що відповідно до (3.168), (3.169) представлення для некомутативних координат та імпульсів центра мас не може бути переписане через координати та імпульси центра мас

$$\tilde{x}_i = \sum_a \frac{m_a x_i^{(a)}}{M}, \tag{3.170}$$

$$\tilde{p}_i = \sum_a p_i^{(a)}, \tag{3.171}$$

які задовольняють звичні співвідношення. Також звернімо увагу, що імпульси центра мас (3.168), (3.169) не є пропорційні до маси системи.

При виконанні умови на параметр імпульсної некомутативності (3.97), а також умови, (3.96), яка пов'язує параметр координатної некомутативності з масою, представлення (3.166)-(3.169) має такий вигляд:

$$\tilde{X}_1 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma})}} \left(\tilde{x}_1 - \frac{1}{\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right) \frac{\tilde{p}_2}{M} \right), \tag{3.172}$$

$$\tilde{X}_2 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma})}} \left(\tilde{x}_2 + \frac{1}{\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma}\right) \frac{\tilde{p}_1}{M} \right), \tag{3.173}$$

$$\tilde{P}_1 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma})}} \left(\tilde{p}_1 + \frac{M}{\gamma} \left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma} \right) \tilde{x}_2 \right), \quad (3.174)$$

$$\tilde{P}_2 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma})}} \left(\tilde{p}_2 - \frac{M}{\gamma} \left(1 \pm \sqrt{1-\alpha\gamma} \right) \tilde{x}_1 \right), \quad (3.175)$$

де координати та імпульси $\tilde{x}_i$, $\tilde{p}_i$ визначаються як (3.170), (3.171) та задовольняють звичні співвідношення

$$\{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0, \quad (3.176)$$

$$\{\tilde{x}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}. \quad (3.177)$$

Отже, при виконанні умов (3.96), (3.97), координати та імпульси центра мас $\tilde{X}_i$, $\tilde{P}_i$ системи у некомутативному фазовому просторі можуть бути представлені через координати та імпульси центра мас $\tilde{x}_i$, $\tilde{p}_i$, які задовольняють звичні співвідношення (3.176), (3.177). Також, якщо задовольняються рівності (3.96), (3.97), маємо, що у некомутативному фазовому просторі імпульси центра мас (3.168), (3.169) пропорційні до повної маси системи, як це є у звичному просторі ($\theta = \eta = 0$).

Такий самий висновок можна зробити у випадку симетричного представлення (3.103)-(3.106) для координат та імпульсів, які задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (3.74)-(3.76) з $\sigma = \theta\eta/4$. Запишемо алгебру (3.74)-(3.76) з $\sigma = \theta\eta/4$ для координат та імпульсів частинок. У класичній границі відповідні дужки Пуассона мають такий вигляд:

$$\{X_1^{(a)}, X_2^{(b)}\} = \delta_{ab}\theta^{(a)}, \quad (3.178)$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\delta_{ij} \left(1 + \frac{\theta_a \eta_a}{4} \right), \quad (3.179)$$

$$\{P_1^{(a)}, P_2^{(b)}\} = \delta_{ab}\eta^{(a)}. \quad (3.180)$$

Некомутативні координати та некомутативні імпульси $X_i^{(a)}$, $P_i^{(a)}$ можуть бути записані як:

$$\tilde{X}_1 = x_1^{(a)} - \frac{1}{2}\theta_a p_2^{(a)}, \tag{3.181}$$

$$\tilde{X}_2 = x_2^{(a)} + \frac{1}{2}\theta_a p_1^{(a)}, \tag{3.182}$$

$$\tilde{P}_1 = p_1^{(a)} + \frac{1}{2}\eta_a x_2^{(a)}, \tag{3.183}$$

$$\tilde{P}_2 = p_2^{(a)} - \frac{1}{2}\eta_a x_1^{(a)}, \tag{3.184}$$

де координати та імпульси $x_i^{(a)}$, $p_i^{(a)}$ задовольняють звичні співвідношення (3.159), (3.160).

На основі означень для координат та імпульсів центра мас, а також виразів (3.185)-(3.188) у випадку, коли виконуються рівності (3.96), (3.97), можемо записати:

$$\tilde{X}_1 = \sum_a \frac{m_a}{M}\left(x_1^{(a)} - \frac{1}{2}\theta_a p_2^{(a)}\right) = \tilde{x}_1 - \frac{1}{2}\tilde{\theta}\tilde{p}_2, \tag{3.185}$$

$$\tilde{X}_2 = \sum_a \frac{m_a}{M}\left(x_2^{(a)} + \frac{1}{2}\theta_a p_1^{(a)}\right) = \tilde{x}_2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}\tilde{p}_1, \tag{3.186}$$

$$\tilde{P}_1 = \sum_a \left(p_1^{(a)} + \frac{1}{2}\eta_a x_2^{(a)}\right) = \tilde{p}_1 + \frac{M\alpha}{2}\tilde{x}_2, \tag{3.187}$$

$$\tilde{P}_2 = \sum_a \left(p_2^{(a)} - \frac{1}{2}\eta_a x_1^{(a)}\right) = \tilde{p}_2 - \frac{M\alpha}{2}\tilde{x}_1. \tag{3.188}$$

Отже, при виконанні умов на параметри координатної та імпульсної некомутативностей (3.96), (3.97) координати та імпульси центра мас у некомутативному просторі $\tilde{X}_i$, $\tilde{P}_i$ можуть бути представлені через координати та імпульси центра мас (3.176), (3.177), які задовольняють звичні співвідношення, а також імпульси центра мас системи пропорційні до її маси.

3.6 Імпульс центра мас, як інтеграл руху у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу

Імпульс центра мас, визначений як сума імпульсів частинок системи, не є інтегралом руху у квантованому фазовому просторі (3.131)-(3.133). Дужки Пуассона для імпульсу центра мас, означеного як (3.135), та гамільтоніану системи частинок з масами m_a та взаємодією $U(|\mathbf{X}^{(1)}-\mathbf{X}^{(2)}|)$

$$H=\sum_a \frac{(\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a}+U(|\mathbf{X}^{(1)}-\mathbf{X}^{(2)}|), \tag{3.189}$$

не дорівнюють нулю. Знайдемо:

$$\{\tilde{P}_1,H\}=\left\{\tilde{P}_1,\sum_a \frac{(\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a}\right\}=\tilde{\eta}\frac{\tilde{P}_2}{M}+$$

$$+\sum_a \frac{\Delta P_2^{(a)}}{m_a}\left(\eta_a-\mu_a\tilde{\eta}\right), \tag{3.190}$$

$$\{\tilde{P}_2,H\}=\left\{\tilde{P}_2,\sum_a \frac{(\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a}\right\}=-\tilde{\eta}\frac{\tilde{P}_1}{M}-$$

$$-\sum_a \frac{\Delta P_1^{(a)}}{m_a}\left(\eta_a-\mu_a\tilde{\eta}\right). \tag{3.191}$$

Розгляньмо випадок, коли параметр імпульсної некомутативності пропорційний до маси (3.97). Дужки Пуассона для імпульсу центра мас (3.135) та гамільтоніану (3.189) у цьому випадку мають такий вигляд:

$$\{\tilde{P}_1,H\}=\frac{\tilde{P}_2}{M}\tilde{\eta}, \tag{3.192}$$

$$\{\tilde{P}_2,H\}=-\frac{\tilde{P}_1}{M}\tilde{\eta}. \tag{3.193}$$

Отже, навіть при виконанні умови (3.97) імпульс центра мас, який означений як сума імпульсів частинок, що формують систему, не є інтегралом руху у квантованому фазовому просторі канонічного типу.

Означимо імпульс центра мас системи частинок як інтеграл руху у просторі з канонічною некомутативністю координат та канонічною некомутативністю імпульсів. Для початку дослідімо частковий випадок, коли маси частинок, які входять до системи, є однакові $m_1 = m_2 = ... = m_N = m$. Отже, є однаковими також параметри координатної та імпульсної некомутативностей

$$\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_N = \theta, \tag{3.194}$$

$$\eta_1 = \eta_2 = ... = \eta_N = \eta. \tag{3.195}$$

Для такої системи N частинок величини

$$\tilde{P}_1' = \sum_a P_1^{(a)} - \eta \sum_a X_2^{(a)}, \tag{3.196}$$

$$\tilde{P}_2' = \sum_a P_2^{(a)} + \eta \sum_a X_1^{(a)}, \tag{3.197}$$

є інтегралами руху. Справедливою є рівність:

$$\{\tilde{P}_1', H\} = \{\tilde{P}_2', H\} = 0, \tag{3.198}$$

де H має вигляд (3.189). Отже, величини (3.196), (3.197) можемо розглядати, як імпульси центра мас системи N частинок з однаковими масами m. Важливо зауважити, що спрямувавши параметр імпульсної некомутативності до нуля $\eta \to 0$ із (3.196), (3.197) отримаємо відомі вирази для імпульсів центра мас системи (отримаємо імпульси центра мас, означені, як сума імпульсів частинок системи).

Дослідімо загальний випадок. Знайдемо величини, які є інтегралами руху для системи N частинок з масами m_a, параметрами координатної та імпульсної некомутативності θ_a, η_a. Означення (3.196),

(3.197) узагальнимо як

$$\tilde{P}_1' = \tilde{P}_1 - \tilde{\eta}\tilde{X}_2, \tag{3.199}$$

$$\tilde{P}_2' = \tilde{P}_2 + \tilde{\eta}\tilde{X}_1, \tag{3.200}$$

де $\tilde{P}_i$, $\tilde{X}_i$ – імпульси та координати центра мас системи, означені традиційно (3.135), (3.165), $\tilde{\eta}$ – ефективний параметр імпульсної некомутативності (3.140). При виконанні умов на параметри координатної та імпульсної некомутативностей (3.96), (3.97) дужки Пуассона для імпульсів (3.199), (3.200) та гамільтоніану (3.189) мають вигляд $\{\tilde{P}_1', H\} = \{\tilde{P}_2', H\} = 0$. Отже, залежності параметрів координатної та імпульсної некомутативності від маси (3.96), (3.97) є також важливими для означення імпульсів центра мас як інтегралів руху. У випадку виконання умов (3.96), (3.97) зберігаються такі величини (3.199), (3.200).

Зауважимо, що коли маси частинок системи є однаковими, можемо записати $\tilde{X}_i = \sum_a X_i^{(a)}/N$, а також із (3.140) отримаємо (3.141). Врахувавши це, маємо, що у частковому випадку системи N однакових частинок вирази (3.199), (3.200) відповідають раніше знайденим виразам для імпульсів центра мас (3.196), (3.197).

Знайдемо також координати центра мас системи $\tilde{X}_i'$, як такі, що спряжені до інтегралів руху $\tilde{P}_i'$. Рівність

$$\{\tilde{X}_i', \tilde{P}_j'\} = \delta_{ij}, \tag{3.201}$$

виконується для координат, які означені як

$$\tilde{X}_i' = \frac{\sum_a \mu_a X_i^{(a)}}{1 - \tilde{\eta}\tilde{\theta}} = \frac{\tilde{X}_i}{1 - \tilde{\eta}\tilde{\theta}}. \tag{3.202}$$

Отже, координати $\tilde{X}_i'$ можемо розглядати, як координати центра мас системи частинок у квантованому фазовому просторі канонічного типу. Зауважимо, що дужки Пуассона для цих координат мають такий

вигляд:

$$\{\tilde{X}_1', \tilde{X}_2'\} = \frac{\tilde{\theta}}{(1-\tilde{\theta}\tilde{\eta})^2}. \tag{3.203}$$

Для імпульсів центра мас, означених як (3.199), (3.200), маємо:

$$\{\tilde{P}_1', \tilde{P}_2'\} = \tilde{\eta}(\tilde{\theta}\tilde{\eta} - 1). \tag{3.204}$$

На закінчення цього підрозділу звернімо увагу, що навіть у випадку вільної частинки, імпульс не є інтегралом руху. Для вільної частинки, використавши отримані результати (3.199), (3.200), можемо записати такі інтеграли руху

$$P_1' = P_1 - \eta X_2, \tag{3.205}$$

$$P_2' = P_2 + \eta X_1, \tag{3.206}$$

$$\{P_1', H\} = \{P_2', H\} = 0, \tag{3.207}$$

де H має вигляд (3.117). Гамільтоніан (3.117) можемо переписати через інтеграли руху (3.205), (3.206) та спряжені до них координати

$$X_i' = \frac{X_i}{(1-\eta\theta)}. \tag{3.208}$$

Оператор Гамільтона лоя вільної частинки має вигляд:

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_1' + \eta(1-\eta\theta)X_2'\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(P_2' - \eta(1-\eta\theta)X_1'\right)^2. \tag{3.209}$$

Цікаво зауважити, що вираз (3.209) відповідає гамільтоніану частинки з зарядом e у магнітному полі $\mathbf{B}(0,0,B)$ у квантованому фазовому просторі канонічного типу

$$\{X_1', X_2'\} = \frac{\theta}{(1-\theta\eta)^2}, \tag{3.210}$$

$$\{X_i', P_j'\} = \delta_{ij}, \tag{3.211}$$

$$\{P_1', P_2'\} = \eta(\theta\eta - 1), \tag{3.212}$$

у випадку, коли

$$\frac{eB}{c} = \eta(1 - \eta\theta), \tag{3.213}$$

де c – швидкість світла.

3.7 Енергетичні рівні системи двох частинок з осциляторною взаємодією

Розгляньмо квантову систему двох частинок з осциляторною взаємодією

$$U(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|) = \frac{k}{2}\left(\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}\right)^2, \tag{3.214}$$

(тут k – константа) у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі, який характеризується співвідношеннями (3.131)-(3.133). Гамільтоніан системи має вигляд:

$$H = \frac{(\mathbf{P}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{P}^{(2)})^2}{2m_2} + \frac{k}{2}\left(\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}\right)^2 = H_c + H_r, \tag{3.215}$$

де доданки H_c, H_r відповідають руху центра мас та відносному руху

$$H_c = \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M}, \tag{3.216}$$

$$H_r = \frac{(\mathbf{P}^r)^2}{2\mu} + \frac{k}{2}(\mathbf{X}^r)^2, \tag{3.217}$$

$M = m_1 + m_2$, $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. Тут імпульси центра мас, координати та імпульси відносного руху означені традиційно (3.135),

$$\mathbf{P}^r = \frac{1}{2}\left(\Delta\mathbf{P}^{(2)} - \Delta\mathbf{P}^{(1)}\right) = \mu_1\mathbf{P}^{(2)} - \mu_2\mathbf{P}^{(1)}, \tag{3.218}$$

$$\mathbf{X}^r = \Delta\mathbf{X}^{(2)} - \Delta\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}, \tag{3.219}$$

де $\Delta\mathbf{X}^{(a)} = \mathbf{X}^{(a)} - \tilde{\mathbf{X}}$, $\Delta\mathbf{P}^{(a)} = \mathbf{P}^{(a)} - \mu_a\tilde{\mathbf{P}}$, $\tilde{\mathbf{X}}$, $\tilde{\mathbf{P}}$ визначаються як (3.165), (3.135). Оскільки комутатор для імпульсів центра мас та відносного

руху не дорівнює нулеві

$$[\tilde{P}_1, P_2^r] = -[\tilde{P}_2, P_1^r] = i\hbar(\mu_1\eta_2 - \mu_2\eta_1), \tag{3.220}$$

у гамільтоніані (3.215) ми не можемо розглядати доданки H_c, H_r, як незалежні.

Двочастинкова задача може бути зведена до окремих незалежних задач про рух центра мас та відносний рух, якщо параметри координатної та імпульсної некомутативностей залежать від маси як (3.96), (3.97). У цьому випадку маємо, що координати та імпульси центра мас координати та імпульси відносного руху задовольняють співвідношення некомутативної алгебри канонічного типу

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = i\hbar(\mu_1^2\theta_1 + \mu_2^2\theta_2) = i\hbar\tilde{\theta}, \tag{3.221}$$

$$[\tilde{P}_1, \tilde{P}_2] = \eta_1 + \eta_2 = i\hbar\tilde{\eta}, \tag{3.222}$$

$$[\tilde{X}_i, \tilde{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{3.223}$$

$$[X_1^r, X_2^r] = i\hbar(\theta_1 + \theta_2) = i\hbar\theta^r, \tag{3.224}$$

$$[P_1^r, P_2^r] = i\hbar(\mu_2^2\eta_1 + \mu_1^2\eta_2) = i\hbar\eta^r, \tag{3.225}$$

$$[X_i^r, P_j^r] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{3.226}$$

$$[\tilde{X}_1, X_2^r] = -[\tilde{X}_2, X_1^r] = [\tilde{P}_1, P_2^r] = -[\tilde{P}_2, P_1^r] = 0, \tag{3.227}$$

з параметрами $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$, θ^r, η^r, які задовольняють рівності:

$$\frac{\tilde{\eta}}{M} = \frac{\eta^r}{\mu} = \frac{\eta_1}{m_1} = \frac{\eta_2}{m_2} = \alpha = \text{const}, \tag{3.228}$$

$$\tilde{\theta}M = \theta^r\mu = \theta_1 m_1 = \theta_2 m_2 = \gamma = \text{const}. \tag{3.229}$$

Отже, параметри координатної та імпульсної некомутативностей θ^r, η^r, які відповідають відносному руху, залежать від зведеної маси системи.

Параметри некомутативності $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$, які визначають вплив квантованості простору на рух центра мас, залежать від повної маси системи.

Знайдемо енергетичні рівні системи двох частинок з осциляторною взаємодією у некомутативному фазовому просторі, розглянувши випадок, коли параметри некомутативності, які відповідають частинкам, задовольняють умови (3.96), (3.97) (у цьому випадку оператори H_r та H_c комутують та ми можемо розглядати H_r, H_c незалежно). Запишемо енергетичні рівні гамільтоніану H_c, який описує рух центра мас. Вплив некомутативності імпульсів на енергетичні рівні вільної частинки досліджувався у роботі [21]. На основі результатів, представлених у статті [21], врахувавши, що імпульси центра мас задовольняють співвідношення некомутативної алгебри з параметром, який має вигляд (3.140), можемо записати енергетичні рівні H_c у такому вигляді:

$$E^c_{n_1} = \hbar\Omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2}\right), \tag{3.230}$$

$$\Omega_1 = \frac{\tilde{\eta}}{M}, \tag{3.231}$$

де n_1 – квантове число, $n_1 = 0, 1, 2, 3, ...$

Знайдемо спектр гамільтоніану H_r, який відповідає відносному руху. Зауважимо, що координати та імпульси відносного руху задовольняють співвідношення (3.224)-(3.226) та можуть бути представлені у такому вигляді:

$$X^r_1 = \sqrt{\frac{\theta^r\eta^r}{2(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r})}}\left(x^r_1 - \frac{1}{\eta^r}\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)p^r_2\right), \tag{3.232}$$

$$X^r_2 = \sqrt{\frac{\theta^r\eta^r}{2(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r})}}\left(x^r_2 + \frac{1}{\eta^r}\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)p^r_1\right), \tag{3.233}$$

$$P_1^r = \sqrt{\frac{\theta^r\eta^r}{2(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r})}}\left(p_1^r + \frac{1}{\theta^r}\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)x_2^r\right), \quad (3.234)$$

$$P_2^r = \sqrt{\frac{\theta^r\eta^r}{2(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r})}}\left(p_2^r - \frac{1}{\theta^r}\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)x_1^r\right), \quad (3.235)$$

де координати та імпульси x_i^r, p_i^r задовольняють звичні комутаційні співвідношення:

$$[x_1^r, x_2^r] = [p_1^r, p_2^r] = 0, \quad (3.236)$$

$$[x_i^r, p_j^r] = i\hbar. \quad (3.237)$$

Отже, можемо записати гамільтоніан H_r як

$$H_r = \left(\frac{\theta^r\eta^r}{4\mu\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)} + \frac{k\theta^r\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)}{4\eta^r}\right)(\mathbf{p}^r)^2 +$$

$$+\left(\frac{k\theta^r\eta^r}{4\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)} + \frac{\eta^r\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)}{4\mu\theta^r}\right)(\mathbf{x}^r)^2 +$$

$$+\left(\frac{\eta^r}{2\mu} + \frac{k\theta^r}{2}\right)(x_1^r p_2^r - x_2^r p_1^r). \quad (3.238)$$

Означивши оператори (див., для прикладу, [97])

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(-i\xi_1 - i\frac{d}{d\xi_1} + \xi_2 + \frac{d}{d\xi_2}\right), \quad (3.239)$$

$$b_2^+ = \frac{1}{2}\left(i\xi_1 - i\frac{d}{d\xi_1} + \xi_2 - \frac{d}{d\xi_2}\right), \quad (3.240)$$

$$b_3 = \frac{1}{2}\left(-i\xi_1 - i\frac{d}{d\xi_1} - \xi_2 - \frac{d}{d\xi_2}\right), \quad (3.241)$$

$$b_3^+ = \frac{1}{2}\left(i\xi_1 - i\frac{d}{d\xi_1} - \xi_2 + \frac{d}{d\xi_2}\right), \quad (3.242)$$

$$[b_i, b_j^+] = \delta_{ij}, \quad [b_i, b_j] = [b_i^+, b_j^+] = 0, \quad (3.243)$$

де

$$\xi_1 = l_0 x_1, \quad \xi_2 = l_0 x_2, \tag{3.244}$$

$$l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\tilde{\mu}\tilde{\omega}}}, \tag{3.245}$$

$$\frac{1}{\tilde{\mu}} = \frac{\theta^r \eta^r}{2\mu\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)} + \frac{k\theta^r\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)}{2\eta^r}, \tag{3.246}$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\theta^r \eta^r}{2\mu\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)} + \frac{k\theta^r\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)}{2\eta^r}} \times$$

$$\times\sqrt{\left(\frac{k\theta^r\eta^r}{2\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)} + \frac{\eta^r\left(1-\sqrt{1-\theta^r\eta^r}\right)}{2\mu\theta^r}\right)}, \tag{3.247}$$

гамільтоніан (3.217) може бути переписаний у такому вигляді:

$$H_r = \hbar\Omega_2\left(b_2^+ b_2 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_3\left(b_3^+ b_3 + \frac{1}{2}\right), \tag{3.248}$$

$$\Omega_2 = \tilde{\omega} + \left(\frac{\eta^r}{2\mu} + \frac{k\theta^r}{2}\right), \tag{3.249}$$

$$\Omega_3 = \tilde{\omega} - \left(\frac{\eta^r}{2\mu} + \frac{k\theta^r}{2}\right). \tag{3.250}$$

Отже, спектр H_r визначається як

$$E^r_{n_2,n_3} = \hbar\Omega_2\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_3\left(n_3 + \frac{1}{2}\right), \tag{3.251}$$

де n_2, n_3 – квантові числа, $n_2 = 0, 1, 2, 3...$, $n_3 = 0, 1, 2, 3...$ та Ω_2, Ω_3 мають вигляд (3.249), (3.250).

На основі результатів (3.230), (3.251), можемо записати точний вираз для спектру системи двох частинок з осциляторною взаємодією:

$$E_{n_1,n_2,n_3} = E^c_{n_1} + E^{rel}_{n_2,n_3} =$$

$$= \hbar\Omega_1\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_2\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_3\left(n_3 + \frac{1}{2}\right). \tag{3.252}$$

Проаналізуймо отриманий результат. Звернімо увагу, що через некомутативність імпульсів спектр центра мас системи двох частинок з осциляторною взаємодією не є неперервний. Він відповідає спектру гармонічного осцилятора з частотою $\tilde{\eta}/M$. Некомутативність координат та некомутативність імпульсів впливають на частоти спектру відносного руху (3.249), (3.250). Спектр системи двох частинок з осциляторною взаємодією у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі має вигляд спектру тривимірного гармонічного осцилятора у звичному просторі ($\theta = \eta = 0$) з частотами Ω_1, Ω_2, Ω_3, які залежать від параметрів некомутативності $\tilde{\eta}$, θ^r, η^r. Зауважимо, що у границі $\tilde{\eta} \to 0$, $\theta^r \to 0$, $\eta^r \to 0$ отримаємо добре відомий результат для спектру двочастинкової системи у звичному просторі ($\theta = 0$, $\eta = 0$).

3.8 Проблема опису руху багаточастинкової системи у шестивимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу

Дослідімо проблему опису руху макроскопічного тіла у шестивимірному (3D конфігураційному та 3D імпульсному) квантованому фазовому просторі канонічного типу (1.20)-(1.22). Ми пропонуємо таке узагальнення співвідношень некомутативної алгебри (1.20)-(1.22) для для координат та імпульсів різних частинок:

$$[X_i^{(a)}, X_j^{(b)}] = i\hbar\delta_{ab}\theta_{ij}^{(a)}, \tag{3.253}$$

$$[X_i^{(a)}, P_j^{(b)}] = i\hbar(\delta_{ab}\delta_{ij} + \delta_{ab}\sigma_{ij}^{(a)}), \tag{3.254}$$

$$[P_i^{(a)}, P_j^{(b)}] = i\hbar\delta_{ab}\eta_{ij}^{(a)}, \tag{3.255}$$

де параметри $\theta_{ij}^{(a)}$, $\eta_{ij}^{(a)}$, $\sigma_{ij}^{(a)}$ відповідають частинці з індексом a. У класичній границі з комутаційних співвідношень (3.253)-(3.255) отримаємо дужки Пуассона, які мають такий вигляд:

$$\{X_i^{(a)}, X_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\theta_{ij}^{(a)}, \tag{3.256}$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\delta_{ij} + \delta_{ab}\sigma_{ij}^{(a)}, \tag{3.257}$$

$$\{P_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\eta_{ij}^{(a)}. \tag{3.258}$$

Розгляньмо симетричне представлення для координат та імпульсів, які задовольняють співвідношення (3.253), (3.255)

$$X_i^{(a)} = x_i^{(a)} - \frac{1}{2}\sum_j \theta_{ij}^{(a)} p_j^{(a)}, \tag{3.259}$$

$$P_i^{(a)} = p_i^{(a)} + \frac{1}{2}\sum_j \eta_{ij}^{(a)} x_j^{(a)}. \tag{3.260}$$

Дужки Пуассона для координат та імпульсів $x_i^{(a)}$, $p_i^{(a)}$ у (3.259), (3.260) є звичними (3.159), (3.160). Із (3.259), (3.260) випливає, що

$$\sigma_{ij}^{(a)} = \sum_k \frac{\theta_{ik}^{(a)}\eta_{jk}^{(a)}}{4}. \tag{3.261}$$

Порахуймо дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас, означених звично (3.165), (3.135). Отримаємо:

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = \tilde{\theta}_{ij}, \tag{3.262}$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ij} + \sum_a \mu_a \sigma_{ij}^{(a)}, \tag{3.263}$$

$$\{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = \tilde{\eta}_{ij}, \tag{3.264}$$

де

$$\tilde{\theta}_{ij} = \sum_a \mu_a^2 \theta_{ij}^{(a)}, \tag{3.265}$$

$$\tilde{\eta}_{ij} = \sum_a \eta_{ij}^{(a)}. \tag{3.266}$$

Важливо відзначити, що дужки Пуассона (3.262)-(3.264) не відтворюють співвідношення некомутативної алгебри (3.256)-(3.258). Маємо:

$$\sum_a \mu_a \sigma_{ij}^{(a)} = \sum_a \mu_a \sum_k \frac{\theta_{ik}^{(a)} \eta_{ik}^{(a)}}{4} \neq \sum_k \frac{\tilde{\theta}_{ik} \tilde{\eta}_{jk}}{4}. \tag{3.267}$$

Звернімо також увагу, що для координат та імпульсів центра мас (3.165), (3.135), координат та імпульсів відносного руху

$$\Delta X_i^{(a)} = X_i^{(a)} - \tilde{X}_i, \quad \Delta P_j^{(a)} = P_i^{(a)} - \mu_a \tilde{P}_i, \tag{3.268}$$

виконуються такі співвідношення:

$$\{\tilde{X}_i, \Delta X_j^{(a)}\} = \mu_a \theta_{ij}^{(a)} - \sum_b \mu_b^2 \theta_{ij}^{(b)}, \tag{3.269}$$

$$\{\tilde{P}_i, \Delta P_j^{(a)}\} = \eta_{ij}^{(a)} - \mu_a \sum_b \eta_{ij}^{(b)}, \tag{3.270}$$

$$\{\Delta X_i^{(a)}, \tilde{P}_j\} = \sigma_{ij}^{(a)} - \sum_b \mu_b \sigma_{ij}^{(b)}, \tag{3.271}$$

$$\{\tilde{X}_i, \Delta P_j^{(a)}\} = \mu_a (\sigma_{ij}^{(a)} - \sum_b \mu_b \sigma_{ij}^{(b)}). \tag{3.272}$$

Розглянувши такі залежності параметрів координатної та імпульсної некомутативностей $\theta_{ij}^{(a)}$, $\eta_{ij}^{(a)}$ від маси

$$\theta_{ij}^{(a)} m_a = \gamma_{ij} = \text{const}, \tag{3.273}$$

$$\frac{\eta_{ij}^{(a)}}{m_a} = \alpha_{ij} = \text{const}, \tag{3.274}$$

(тут γ_{ij}, α_{ij} – константи, які є антисиметричні за нижніми індексами та не залежать від маси) на основі результатів (3.269)-(3.272) знайдемо:

$$\{\tilde{X}_i, \Delta X_j^{(a)}\} = \{\tilde{P}_i, \Delta P_j^{(a)}\} = 0, \tag{3.275}$$

$$\{\Delta X_i^{(a)}, \tilde{P}_j\} = \{\tilde{X}_i, \Delta P_j^{(a)}\} = 0. \tag{3.276}$$

При виконанні співвідношень (3.273), (3.274) параметри $\sigma_{ij}^{(n)}$ є однакові для різних частинок

$$\sigma_{ij}^{(a)} = \sum_k \frac{\gamma_{ik}\alpha_{jk}}{4} = \sum_k \frac{\tilde{\theta}_{ik}\tilde{\eta}_{jk}}{4} = \sum_k \frac{\theta_{ik}^{(a)}\eta_{jk}^{(a)}}{4} = \sigma_{ij}. \tag{3.277}$$

Дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = \tilde{\theta}_{ij}, \tag{3.278}$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ij} + \sum_k \frac{\tilde{\theta}_{ik}\tilde{\eta}_{jk}}{4}, \tag{3.279}$$

$$\{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = \tilde{\eta}_{ij}, \tag{3.280}$$

відтворюють співвідношення некомутативної алгебри з параметрами:

$$\tilde{\theta}_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{M}, \tag{3.281}$$

$$\tilde{\eta}_{ij} = M\alpha_{ij}. \tag{3.282}$$

На додаток, якщо співвідношення (3.273), (3.274) задовольняються, рух вільної частинки у некомутативному фазовому просторі не залежить від її маси. Рівняння руху вільної частинки у квантованому фазовому просторі (3.256)-(3.258) мають такий вигляд:

$$\dot{X}_i = \sum_j (\delta_{ij} + \sigma_{ij})\frac{P_j}{m}, \tag{3.283}$$

$$\dot{P}_i = \sum_j \eta_{ij}\frac{P_j}{m}, \tag{3.284}$$

тут m – маса частинки. Із рівнянь (3.283), (3.284) отримаємо:

$$\dot{X}_i(t) = A_{i1}\cos\left(\frac{\tilde{\eta}}{m}t\right) + A_{i2}\sin\left(\frac{\tilde{\eta}}{m}t\right) + A_{i3}, \tag{3.285}$$

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2}, \tag{3.286}$$

де A_{ij} – елементи матриці

$$\hat{A} = (1+\hat{\sigma}) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{C_2\eta_{31}\tilde{\eta}-C_1\eta_{12}\eta_{23}}{\eta_{23}^2+\eta_{31}^2} & -\frac{C_1\eta_{31}\tilde{\eta}+C_2\eta_{12}\eta_{23}}{\eta_{23}^2+\eta_{31}^2} & \frac{C_3\eta_{23}}{\eta_{12}} \\ -\frac{C_2\eta_{23}\tilde{\eta}+C_1\eta_{12}\eta_{31}}{\eta_{23}^2+\eta_{31}^2} & \frac{C_1\eta_{23}\tilde{\eta}-C_2\eta_{12}\eta_{31}}{\eta_{23}^2+\eta_{31}^2} & \frac{C_3\eta_{23}}{\eta_{12}} \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \tag{3.287}$$

Константи C_i визначаються початковими швидкостями υ_{0i}

$$(1+\hat{\sigma})\hat{B}\hat{C} = \hat{\upsilon}_0, \tag{3.288}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \frac{-\eta_{12}\eta_{23}}{\eta_{23}^2+\eta_{31}^2} & \frac{\eta_{31}\tilde{\eta}}{\eta_{23}^2+\eta_{31}^2} & \frac{\eta_{23}}{\eta_{12}} \\ \frac{-\eta_{12}\eta_{31}}{\eta_{23}^2+\eta_{31}^2} & -\frac{\eta_{23}\tilde{\eta}}{\eta_{23}^2+\eta_{31}^2} & \frac{\eta_{31}}{\eta_{12}} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.289}$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \qquad \hat{\upsilon}_0 = \begin{pmatrix} \upsilon_{01} \\ \upsilon_{02} \\ \upsilon_{03} \end{pmatrix} \tag{3.290}$$

Елементи матриці $\hat{\sigma}$ мають вигляд (1.25). Звернімо увагу, що рух вільної частинки не залежить від її маси, якщо виконуються співвідношення (3.273), (3.274). У цьому випадку ми можемо переписати (3.283), (3.284) як

$$\dot{X}_i = \sum_j (\delta_{ij} + \sigma_{ij})\frac{P_j}{m}, \tag{3.291}$$

$$\frac{\dot{P}_i}{m} = \sum_j \alpha_{ij}\frac{P_j}{m}. \tag{3.292}$$

Із (3.291), (3.292) випливає, що траєкторія вільної частинки $X_i(t)$ не залежить від маси. Як наслідок, для системи вільних частинок маємо, що швидкість руху центра мас дорівнює швидкостям руху частинок,

які утворюють систему. При виконанні умови (3.274) ми можемо записати:

$$\frac{\bar{\eta}^{(n)}}{m_n} = \frac{\sqrt{(\eta_{12}^{(n)})^2 + (\eta_{23}^{(n)})^2 + (\eta_{31}^{(n)})^2}}{m_n} =$$

$$= \sqrt{\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2}, \tag{3.293}$$

а також

$$A_{ij}^{(n)} = A_{ij}. \tag{3.294}$$

Тому швидкість руху центра мас системи вільних частинок має вигляд:

$$\dot{X}_i^c(t) = \sum_n \mu_n \dot{X}_i^{(n)}(t) = \sum_n \mu_n \left(A_{i1}^{(n)} \cos\left(\frac{\bar{\eta}^{(n)}}{m_n} t\right) + \right.$$

$$\left. + A_{i2}^{(n)} \sin\left(\frac{\bar{\eta}^{(n)}}{m_n} t\right) + A_{i3}^{(n)} \right) = A_{i1} \cos\left(\sqrt{\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2}\, t\right) +$$

$$+ A_{i2} \sin\left(\sqrt{\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2}\, t\right) + A_{i3} = \dot{X}_i^{(n)}(t). \tag{3.295}$$

Відносні швидкості дорівнюють нулю

$$\Delta \dot{X}_i(t) = \dot{X}_i^{(n)}(t) - \dot{X}_i^c(t) = 0. \tag{3.296}$$

Як і у звичному просторі ($\theta_{ij} = \eta_{ij} = 0$), для системи вільних частинок з однаковими початковими швидкостями швидкість руху центра мас дорівнює швидкостям руху частинок, які входять до складу системи.

Отже, запропоновані умови на параметри некомутативної алгебри (3.273), (3.274), дозволяють розв'язати проблему залежності руху вільної частинки у некомутативному фазовому просторі від маси, розглядати співвідношення некомутативної алгебри для координат та імпульсів центра мас (3.278)-(3.280), вивчати рух центра мас та відносний рух, як незалежні.

3.9 Вільне падіння тіла у однорідному гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі

Знайдемо та проаналізуймо траєкторію вільного падіння частинки з масою m у квантованому просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу (3.131)-(3.133). Розглянь-мо такий гамільтоніан частинки у однорідному гравітаційному полі:

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - mgX_1. \tag{3.297}$$

Зауважимо, що координати та імпульси у гамільтоніані (3.297) задовольняють співвідношення (3.131)-(3.133). Знайдемо рівняння руху

$$\dot{X}_1 = \frac{P_1}{m}, \quad \dot{X}_2 = \frac{P_2}{m} + mg\theta, \tag{3.298}$$

$$\dot{P}_1 = mg + \eta\frac{P_2}{m}, \quad \dot{P}_2 = -\eta\frac{P_1}{m}. \tag{3.299}$$

Розглянувши початкові умови $X_1(0) = X_{01}$, $X_2(0) = X_{02}$, $\dot{X}_1(0) = \upsilon_{01}$, $\dot{X}_2(0) = \upsilon_{02}$, з рівнянь (3.298), (3.299) знайдемо траєкторію руху частинки у однорідному гравітаційному полі з врахуванням квантованості простору:

$$X_1(t) = \frac{m\upsilon_{01}}{\eta}\sin\frac{\eta}{m}t + \left(\frac{m^2g}{\eta^2} - \frac{m^2g\theta}{\eta} + \frac{m\upsilon_{02}}{\eta}\right)(1- \\ - \cos\frac{\eta}{m}t\Big) + X_{01}, \tag{3.300}$$

$$X_2(t) = \left(\frac{m^2g}{\eta^2} - \frac{m^2g\theta}{\eta} + \frac{m\upsilon_{02}}{\eta}\right)\sin\frac{\eta}{m}t - \frac{m\upsilon_{01}}{\eta}(1- \\ - \cos\frac{\eta}{m}t\Big) - \frac{mg}{\eta}t + mg\theta t + X_{02}. \tag{3.301}$$

У границі $\eta \to 0$ із (3.300), (3.301) отримаємо добре відомі вирази:

$$X_1(t) = \frac{gt^2}{2} + \upsilon_{01}t + X_{01}, \tag{3.302}$$

$$X_2(t) = \upsilon_{02}t + X_{02}, \tag{3.303}$$

проте, важливо зауважити, що зв'язок між імпульсом та швидкістю не є звичний, що зумовлено некомутативністю координат. Маємо:

$$P_1 = m\dot{X}_1, \tag{3.304}$$

$$P_2 = m(\dot{X}_2 + mg\theta). \tag{3.305}$$

Важливо також звернути увагу на те, що траєкторія вільного падіння частинки (3.300), (3.301) залежить від її початкових координат та швидкості, а також від параметрів координатної та імпульсної некомутативностей та маси частинки, якщо припустити, що параметри некомутативності є однакові для різних частинок. Звідси випливає, що частинки з різними масами у однорідному гравітаційному полі у квантованому фазовому просторі канонічного типу рухаються по різних траєкторіях. Слабкий принцип еквівалентності порушується.

Ще одною фундаментальною проблемою, яка зумовлена модифікацією співвідношень для координат та імпульсів (3.131)-(3.133), є порушення адитивності кінетичної енергії та її залежність від композиції. Щоб це показати дослідімо рух макроскопічного тіла (системи частинок) у однорідному гравітаційному полі у просторі, який характеризується співвідношеннями (3.131)-(3.133). Для тіла з масою M у гравітаційному полі на основі (3.299) та (3.300), (3.301) можемо записати такі вирази для імпульсів:

$$\tilde{P}_1 = \tilde{A}\cos\frac{\tilde{\eta}}{M}t + \tilde{B}\sin\frac{\tilde{\eta}}{M}t, \tag{3.306}$$

$$\tilde{P}_2 = -\tilde{A}\sin\frac{\tilde{\eta}}{M}t + \tilde{B}\cos\frac{\tilde{\eta}}{M}t - \frac{M^2 g}{\tilde{\eta}}, \tag{3.307}$$

$\tilde{\eta}$ – ефективний параметр імпульсної некомутативності, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ – константи, які мають такий вигляд

$$\tilde{A} = M\tilde{\upsilon}_{01}, \tag{3.308}$$

$$\tilde{B} = M\tilde{\upsilon}_{02} + \frac{M^2 g}{\tilde{\eta}} - M^2 g\tilde{\theta}, \tag{3.309}$$

$\tilde{\upsilon}_{01}$, $\tilde{\upsilon}_{02}$ – початкові швидкості центра мас системи $\dot{\tilde{X}}_1(0) = \tilde{\upsilon}_{01}$, $\dot{\tilde{X}}_2(0) = \tilde{\upsilon}_{02}$.

Отже, можемо записати такий вираз для кінетичної енергії системи:

$$T = \frac{\tilde{P}_1^2}{2M} + \frac{\tilde{P}_2^2}{2M} =$$

$$= T_0 + g^2 M^3 \left(\frac{1}{\tilde{\eta}^2} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} - \frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\eta}}\right) + M^2 g\tilde{\upsilon}_{02}\left(\frac{1}{\tilde{\eta}} - \tilde{\theta}\right) +$$

$$+\frac{M^2 g}{\tilde{\eta}}\left(\tilde{\upsilon}_{01}\sin\frac{\tilde{\eta}}{M}t + \left(\frac{Mg}{\tilde{\eta}} - Mg\tilde{\theta} + \tilde{\upsilon}_{02}\right)\cos\frac{\tilde{\eta}}{M}t\right), \tag{3.310}$$

де ми використали позначення:

$$T_0 = \frac{M(\tilde{\upsilon}_{01}^2 + \tilde{\upsilon}_{02}^2)}{2}. \tag{3.311}$$

За властивістю адитивності кінетична енергія тіла дорівнює сумі кінетичних енергій частинок, які входять до його складу. Нехай тіло складається з N частинок (поділене на N частин) з масами m_a та параметрами некомутативності θ_a, η_a. Можемо записати такі вирази для імпульсів частинок:

$$P_1^{(a)} = m_a\tilde{\upsilon}_{01}^{(a)}\cos\frac{\eta_a}{m_a}t +$$

$$+\left(m_a\upsilon_{02}^{(a)} + \frac{m_a^2 g}{\eta_a} - m_a^2 g\theta_a\right)\sin\frac{\eta_a}{m_a}t, \tag{3.312}$$

$$\tilde{P}_2 = -m_a \tilde{\upsilon}_{01}^{(a)} \sin \frac{\eta}{m_a} t +$$

$$+ \left(m_a \upsilon_{02}^{(a)} + \frac{m_a^2 g}{\eta_a} - m_a^2 g \theta_a \right) \cos \frac{\eta_a}{m_a} t - \frac{m_a^2 g}{\eta_a}, \qquad (3.313)$$

де $\upsilon_{01}^{(a)}$, $\upsilon_{02}^{(a)}$ – початкові швидкості частинок.

Отже, відповідно до властивості адитивності, врахувавши, що швидкості руху частинок, які формують тіло, дорівнюють швидкості руху центра мас, знайдемо такий вираз для кінетичної енергії тіла:

$$T = \sum_a T_a = \sum_a \frac{(P_1^{(a)})^2}{2m_a} + \frac{(P_2^{(a)})^2}{2m_a} =$$

$$= \sum_a \left[T_{0a} + g^2 m_a^3 \left(\frac{1}{\eta_a^2} + \frac{\theta_a^2}{2} - \frac{\theta_a}{\eta_a} \right) + m_a^2 g \tilde{\upsilon}_{02} \left(\frac{1}{\eta_a} - \theta_a \right) + \right.$$

$$\left. \frac{m_a^2 g}{\eta_a} \left(\tilde{\upsilon}_{01} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t + \left(\frac{m_a g}{\eta_a} - m_a g \theta_a + \tilde{\upsilon}_{02} \right) \cos \frac{\eta_a}{m_a} t \right) \right]. \quad (3.314)$$

Важливо зауважити, що отримані вирази (3.310), (3.314) не співпадають. Отже, фундаментальна властивість кінетичної енергії, а саме адитивність, порушується у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Звідси випливає порушення закону збереження енергії. Тому необхідним є пошук можливостей відновлення властивостей кінетичної енергії у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів.

Розгляньмо випадок, коли параметри координатної та імпульсної некомутативностей задовольняють рівності (3.96), (3.97). Тоді, вирази (3.310), (3.314) можуть бути переписані у такому вигляді:

$$T = T_0 + \sum_a m_a \left[g^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) + g \tilde{\upsilon}_{02} \left(\frac{1}{\alpha} - \gamma \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{g}{\alpha} \left(\tilde{\upsilon}_{01} \sin \alpha t + \left(\frac{g}{\alpha} - g\gamma + \tilde{\upsilon}_{02} \right) \cos \alpha t \right) \right] =$$

$$= T_0 + M\left[g^2\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{\gamma^2}{2}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)+g\tilde{\upsilon}_{02}\left(\frac{1}{\alpha}-\gamma\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{g}{\alpha}\left(\tilde{\upsilon}_{01}\sin\alpha t+\left(\frac{g}{\alpha}-g\gamma+\tilde{\upsilon}_{02}\right)\cos\alpha t\right)\right]. \qquad (3.315)$$

Отже, властивість адитивності кінетичної енергії зберігається. Зауважимо також, що відповідно до (3.315) кінетична енергія визначається повною масою тіла та не залежить від мас частинок, які входять до його складу, отже, не залежить від композиції.

Важливо, що умови (3.96), (3.97) дозволяють також зберегти виконання слабкого принципу еквівалентності у квантованому фазовому просторі канонічного типу. Звернімо увагу, що у виразах для траєкторії частинки у однорідному гравітаційному полі (3.300), (3.301) залежність від маси є тільки у вигляді таких величин $m\theta$ та η/m. Звідси випливає, що при виконанні рівностей (3.96), (3.97), отримаємо, що траєкторія вільного падіння частинки не залежить від її маси. Із (3.300), (3.301) знайдемо:

$$X_1(t) = \frac{\upsilon_{01}}{\alpha}\sin\alpha t+\left(\frac{g}{\alpha^2}-\frac{g\gamma}{\alpha}+\frac{\upsilon_{02}}{\alpha}\right)(1-\cos\alpha t)+X_{01}, \qquad (3.316)$$

$$X_2(t) = \left(\frac{g}{\alpha^2}-\frac{g\gamma}{\alpha}+\frac{\upsilon_{02}}{\alpha}\right)\sin\alpha t-\frac{\upsilon_{01}}{\alpha}(1-\cos\alpha t)-$$

$$-\frac{g}{\alpha}t+\gamma g t+X_{02}. \qquad (3.317)$$

Отже, слабкий принцип еквівалентності зберігається у квантованому фазовому просторі канонічного типу.

Також важливо зауважити, що у випадку, коли виконується рівність (3.96), із (3.305) отримаємо:

$$P_2 = m(\dot{X}_2+\gamma g). \qquad (3.318)$$

Імпульс (3.318) пропорційний до маси, як це є у просторі зі звичними комутаційними співвідношеннями ($\theta = \eta = 0$).

Отже, умови на параметри некомутативної алгебри (3.96), (3.97) дозволяють розв'язати проблему порушення принципу еквівалентності, а також зберегти властивості кінетичної енергії у квантованому фазовому просторі канонічного типу.

3.10 Оцінка мінімального імпульсу на основі досліджень зсуву перигелію Меркурію

У роботі [203] досліджено зсув перигелію орбіти частинки у гравітаційному полі у некомутативному просторі (3.74)-(3.76). З точністю до першого порядку за параметрами некомутативності для частинки з масою m у гравітаційному полі $-k/X$ (k – константа, $X = \sqrt{\sum_i X_i^2}$) отримано такий результат для зсуву перигелію, зумовлений некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів [203]:

$$\Delta\phi_{nc} = 2\pi \left(\sqrt{\frac{m^2 k}{a^3(1-e^2)^3}}\theta + \frac{2}{e^2}\sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{m^2 k}}\eta \right), \tag{3.319}$$

де a – велика піввісь орбіти, e – ексцентриситет, $\theta = \theta_3$, $\eta = \eta_3$, $\theta_i = \epsilon_{ijk}\theta_{jk}/2$, $\eta_i = \epsilon_{ijk}\eta_{jk}/2$. Автори статті [203] припустили, що параметри некомутативності для Меркурію є такими самими як і для елементарних частинок та, порівнявши отриманий результат (3.319) з даними спостережень, отримали верхню межу для мінімальної довжини, яка є близька до планківської

$$\sqrt{\hbar\theta} \leq 6.3 \cdot 10^{-33}\text{м}. \tag{3.320}$$

Другим доданком у (3.319) автори роботи [203] знехтували, вважаючи його малим.

Зауважимо, що дослідження зсуву перигелію Меркурію з врахуванням особливостей опису макроскопічних тіл у некомутативному просторі дають можливість переобчислити результат (3.320) та отримати

оцінку для мінімальної довжини, яка узгоджується з результатами, представленими у літературі. Також на основі таких досліджень можна отримати обмеження на величину імпульсу у некомутативному фазовому просторі, яке суттєво покращує результати, представлені у літературі. Покажемо це детально.

На основі результатів, представлених у попередніх підрозділах, знаємо, що рух макроскопічного тіла у некомутативному фазовому просторі описується параметрами некомутативності, визначеними як (3.265), (3.266). Врахувавши це та використавши результат (3.319), можемо записати вираз для зсуву перигелію Меркурію

$$\Delta\phi_{nc} = \Delta\phi_\theta + \Delta\phi_\eta, \tag{3.321}$$

$$\Delta\phi_\theta = 2\pi\sqrt{\frac{GM^2M_S}{a^3(1-e^2)^3}}\tilde{\theta}, \tag{3.322}$$

$$\Delta\phi_\eta = \frac{4\pi}{e^2}\sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{GM^2M_S}}\tilde{\eta}, \tag{3.323}$$

тут M – маса планети Меркурій, $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_3$, $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_3$,

$$\tilde{\theta}_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\tilde{\theta}_{jk}}{2}, \quad \tilde{\eta}_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\tilde{\eta}_{jk}}{2}, \tag{3.324}$$

$\tilde{\theta}_{ij}$, $\tilde{\eta}_{ij}$ визначаються як (3.265), (3.266). Також ми врахували, що $k = GM_S$, G – гравітаційна стала, M_S – маса Сонця. Записуючи (3.321), ми припустили, що вплив відносного руху на рух центра мас Меркурію є незначним.

Зміщення перигелію Меркурію, яке пов'язують із релятивістськими ефектами (ефект Лензе — Тіррінга, гравітоелектричний ефект), є таким:

$$\Delta\phi_{obs} = 42.9779 \pm 0.0009 \text{ arcseconds per century} =$$

$$= 2\pi(7.98695 \pm 0.00017)\cdot 10^{-8} \text{ rad/rev}, \tag{3.325}$$

(див. таблицю 3 у роботі [204]). Відповідно до загальної теорії відносності зміщення перигелію визначається як

$$\Delta\phi_{GR} = 3\pi\left(\frac{2GM_S}{c^2a(1-e^2)}\right) = 2\pi(7.98744\cdot 10^{-8})\ \mathrm{rad/rev}, \quad (3.326)$$

(див., для прикладу, [19]).

Порівнявши результат для зміщення перигелію, зумовленого некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, з величиною

$$\Delta\phi_{obs} - \Delta\phi_{GR} = 2\pi(-0.00049 \pm 0.00017)\cdot 10^{-8}\ \mathrm{rad/rev}, \quad (3.327)$$

та припустивши, що

$$|\Delta\phi_{nc}| \leq |\Delta\phi_{obs} - \Delta\phi_{GR}|, \quad (3.328)$$

в межах 3σ можемо записати

$$|\Delta\phi_{nc}| \leq 2\pi\cdot 10^{-11}\ \mathrm{rad/rev}. \quad (3.329)$$

Оскільки один із доданків $\Delta\phi_\theta$, $\Delta\phi_\eta$ у виразі для $\Delta\phi_{nc}$ може дорівнювати нулю, що відповідає випадкам $\theta \neq 0$, $\eta = 0$ або $\theta = 0$, $\eta \neq 0$, можемо записати:

$$|\Delta\phi_\theta| \leq 2\pi\cdot 10^{-11}\ \mathrm{rad/rev}, \quad (3.330)$$

$$|\Delta\phi_\eta| \leq 2\pi\cdot 10^{-11}\ \mathrm{rad/rev}. \quad (3.331)$$

Отже, використавши (3.322), (3.323), знайдемо:

$$\hbar|\tilde{\theta}| \leq 3.6\cdot 10^{-63}\mathrm{м}^2, \quad (3.332)$$

$$\hbar|\tilde{\eta}| \leq 6.5\cdot 10^{-30}\mathrm{кг}^2\mathrm{м}^2/\mathrm{с}^2. \quad (3.333)$$

Переобчислимо отриманий результат для параметрів некомутативності, які відповідають електронам та нуклонам. Врахувавши спів-

відношення (3.273), (3.274), (3.281), (3.282), маємо:

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta_e m_e}{M} = \frac{\theta_{nuc} m_{nuc}}{M}, \tag{3.334}$$

$$\tilde{\eta} = \frac{\eta_e M}{m_e} = \frac{\eta_{nuc} M}{m_{nuc}}. \tag{3.335}$$

Отже, на основі нерівностей (3.332), (3.333) для параметрів некомутативності, які відповідають нуклонам, знайдемо:

$$\hbar|\theta_{nuc}| \leq 7.2 \cdot 10^{-13}\text{м}^2, \tag{3.336}$$

$$\hbar|\eta_{nuc}| \leq 3.3 \cdot 10^{-80}\text{кг}^2\text{м}^2/\text{с}^2. \tag{3.337}$$

Для параметрів некомутативності, що відповідають електронам, можемо записати:

$$\hbar|\theta_e| \leq 1.3 \cdot 10^{-9}\text{м}^2, \tag{3.338}$$

$$\hbar|\eta_e| \leq 1.8 \cdot 10^{-83}\text{кг}^2\text{м}^2/\text{с}^2. \tag{3.339}$$

Важливо також оцінити величини констант $\gamma = \gamma_{12}$, $\alpha = \alpha_{12}$ із співвідношень (3.273), (3.274), оскільки вони є однаковими для різних частинок, тому відіграють роль фундаментальних констант. На основі результатів (3.332), (3.333), отримаємо такі оцінки:

$$|\gamma| \leq 1.1 \cdot 10^{-5}\text{с} = 2.1 \cdot 10^{38}\text{T}_P, \tag{3.340}$$

$$|\alpha| \leq 1.9 \cdot 10^{-19}\text{с}^{-1} = 10^{-62}\text{T}_P^{-1}, \tag{3.341}$$

тут T_P – час Планка.

Результат для параметра координатної некомутативності (3.336) узгоджується з результатом, отриманим на основі досліджень нейтронів у гравітаційній квантовій ямі у некомутативному просторі [205]. У роботі [205] знайдено верхню межу $\hbar|\theta_{nuc}| \leq 0.771 \cdot 10^{-13}\text{м}^2$. Нерівність (3.338) не накладає сильне обмеження на величину параметра

координатної некомутативності для електронів. Це пояснюється тим, що ефективний параметр координатної некомутативності, який описує рух системи частинок, зменшується при збільшенні кількості частинок у системі, що випливає з (3.265) чи (3.281). Тому для отримання строгої оцінки для параметра координатної некомутативності на основі досліджень руху макроскопічних тіл необхідно мати експериментальні дані з дуже великими точностями.

Результати для параметрів імпульсної некомутативності (3.337), (3.339) накладають достатньо строгі обмеження на їх величину. Верхня межа (3.337) є на 13 порядків менша ніж отримана на основі досліджень нейтронів у гравітаційній квантовій ямі [179] (у статті отримано $\hbar|\eta_{nuc}| \leq 1.76 \cdot 10^{-61}$кг^{2}м^2/с^2). Результат (3.339) є на 17 порядків меншим ніж отриманий на основі досліджень впливу некомутативності на енергетичні рівні атома водню [179] (аторами статті знайдено $\hbar|\eta_e| \leq 1.45 \cdot 10^{-66}$кг^{2}м^2/с^2).

На основі нерівності (3.339) можемо отримати верхню межу для мінімального імпульсу у некомутативному фазовому просторі

$$\sqrt{\hbar|\eta_e|} \leq 4.2 \cdot 10^{-42}\text{кг} \cdot \text{м/с} = 6.5 \cdot 10^{-43}\text{E}_P/\text{с}, \tag{3.342}$$

де E_P – енергія Планка. Проаналізуймо цей результат. Для цього порівняймо його з відомими величинами. Із співвідношення невизначеностей Гайзенберга маємо:

$$\Delta P \geq \frac{\hbar}{2\Delta X}. \tag{3.343}$$

Для відстаней порядку діаметра видимого Всесвіту $8.8 \cdot 10^{26}$м [206] отримаємо:

$$\Delta P \geq 6 \cdot 10^{-62}\text{кг} \cdot \text{м/с}. \tag{3.344}$$

Результат (3.342) є на багато порядків менший ніж ця величина. Можемо записати:

$$\frac{\sqrt{\hbar|\eta_e|}}{\Delta P} = 7 \cdot 10^{19}. \tag{3.345}$$

Зауважимо, що вираз для зсуву перигелію Меркурію (3.319) залежить від маси планети, якщо припустити, що параметри некомутативності є однакові для різних частинок і макроскопічних тіл. Отже, принцип еквівалентності порушується у некомутативному фазовому просторі. У наступному розділі буде досліджено цю проблему та буде показано, що рух частинки (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі та відповідно зміщення перигелію її орбіти не залежать від маси, якщо виконуються рівності (3.273), (3.274).

3.11 Вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на рух системи Сонце-Земля-Місяць та слабкий принцип еквівалентності

Дослідімо вплив некомутативності на рух системи Сонце-Земля-Місяць. Розгляньмо такий гамільтоніан

$$H = \frac{(\mathbf{P}^E)^2}{2m_E} + \frac{(\mathbf{P}^M)^2}{2m_M} - G\frac{m_E m_S}{R_{ES}} - G\frac{m_M m_S}{R_{MS}} - G\frac{m_M m_E}{R_{EM}}, \tag{3.346}$$

тут m_S, m_E, m_M – маси Сонця, Землі та Місяця, відповідно, G – гравітаційна стала. Записавши гамільтоніан (3.346), ми припускаємо, що вплив відносних рухів частинок, які утворюють макроскопічні тіла, на рухи центра мас Землі та центра мас Місяця є незначними.

Вибравши початок системи координат у центрі мас Сонця, можемо записати відстані від Землі до Сонця, від Місяця до Сонця, від

Землі до Місяця як

$$R_{ES} = \sqrt{(X_1^E)^2 + (X_2^E)^2}, \tag{3.347}$$

$$R_{MS} = \sqrt{(X_1^M)^2 + (X_2^M)^2}, \tag{3.348}$$

$$R_{EM} = \sqrt{(X_1^E - X_1^M)^2 + (X_2^E - X_2^M)^2}, \tag{3.349}$$

де X_i^E, X_i^M – координати Місяця та Землі, $i = (1, 2)$. Координати та імпульси X_i^E, P_i^E, X_i^M, P_i^M задовольняють співвідношення некомутативної алгебри

$$\{X_1^E, X_2^E\} = \theta_E, \quad \{P_1^E, P_2^E\} = \eta_E, \quad \{X_i^E, P_j^E\} = \delta_{ij}, \tag{3.350}$$

$$\{X_1^M, X_2^M\} = \theta_M, \quad \{P_1^M, P_2^M\} = \eta_M, \quad \{X_i^M, P_j^M\} = \delta_{ij}, \tag{3.351}$$

$$\{X_i^M, X_j^E\} = \{P_i^M, P_j^E\} = 0, \tag{3.352}$$

де θ_E, η_E, θ_M, η_M параметри некомутативності, які описують рух Землі та Місяця.

Взявши до уваги деформацію дужок Пуассона (3.350)-(3.352), отримаємо такі рівняння руху:

$$\dot{X}_1^E = \frac{P_1^E}{m_E} + \theta_E \frac{G m_E m_S X_2^E}{R_{ES}^3} + \theta_E \frac{G m_E m_M (X_2^E - X_2^M)}{R_{EM}^3}, \tag{3.353}$$

$$\dot{X}_2^E = \frac{P_2^E}{m_E} - \theta_E \frac{G m_E m_S X_1^E}{R_{ES}^3} - \theta_E \frac{G m_E m_M (X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3}, \tag{3.354}$$

$$\dot{P}_1^E = \eta_E \frac{P_2^E}{m_E} - \frac{G m_E m_S X_1^E}{R_{ES}^3} - \frac{G m_E m_M (X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3}, \tag{3.355}$$

$$\dot{P}_2^E = -\eta_E \frac{P_1^E}{m_E} - \frac{G m_E m_S X_2^E}{R_{ES}^3} - \frac{G m_E m_M (X_2^E - X_2^M)}{R_{EM}^3}, \tag{3.356}$$

$$\dot{X}_1^M = \frac{P_1^M}{m_M} + \theta_M \frac{G m_M m_S X_2^M}{R_{MS}^3} - \theta_M \frac{G m_E m_M (X_2^E - X_2^M)}{R_{EM}^3}, \quad (3.357)$$

$$\dot{X}_2^M = \frac{P_2^M}{m_M} - \theta_M \frac{G m_M m_S X_1^E}{R_{MS}^3} + \theta_M \frac{G m_E m_M (X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3}, \quad (3.358)$$

$$\dot{P}_1^M = \eta_M \frac{P_2^M}{m_M} - \frac{G m_M m_S X_1^M}{R_{MS}^3} + \frac{G m_E m_M (X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3}, \quad (3.359)$$

$$\dot{P}_2^M = -\eta_M \frac{P_1^M}{m_M} - \frac{G m_M m_S X_2^M}{R_{MS}^3} + \frac{G m_E m_M (X_2^E - X_2^M)}{R_{EM}^3}. \quad (3.360)$$

Варто відзначити, що через доданки у рівняннях руху (3.353)-(3.360), які зумовлені некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, швидкість мароскопічного тіла у гравітаційному полі залежить від його маси. Також, врахувавши вирази для параметрів некомутативної алгебри (3.265), (3.266), які описують рух макроскопічного тіла у некомутативному фазовому просторі (у випадку чотиривимірного фазового простору співвідношення із (3.265), (3.266) маємо $\tilde{\theta}_{12} = \tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}_{12} = \tilde{\eta}$), можемо стверджувати, що швидкості руху Землі та Місяця залежать від їх композиції.

Відповідно до експерименту з лазерної далекометрії Місяця [207] принцип еквівалентності виконується з точністю

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2(a_E - a_M)}{a_E + a_M} = (-0.8 \pm 1.3) \cdot 10^{-13}, \quad (3.361)$$

де a_E, a_M – прискорення Землі та Місяця в напрямку на Сонце, коли Земля та Місяць знаходяться на однаковій відстані від Сонця, $\Delta a/a$ – параметр Етвеша. Використаймо цей результат для аналізу слабкого принципу еквівалентності у некомутативному фазовому просторі.

На основі рівнянь (3.353)-(3.360) можемо записати вирази для прискорень Землі та Місяця. З точністю до першого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативностей для Місяця

та Землі θ_M, η_M, θ_E, η_E маємо:

$$\ddot{X}_1^E = -\frac{Gm_S X_1^E}{R_{ES}^3} - \frac{Gm_M(X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3} + \eta_E \frac{\dot{X}_2^E}{m_E} +$$

$$+\theta_E \frac{Gm_S m_E \dot{X}_2^E}{R_{ES}^3} + \theta_E \frac{Gm_M m_E}{R_{EM}^3}(\dot{X}_2^E - \dot{X}_2^M) - \theta_E \frac{3Gm_S m_E}{R_{ES}^5} \times$$

$$\times(\mathbf{R}_{ES} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{ES}) X_2^E - \theta_E \frac{3Gm_M m_E}{R_{EM}^5}(\mathbf{R}_{EM} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{EM})(X_2^E - X_2^M), \tag{3.362}$$

$$\ddot{X}_1^M = -\frac{Gm_S X_1^M}{R_{MS}^3} + \frac{Gm_E(X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3} + \eta_M \frac{\dot{X}_2^M}{m_M} +$$

$$+\theta_M \frac{Gm_S m_M \dot{X}_2^M}{R_{MS}^3} - \theta_M \frac{Gm_M m_E}{R_{EM}^3}(\dot{X}_2^E - \dot{X}_2^M) - \theta_M \frac{3Gm_S m_M}{R_{MS}^5} \times$$

$$\times(\mathbf{R}_{MS} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{MS}) X_2^M + \theta_M \frac{3Gm_M m_E}{R_{EM}^5}(\mathbf{R}_{EM} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{EM})(X_2^E - X_2^M), \tag{3.363}$$

де $\mathbf{R}_{ES}(X_1^E, X_2^E)$, $\mathbf{R}_{MS}(X_1^M, X_2^M)$, $\mathbf{R}_{EM}(X_1^E - X_1^M, X_2^E - X_2^M)$.

Порівняймо прискорення Місяця та Землі в напрямку на Сонце у випадку, коли $R_{MS} = R_{ES} = R$. Виберемо для зручності систему координат з віссю X_1, яка проходить через середину вектора $\mathbf{R}_{EM}$ та є перпендикулярна до нього, та віссю X_2, яка паралельна вектору $\mathbf{R}_{EM}$. Нагадаємо, що центр системи координат збігається з центром мас Сонця. Тоді, врахувавши що $R_{EM}/R \sim 10^{-3}$, маємо:

$$X_1^E = X_1^M = R\sqrt{1 - \frac{R_{EM}^2}{4R^2}} \simeq R, \tag{3.364}$$

$$X_2^E = -X_2^M = \frac{R_{EM}}{2}. \tag{3.365}$$

Отже, прискорення Землі та Місяця мають вигляд:

$$a_E = \ddot{X}_1^E = -\frac{Gm_S}{R^2} + \eta_E \frac{\upsilon_E}{m_E} +$$

$$+\theta_E \frac{Gm_S m_E \upsilon_E}{R^3} \left(1 - \frac{3R_{EM}}{2\upsilon_E R^2}(\mathbf{R}_{ES} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{ES})\right), \tag{3.366}$$

$$a_M = \ddot{X}_1^M = -\frac{Gm_S}{R^2} + \eta_M \frac{\upsilon_E}{m_M} +$$

$$+\theta_M \frac{Gm_S m_M \upsilon_E}{R^3} \left(1 + \frac{3R_{EM}}{2\upsilon_E R^2}(\mathbf{R}_{MS} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{MS})\right), \tag{3.367}$$

де ми використали те, що

$$\dot{X}_2^E = \dot{X}_2^M = \upsilon_E, \tag{3.368}$$

$$\dot{X}_1^E = 0, \quad \dot{X}_1^M = \upsilon_M, \tag{3.369}$$

υ_E – орбітальна швидкість Землі, υ_E – орбітальна швидкість Місяця. Врахувавши $R_{EM}/R \sim 10^{-3}$, $\upsilon_M/\upsilon_E \sim 10^{-2}$, останніми доданками у (3.366), (3.367) ми можемо знехтувати, $3R_{EM}(\mathbf{R}_{ES} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{ES})/2\upsilon_E R^2 \sim 10^{-6}$, $3R_{EM}(\mathbf{R}_{MS} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{MS})/2\upsilon_E R^2 \sim 10^{-5}$. Отже, вираз для параметра Етвеша буде мати такий вигляд

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a^\eta}{a} + \frac{\Delta a^\theta}{a}, \tag{3.370}$$

$$\frac{\Delta a^\eta}{a} = \frac{\upsilon_E R^2}{Gm_S} \left(\frac{\eta_E}{m_E} - \frac{\eta_M}{m_M}\right), \tag{3.371}$$

$$\frac{\Delta a^\theta}{a} = \frac{\upsilon_E}{R} \left(\theta_E m_E - \theta_M m_M\right). \tag{3.372}$$

Проаналізуймо отриманий результат. Звернімо увагу, що параметр Етвеша не дорівнює нулеві навіть у випадку, коли гравітаційна маса та інерційна маса є рівними У виразі (3.370) маємо доданок, зумовлений некомутативністю імпульсів $\Delta a^\eta/a$, який пропорційний до

різниці $(\eta_E/m_E - \eta_M/m_M)$, та доданок, зумовлений некомутативністю координат, $\Delta a^\theta/a$, пропорційний до $(\theta_E m_E - \theta_M m_M)$. Параметри θ_E, η_E, θ_M, η_E – ефективні параметри некомутативної алгебри, які визначаються як (3.265), (3.266) $(\theta_E = \theta_{E12}, \eta_E = \eta_{E12}, \theta_M = \theta_{M12}, \eta_E = \eta_{E12})$ та залежать від композиції тіл.

Результат (3.370) можна використати для оцінки величин $\alpha_E - \alpha_M$, $\gamma_E - \gamma_M$, де

$$\frac{\eta_E}{m_E} = \alpha_E, \quad \frac{\eta_M}{m_M} = \alpha_M, \tag{3.373}$$

$$\theta_E m_E = \gamma_E, \quad \theta_M m_M = \gamma_M. \tag{3.374}$$

З цією метою ми припускаємо, що вплив квантованості простору на рух Землі та Місяця, який зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності, є менший ніж експериментальний результат для точності виконання цього принципу. Отже, ми можемо записати таку нерівність:

$$\left|\frac{\Delta a^\theta + \Delta a^\eta}{a}\right| \leq 2.1 \cdot 10^{-13}, \tag{3.375}$$

де $2.1 \cdot 10^{-13}$ найбільше значення $|\Delta a|/|a|$, яке було отримане на основі експерименту з лазерної далекометрії Місяця [207].

Для оцінки величин

$$\Delta\alpha = \alpha_E - \alpha_M, \tag{3.376}$$

$$\Delta\gamma = \gamma_E - \gamma_M, \tag{3.377}$$

розгляньмо такі нерівності

$$\left|\frac{\Delta a^\theta}{a}\right| \leq 2.1 \cdot 10^{-13}, \tag{3.378}$$

$$\left|\frac{\Delta a^\eta}{a}\right| \leq 2.1 \cdot 10^{-13}. \tag{3.379}$$

Записуючи (3.378), (3.379), ми врахували те, що можуть реалізовуватися випадки $\theta \neq 0$, $\eta = 0$ (простір з некомутативністю координат) чи $\theta = 0$, $\eta \neq 0$ (простір з некомутативністю імпульсів). Із (3.371), (3.372), (3.378), (3.379) маємо:

$$\Delta\alpha \leq 10^{-20}\text{с}^{-1}, \tag{3.380}$$

$$\Delta\gamma \leq 10^{-7}\text{с}. \tag{3.381}$$

Щоб проаналізувати отриманий результат необхідно оцінити величини констант α, γ. У роботі [103] на основі досліджень атома водню у просторі з некомутативністю координат отримано оцінку верхньої межі для параметра координатної некомутативності $\hbar\theta_e \leq 10^{-33}\text{м}^2$. На основі цього результату можемо оцінити порядок константи γ. Маємо $\gamma = m_e\theta_e \leq 10^{-29}$с. У статті [179], досліджуючи вплив некомутативності імпульсів на енергетичні рівні нейтронів у гравітаційній ямі автори отримали такий результат для параметра імпульсної некомутативності $\hbar|\eta| \leq 2.4 \times 10^{-67}\text{кг}^2\text{м}^2/\text{с}^2$. На основі цього результату знайдемо: $\alpha = \eta/m_n \leq 10^{-6}\text{с}^{-1}$ (m_n – маса нейтрона). У попередньому підрозділі ми встановили, що більш сильне обмеження на величину параметра імпульсної некомутативності та константу α можна отримати, досліджуючи зміщення перигелію Меркурію у некомутативному фазовому просторі. Врахувавши (3.341), маємо: $\Delta\alpha/\alpha \leq 5$. Отже, результати (3.380), (3.381) не накладають сильні обмеження на величини $\Delta\alpha$, $\Delta\gamma$. Для їх покращення необхідні дані спостережень з більш високою точністю.

На завершення підрозділу зазначимо, що у випадку, коли параметри некомутативності залежать від маси як (3.273), (3.274), маємо:

$$\alpha_E = \alpha_M, \quad \gamma_E = \gamma_M, \tag{3.382}$$

тому параметр Етвеша (3.370) дорівнює нулю, прискорення Місяця та Землі в напрямку на Сонце є однакові у випадку, коли тіла знаходяться на однаковій відстані до Сонця. Отже, виконується слабкий принцип еквівалентності.

Покажемо також у загальному випадку, що при виконанні рівностей (3.273), (3.274), траєкторія та швидкість частинки (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі не залежать від його маси та композиції. Для частинки з масою m у гравітаційному полі $V(X_1, X_2)$ запишемо гамільтоніан:

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + mV(X_1, X_2). \tag{3.383}$$

Врахувавши співвідношення некомутативної алгебри (3.131)-(3.133), знайдемо такі рівняння руху:

$$\dot{X}_1 = \{X_1, H\} = \frac{P_1}{m} + m\theta\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \tag{3.384}$$

$$\dot{X}_2 = \{X_2, H\} = \frac{P_2}{m} - m\theta\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \tag{3.385}$$

$$\dot{P}_1 = \{P_1, H\} = -m\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \eta\frac{P_2}{m}, \tag{3.386}$$

$$\dot{P}_2 = \{P_2, H\} = -m\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \eta\frac{P_1}{m}. \tag{3.387}$$

У випадку, коли координати та імпульси різних частинок задовольняють співвідношення некомутативної алгебри з однаковими параметрами θ, η, з рівнянь руху (3.384)-(3.387) випливає, що швидкість та траєкторія руху частинки у гравітаційному полі у квантованому фазовому просторі канонічного типу залежить від маси, а тому порушується принцип еквівалентності. При виконанні рівностей (3.273), (3.274), рівняння (3.384)-(3.387) можемо переписати як

$$\dot{X}_1 = \frac{P_1}{m} + \gamma\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \tag{3.388}$$

$$\dot{X}_2 = \frac{P_2}{m} - \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \tag{3.389}$$

$$\dot{P}_1 = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \alpha P_2, \tag{3.390}$$

$$\dot{P}_2 = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \alpha P_1. \tag{3.391}$$

Ввівши позначення $P'_i = P_i/m$, запишемо рівняння (3.388)-(3.391) у такому вигляді:

$$\dot{X}_1 = P'_1 + \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \tag{3.392}$$

$$\dot{X}_2 = P'_2 - \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \tag{3.393}$$

$$\dot{P}'_1 = -\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \alpha P'_2, \tag{3.394}$$

$$\dot{P}'_2 = -\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \alpha P'_1. \tag{3.395}$$

Важливо зауважити, що рівняння (3.392)-(3.395) не залежать від маси. Тому їх розв'язки $X_i = X_i(t)$, $P'_i = P'_i(t)$ також не залежать від маси. Отже, при виконанні рівностей (3.273), (3.274), рівняння руху залежать від констант γ, α із умов (3.273), (3.274) та є однакові для частинок з різними масами. Слабкий принцип еквівалентності зберігається.

Дослідімо більш загальний випадок, а саме рух макроскопічного тіла у гравітаційному полі у квантованому фазовому просторі канонічного типу. Знайдемо рівняння руху та проаналізуймо виконання слабкого принципу еквівалентності.

Запишемо гамільтоніан системи частинок з масою M у гравітаційному полі

$$H = \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) + H_{rel}. \tag{3.396}$$

Координати $\tilde{X}_i$ та імпульси центра мас $\tilde{P}_i$ означені традиційно (3.165), (3.135) та задовольняють співвідношення некомутативної алгебри канонічного типу з параметрами $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$. Гамільтоніан H_{rel} відповідає відносному руху.

Як було показано в підрозділі 3.8, рух центра мас системи частинок та відносний рух є незалежними, коли виконуються умови (3.273), (3.274), які у випадку чотиривимірного квантованого простору мають вигляд (3.96), (3.97). При виконанні рівностей (3.96), (3.97) маємо:

$$\left\{ \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), H_{rel} \right\} = 0. \tag{3.397}$$

Отже, для системи частинок (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі знайдемо такі рівняння руху:

$$\dot{\tilde{X}}_1 = \frac{P_1}{M} + M\tilde{\theta}\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2}, \tag{3.398}$$

$$\dot{\tilde{X}}_2 = \frac{P_2}{M} - M\tilde{\theta}\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1}, \tag{3.399}$$

$$\dot{\tilde{P}}_1 = -M\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1} + \tilde{\eta}\frac{P_2}{M}, \tag{3.400}$$

$$\dot{\tilde{P}}_2 = -M\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2} - \tilde{\eta}\frac{P_1}{M}, \tag{3.401}$$

які при виконанні рівностей (3.96), (3.97) не залежать від маси макроскопічного тіла, мас частинок, які його формують, та можуть бути записані у такому вигляді:

$$\dot{\tilde{X}}_1 = \frac{P_1}{M} + \gamma\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2}, \tag{3.402}$$

$$\dot{\tilde{X}}_2 = \frac{P_2}{M} - \gamma\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1}, \tag{3.403}$$

$$\dot{\tilde{P}}_1 = -M\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1} + \alpha P_2, \tag{3.404}$$

$$\dot{\tilde{P}}_2 = -M\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2} - \alpha P_1. \tag{3.405}$$

З (3.402)-(3.405) робимо висновок, що слабкий принцип еквівалентності зберігається.

Важливо зауважити, що без припущення про залежність параметрів некомутативної алгебри від маси (3.96), (3.97) маємо, що рівняння руху макроскопічного тіла (3.398)-(3.401) залежать від параметрів $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$, які визначаються масами частинок, що формують систему, та мають вигляд (3.265), (3.266). Отже, рух макроскопічного тіла у гравітаційному полі залежить не тільки від його повної маси, а й від його композиції.

Отримані результати можна узагальнити на випадок шестивимірного квантованого фазового простору канонічного типу, який характеризується алгеброю (1.20)-(1.22). Для частинки (тіла) з масою m у гравітаційному полі $V(\mathbf{X})$, врахувавши співвідношення (3.273), (3.274), знайдемо:

$$H = \frac{P^2}{2m} + mV(\mathbf{X}), \tag{3.406}$$

$$\dot{X}_i = \sum_j (\delta_{ij} + \sigma_{ij})P'_j + \sum_j \gamma_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{3.407}$$

$$\dot{P}'_i = -\sum_j (\delta_{ij} + \sigma_{ij})\frac{\partial V}{\partial X_j} + \sum_j \alpha_{ij}P'_j, \tag{3.408}$$

де $P'_i = P_i/m$. Із (3.407), (3.408) випливає, що $X_i(t)$, $P'_i(t)$ не залежать від маси. Зауважимо, що при виконанні рівностей (3.273), (3.274) параметри σ (3.277) не залежать від маси. Отже, слабкий принцип еквівалентності зберігається у квантованому фазовому просторі канонічного

типу.

На завершення звернімо увагу, що у цьому розділі ми розглянули узагальнення алгебри для координат та імпульсів частинок (3.256)-(3.258), припустивши, що координати та імпульси різних частинок комутують. Якщо координати різних частинок не комутують $[X_1^{(a)}, X_2^{(b)}] = i\hbar\theta^{(ab)}$ ($\theta^{(ab)}$ параметри некомутативності) комутатор для координат центра мас (3.165) має вигляд $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = i\hbar\bar{\theta}$, де $\bar{\theta} = \sum_a \sum_b \mu_a \mu_b \theta^{(ab)}$. Для системи N однакових частинок маємо $\mu_a = 1/N$, $\theta^{(ab)} = \theta$, та $\bar{\theta} = \theta$. Оскільки поправки до рівнянь руху в гравітаційному полі, зумовлені некомутативністю координат, пропорційні до маси (див. (3.298), (3.384), (3.385)), у випадку, коли параметри координатної некомутативності є однакові для частинки та макроскопічного тіла, отримаємо, що вплив некомутативності координат на рух макроскопічного тіла у гравітаційному полі є більшим ніж на рух частинки. Такий висновок не має фізичного змісту, тому що в цьому випадку ефекти квантованості простору були б добре спостережуваними у фізиці макроскопічних систем.

3.12 Висновки до розділу 3

Досліджено мінімальну довжину у фазовому просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу. На основі точного розв'язку задачі на власні значення оператора квадрата довжини у некомутативному фазовому просторі отримано вираз для мінімальної довжини та встановлено, що некомутативність координат та некомутативність імпульсів зумовлюють її анізотропію.

Розв'язано проблему кінематичних змінних (проблему залежності координат від маси) у квантованому фазовому просторі. Знайдено

умови на параметри некомутативної алгебри, при яких некомутативні координати не залежать від маси, а також некомутативні імпульси пропорційні до маси. Відповідно до цих умов параметр координатної некомутативності обернено пропорційний до маси (3.96), параметр імпульсної некомутативності пропорційний до маси (3.97).

Запропоновано узагальнення алгебри канонічного типу для координат та імпульсів різних частинок. Знайдено, що у випадку, коли параметри некомутативної алгебри залежать від маси (3.96), (3.97), імпульси центра мас системи є пропорційними до її повної маси, некомутативні координати та імпульси центра мас можуть бути представлені через координати та імпульси центра мас, комутаційні співвідношення для яких є звичними.

Досліджено вплив некомутативності імпульсів на траєкторію руху системи вільних частинок у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Знайдено, що траєкторія руху вільної частинки залежить від її маси, що зумовлено некомутативністю імпульсів, тому система вільних частинок з однаковими початковими швидкостями не рухається разом. Рух центра мас залежить від відносного руху навіть для системи вільних частинок. Проаналізувавши отримані рівняння руху для вільної частинки, ми встановили, що траєкторія та швидкість вільної частинки у некомутативному фазовому просторі не залежить від її маси у випадку, коли параметри імпульсної некомутативності пропорційні до маси (3.97). При виконанні рівності (3.97) система вільних частинок з однаковими початковими швидкостями не розлітається, частинки системи рухаються зі швидкостями, які дорівнюють швидкості руху центра мас, як це є у звичному просторі. У випадку шестивимірного некомутативного фазового простору незалежність руху вільної частинки від її маси може бути відновлена,

коли параметри координатної та імпульсної некомутативностей задовольняють умови (3.273), (3.274).

Знайдено, що при пропорційності параметра імпульсної некомутативності до маси (3.97), імпульси центра мас комутують з імпульсами відносно руху, та двочастинкова задача може бути зведана до двох незалежних задач про рух центра мас та відносний рух. Як приклад двочастинкової системи, досліджено систему частинок з осциляторною взаємодією. Знайдено точний вираз для спектру цієї системи у чотиривимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу. Встановлено, що некомутативність імпульсів зумовлює дискретність спектру центра мас системи. А саме, спектр центра мас двочастинкової системи має вигляд спектру гармонічного осцилятора у звичному просторі ($\theta = \eta = 0$) з частотою, яка визначається параметром імпульсної некомутативності. Спектр системи двох частинок з осциляторною взаємодією у некомутативному фазовому просторі має вигляд спектру тривимірного гармонічного осцилятора з частотами, які визначаються параметрами координатної та імпульсної некомутативностей.

Запропоновано означення для імпульсу центра мас (3.199), (3.200) як інтеграла руху у некомутативному фазовому просторі канонічного типу та знайдено вирази для координат центра мас (3.202), спряжених до цього імпульсу. А саме, встановлено, що у випадку виконання рівностей (3.96), (3.97), існує інтеграл руху, який виражається через імпульси та координати центра мас, означені традиційно.

Розв'язано проблему опису руху макроскопічних тіл у шестивимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу. Запропоновано некомутативну алгебру канічного типу для координат та імпульсів частинок з параметрами, які залежать від їх мас. Знайдено, що ідея залежності параметрів алгебри від маси дозволяє забезпечи-

ти відповідність співвідношень для координат та імпульсів центра мас співвідношенням некомутативної алгебри, відновити незалежність руху центра мас та відносного руху, розв'язати проблему значного впливу квантованості простору на рух маскроскопічних систем, яка відома, як проблема футбольного м'яча.

Знайдено траєкторію вільного падіння частинки (тіла) у однорідному гравітаційному полі у квантованому фазовому просторі. Показано, що траєкторія руху частинки залежить від її маси. Встановлено, що через модифікацію комітаційних співвідношень для координат та імпульсів кінетична енергія не є адитивною та залежить від композиції. Звідси випливає проблема порушення закону збереження енергії у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Знайдено, що проблема залежності траєкторії вільного падіння від маси, а також проблема порушення адитивності кінетичної енергії розв'язуються при виконанні рівностей (3.96), (3.97).

Досліджено вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на зсув перигелію Меркурію з врахуванням особливостей опису руху макроскопічного тіла у квантованому фазовому просторі канонічного типу. На основі порівняння теоретичного результату для зміщення перигелію, зумовленого некомутативністю, із експериментальними даними знайдено оцінки для параметрів координатної та імпульсної некомутативностей. Отриманий результат для параметра імпульсної некомутативності (3.339) значно покращує результати, представлені у літературі. А саме, верхня межа (3.339) є 17 порядків менша ніж межа, отримана на основі досліджень енергетичних рівнів атома водню у некомутативному фазовому просторі [179].

Досліджено вплив квантованості простору на рух системи Сонце-Земля-Місяць. Знайдено поправки до параметра Етвеша для Землі та

Місяця, зумовлені некомутативністю. Ми показали, що у некомутативному фазовому просторі параметр Етвеша не дорівнює нулю навіть у випадку рівності інерційної та гравітаційної мас. Модифікація дужок Пуассона для координат та імпульсів зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності. Важливо зауважити, що слабкий принцип еквівалентності відновлюється у некомутативному фазовому просторі, коли параметри некомутативної алгебри залежать від маси (3.273), (3.274).

Отже, зв'язок параметрів некомутативності з масою (3.273), (3.274) дає можливість отримати ряд важливих результатів у некомутативному фазовому просторі, а саме: розв'язати проблему кінематичних змінних; відновити пропорційність некомутативних імпульсів до маси; звести двочастинкову задачу до задачі про рух центра мас та відносний рух; відновити адитивність кінетичної енергії та її незалежність від композиції; означити імпульс центра мас, як інтеграл руху; зберегти слабкий принцип еквівалентності. Кількість результатів, які можуть бути отримані при виконанні двох умов на параметри некомутативності (3.273), (3.274), підтверджують важливість цих умов.

Розділ 4

Симетрія відносно інверсії часу у некомутативному фазовому просторі

4.1 Вступ

Звичні комутаційні співвідношення для операторів координат та операторів імпульсів

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [p_i, p_j] = 0, \tag{4.1}$$

є інваріантними відносно інверсії часу [208]. Врахувавши те, що у квантовій механіці перетворення інверсії часу (T-перетворення) включають комплексне спряження (див., для прикладу, [208]) та при інверсії часу координати та імпульси перетворюються як

$$x_i \to x_i, \quad p_i \to -p_i, \tag{4.2}$$

отримаємо, що при перетворенні інверсії часу співвідношення (4.1) залишаються незмінними.

Припущення про те, шо комутатори для координат та для імпульсів дорівнюють константам зумовлює порушення симетрії відносно інверсії часу (T-симетрії) [98, 209]. Некомутативна алгебра канонічного типу не є інваріантною відносно інверсії часу. Розглядаючи перетворення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів при інверсії часу, аналогічні, як у звичному просторі

$$X_i \to X_i, \quad P_i \to -P_i, \tag{4.3}$$

отримаємо, що співвідношення, для прикладу, двовимірної некомутативної алгебри канонічного типу (3.74)-(3.76) переходять у такі:

$$[X_1, X_2] = -i\hbar\theta, \tag{4.4}$$

$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar(1+\sigma), \tag{4.5}$$

$$[P_1, P_2] = -i\hbar\eta. \tag{4.6}$$

Отже, із (4.4)-(4.6) випливає, що при інверсії часу алгебра (3.74)-(3.76) трансформується у некомутативну алгебру з параметрами некомутативності $-\theta$, $-\eta$.

Важливо відзначити, що перетворення (4.3) є одним із можливих перетворень координат та імпульсів у некомутативному просторі при інверсії часу. У цьому розділі ми показуємо, що через неінваріантність співвідношень некомутативної алгебри відносно інверсії часу перетворення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів залежать від їх представлення.

Симетрія відносно інверсії часу у некомутативному просторі канонічного типу розглядалася у статтях [98, 209–211]. Автори роботи [209] показали, що гамільтоніан гармонічного осцилятора у просторі з некомутативністю координат не є інваріантним відносно інверсії часу. У статті [98] досліджено гармонічний осцилятор у магнітному полі у просторі з некомутативністю координат та встановлено, що при певному виборі параметра координатної некомутативності (при певній залежності цього параметра від маси, частоти осцилятора, а також від величини магнітного поля) T-симетрія відновлюється. Автор праці [210] прийшов до висновку, що для збереження симетрії відносно інверсії часу необхідно при T-перетворенні розглядати зміну знаку параметра координатної некомутативності.

Зауважимо, що з рівності (4.6) випливає, що канонічна некомутативність імпульсів є додатковою причиною неінваріантності некомутативної алгебри відносно інверсії часу. Отже, актуальною є побудова алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, яка є інваріантна відносно інверсії часу, еквівалентна некомутативній алгебрі канонічного типу.

У розділі, як приклад для дослідження проблеми порушення T-симетрії у квантованому фазовому просторі канонічного типу, вивчається рух по колу. Ми знаходимо, що період колової орбіти частинки у гравітаційному полі у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу залежить від напрямку руху. Для відновлення симетрії відносно інверсії часу, а також сферичної симетрії ми пропонуємо будувати тензори координатної та імпульсної некомутативностей за допомогою імпульсів, які відповідають сферично-симетричній системі.

Розділ має таку структуру. Перетворення для координат та імпульсів при інверсії часу та їх залежність від представлення досліджується у підрозділі 4.2. У підрозділі 4.3 ми знаходимо точний вираз для періоду руху по колу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу та показуємо, що рух по колу залежить від його напрямку. Підрозділ 4.4 присвячено побудові інваріантної відносно інверсії часу сферично-симетричної некомутативної алгебри, яка еквівалентна алгебрі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу.

Результати, представлені у цьому розділі, опубліковано у статті [48].

4.2 Симетрія відносно інверсії часу у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу

Через неінваріантність некомутативної алгебри канонічного типу (3.74)-(3.76) відносно інверсії часу, перетворення X_i, P_i відносно інверсії часу залежать від представлення. Координати та імпульси, які задовольняють співвідношення (3.74)-(3.76) можуть бути представлені через координати та імпульси x_i, p_i, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення. А саме, можемо записати:

$$X_1 = \varepsilon \left(x_1 - \theta_1' p_2 \right), \tag{4.7}$$

$$X_2 = \varepsilon \left(x_2 + \theta_2' p_1 \right), \tag{4.8}$$

$$P_1 = \varepsilon \left(p_1 + \eta_1' x_2 \right), \tag{4.9}$$

$$P_2 = \varepsilon \left(p_2 - \eta_2' x_1 \right), \tag{4.10}$$

де ε, θ_1', θ_2', η_2', η_2' є константами. Після інверсії часу, розглянувши перетворення $x_i \to x_i$, $p_i \to -p_i$, отримаємо

$$X_1 \to X_1' = \varepsilon \left(x_1 + \theta_1' p_2 \right), \tag{4.11}$$

$$X_2 \to X_2' = \varepsilon \left(x_2 - \theta_2' p_1 \right), \tag{4.12}$$

$$P_1 \to -P_1' = \varepsilon \left(-p_1 + \eta_1' x_2 \right), \tag{4.13}$$

$$P_2 \to -P_2' = \varepsilon \left(-p_2 - \eta_2' x_1 \right). \tag{4.14}$$

Отже, перетворення (4.11)-(4.14) залежать від параметрів ε, θ_1', θ_2', η_2', η_2', як наслідок вони залежать від представлення.

Параметри ε, θ_1', θ_2', η_2', η_2', можуть бути вибрані різними способа-

ми. Із (4.7)-(4.10), маємо:

$$[X_1, X_2] = i\hbar\varepsilon^2(\theta_1' + \theta_2'), \tag{4.15}$$

$$[X_1, P_1] = i\hbar\varepsilon^2(1 + \theta_1'\eta_1') \tag{4.16}$$

$$[X_2, P_2] = i\hbar\varepsilon^2(1 + \theta_2'\eta_2'), \tag{4.17}$$

$$[P_1, P_2] = i\hbar\varepsilon^2(\eta_1' + \eta_2'). \tag{4.18}$$

Порівнявши співвідношення (4.15)-(4.18) та (3.74)-(3.76), отримаємо такі рівняння:

$$\varepsilon^2 = 1, \quad \theta_1'\eta_1' = \theta_2'\eta_2' = \sigma, \tag{4.19}$$

$$\theta_1' + \theta_2' = \theta, \tag{4.20}$$

$$\eta_1' + \eta_2' = \eta, \tag{4.21}$$

з яких ми знайдемо:

$$\theta_1' = \frac{1}{2}\left(\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4\frac{\theta\sigma}{\eta}}\right), \tag{4.22}$$

$$\theta_2' = \frac{1}{2}\left(\theta \mp \sqrt{\theta^2 - 4\frac{\theta\sigma}{\eta}}\right), \tag{4.23}$$

$$\eta_1' = \frac{1}{2}\left(\eta \mp \sqrt{\eta^2 - 4\frac{\eta\sigma}{\theta}}\right), \tag{4.24}$$

$$\eta_2' = \frac{1}{2}\left(\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\frac{\eta\sigma}{\theta}}\right), \tag{4.25}$$

та

$$\sigma \leq \frac{\theta\eta}{4}. \tag{4.26}$$

Звернімо увагу, що вибравши знак “+” чи “-” у (4.22)-(4.25), отримаємо два різні представлення для некомутативних координат та некомута-

тивних імпульсів, а тому два різних перетворення при інверсії часу (4.11)-(4.14).

Добре відомим є симетричне представлення, яке характеризується такими параметрами $\varepsilon = 1$, $\theta_1' = \theta_2' = \theta/2$, $\eta_1' = \eta_2' = \eta/2$. У цьому випадку координати та імпульси X_i, P_i задовольняють (3.74)-(3.76) з $\sigma = \theta\eta/4$ [202]. При $\sigma = 0$ комутатор координат та імпульсів (3.75) дорівнює $i\hbar$, як у звичному просторі. Порівнявши (4.15)-(4.18) та (3.74)-(3.76) при $\sigma = 0$, можемо записати:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{1 + \theta_1'\eta_1'}, \tag{4.27}$$

$$\theta_1'\eta_1' = \theta_2'\eta_2', \tag{4.28}$$

$$\varepsilon^2(\theta_1' + \theta_2') = \theta, \tag{4.29}$$

$$\varepsilon^2(\eta_1' + \eta_2') = \eta. \tag{4.30}$$

Зауважимо, що ми маємо чотири рівняння (4.27)-(4.30) та п'ять параметрів ε, θ_1', θ_2', η_1', η_2'. Отже, вибравши один із них, ми отримаємо різні представлення для координат та імпульсів, які задовольняють співвідношення (3.74)-(3.76) з $\sigma = 0$ та відповідно різні перетворення (4.11)-(4.14).

Для прикладу, обравши $\theta_2' = 0$ із (4.27)-(4.30) отримаємо $\varepsilon = 1$, $\eta_1' = 0$, $\eta_2' = \eta$, $\theta_1' = \theta$ та представлення має такий вигляд:

$$X_1 = x_1 - \theta p_2, \tag{4.31}$$

$$X_2 = x_2, \tag{4.32}$$

$$P_1 = p_1, \tag{4.33}$$

$$P_2 = p_2 - \eta x_1. \tag{4.34}$$

У цьому випадку маємо звичні перетворення для координати X_2, та імпульсу P_1

$$X_2 \to X_2, \quad P_1 \to -P_1, \tag{4.35}$$

проте для X_1, P_2 отримаємо:

$$X_1 \to X_1' = x_1 + \theta p_2, \tag{4.36}$$

$$P_2 \to -P_2' = -p_2 - \eta x_1. \tag{4.37}$$

Також можемо записати два симетричні представлення (4.7)-(4.10) з параметрами $\varepsilon = (1 + \theta'\eta')^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_1' = \theta_2' = (1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta})/\eta$, $\eta_1' = \eta_2' = (1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta})/\theta$ [41, 202] та відповідно отримати два різні перетворення для координат та імпульсів при інверсії часу (3.86)-(3.89). Таке представлення розглядалося у підрозділі 3.3.

На завершення зазначимо, що висновки, представлені у підрозділі 3.3, можуть бути узагальнені на випадок, коли представлення для координат та імпульсів має вигляд (4.7)-(4.10), де константи ε, θ_1', θ_2', η_2', η_2', задовольняють співвідношення (4.27)-(4.30). У випадку, коли параметр координатної некомутативності θ обернено пропорційний до маси (3.96) (θ_1', θ_2' обернено пропорційні до маси, (4.20)), параметр імпульсної некомутативності пропорційний до маси (3.97) (η_2', η_2' обернено пропорційні до маси, (4.21)), відповідно до (4.27) константа ε не залежить від маси. Звідси випливає, що некомутативні координати (4.7), (4.8) можуть розглядатися як кінематичні змінні, некомутативні імпульси (4.9), (4.10) пропорційні до маси.

4.3 Рух по колу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу

Для дослідження симетрії відносно інверсії часу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу розгляньмо рух по колу. Зауважимо, що вплив некомутативності на такий рух залежить від його напрямку. Щоб це показати розгляньмо двовимірний некомутативний простір канонічного типу (3.74)-(3.76) та такий гамільтоніан:

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - \frac{k}{X}, \tag{4.38}$$

тут

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}. \tag{4.39}$$

У класичній границі $\hbar \to 0$ з (3.74)-(3.76) отримаємо такі дужки Пуассона

$$\{X_1, X_2\} = \theta, \tag{4.40}$$

$$\{X_1, P_1\} = \{X_2, P_2\} = 1 + \sigma, \tag{4.41}$$

$$\{P_1, P_2\} = \eta. \tag{4.42}$$

Врахувавши, що координати та імпульси X_i, P_i в (4.38) задовольняють (4.40)-(4.42), знаходимо такі рівняння руху

$$\dot{X}_1 = \frac{P_1}{m}(1+\sigma) + \frac{k\theta X_2}{X^3}, \tag{4.43}$$

$$\dot{X}_2 = \frac{P_2}{m}(1+\sigma) - \frac{k\theta X_1}{X^3}, \tag{4.44}$$

$$\dot{P}_1 = \frac{\eta P_2}{m} - \frac{kX_1}{X^3}(1+\sigma), \tag{4.45}$$

$$\dot{P}_2 = -\frac{\eta P_1}{m} - \frac{kX_2}{X^3}(1+\sigma). \tag{4.46}$$

Розв'язки цих рівнянь мають такий вигляд

$$X_1(t) = R_0 \cos(\omega t), \tag{4.47}$$

$$X_2(t) = R_0 \sin(\omega t), \tag{4.48}$$

$$P_1(t) = -P_0 \sin(\omega t), \tag{4.49}$$

$$P_2(t) = P_0 \cos(\omega t), \tag{4.50}$$

та описують рух по колу з радіусом R_0, імпульсом

$$P_0 = \frac{m\omega R_0^3 + km\theta}{R_0^2\,(1+\sigma)}, \tag{4.51}$$

та частотою

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4k}{mR_0^3}\left((1+\sigma)^2 - \theta\eta\right) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} - \frac{\eta}{m} - \frac{k\theta}{R_0^3}\right). \tag{4.52}$$

Період руху визначається як

$$T = 4\pi\left(\sqrt{\frac{4k}{mR_0^3}\left((1+\sigma)^2 - \theta\eta\right) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} - \frac{\eta}{m} - \frac{k\theta}{R_0^3}\right)^{-1}. \tag{4.53}$$

Розгляньмо рух по колу R_0 в зворотньому напрямку

$$X_1(t) = R_0 \cos(\omega t), \tag{4.54}$$

$$X_2(t) = -R_0 \sin(\omega t), \tag{4.55}$$

$$P_1(t) = P_0' \sin(\omega t), \tag{4.56}$$

$$P_2(t) = P_0' \cos(\omega t). \tag{4.57}$$

Вирази (4.54)-(4.57) відповідають виразам (4.47)-(4.50) з $-t$. В (4.56), (4.57) ми використали позначення P_0', щоб відрізнити імпульс, який

відповідає руху в зворотньому напрямку. Підставивши (4.54)-(4.57) в (4.43)-(4.46) отримаємо

$$\omega' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4k}{mR_0^3}\left((1+\sigma)^2 - \theta\eta\right) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} + \frac{\eta}{m} + \frac{k\theta}{R_0^3}\right),$$

$$T' = 4\pi\left(\sqrt{\frac{4k}{mR_0^3}\left((1+\sigma)^2 - \theta\eta\right) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} + \frac{\eta}{m} + \frac{k\theta}{R_0^3}\right)^{-1}, \tag{4.58}$$

та

$$P_0' = -\frac{m\omega' R_0^3 - km\theta}{R_0^2\left(1+\gamma\right)}. \tag{4.59}$$

Важливо зауважити, що знайдені вирази для частоти (4.58) та періоду руху по колу (4.58) не співпадають з результатами (4.52), (4.53). Маємо:

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \frac{\eta}{m} + \frac{k\theta}{R_0^3}. \tag{4.60}$$

Отже у некомутативному фазовому просторі канонічного типу (4.40)-(4.42) період та частота руху по колу радіуса R_0 залежать від напрямку руху. В порівнянні з (4.52), (4.53) вирази для ω', T' містять параметри некомутативності з протилежними знаками. Також маємо, що $P_0' \neq -P_0$ (зауважимо, що у звичному просторі виконується така рівність $P_0' = -P_0$, що відповідає руху в зворотньому напрямі). Невідповідність виразів (4.52), (4.53) та (4.58), (4.58) є наслідком неінваріантності некомутативної алгебри канонічного типу (3.74)-(3.76) відносно інверсії часу.

Зауважимо, що результати (4.58), (4.58) також отримаємо, врахувавши, що рух в зворотньому напрямку відповідає інверсії часу, при

якій некомутативна алгебра має вигляд (4.4)-(4.6). Тому вирази для ω', T' (4.58), (4.58) можуть бути знайдені, замінивши θ на $-\theta$ та η на $-\eta$ у виразах (4.52), (4.53). Також змінивши знаки перед параметрами некомутативності у P_0' (4.59) отримаємо $-P_0$ (4.51).

4.4 Некомутативна алгебра канонічного типу зі збереженою симетрією відносно інверсії часу та сферичною симетрією

На основі досліджень, представлених у підрозділі 4.2, можемо зробити висновок, що для збереження T симетрії тензори некомутативностей θ_{ij}, η_{ij} при інверсії часу мають перетворюватися як

$$\theta_{ij} \to -\theta_{ij}, \tag{4.61}$$

$$\eta_{ij} \to -\eta_{ij}. \tag{4.62}$$

Найпростіші вирази для тензорів некомутативності, при яких маємо (4.61), (4.62), є такими:

$$\theta_{ij} = \frac{\bar{c}_\theta}{\hbar} \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^a, \tag{4.63}$$

$$\eta_{ij} = \frac{\bar{c}_\eta}{\hbar} \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^b, \tag{4.64}$$

де $\bar{c}_\theta$, $\bar{c}_\eta$ – константи, p_i^a, p_i^b – додаткові імпульси. Для збереження також сферичної симетрії ми розглядаємо випадок, коли додаткові імпульси відповідають сферично-симетричним системам, для прикладу гармонічним осциляторам

$$H_{osc}^a = \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 a^2}{2}, \quad H_{osc}^b = \frac{(p^b)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 b^2}{2}, \tag{4.65}$$

з великими частотами ω_{osc} та довжиною $\sqrt{\hbar}/\sqrt{m_{osc}\omega_{osc}}$, яка дорівнює довжині Планка.

Із виразів (1.25), (4.63), (4.64) отримаємо, що σ_{ij} залежить від додаткових імпульсів і має такий вигляд:

$$\sigma_{ij} = \frac{l_0 p_0}{4\hbar^2}\left((\mathbf{a}\cdot\mathbf{p^b})\delta_{ij} - a_j p_i^b\right). \tag{4.66}$$

Отже, ми пропонуємо розв'язати проблеми порушення симетрії відносно інверсії часу та порушення сферичної симетрії у некомутативному фазовому просторі, побудувавши алгебру з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, в якій залучені додаткові імпульси:

$$[X_i, X_j] = i\bar{c}_\theta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^a, \tag{4.67}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\left(\delta_{ij} + \frac{\bar{c}_\theta \bar{c}_\eta}{4\hbar^2}(\mathbf{p}^a\cdot\mathbf{p}^b)\delta_{ij} - \frac{\bar{c}_\theta \bar{c}_\eta}{4\hbar^2} p_j^a p_i^b\right), \tag{4.68}$$

$$[P_i, P_j] = i\bar{c}_\eta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^b, \tag{4.69}$$

Комутаційні співвідношення для додаткових координат та імпульсів є звичні, також додаткові імпульси p_i^a, p_i^b за допомогою яких побудовано тензори некомутативностей комутують з координатами та імпульсами X_i, P_i:

$$[a_i, p_j^a] = [b_i, p_j^b] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{4.70}$$

$$[a_i, a_j] = [b_i, b_j] = [a_i, b_j] = [p_i^a, p_j^a] = [p_i^b, p_j^b] = [p_i^a, p_j^b] = 0, \tag{4.71}$$

$$[a_i, p_j^b] = [b_i, p_j^a] = [p_i^a, X_j] = [p_i^b, X_j] = [p_i^a, P_j] = [p_i^b, P_j] = 0. \tag{4.72}$$

Варто зауважити, що, оскільки алгебра (4.67)-(4.69) є інваріантна відносно T-перетворення, незалежно від представлення отримаємо, що

перетворення для некомутативних координат та імпульсів при інверсії часу мають вигляд:

$$X_i \to X_i, \tag{4.73}$$

$$P_i \to -P_i. \tag{4.74}$$

Для прикладу, координати та імпульси, які задовольняють (4.67)-(4.69), можуть бути представлені як

$$X_i = x_i + \frac{\bar{c}_\theta}{2\hbar}[\mathbf{p}^a \times \mathbf{p}]_i = x_i + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]_i, \tag{4.75}$$

$$P_i = p_i + \frac{\bar{c}_\eta}{2\hbar}[\mathbf{x} \times \mathbf{p}^b]_i = p_i - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}]_i, \tag{4.76}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, x_i, p_i задовольняють звичні співвідношення (1.12)-(1.14) та комутують з a_i, p_i^a, b_i, p_i^b.

Компоненти векторів $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\eta}$ визначаються як

$$\theta_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\theta_{jk}}{2} = \frac{\bar{c}_\theta}{\hbar}p_i^a, \tag{4.77}$$

$$\eta_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\eta_{jk}}{2} = \frac{\bar{c}_\eta}{\hbar}p_i^b. \tag{4.78}$$

Після інверсії часу маємо

$$x_i \to x_i, \quad p_i \to -p_i, \tag{4.79}$$

$$p_i^a \to -p_i^a, \quad p_i^b \to -p_i^b, \tag{4.80}$$

та, врахувавши (4.75), (4.76), отримаємо, що некомутативні координати та некомутативні імпульси перетворюються як (4.73), (4.74). Окрім інваріантності відносно інверсії часу алгебра (4.67)-(4.69) є також інваріантна відносно поворотів. А саме, після повороту координати та імпульси X_i, P_i, p_i^a, p_i^b будуть мати вигляд

$$X_i' = U(\varphi)X_iU^+(\varphi), \quad P_i' = U(\varphi)P_iU^+(\varphi), \tag{4.81}$$

$$p_i^{a\prime} = U(\varphi)p_i^aU^+(\varphi), \quad p_i^{b\prime} = U(\varphi)p_i^bU^+(\varphi), \tag{4.82}$$

де оператор $U(\varphi)$ визначається як

$$U(\varphi) = e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{x}\times\mathbf{p}])} e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{p}^a])} e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{p}^b])}, \tag{4.83}$$

$\mathbf{n}$ – одиничний вектор, ϕ – кут повороту. Комутаційні співвідношення для X'_i, P'_i

$$[X'_i, X'_j] = i\bar{c}_\theta \sum_k \varepsilon_{ijk} p^{a\prime}_k, \tag{4.84}$$

$$[X'_i, P'_j] = i\hbar \left(\delta_{ij} + \frac{\bar{c}_\theta \bar{c}_\eta}{4\hbar}(\mathbf{p}^{a\prime}\cdot\mathbf{p}^{b\prime})\delta_{ij} - \frac{\bar{c}_\theta \bar{c}_\eta}{4\hbar} p^{a\prime}_j p^{b\prime}_i\right), \tag{4.85}$$

$$[P'_i, P'_j] = i\bar{c}_\eta \sum_k \varepsilon_{ijk} p^{b\prime}_k, \tag{4.86}$$

відповідають співвідношенням некомутативної алгебри (4.67)-(4.69).

Отже, побудована некомутативна алгебра (4.67)-(4.69) є інваріантною відносно поворотів та інверсії часу. Алгебра (4.67)-(4.69) є еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу (1.20)-(1.22), оскільки для тензорів координатної та імпульсної некомутативності θ_{ij}, η_{ij}, а також для операторів координат та імпульсів X_i, P_i, які задовольняють (4.67)-(4.69), виконуються співвідношення:

$$[\theta_{ij}, \eta_{ij}] = [\sigma_{ij}, \theta_{ij}] = [\sigma_{ij}, \eta_{ij}] = 0, \tag{4.87}$$

$$[\theta_{ij}, X_k] = [\theta_{ij}, P_k] = [\eta_{ij}, X_k] = [\eta_{ij}, P_k] = 0, \tag{4.88}$$

$$[\sigma_{ij}, X_k] = [\sigma_{ij}, P_k] = 0, \tag{4.89}$$

які характерні для алгебри канонічного типу (1.20)-(1.22) де θ_{ij}, η_{ij}, σ_{ij} константи.

Важливо зауважити, що запропонована алгебра є сумісною. А саме, тотожність Якобі виконується для будь-якої трійки операторів, оскільки для координат та імпульсів, що задовольняють співвідношення алгебри (4.67)-(4.69) існує явне представлення через координати та

імпульси, що задовольняють звичні комутаційні співвідношення (4.75), (4.76).

4.5 Висновки до розділу 4

Досліджено симетрію відносно інверсії часу у квантованому фазовому просторі. Показано, що некомутативна алгебра канонічного типу (3.74)-(3.76) не є інваріантна відносно інверсії часу. При T-перетворенні алгебра трансформується у некомутативну алгебру з параметрами некомутативності з від'ємними знаками (4.4)-(4.6). Також ми показали, що через неінваріантність алгебри (3.74)-(3.76) відносно інверсії часу, перетворення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів при інверсії часу залежать від їх представлення (4.11)-(4.14). Отже, у некомутативному фазовому просторі канонічного типу існує проблема неоднозначності перетворень координат та імпульсів при інверсії часу.

Як приклад для дослідження проблеми порушення симетрії відносно інверсії часу у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу, розглянуто рух по колу. Ми знайшли точні вирази для частоти та періоду колового руху частинки у гравітаційному полі та встановили, що ці вирази залежать від напрямку руху (4.52), (4.53), (4.58), (4.58). Відмінність полягає у різних знаках параметрів некомутативностей. Вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на рух по колу залежить від його напрямку. Періоди руху по колу одного і того самого радіуса у некомутативному фазовому просторі канонічного в різних напрямках є різними.

Побудовано некомутативну алгебру (4.67)-(4.69), яка є інваріан-

тна відносно інверсії часу, сферично-симетрична та еквівалентна до некомутативної алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу. Для збереження симетрії відносно інверсії часу запропоновано тензори координатної та імпульсної некомутативностей (4.63), (4.64), які при інверсії часу перетворюються як $\theta_{ij} \to -\theta_{ij}$, $\eta_{ij} \to -\eta_{ij}$. Для збереження сферичної симетрії тензори некомутативності побудовано за допомогою додаткових імпульсів, які відповідають гармонічним осциляторам. Отже, ідея про залучення додаткових імпульсів дозволяє побудувати некомутативну алгебру, яка є інваріантна відносно поворотів та інверсії часу.

Розділ 5

Сферично-симетричний некомутативний фазовий простір канонічного типу зі збереженим принципом еквівалентності

5.1 Вступ

У цьому розділі ми розглядаємо квантований фазовий простір, який характеризується сферично-симетричною некомутативною алгеброю канонічного типу

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{5.1}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\left(\delta_{ij} + \frac{\theta_{ik}\eta_{kj}}{4}\right), \tag{5.2}$$

$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij}, \tag{5.3}$$

де θ_{ij}, η_{ij} – тензори некомутативностей, які означаються як

$$\theta_{ij} = \frac{l_0}{\hbar}\varepsilon_{ijk}a_k, \tag{5.4}$$

$$\eta_{ij} = \frac{p_0}{\hbar}\varepsilon_{ijk}p_k^b, \tag{5.5}$$

l_0 – константа, яка має розмірність довжини, p_0 – константа, яка має розмірність імпульсу, a_k, p_k^b – додаткові координати та імпульси, які відповідають гармонічним осциляторам (4.65). Характерні довжини

осциляторів ($\sqrt{\hbar}/\sqrt{m_{osc}\omega_{osc}}$) дорівнюють планківській довжині, частоти є великими. Додаткові координати та імпульси задовольняють звичні комутаційні співвідношення (4.70)-(4.71). Також виконуються рівності:

$$[a_i, X_i] = [p_i^b, X_i] = [a_i, P_i] = [p_i^b, P_i] = 0, \quad (5.6)$$

$$[X_i, p_j^a] = i\varepsilon_{ijk}\frac{l_0}{2}p_k, \quad (5.7)$$

$$[P_i, b_j] = i\varepsilon_{ijk}\frac{l_0}{2}x_k, \quad (5.8)$$

$$[X_i, a_j] = [X_i, b_j] = [X_i, p_j^b] = [P_i, a_j] = [P_i, p_j^a] = [P_i, p_j^b] = 0. \quad (5.9)$$

Для координат та імпульсів X_i, P_i існує представлення через координати x_i та імпульси p_i, які задовольняють звичні співвідношення (1.12)-(1.14) та комутують з a_i, p_i^a, b_i, p_i^b. Представлення має вигляд:

$$X_i = x_i + \frac{l_0}{2\hbar}[\mathbf{a} \times \mathbf{p}]_i = x_i + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]_i, \quad (5.10)$$

$$P_i = p_i + \frac{p_0}{2\hbar}[\mathbf{x} \times \mathbf{p^b}]_i = p_i - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}]_i. \quad (5.11)$$

Тут $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Компоненти векторів $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\eta}$ визначаються як

$$\theta_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\theta_{jk}}{2} = \frac{l_0}{\hbar}a_i, \quad (5.12)$$

$$\eta_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\eta_{jk}}{2} = \frac{p_0}{\hbar}p_i^b. \quad (5.13)$$

У цьому розділі у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі (5.1)-(5.3) досліджується мінімальна довжина та мінімальний імпульс. Знаходяться вирази для тензорів координатної та імпульсної некомутативностей, при яких розв'язується проблема багатьох частинок та зберігається принцип еквівалентності. Також встановлюється вплив квантованості простору на енергетичні рівні дво-

та багаточастинкових фізичних систем (атом водню, екзотичні атоми, симетрична мережа осциляторів у однорідному полі, ланцюжок осциляторів).

Важливо відзначити, що вивченню енергетичних рівнів атома водню у некомутативному просторі канонічного типу без збереженої сферичної симетрії приділялося багато уваги [21, 23, 99, 103, 183, 212–218]. Це пов'язано з простотою системи, а також з тим, що спектр атома водню є добре досліджений експериментально. Для прикладу, відносна точність вимірювання частоти переходу $1S - 2S$ становить 4.5×10^{-15} [219]. Тому знаходження впливу квантованості простору на енергетичні рівні атома водню дає можливість отримати строгі оцінки для величини кванта простору (мінімальну довжину оцінюють на основі порівняння теоретичних результатів для поправок до енергетичних рівнів атома водню, зумовлених квантованістю простору, з точністю експериментальних даних).

У цьому розділі ми знаходимо та аналізуємо вплив квантованості простору на спектр атома водню (атом водню досліджується, як двочастинкова система), а також на спектри екзотичних атомів (мюонний атом водню, антипротонний атом гелію) у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Ми приходимо до висновку, що дослідження енергетичних рівнів антипротонного гелію відкривають нові можливості для покращення оцінки величини параметра координатної некомутативності, оскільки вплив некомутативності координат на спектр антипротонного гелію є більшим ніж на спектр атома водню. Тому важливим є збільшення точності вимірювання спектру антипротонного гелію.

У розділі також вивчається системи гармонічних осциляторів у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі. Дослі-

джується вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на енергетичні рівні симетричної мережі осциляторів у однорідному полі та замкнутого ланцюжка осциляторів. Зауважимо, що некомутативний гармонічний осцилятор привернув багато уваги фізиків [21, 25, 86, 91, 97, 98, 176, 191–201]. Система двох взаємодіючих осциляторів розглядалася у двовимірному просторі канонічного типу [220, 221], у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі [200]. У 2015 році для оцінки мінімальної довжини (кванта простору) були проведені експерименти з мікро- та нано-осциляторами [222].

Результати досліджень системи взаємодіючих осциляторів мають ряд застосувань. Зокрема, нещодавно вивчення мереж квантових осциляторів привернули особливу увагу через їх важливість у квантовій інформації та квантових обчисленнях [223–225]. Зауважимо також, що висновки з дослідження системи N взаємодіючих осциляторів мають використання у ядерній фізиці [226–228], у молекулярній спектроскопії [229–232].

Розділ має таку структуру. У підрозділі 5.2 розглянуто оператор Гамільтона у сферично-симетричному некомутавному фазовому просторі. Задача на власні значення оператора квадрату довжини та оператора квадрату імпульсу розв'язується у підрозділі 5.3. У підрозділі 5.4 досліджуються особливості опису системи багатьох частинок у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі. Як приклад системи частинок, у підрозділі 5.5 розглядається система двох частинок з кулонівською взаємодією та знаходиться спектр системи у некомутативному фазовому просторі зі сферичною симетрією. На основі отриманих результатів у підрозділі 5.6 досліджується вплив некомутативності на спектри атома водню, мюонного атома водню, антипротонного атома гелію та оцінюється верхня межа для параме-

трів некомутативності. У підрозділі 5.7 знаходяться енергетичні рівні симетричної мережі осциляторів у однорідному полі, ланцюжка осциляторів. Підрозділ 5.8 присвячено вивченню руху частинки (тіла) у гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі та дослідженню слабкого принципу еквівалентності. Розділ завершується висновками.

Представлені результати опубліковано у статтях [43, 45, 53, 55, 59, 62, 64].

5.2 Оператор Гамільтона у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі

Зважаючи на те, що для побудови алгебри (5.1)-(5.3) залучено додаткові координати та імпульси a_i, p_i^b, при дослідженні фізичної системи з гамільтоніаном H_s у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі необхідно брати до уваги також гамільтоніани гармонічних осциляторів:

$$H = H_s + H_{osc}^a + H_{osc}^b, \tag{5.14}$$

тут H_{osc}^a, H_{osc}^b визначаються як (4.65).

Перепишемо гамільтоніан (5.14) у такому вигляді:

$$H = H_0 + \Delta H, \tag{5.15}$$

де

$$H_0 = \langle H_s \rangle_{ab} + H_{osc}^a + H_{osc}^b \tag{5.16}$$

$$\Delta H = H - H_0 = H_s - \langle H_s \rangle_{ab}. \tag{5.17}$$

Тут ми використали позначення

$$\langle ... \rangle_{ab} = \langle \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b | ... | \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b \rangle, \tag{5.18}$$

для усереднення за хвильовими функціями $\psi^a_{0,0,0}$, $\psi^b_{0,0,0}$ гармонічних осциляторів H^a_{osc}, H^b_{osc} у основних станах. Ми розглядаємо усереднення за основними станами гармонічних осциляторів, оскільки, частоти ω_{osc} осциляторів H^a_{osc}, H^b_{osc} є великі, тому для збудження осциляторів потрібні великі енергії. Додаткові координати та додаткові імпульси задовольняють звичні комутаційні співвідношення (4.70), (4.71), тому функції $\psi^a_{0,0,0}$, $\psi^b_{0,0,0}$ є хвильовими функціями основних станів тривимірних гармонічних осциляторів у звичному просторі, які є добре відомі та мають такий вигляд:

$$\psi^a_{0,0,0} = \left(\frac{m_{osc}\omega_{osc}}{\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-\hbar a^2/2m_{osc}\omega_{osc}}, \tag{5.19}$$

$$\psi^b_{0,0,0} = \left(\frac{m_{osc}\omega_{osc}}{\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-\hbar b^2/2m_{osc}\omega_{osc}}, \tag{5.20}$$

(див., для прикладу, [233]).

Знайдемо поправки до енергетичних рівнів гамільтоніана (5.16), зумовлені доданком ΔH. Важливо звернути увагу, що

$$[\langle H_s\rangle_{ab}, H^a_{osc} + H^b_{osc}] = 0. \tag{5.21}$$

Отже, власні функції та власні значення гамільтоніана H_0 можуть бути записані як

$$\psi^{(0)}_{\{n_s\},\{0\},\{0\}} = \psi^s_{\{n_s\}}\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}, \tag{5.22}$$

$$E^{(0)}_{\{n_s\}} = E^s_{\{n_s\}} + 3\hbar\omega_{osc}, \tag{5.23}$$

де ми використали позначення $\psi^s_{\{n_s\}}$, $E^s_{\{n_s\}}$ для власних функцій та власних значень гамільтоніана $\langle H_s\rangle_{ab}$ ($\{n_s\}$ – квантові числа) та врахували, що гармонічні осцилятори знаходяться в основних станах. Отже, у першому порядку теорії збурень отримаємо, що поправки до енергетичних рівнів гамільтоніана (5.16), зумовлені доданком ΔH, дорівнюють

нулю:

$$\Delta E^{(1)} = \langle \psi^s_{\{n_s\}} \psi^a_{0,0,0} \psi^b_{0,0,0} | \Delta H | \psi^s_{\{n_s\}} \psi^a_{0,0,0} \psi^b_{0,0,0} \rangle =$$

$$= \langle \psi^s_{\{n_s\}} | \langle H_s \rangle_{ab} - \langle H_s \rangle_{ab} | \psi^s_{\{n_s\}} \rangle = 0. \tag{5.24}$$

У другому порядку теорії збурень маємо:

$$\Delta E^{(2)} =$$

$$= \sum_{\{n'_s\},\{n^a\},\{n^b\}} \frac{\left| \left\langle \psi^{(0)}_{\{n'_s\},\{n^a\},\{n^b\}} \left| \Delta H \right| \psi^{(0)}_{\{n_s\},\{0\},\{0\}} \right\rangle \right|^2}{E^s_{\{n'_s\}} - E^s_{\{n_s\}} - \hbar\omega_{osc}(n^a_1 + n^a_2 + n^a_3 + n^b_1 + n^b_2 + n^b_3)}, \tag{5.25}$$

тут набір квантових чисел $\{n'_s\}$, $\{n^a\}$, $\{n^b\}$ не співпадає з $\{n_s\}$,$\{0\}$, $\{0\}$. Тому у всіх доданках у (5.25) присутня частота осциляторів ω_{osc} у знаменнику. Величини у чисельнику $\left\langle \psi^{(0)}_{\{n'_s\},\{n^a\},\{n^b\}} \left| \Delta H \right| \psi^{(0)}_{\{n_s\},\{0\},\{0\}} \right\rangle$ не залежать від частоти ω_{osc}, оскільки виконується співвідношення $\sqrt{\hbar}/\sqrt{m_{osc}\omega_{osc}} = l_P$ (l_P – довжина Планка). Нагадаємо, що ми розглядаємо випадок, коли частоти осциляторів великі. При $\omega_{osc} \to \infty$ отримаємо:

$$\lim_{\omega_{osc}\to\infty} \Delta E^{(2)} = 0. \tag{5.26}$$

Отже, поправки до енергетичних рівнів гамільтоніана (5.16), зумовлені доданком ΔH, дорівнюють нулю у першому та другому порядках теорії збурень. Тому з точністю до другого порядку за ΔH можемо розглядати гамільтоніан, який отримується усередненням гамільтоніану системи за власними функціями гармонічних осциляторів та визначається як (5.16).

Для прикладу, розгляньмо вільну частинку з масою m у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі (5.1)-(5.3). Гаміль-

тоніан частинки має вигляд

$$H_p = \sum_i \frac{P_i^2}{2m}. \tag{5.27}$$

Імпульси P_i не комутують, для них виконується співвідношення (5.3). Обчислимо $\langle H_p \rangle_{ab}$. Використавши представлення (5.10)-(5.11), можемо переписати гамільтоніан частинки у такому вигляді:

$$H_p = \frac{p^2}{2m} - \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot [\mathbf{x} \times \mathbf{p}])}{2m} + \frac{[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}]^2}{8m}. \tag{5.28}$$

Зауважимо, що

$$\langle H_p \rangle_{ab} = \langle \psi^b_{0,0,0} | H_p | \psi^b_{0,0,0} \rangle, \tag{5.29}$$

оскільки H_p не залежить від координат та імпульсів a_i, p_i^a. Для знаходження $\langle \psi^b_{0,0,0} | H_p | \psi^b_{0,0,0} \rangle$ використаємо такі результати:

$$\langle \psi^b_{0,0,0} | p_i^b | \psi^b_{0,0,0} \rangle = 0, \tag{5.30}$$

$$\langle \psi^b_{0,0,0} | p_i^b p_j^b | \psi^b_{0,0,0} \rangle = \frac{\hbar m_{osc} \omega_{osc}}{2} \delta_{ij}. \tag{5.31}$$

(див., для прикладу, [233]). Врахувавши (5.30), (5.31), маємо:

$$\langle \eta_i \rangle_{ab} = 0, \tag{5.32}$$

$$\langle \eta_i \eta_j \rangle_{ab} = \frac{m_{osc} \omega_{osc} p_0^2}{2\hbar} = \frac{1}{3} \langle \eta^2 \rangle, \tag{5.33}$$

де

$$\langle \eta^2 \rangle = \sum_i \langle \eta_i^2 \rangle_{ab}. \tag{5.34}$$

Отже, після усереднення лінійні доданки за $\boldsymbol{\eta}$ пропадуть, отримаємо:

$$\langle H_p \rangle_{ab} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\langle \eta^2 \rangle x^2}{12m}. \tag{5.35}$$

Використавши результат (5.35), можемо також записати:

$$\Delta H = -\frac{(\boldsymbol{\eta}\cdot[\mathbf{x}\times\mathbf{p}])}{2m} + \frac{[\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{x}]^2}{8m} - \frac{\langle\eta^2\rangle x^2}{12m}. \tag{5.36}$$

Звернімо увагу, що оператор ΔH містить доданки, які є першого та другого порядку за параметром імпульсної некомутативності. Отже, з точністю до другого порядку за ΔH чи другого порядку за параметром імпульсної некомутативності для дослідження спектру вільної частинки у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі можемо розглядати гамільтоніан $\langle H_p\rangle_{ab}$ (5.35).

Координати та імпульси x_i, p_j у $\langle H_p\rangle_{ab}$ задовольняють звичні комутаційні співвідношення (1.12)-(1.14). Отже, гамільтоніан (5.35) відповідає гамільтоніану гармонічного осцилятора з масою m та частотою

$$\omega = \sqrt{\frac{\langle\eta^2\rangle}{6m^2}}, \tag{5.37}$$

у звичному просторі ($\theta_{ij} = \eta_{ij} = 0$). Енергетичні рівні вільної частинки, яка у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі описується гамільтоніаном (5.35), мають такий вигляд

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \sqrt{\frac{\hbar^2\langle\eta^2\rangle}{6m^2}}\left(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\right), \tag{5.38}$$

де n_1, n_2, n_3 – квантові числа, $n_1 = 0, 1, 2...$, $n_2 = 0, 1, 2...$, $n_3 = 0, 1, 2....$

Отже, з точністю до другого порядку за параметром імпульсної некомутативності енергетичні рівні вільної частинки у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі відповідають енергетичним рівням тривимірного гармонічного осцилятора з частотою, яка залежить від параметра імпульсної некомутативності як (5.37). Некомутативність імпульсів зумовлює дискретність енергії вільної частинки.

Зауважимо, що у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі канонічного типу, який характеризується співвідно-

шеннями (5.1)-(5.3), симетрія відносно інверсії часу порушується. Розглянувши перетворення для координат та імпульсів, аналогічні, як у звичному просторі,

$$X_i \to X_i, \quad P_i \to -P_i, \tag{5.39}$$

$$a_i \to -a_i, \quad p_i^b \to -p_i^b, \tag{5.40}$$

отримаємо, що некомутативна алгебра (5.1)-(5.3) переходить у

$$[X_i, X_j] = -i\varepsilon_{ijk} l_0 a_k, \tag{5.41}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar \left(\delta_{ij} - \frac{l_0 p_0}{4\hbar^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p^b}) \delta_{ij} + \frac{l_0 p_0}{4\hbar^2} a_j p_i^b \right), \tag{5.42}$$

$$[P_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk} p_0 p_k^b. \tag{5.43}$$

Отримані співвідношення (5.41)-(5.43) не відповідають співвідношенням алгебри (5.1)-(5.3) з тензорами некомутативностей (5.4), (5.5). Отже, алгебра (5.1)-(5.3) не є інваріантною відносно інверсії часу. Проте, варто зауважити, що гамільтоніан H_0 не містить доданків, лінійних за параметрами некомутативності. Після усереднення за хвильовими функціями гармонічних осциляторів $\psi^a_{0,0,0}$, $\psi^b_{0,0,0}$ доданки у гамільтоніані системи H_s, які є першого порядку за θ_{ij}, η_{ij} зникають, оскільки виконується рівність:

$$\langle a_i \rangle_{ab} = \langle p_i^b \rangle_{ab} = 0. \tag{5.44}$$

Оператор H_0 залежить тільки від $\langle \theta^2 \rangle$, $\langle \eta^2 \rangle$. Отже, гамільтоніан H_0 є інваріантний відносно заміни θ_{ij} на $-\theta_{ij}$ та врахувавши (5.41) є інваріантний відносно інверсії часу. Зауважимо, що це твердження є справедливе для різних означень тензорів координатної та імпульсної некомутативності, для яких виконується рівність:

$$\langle \theta_i \rangle_{ab} = \langle \eta_i \rangle_{ab} = 0. \tag{5.45}$$

Також, звернімо увагу, що гамільтоніан H_0 залежить від середніх значень $\langle\theta^2\rangle$, $\langle\eta^2\rangle$ та не залежить явно від вигляду тензорів координатної та імпульсної некомутативностей θ_{ij}, η_{ij}, а також від вибору сферично-симетричних систем, яким відповідають додаткові координати та імпульси a_i, b_i p_i^a, p_i^b. Отже, у загальному випадку для різних тензорів некомутативностей (лише одна умова має задовольнятися (5.45)) ефективний гамільтоніан H_0 є інваріантний відносно інверсії часу.

5.3 Мінімальна довжина у некомутативному фазовому просторі зі сферичною симетрією

Розгляньмо оператор квадрату довжини у некомутативному фазовому просторі

$$\mathbf{Q}^2 = \alpha^2 \sum_i P_i^2 + \beta^2 \sum_i X_i^2, \tag{5.46}$$

де α, β – константи, координати та імпульси X_i, P_i задовольняють співвідношення (5.1)-(5.3).

Використавши представлення (5.10), (5.11), можемо переписати оператор квадрата довжини у такому вигляді:

$$\mathbf{Q}^2 = \alpha^2 p^2 + \beta^2 x^2 - \alpha^2(\boldsymbol{\eta}\cdot[\mathbf{x}\times\mathbf{p}]) - \beta^2(\boldsymbol{\theta}\cdot[\mathbf{x}\times\mathbf{p}]) + \\ +\alpha^2\frac{[\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{x}]^2}{4} + \beta^2\frac{[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2}{4}. \tag{5.47}$$

Знайдемо $\langle\mathbf{Q}^2\rangle_{ab}$. Врахувавши (5.32), (5.33) та

$$\langle\psi^a_{0,0,0}|a_i|\psi^a_{0,0,0}\rangle = 0, \tag{5.48}$$

$$\langle\psi^a_{0,0,0}|a_i a_j|\psi^a_{0,0,0}\rangle = \frac{\hbar}{2m_{osc}\omega_{osc}}\delta_{ij}, \tag{5.49}$$

$$\langle\theta_i\theta_j\rangle_{ab} = \frac{l_0^2}{2\hbar m_{osc}\omega_{osc}} = \frac{1}{3}\langle\theta^2\rangle, \tag{5.50}$$

$$\langle\theta^2\rangle = \langle\theta^2\rangle_{ab} = \frac{l_0^2}{2\hbar m_{osc}\omega_{osc}} = \frac{3l_0^2 l_P^2}{2\hbar^2}, \tag{5.51}$$

отримаємо:

$$\langle\mathbf{Q}^2\rangle_{ab} = \left(\alpha^2 + \beta^2\frac{\langle\theta^2\rangle}{6}\right)p^2 + \left(\beta^2 + \alpha^2\frac{\langle\eta^2\rangle}{6}\right)x^2. \tag{5.52}$$

Також можемо записати:

$$\Delta\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}^2 - \langle\mathbf{Q}^2\rangle_{ab} = -\alpha^2(\boldsymbol{\eta}\cdot[\mathbf{x}\times\mathbf{p}]) - \beta^2(\boldsymbol{\theta}\cdot[\mathbf{x}\times\mathbf{p}]) +$$
$$+\alpha^2\frac{[\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{x}]^2}{4} + \beta^2\frac{[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{x}]^2}{4} - \beta^2\frac{\langle\theta^2\rangle}{6}p^2 - \alpha^2\frac{\langle\eta^2\rangle}{6}x^2. \tag{5.53}$$

У виразі для $\Delta\mathbf{Q}^2$ маємо доданки першого та другого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативності. Отже, з точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей власні значення оператора квадрата довжини у некомутативному фазовому просторі відповідають власним значенням оператора (5.52) та мають такий вигляд:

$$q^2_{n_1,n_2,n_3} =$$
$$= \hbar\sqrt{\left(2\beta^2 + \frac{\alpha^2\langle\eta^2\rangle}{3}\right)\left(2\alpha^2 + \frac{\beta^2\langle\theta^2\rangle}{3}\right)}\left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right), \tag{5.54}$$

де n_1, n_2, n_3 – квантові числа, $n_1 = 0, 1, 2...$, $n_2 = 0, 1, 2...$, $n_3 = 0, 1, 2....$ На основі результату(5.54) знайдемо такий вираз для мінімальної довжини:

$$q_{min} = \sqrt{q^2_{0,0,0}} = \sqrt{\hbar}\sqrt[4]{2\beta^2 + \frac{\alpha^2\langle\eta^2\rangle}{3}}\sqrt[4]{2\alpha^2 + \frac{\beta^2\langle\theta^2\rangle}{3}}. \tag{5.55}$$

Отже, мінімальна довжина у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі визначається величинами $\langle\theta^2\rangle$, $\langle\eta^2\rangle$.

У випадку, коли $\alpha = 0$, $\beta = 1$, для оператора квадрату довжини, визначеного у координатному просторі,

$$\mathbf{R}^2 = \sum_i X_i^2, \tag{5.56}$$

маємо такі власні значення:

$$r^2_{n_1,n_2,n_3} = \sqrt{\frac{2\hbar^2\langle\theta^2\rangle}{3}}\left(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\right), \tag{5.57}$$

де $n_1 = 0,1,2...$, $n_2 = 0,1,2...$, $n_3 = 0,1,2....$ Отже, через некомутативність координат, власні значення оператора квадрату довжини у координатному просторі є дискретні. Із (5.57) випливає, що мінімальна довжина у координатному просторі визначається як

$$r_{min} = \sqrt{r^2_{0,0,0}} = \sqrt{\frac{3\hbar^2\langle\theta^2\rangle}{2}}. \tag{5.58}$$

Результат (5.54) може бути використаний також для аналізу мінімальної довжини у імпульсному просторі. У випадку, коли $\alpha = 1$, $\beta = 0$, використавши (5.54) (чи (5.38)), отримаємо такі власні значення для оператора $\mathbf{P}^2 = \sum_{i=1}^{3} P_i^2$

$$p^2_{n_1,n_2,n_3} = \sqrt{\frac{2\hbar^2\langle\eta^2\rangle}{3}}\left(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\right), \tag{5.59}$$

$n_1 = 0,1,2...$, $n_2 = 0,1,2...$, $n_3 = 0,1,2....$ Отже, мінімальна довжина у імпульсному просторі визначається величиною $\langle\eta^2\rangle$ та має вигляд:

$$p_{min} = \sqrt{p^2_{0,0,0}} = \sqrt[4]{\frac{3\hbar^2\langle\eta^2\rangle}{2}}. \tag{5.60}$$

5.4 Некомутативна алгебра для координат та імпульсів центра мас системи частинок

Дослідімо особливості алгебри для координат та імпульсів центра мас системи багатьох частинок у сферично-симетричному некомутативному квантованому просторі канонічного типу (5.1)-(5.3). Для початку узагальнимо співвідношення сферично-симетричної некомутативної алгебри (5.1)-(5.3) для координат та імпульсів частинок. Розглянь-мо загальний випадок, коли координати та імпульси різних частинок

задовольняють некомутативну алгебру з різними тензорами некомутативностей.

Ми припускаємо, що додаткові координати та додаткові імпульси a_i, p_i^a, b_i, p_i^b, які введені для побудови тензорів нкомутативностей, є однаковими для різних частинок, оскільки частинки знаходяться у одному некомутативному фазовому просторі. При цьому ми розглядаємо випадок, коли вплив квантованості простору на різні частинки є різний. А саме, тензори некомутативностей, які описують рух різних частинок, є різними та визначаються як:

$$\theta_{ij}^{(n)} = \frac{c_\theta^{(n)} l_P^2}{\hbar} \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k, \tag{5.61}$$

$$\eta_{ij}^{(n)} = \frac{c_\eta^{(n)} \hbar}{l_P^2} \varepsilon_{ijk} \tilde{p}_k^b, \tag{5.62}$$

де індекс n позначає частинки. У виразах (5.61), (5.62) для зручності введено безрозмірні координати та імпульси:

$$\tilde{a}_i = \frac{a_i}{l_P}, \tag{5.63}$$

$$\tilde{p}_i^b = \frac{l_P p_i^b}{\hbar}, \tag{5.64}$$

які відповідають гармонічним осциляторам:

$$H_{osc}^a = \hbar\omega_{osc} \left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2} \right), \quad H_{osc}^b = \hbar\omega_{osc} \left(\frac{(\tilde{p}^b)^2}{2} + \frac{\tilde{b}^2}{2} \right). \tag{5.65}$$

Константи $c_\theta^{(n)}$, $c_\eta^{(n)}$ – безрозмірні. Вони пов'язані з константами $l_0^{(n)}$, $p_0^{(n)}$ у (5.4), (5.5), які відповідють частинці з індексом n, як

$$c_\theta^{(n)} = \frac{l_0^{(n)}}{l_P}, \tag{5.66}$$

$$c_\eta^{(n)} = \frac{l_P p_0^{(n)}}{\hbar}. \tag{5.67}$$

Отже, координати та імпульси різних частинок $X_i^{(n)}$, $P_i^{(n)}$ задовольняють такі співвідношення:

$$[X_i^{(n)}, X_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{mn}\theta_{ij}^{(n)} = i\delta_{mn}\frac{c_\theta^{(n)} l_P^2}{\hbar}\varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k, \tag{5.68}$$

$$[X_i^{(n)}, P_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{mn}\left(\delta_{ij} + \frac{\theta_{ik}^{(n)}\eta_{jk}^{(m)}}{4}\right) =$$

$$= i\hbar\delta_{mn}\left(\delta_{ij} + \frac{c_\theta^{(n)} c_\eta^{(n)}}{4\hbar}(\tilde{\mathbf{a}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}^b)\delta_{ij} - \frac{c_\theta^{(n)} c_\eta^{(n)}}{4\hbar}\tilde{a}_j\tilde{p}_i^b\right), \tag{5.69}$$

$$[P_i^{(n)}, P_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{mn}\eta_{ij}^{(n)} = i\delta_{mn}\frac{c_\eta^{(n)}\hbar^2}{l_P^2}\varepsilon_{ijk}\tilde{p}_k^b, \tag{5.70}$$

де індекси n, m позначають частинки.

Координати та імпульси, для яких виконуються рівності (5.68)-(5.70), можуть бути представлені як

$$X_i^{(n)} = x_i^{(n)} - \frac{1}{2}\theta_{ij}^{(n)} p_j^{(n)}, \tag{5.71}$$

$$P_i^{(n)} = p_i^{(n)} + \frac{1}{2}\eta_{ij}^{(n)} x_j^{(n)}, \tag{5.72}$$

де оператори $x_i^{(n)}$, $p_i^{(n)}$ задовольняють звичні комутаційні співвідношення:

$$[x_i^{(n)}, x_j^{(m)}] = [p_i^{(n)}, p_j^{(m)}] = 0, \tag{5.73}$$

$$[x_i^{(n)}, p_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{ij}\delta_{nm}. \tag{5.74}$$

Звернімо увагу, що некомутативні координати (5.71) не залежать від маси, якщо тензор координатної некомутатиності $\theta_{ij}^{(n)}$, який відповідає частинці, є оберенено пропорціним до її маси m_n. А саме, коли для $c_\theta^{(n)}$ виконується умова

$$c_\theta^{(n)} m_n = \tilde{\gamma} = \text{const}, \tag{5.75}$$

де константа $\tilde{\gamma}$ є однаковою для різних частинок, можемо записати:

$$\theta_{ij}^{(n)} = \frac{\tilde{\gamma} l_P^2}{\hbar m_n} \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k, \tag{5.76}$$

та представлення для некомутативних координат має такий вигляд:

$$X_i^{(n)} = x_i^{(n)} - \frac{\tilde{\gamma} l_P^2}{2\hbar m_n} \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k p_j^{(n)}. \tag{5.77}$$

Некомутативні імпульси (5.72) пропорційні до маси, якщо тензор імпульсної некомутативності пропорційний до маси:

$$\frac{c_\eta^{(n)}}{m_n} = \tilde{\alpha} = \text{const}, \tag{5.78}$$

$$\eta_{ij}^{(n)} = \frac{\tilde{\alpha} \hbar m_n}{l_P^2} \varepsilon_{ijk} \tilde{p}_k^b, \tag{5.79}$$

тут $\tilde{\alpha}$ – константа, яка не залежить від маси. Маємо:

$$P_i^{(n)} = p_i^{(n)} + \frac{\tilde{\alpha} \hbar m_n}{2 l_P^2} \varepsilon_{ijk} \tilde{p}_k^b x_j^{(n)}. \tag{5.80}$$

Також, у випадку, коли виконуються рівності (5.75), (5.78), комутаційні співвідношення для координат та імпульсів центра мас, означених звично, мають такий вигляд:

$$[X_i^c, X_j^c] = \left[\sum_n \mu_n X_i^{(n)}, \sum_m \mu_m X_j^{(m)} \right] = i\hbar \theta_{ij}^c, \tag{5.81}$$

$$[P_i^c, P_j^c] = \left[\sum_n P_i^{(n)}, \sum_m P_i^{(m)} \right] = i\hbar \eta_{ij}^c, \tag{5.82}$$

$$[X_i^c, P_j^c] = \left[\sum_n \mu_n X_i^{(n)}, \sum_m P_i^{(m)} \right] = i\hbar \left(\delta_{ij} + \frac{\theta_{ik}^c \eta_{jk}^c}{4} \right), \tag{5.83}$$

де тензори некомутативностей θ_{ij}^c, η_{ij}^c визначаються як

$$\theta_{ij}^c = \sum_n \mu_n^2 \theta_{ij}^{(n)} = \frac{c_\theta^c l_P^2}{\hbar} \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k = \frac{\tilde{\gamma} l_P^2}{\hbar M} \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k, \tag{5.84}$$

$$\eta_{ij}^c = \sum_n \eta_{ij}^{(n)} = \frac{c_\eta^c \hbar}{l_P^2} \varepsilon_{ijk} \tilde{p}_k^b = \frac{\tilde{\alpha} \hbar M}{l_P^2} \varepsilon_{ijk} \tilde{p}_k^b, \tag{5.85}$$

$$c_\theta^c = \sum_n \mu_n^2 c_\theta^{(n)}, \tag{5.86}$$

$$c_\eta^c = \sum_n c_\eta^{(n)}, \tag{5.87}$$

тут M – маса системи, $\mu_n = m_n/M$.

Отже, координати та імпульси центра мас задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (5.1)-(5.3) з ефективними тензорами координатної та імпульсної некомутативності (5.84), (5.85), які залежать від повної маси системи та не залежать від мас частинок, які входять до її складу. Некомутативні координати X_i^c та некомутативні імпульси P_i^c можуть бути представлені як

$$X_i^c = \sum_n \mu_n \left(x_i^{(n)} - \frac{1}{2} \theta_{ij}^{(n)} p_j^{(n)} \right) = x_i^c - \frac{1}{2} \theta_{ij}^c p_j^c, \tag{5.88}$$

$$P_i^c = \sum_n \left(p_i^{(n)} + \frac{1}{2} \eta_{ij}^{(n)} x_j^{(n)} \right) = p_i^c + \frac{1}{2} \eta_{ij}^c x_j^c, \tag{5.89}$$

тут

$$x_i^c = \sum_n \mu_n x_i^{(n)}, \quad p_i^c = \sum_n p_i^{(n)}. \tag{5.90}$$

Координати та імпульси x_i^c, p_i^c задовольняють звичні комутаційні співвідношення:

$$[x_i^c, x_j^c] = [p_i^c, p_j^c] = 0, \tag{5.91}$$

$$[x_i^c, p_j^c] = i\hbar \delta_{ij}. \tag{5.92}$$

Також на основі означень $\Delta \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{X}^c$, $\Delta \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n)} - \mu_n \mathbf{P}^c$, врахувавши (5.77), (5.80), отримаємо таке представлення для координат

та імпульсів відносного руху

$$\Delta X_i^{(n)} = \Delta x_i^{(n)} - \frac{1}{2}\theta_{ij}^{(n)}\Delta p_j^{(n)}, \tag{5.93}$$

$$\Delta P_i^{(n)} = \Delta p_i^{(n)} + \frac{1}{2}\eta_{ij}^{(n)}\Delta x_j^{(n)}, \tag{5.94}$$

тут

$$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_i^c, \quad \Delta p_i^{(n)} = p_i^{(n)} - \mu_n p_i^c. \tag{5.95}$$

Координати та імпульси $\Delta x_i^{(n)}$, $\Delta p_i^{(n)}$ задовольняють такі рівності:

$$[\Delta x_i^{(n)}, \Delta x_j^{(m)}] = [\Delta p_i^{(n)}, \Delta p_j^{(m)}] = 0, \tag{5.96}$$

$$[\Delta x_i^{(n)}, \Delta p_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{ij}(\delta_{nm} - \mu_m). \tag{5.97}$$

У наступних підрозділах ці результати будуть використані для досліджень властивостей систем частинок у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі канонічного типу. На завершення підрозділу важливо зазначити, що рівності (5.75), (5.78) також дають можливість зберегти слабкий принцип еквівалентності у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі канонічного типу, що буде показано у підрозділі 5.8.

5.5 Система двох частинок з кулонівською взаємодією у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі

Розгляньмо систему двох частинок m_1, m_2 з кулонівською взаємодією у некомутативному фазовому просторі зі сферичною симетрією (5.68)-(5.70).

Запишемо повний гамільтоніан (5.14)

$$H = \frac{(\mathbf{P}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{P}^{(2)})^2}{2m_2} - \frac{\kappa}{|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|} + H^a_{osc} + H^b_{osc}, \tag{5.98}$$

де κ – константа. Розглянувши координати та імпульси центра мас (3.165), (3.135), координати та імпульси відносного руху (3.218), (3.219), означені традиційно, гамільтоніан системи (перші три доданки у (5.98)) може бути переписаний у такому вигляді:

$$H_s = \frac{(\mathbf{P}^c)^2}{2M} + \frac{(\mathbf{P}^r)^2}{2\mu} - \frac{\kappa}{|\mathbf{X}^r|}, \tag{5.99}$$

тут $M = m_1 + m_2$, $\mu = m_1 m_2 / m_1 + m_2$. У випадку, коли виконуються умови (5.75), (5.78), оператори X^c_i, P^c_i задовольняють співвідношення (5.81)-(5.83). Для операторів координат та імпульсів відносного руху X^r_i, P^r_i справедливими є такі рівності

$$[X^r_i, X^r_j] = i\hbar\theta^r_{ij}, \tag{5.100}$$

$$[P^r_i, P^r_j] = i\hbar\eta^r_{ij}, \tag{5.101}$$

$$[X^r_i, P^r_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \frac{1}{4}\theta^r_{ik}\eta^r_{jk}), \tag{5.102}$$

де θ^r_{ij}, η^r_{ij} – тензори координатної та імпульсної некомутативностей, які описують відносний рух та визначені як

$$\theta^r_{ij} = \theta^{(1)}_{ij} + \theta^{(2)}_{ij} = \frac{c^r_\theta l^2_P}{\hbar}\varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k = \frac{\tilde{\gamma} l^2_P}{\mu\hbar}\varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k, \tag{5.103}$$

$$\eta^r_{ij} = \mu^2_2\eta^{(1)}_{ij} + \mu^2_1\eta^{(2)}_{ij} = \frac{c^r_\eta\hbar}{l^2_P}\varepsilon_{ijk}\tilde{p}^b_k = \frac{\tilde{\alpha}\mu\hbar}{l^2_P}\varepsilon_{ijk}\tilde{p}^b_k, \tag{5.104}$$

$$c^r_\theta = c^{(1)}_\theta + c^{(2)}_\theta, \tag{5.105}$$

$$c^r_\eta = \mu^2_2 c^{(1)}_\eta + \mu^2_1 c^{(2)}_\eta. \tag{5.106}$$

Звернімо увагу, що умови (5.75), (5.78) можуть бути узагальнені також для констант c^c_θ, c^c_η, c^r_θ, c^r_η. Із (5.75), (5.78), (5.86), (5.87), (5.105),

(5.106) маємо:

$$c_\theta^c M = c_\theta^r \mu = c_\theta^{(1)} m_1 = c_\theta^{(2)} m_2 = \tilde{\gamma} = \text{const}, \tag{5.107}$$

$$\frac{c_\eta^c}{M} = \frac{c_\eta^r}{\mu} = \frac{c_\eta^{(1)}}{m_1} = \frac{c_\eta^{(2)}}{m_2} = \tilde{\alpha} = \text{const}. \tag{5.108}$$

Представлення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів (5.88), (5.89) зручно переписати як

$$X_i^c = x_i^c - \frac{1}{2}\theta_{ij} p_j^c = x_i^c + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}^c \times \mathbf{p}^c]_i, \tag{5.109}$$

$$P_i^c = p_i^c + \frac{1}{2}\eta_{ij}^c x_j^c = p_i^c - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\eta}^c \times \mathbf{x}^c]_i, \tag{5.110}$$

де компоненти векторів $\boldsymbol{\theta}^c$, $\boldsymbol{\eta}^c$ мають вигляд

$$\theta_i^c = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\theta_{jk}^c, \tag{5.111}$$

$$\eta_i^c = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\eta_{jk}^c. \tag{5.112}$$

Аналогічно для координат та імпульсів відносного руху маємо:

$$X_i^r = x_i^r - \frac{1}{2}\theta_{ij}^r p_j^r = x_i^r + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}^r \times \mathbf{p}^r]_i, \tag{5.113}$$

$$P_i^r = p_i^r + \frac{1}{2}\eta_{ij}^r x_j^r = p_i^r - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\eta}^r \times \mathbf{x}^r]_i, \tag{5.114}$$

де

$$\theta_i^r = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\theta_{jk}^r, \tag{5.115}$$

$$\eta_i^r = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\eta_{jk}^r. \tag{5.116}$$

Для координат x_i^r, x_i^c та імпульсів p_i^r, p_i^c виконуються співвідношення (5.91), (5.92), а також

$$[x_i^r, x_j^r] = [p_i^r, p_j^r] = 0, \tag{5.117}$$

$$[x_i^c, x_j^r] = [p_i^c, p_j^r] = [x_i^r, p_j^c] = [p_i^r, x_j^c] = 0, \tag{5.118}$$

$$[x_i^r, p_j^r] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{5.119}$$

Використавши представлення (5.109), (5.110), (5.113), (5.114), можемо переписати гамільтоніан системи (5.99) у такому вигляді:

$$H_s = \frac{(\mathbf{p}^c)^2}{2M} + \frac{(\mathbf{p}^r)^2}{2\mu} + \frac{(\boldsymbol{\eta}^c \cdot \mathbf{L}^\mathbf{c})}{2M} + \frac{[\boldsymbol{\eta}^c \times \mathbf{x}^\mathbf{c}]^\mathbf{2}}{8M} + \frac{(\boldsymbol{\eta}^r \cdot \mathbf{L}^\mathbf{r})}{2\mu} +$$

$$+\frac{[\boldsymbol{\eta}^r \times \mathbf{x}^\mathbf{r}]^\mathbf{2}}{8\mu} - \frac{\kappa}{\sqrt{(x^r)^2 - (\boldsymbol{\theta}^r \cdot \mathbf{L}^r) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta}^r \times \mathbf{p}^r]^2}}, \quad (5.120)$$

де

$$\mathbf{L}^c = [\mathbf{x}^\mathbf{c} \times \mathbf{p}^\mathbf{c}], \quad (5.121)$$

$$\mathbf{L}^r = [\mathbf{x}^r \times \mathbf{p}^r]. \quad (5.122)$$

Знайдемо поправки до енергетичних рівнів системи двох частинок з кулонівською взаємодією, зумовлені некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, з точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей. Для цього розкладемо H_s в ряд за малими параметрами некомутативностей

$$H_s = \frac{(\mathbf{p}^c)^2}{2M} + \frac{(\mathbf{p}^r)^2}{2\mu} - \frac{\kappa}{x^r} + \frac{(\boldsymbol{\eta}^c \cdot \mathbf{L}^c)}{2M} + \frac{[\boldsymbol{\eta}^c \times \mathbf{x}^c]^2}{8M} +$$

$$+\frac{(\boldsymbol{\eta}^r \cdot \mathbf{L}^r)}{2\mu} + \frac{[\boldsymbol{\eta}^r \times \mathbf{x}^r]^2}{8\mu} - \frac{\kappa}{2(x^r)^3}(\boldsymbol{\theta}^r \cdot \mathbf{L}^r) - \frac{3\kappa}{8(x^r)^5}(\boldsymbol{\theta}^r \cdot \mathbf{L}^r)^2 +$$

$$+\frac{\kappa}{16}\left(\frac{1}{(x^r)^2}[\boldsymbol{\theta}^r \times \mathbf{p}^r]^2\frac{1}{x^r} + \frac{1}{x^r}[\boldsymbol{\theta}^r \times \mathbf{p}^r]^2\frac{1}{(x^r)^2} + \frac{\hbar^2}{(x^r)^7}[\boldsymbol{\theta}^r \times \mathbf{x}^r]^2\right), \quad (5.123)$$

де ми використали позначення:

$$x^r = |\mathbf{x}^r| = \sqrt{\sum_i (x_i^r)^2}. \quad (5.124)$$

Усереднивши за хвильовими функціями гармонічних осциляторів

у основних станах $\psi^a_{0,0,0}$, $\psi^b_{0,0,0}$, отримаємо:

$$\langle H_s\rangle_{ab} = \frac{(\mathbf{p}^c)^2}{2M} + \frac{(x^c)^2\langle(\eta^c)^2\rangle}{12M} +$$

$$+\frac{(\mathbf{p}^r)^2}{2\mu} - \frac{\kappa}{x^r} + \frac{(x^r)^2\langle(\eta^r)^2\rangle}{12\mu} - \frac{\kappa(L^r)^2\langle(\theta^r)^2\rangle}{8(x^r)^5} +$$

$$+\frac{\kappa}{24}\left(\frac{1}{(x^r)^2}(p^r)^2\frac{1}{x^r} + \frac{1}{x^r}(p^r)^2\frac{1}{(x^r)^2} + \frac{\hbar^2}{(x^r)^5}\right)\langle(\theta^r)^2\rangle, \qquad (5.125)$$

де $\langle(\eta^c)^2\rangle$, $\langle(\eta^r)^2\rangle$, $\langle(\theta^r)^2\rangle$ визначаються як:

$$\langle(\eta^c)^2\rangle = 3\langle(\eta^c_i)^2\rangle = \frac{3(\hbar c^c_\eta)^2}{l_P^4}\langle\psi^b_{0,0,0}|(\tilde{p}^b_i)^2|\psi^b_{0,0,0}\rangle = \frac{3(\hbar c^c_\eta)^2}{2l_P^4}, \qquad (5.126)$$

$$\langle(\eta^r)^2\rangle = 3\langle(\eta^r_i)^2\rangle = \frac{3(\hbar c^r_\eta)^2}{l_P^4}\langle\psi^b_{0,0,0}|(\tilde{p}^b_i)^2|\psi^b_{0,0,0}\rangle = \frac{3(\hbar c^r_\eta)^2}{2l_P^4}, \qquad (5.127)$$

$$\langle(\theta^r)^2\rangle = 3\langle(\theta^r_i)^2\rangle = \frac{(c^r_\theta)^2 l_P^4}{\hbar^2}\langle\psi^a_{0,0,0}|(\tilde{a}_i)^2|\psi^a_{0,0,0}\rangle = \frac{3(c^r_\theta)^2 l_P^4}{2\hbar^2}. \qquad (5.128)$$

У підрозділі 5.2 було показано, що з точністю до другого порядку за ΔH у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі можемо розглядати гамільтоніан (5.16). Із виразів (5.123), (5.125) знайдемо, що ΔH містить доданки першого та другого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативностей та має такий вигляд:

$$\Delta H =$$

$$= \frac{(\boldsymbol{\eta}^r\cdot\mathbf{L}^r)}{2\mu} + \frac{[\boldsymbol{\eta}^r\times\mathbf{x}^r]^2}{8\mu} - \frac{\kappa}{2(x^r)^3}(\boldsymbol{\theta}^r\cdot\mathbf{L}^r) - \frac{3\kappa}{8(x^r)^5}(\boldsymbol{\theta}^r\cdot\mathbf{L}^r)^2 + \frac{\kappa}{16}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(x^r)^2}[\boldsymbol{\theta}^r\times\mathbf{p}^r]^2\frac{1}{x^r} + \frac{1}{x^r}[\boldsymbol{\theta}^r\times\mathbf{p}^r]^2\frac{1}{(x^r)^2} + \frac{\hbar^2}{(x^r)^7}[\boldsymbol{\theta}^r\times\mathbf{x}^r]^2\right) -$$

$$-\frac{(x^r)^2\langle(\eta^r)^2\rangle}{12\mu} + \frac{\kappa(L^r)^2\langle(\theta^r)^2\rangle}{8(x^r)^5} -$$

$$-\frac{\kappa}{24}\left(\frac{1}{(x^r)^2}(p^r)^2\frac{1}{x^r}+\frac{1}{x^r}(p^r)^2\frac{1}{(x^r)^2}+\frac{\hbar^2}{(x^r)^5}\right)\langle(\theta^r)^2\rangle. \tag{5.129}$$

Отже, з точністю до другого порядку за ΔH, а врахувавши вигляд ΔH, маємо, що з точністю до другого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативності можемо розглядати гамільтоніан

$$H_0 = \langle H_c\rangle_{ab} + \langle H_r\rangle_{ab} + H^a_{osc} + H^b_{osc}. \tag{5.130}$$

Оператори $\langle H_c\rangle_{ab}$, $\langle H_r\rangle_{ab}$ визначаються як

$$\langle H_c\rangle_{ab} = \frac{(\mathbf{p}^c)^2}{2M} + \frac{(x^c)^2\langle(\eta^c)^2\rangle}{12M}, \tag{5.131}$$

$$\langle H_r\rangle_{ab} = \frac{(\mathbf{p}^r)^2}{2\mu} - \frac{\kappa}{x^r} + \frac{(x^r)^2\langle(\eta^r)^2\rangle}{12\mu} - \frac{\kappa(L^r)^2\langle(\theta^r)^2\rangle}{8(x^r)^5} +$$

$$+\frac{\kappa}{24}\left(\frac{1}{(x^r)^2}(p^r)^2\frac{1}{x^r}+\frac{1}{x^r}(p^r)^2\frac{1}{(x^r)^2}+\frac{\hbar^2}{(x^r)^5}\right)\langle(\theta^r)^2\rangle, \tag{5.132}$$

та відповідають руху центру мас та відносному руху.

Варто відзначити, що

$$[\langle H_c\rangle_{ab}, \langle H_r\rangle_{ab}] = [\langle H_c\rangle_{ab}, H^a_{osc} + H^b_{osc}] = 0. \tag{5.133}$$

Отже, гамільтоніан $\langle H_c\rangle_{ab}$ може розглядатися незалежно від $\langle H_r\rangle_{ab}$. Оператор $\langle H_c\rangle_{ab}$ відповідає гамільтоніану гармонічного осцилятора з масою M та частотою

$$\omega = \frac{\sqrt{2}\langle(\eta^c)^2\rangle}{\sqrt{3}M}. \tag{5.134}$$

Отже, спектр гамільтоніана $\langle H_c\rangle_{ab}$ має вигляд:

$$E^c_{n^c_1,n^c_2,n^c_3} = \frac{\hbar\sqrt{2}\langle(\eta^c)^2\rangle}{\sqrt{3}M}\left(n^c_1+n^c_2+n^c_3+\frac{3}{2}\right), \tag{5.135}$$

де n_1^c, n_2^c, n_3^c – квантові числа, $n_1^c = 0, 1, 2...$, $n_2^c = 0, 1, 2...$, $n_3^c = 0, 1, 2....$

Гамільтоніан $\langle H_r \rangle_{ab}$ (5.132) може бути переписаний як

$$\langle H_r \rangle_{ab} = H_r^{(0)} + V, \tag{5.136}$$

$$H_r^{(0)} = \frac{(p^r)^2}{2\mu} - \frac{\kappa}{x^r}, \tag{5.137}$$

$$V = V^\eta + V^\theta, \tag{5.138}$$

$$V^\eta = \frac{(x^r)^2 \langle (\eta^r)^2 \rangle}{3\mu}, \tag{5.139}$$

$$V^\theta = \frac{\kappa}{x^r} - \left\langle \frac{\kappa}{X^r} \right\rangle_{ab}. \tag{5.140}$$

Оператор $H_r^{(0)}$ (5.137) відповідає гамільтоніану частинки з масою μ у кулонівському потенціалі у звичному просторі ($\theta_{ij} = 0$, $\eta_{ij} = 0$). Його власні функції та власні значення є відомі. Знайдемо поправки до енергетичних рівнів гамільтоніану $H_r^{(0)}$, зумовлені некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Відповідно до теорії збурень у першому порядку за V маємо:

$$\Delta E_{n,l}^{(\theta\eta)} = \langle \psi_{n,l,m}^{(0)} | V | \psi_{n,l,m}^{(0)} \rangle = \Delta E_{n,l}^{(\eta)} + \Delta E_{n,l}^{(\theta)}. \tag{5.141}$$

Обчислимо поправки, зумовлені некомутативністю імпульсів. Знайдемо:

$$\Delta E_{n,l}^{(\eta)} = \langle \psi_{n,l,m}^{(0)} | V^\eta | \psi_{n,l,m}^{(0)} \rangle =$$

$$= \frac{\kappa a^3 n^2 \langle (\eta^r)^2 \rangle}{24\hbar^2} (5n^2 + 1 - 3l(l+1)). \tag{5.142}$$

Поправки, до енергетичних рівнів системи двох частинок з кулонівською взаємодією, зумовлені некомутативністю координат, були отримані в роботі [234]

$$\Delta E_{n,l}^{(\theta)} = \langle \psi_{n,l,m}^{(0)} | V^\theta | \psi_{n,l,m}^{(0)} \rangle = -\frac{\hbar^2 \kappa \langle (\theta^r)^2 \rangle}{a^5 n^5} \times$$

$$\times\left(-\frac{12n^2+3}{6l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(5n^2-3l(l+1)+1)(3l(l+1)-5)}{6l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}\right), \tag{5.143}$$

$$\Delta E^{(\theta)}_{n,0}=1.72\frac{\hbar\langle\theta^r\rangle\pi\kappa}{8a^3n^3}, \tag{5.144}$$

де

$$\langle\theta^r\rangle=\langle\psi^a_{0,0,0}|\sqrt{\sum_i(\theta^r_i)^2}|\psi^a_{0,0,0}\rangle=\frac{2l_P^2c^r_\theta}{\sqrt{\pi}\hbar}, \tag{5.145}$$

$$a=\frac{\hbar^2}{\mu\kappa}. \tag{5.146}$$

Отже, на основі результатів (5.142) та (5.144), можемо записати поправки до енергетичних рівнів з квантовим числом $l=0$:

$$\Delta E^{(\theta\eta)}_{n,0}=\frac{a^3\kappa\langle(\eta^r)^2\rangle}{24\hbar^2}n^2(5n^2+1)+1.72\frac{\hbar\langle\theta^r\rangle\pi\kappa}{8a^3n^3}. \tag{5.147}$$

Проаналізуймо особливості впливу некомутативності координат та некомутативності імпульсів на енергетичні рівні двочастинкової системи з кулоніською взаємодією. Звернімо увагу, що відповідно до (5.147) вплив некомутативності імпульсів є більшим на енергетичні рівні з великими квантовими числами (поправки $\Delta E^{(\theta\eta)}_{n,l}$ пропорційні до n^4). Енергетичні рівні з малими квантовими числами є більш чутливими до впливу некомутативності координат (поправки до енергетичних рівнів з $l=0$ (5.144) пропорційні до $1/n^3$, поправки до енергетичних рівнів з $l>1$ (5.143) пропорційні до $1/n^5$). Зауважимо, що на відміну від поправок до енергетичних рівнів з $l>1$, які пропорційні до $\langle(\theta^r)^2\rangle$, поправки до ns енергетичних рівнів залежать від $\langle\theta^r\rangle$. Отже, вплив некомутативності координат є більший на енергетичні рівні з $l=0$ у порівнянні з енергетичними рівнями з $l>1$.

5.6 Оцінка мінімальної довжини на основі досліджень спектрів атома водню та екзотичних атомів

Проаналізуймо вплив некомутативності на енергетичні рівні атома водню та екзотичних атомів. Звернімо увагу, що поправки до енергетичних рівнів (5.142), зумовлені імпульсною некомутативністю, є пропорційні до $\langle(\eta^r)^2\rangle a^3$. Врахувавши (5.104), маємо:

$$\langle(\eta^r)^2\rangle a^3 \sim \frac{1}{\mu}. \tag{5.148}$$

Поправки до енергетичних рівнів, зумовлені некомутативністю координат, пропорційні до $\langle\theta^r\rangle/a^3$ ($l = 0$, (5.144)) чи $\langle(\theta^r)^2\rangle/a^5$ ($l > 1$, (5.143)). Відповідно до (5.103) маємо:

$$\frac{\langle\theta^r\rangle}{a^3} \sim \mu^2, \tag{5.149}$$

$$\frac{\langle(\theta^r)^2\rangle}{a^5} \sim \mu^3. \tag{5.150}$$

Отже, можемо зробити висновок, що некомутативність координат має більший вплив на спектри атомів з великою зведеною масою, а саме на ns енергетичні рівні з малими квантовими числами n. Вплив імпульсної некомутативності краще проявляється у випадку енергетичних рівнів з великими квантовими числами для атомів з малими зведеними масами. Відмінність у впливах некомутативності координат та некомутативності імпульсів на енергетичні рівні краще проявляється для атомів з великими зведеними масами.

Для прикладу, розгляньмо мюонний атом водню, який складається з протона та мюона. Врахувавши співвідношення:

$$\frac{\mu_{\mu p}}{\mu_H} \simeq \frac{m_\mu}{m_e} = 206.8, \tag{5.151}$$

де m_e, m_μ – маси електрона та мюона, $\mu_{\mu p}$ – зведена маса мюонного атома водню, μ_H – зведена маса атома водню, отримаємо, що поправки до енергетичних рівнів з $l > 1$ (5.143), зумовлені некомутативністю координат, є у $(m_\mu/m_e)^3 = 8.8 \cdot 10^6$ разів більші ніж у випадку атома водню. Поправки до енергетичних рівнів мюонного атома водню, зумовлені імпульсною некомутативністю (5.142), є у 206.8 разів менші ніж ці поправки для атома водню. Отже, відмінність впливу координатної та імпульсної некомутативностей на енергетичні рівні може краще спостерігатися на основі досліджень енергетичних рівнів мюонного атома водню.

Розгляньмо інший екзотичний атом. Дослідімо вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на енергетичні рівні антипротонного гелію $\bar{p}^4He^+$. Цей атом складається з антипротона, електрона та ядра атома гелію. Як було відзначено у роботах [235,236], частоти переходів між рівнями антипротонного атома гелію $\bar{p}^4He^+$ можуть бути записані, як частоти переходів між енергетичними рівнями атома водню з ефективним зарядом ядра $Z_{eff} < 2$. Величина Z_{eff} описує екранування заряду ядра електроном. Отже, для оцінки порядків величин параметрів некумутативностей на основі експериментальних результатів для частот переходу між енергетичними рівнями атома $\bar{p}^4He^+$ можемо використати отримані результати (5.142), (5.143). Звернімо увагу, що у порівнянні з атомом водню антипротонний атом гелію $\bar{p}^4He^+$ має велику зведену масу. Врахувавши залежність поправок до енергетичних рівнів, зумовлених некомутативністю, від зведеної маси, можемо зробити висновок, що вплив координатної некомутативності на спектр антипротонного атома гелію проявляється краще ніж у випадку атома водню. Отже, дослідження антипротонного гелію відкривають можливості для покращення оцінки величини параметра коор-

динатної некомутативності.

Частота переходу $(n,l) = (36,34) \to (34,32)$ для антипротонного атома гелію $\bar{p}^4He^+$ $f = 1522107062$МГц виміряна з точністю 3.5МГц [237]. На основі припущення, що поправки до енергетичних рівнів, зумовлені некомутативністю, є менші ніж точність вимірювань, можемо записати:

$$|\Delta^{(\theta)} + \Delta^{(\eta)}| \leq 3.5\,\text{МГц}, \tag{5.152}$$

де використано позначення Δ^θ, Δ^η для таких величин

$$\Delta^\theta = \Delta E^{(\theta)}_{36,34} - \Delta E^{(\theta)}_{34,32}, \tag{5.153}$$

$$\Delta^\eta = \Delta E^{(\eta)}_{36,34} - \Delta E^{(\eta)}_{34,32}, \tag{5.154}$$

тут $\Delta E^{(\theta)}_{n,l}$, $\Delta E^{(\eta)}_{n,l}$ визначаються як (5.143), (5.142). Щоб знайти верхню межу для параметрів координатної та імпульсної некомутативностей, розгляньмо такі нерівності

$$|\Delta^\theta| \leq 1.75\,\text{МГц}, \quad |\Delta^\eta| \leq 1.75\,\text{МГц}. \tag{5.155}$$

Для оцінок величин параметрів некомутативностей у виразах (5.142), (5.143) покладемо

$$Z = Z_{eff} = 2, \quad a = \frac{m_e a_B}{m_{\bar{p}}}, \tag{5.156}$$

де $m_{\bar{p}}$ – маса антипротона, a_B – радіус Бора для атома водню. Із (5.155) отримаємо:

$$\hbar\sqrt{\langle(\theta^r)^2\rangle} \leq 10^{-27}\,\text{м}^2, \tag{5.157}$$

$$\hbar\sqrt{\langle(\eta^r)^2\rangle} \leq 10^{-50}\,\text{кг}^2\text{м}^2/\text{с}^2. \tag{5.158}$$

Зазначимо, що знайдені нерівності не накладають строгі обмеження на величини параметрів некомутативності. Причина таких результатів – мала точність вимірювань спектру атома $\bar{\text{p}}^4\text{He}^+$. Більш строгі

обмеження

$$\hbar\langle\theta^r\rangle \leq 10^{-36}\,\text{м}^2, \tag{5.159}$$

$$\hbar\sqrt{\langle(\eta^r)^2\rangle} \leq 6.4\cdot 10^{-56}\,\text{кг}^2\text{м}^2/\text{с}^2. \tag{5.160}$$

отримаємо на основі досліджень впливу квантованості простору на енергетичні рівні $1s$, $2s$ атома водню та експериментальних даних для частоти переходу $f_{1s-2s} = 2466061413187018(11)$Гц відносна точність вимірювання якої 4.5×10^{-15} [219]. Також варто відзначити, що у роботі [179] на основі вивчень впливу некомутативності імпульсів на енергетичні рівні нейтронів у гравітаційній квантовій ямі у некомутативному просторі канонічного типу отримано $\hbar\eta \leq 5.22\cdot 10^{-67}\text{кг}^2\text{м}^2/\text{с}^2$. У статті [99] на основі досліджень енергетичних рівнів атома водню у некомутативному фазовому просторі канонічного типу знайдено $\hbar\eta \leq 1.45\cdot 10^{-66}\text{кг}^2\text{м}^2/\text{с}^2$.

На завершення підрозділу наголосимо на тому, що вплив некомутативності координат на енергетичні рівні антипротонного атома гелію більший ніж на енергетичні рівні атома водню, оскільки зведена маса $\bar{\text{p}}^4\text{He}^+$ є на 3 порядки більша від зведеної маси атома водню. Отже, збільшення точності вимірювань спектру $\bar{\text{p}}^4\text{He}^+$ дозволить покращити оцінки для величин параметрів координатної некомутативності.

5.7 Вплив квантованості простору на енергетичні рівні систем гармонічних осциляторів

5.7.1 Симетрична мережа гармонічних осциляторів у однорідному полі

Дослідімо вплив квантованості простору на енергетичні рівні системи N взаємодіючих осциляторів в однорідному полі у сферично-симетрич-

ному некомутативному фазовому просторі (5.68)-(5.70). Гамільтоніан системи має такий вигляд

$$H_s = \sum_n \frac{(\mathbf{P}^{(n)})^2}{2m} + \sum_n \frac{m\omega^2(\mathbf{X}^{(n)})^2}{2} +$$

$$+\frac{k}{2}\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}(\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{X}^{(m)})^2 + \kappa\sum_n X_1^{(n)}, \tag{5.161}$$

тут m, ω – маси та частоти осциляторів, κ, k – константи. Відповідно до (5.161) кожен осцилятор взаємодіє зі всіма іншими осциляторами системи. Отже, маємо симетричну мережу взаємодіючих осциляторів у однорідному полі [224].

Врахувавши те, що маси осциляторів m є однаковими, а також (5.76), (5.79), запишемо:

$$\theta_{ij}^{(n)} = \theta_{ij} = \frac{c_\theta l_P^2}{\hbar}\sum_k \varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k, \tag{5.162}$$

$$\eta_{ij}^{(n)} = \eta_{ij} = \frac{c_\eta \hbar}{l_P^2}\sum_k \varepsilon_{ijk}\tilde{p}_k^b, \tag{5.163}$$

тут

$$c_\theta = \frac{\tilde{\gamma}}{m}, \tag{5.164}$$

$$c_\eta = \tilde{\alpha} m. \tag{5.165}$$

Перейшовши до представлення (5.71), (5.72), можемо записати гамільтоніан системи у такому вигляді:

$$H_s = \sum_n \left(\frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m} + \frac{m\omega^2(\mathbf{x}^{(n)})^2}{2} + \kappa x_1^{(n)}\right) +$$

$$+\frac{k}{2}\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(m)})^2 + \sum_n \left(-\frac{(\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{L}^{(n)})}{2m} - \frac{m\omega^2(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}^{(n)})}{2} +\right.$$

$$+\frac{\kappa}{2}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}^{(n)}]_1+\frac{m\omega^2}{8}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}^{(n)}]^2+\frac{[\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{x}^{(n)}]^2}{8m}\Bigg)-$$

$$-\frac{k}{2}\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}\boldsymbol{\theta}\cdot[(\mathbf{x}^{(n)}-\mathbf{x}^{(m)})\times(\mathbf{p}^{(n)}-\mathbf{p}^{(m)})]+\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}\frac{k}{8}[\boldsymbol{\theta}\times(\mathbf{p}^{(n)}-\mathbf{p}^{(m)})]^2, \tag{5.166}$$

тут

$$\mathbf{L}^{(n)}=[\mathbf{x}^{(n)}\times\mathbf{p}^{(n)}], \tag{5.167}$$

$$\theta_i=\theta_i^{(n)}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\theta_{jk}^{(n)}, \tag{5.168}$$

$$\eta_i=\eta_i^{(n)}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\eta_{jk}^{(n)}. \tag{5.169}$$

Обчисливши середні

$$\langle[\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{x}^{(n)}]^2\rangle_{ab}=\frac{2}{3}\langle\eta^2\rangle(\mathbf{x}^{(n)})^2, \tag{5.170}$$

$$\langle[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}^{(n)}]^2\rangle_{ab}=\frac{2}{3}\langle\theta^2\rangle(\mathbf{p}^{(n)})^2, \tag{5.171}$$

$$\langle[\boldsymbol{\theta}\times(\mathbf{p}^{(n)}-\mathbf{p}^{(m)})]^2\rangle_{ab}=\frac{2}{3}\langle\theta^2\rangle(\mathbf{p}^{(n)}-\mathbf{p}^{(m)})^2, \tag{5.172}$$

для системи осциляторів з гамільтоніаном (5.161) отримаємо такий вираз для ΔH, визначеного як (5.17)

$$\Delta H=\sum_n\Bigg(-\frac{(\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{L}^{(n)})}{2m}-\frac{m\omega^2(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}^{(n)})}{2}+\frac{\kappa}{2}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}^{(n)}]_1+$$

$$+\frac{m\omega^2}{8}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}^{(n)}]^2+\frac{[\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{x}^{(n)}]^2}{8m}\Bigg)-$$

$$\frac{k}{2}\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}\boldsymbol{\theta}\cdot[(\mathbf{x}^{(n)}-\mathbf{x}^{(m)})\times(\mathbf{p}^{(n)}-\mathbf{p}^{(m)})]+$$

$$+\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}\frac{k}{8}[\boldsymbol{\theta}\times(\mathbf{p}^{(n)}-\mathbf{p}^{(m)})]^2-\sum_n\left(\frac{\langle\eta^2\rangle(\mathbf{x}^{(n)})^2}{12m}+\right.$$

$$\left.+\frac{\langle\theta^2\rangle m\omega^2(\mathbf{p}^{(n)})^2}{12}\right)-\frac{k}{12}\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}\langle\theta^2\rangle(\mathbf{p}^{(n)}-\mathbf{p}^{(m)})^2. \qquad (5.173)$$

Отже, на основі результату, представленого у підрозділі 5.2, з точністю до другого порядку за ΔH, чи альтернативно, врахувавши вираз (5.173), з точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей, можемо розглядати оператор Гамільтона (5.16), який має такий вигляд:

$$H_0=\sum_n\left(\frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m}+\frac{m\omega^2(\mathbf{x}^{(n)})^2}{2}+\kappa x_1^{(n)}\right)+\frac{k}{2}\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}(\mathbf{x}^{(n)}-$$

$$-\mathbf{x}^{(m)})^2+\sum_n\left(\frac{\langle\eta^2\rangle(\mathbf{x}^{(n)})^2}{12m}+\frac{\langle\theta^2\rangle m\omega^2(\mathbf{p}^{(n)})^2}{12}\right)+$$

$$+\frac{k}{12}\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}\langle\theta^2\rangle(\mathbf{p}^{(n)}-\mathbf{p}^{(m)})^2+H^a_{osc}+H^b_{osc}. \qquad (5.174)$$

Знайдемо вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на енергетичні рівні системи N взаємодіючих гармонічних осциляторів з точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей. Введемо такі позначення:

$$m_{eff}=m\left(1+\frac{m^2\omega^2\langle\theta^2\rangle}{6}\right)^{-1}, \qquad (5.175)$$

$$\omega_{eff}=\left(\omega^2+\frac{\langle\eta^2\rangle}{6m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{m^2\omega^2\langle\theta^2\rangle}{6}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.176)$$

та запишемо гамільтоніан (5.174) як

$$H_0 = \sum_n \left(\frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m_{eff}} + \frac{m_{eff}\omega_{eff}^2(\tilde{\mathbf{x}}^{(n)})^2}{2} \right) - \frac{N\kappa^2}{2m_{eff}\omega_{eff}^2} +$$

$$+\frac{k}{2}\sum_{\substack{m,n \\ m\neq n}}(\tilde{\mathbf{x}}^{(n)} - \tilde{\mathbf{x}}^{(m)})^2 + \frac{k}{12}\sum_{\substack{m,n \\ m\neq n}}\langle\theta^2\rangle(\mathbf{p}^{(n)} - \mathbf{p}^{(m)})^2 + H_{osc}^a + H_{osc}^b, \tag{5.177}$$

тут

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n)} = \left(x_1^{(n)} + \frac{\kappa}{m_{eff}\omega_{eff}^2}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)} \right). \tag{5.178}$$

Нагадаємо, що координати $\tilde{\mathbf{x}}^{(n)}$ та імпульси $\mathbf{p}^{(n)}$ задовольняють звичні комутаційні співвідношення. Також звернімо увагу, що виконується така рівність:

$$[H_0, H_{osc}^a] = [H_0, H_{osc}^b] = 0. \tag{5.179}$$

Тому енергетичні рівні системи з гамільтоніаном H_0 мають вигляд:

$$E_{\{n_1\},\{n_2\},\{n_3\}} = \sum_{a=1}^{N} \hbar\omega_a \left(n_1^{(a)} + n_2^{(a)} + n_3^{(a)} + \frac{3}{2} \right) -$$

$$-\frac{N\kappa^2}{2m_{eff}\omega_{eff}^2} + 3\hbar\omega_{osc}, \tag{5.180}$$

де частоти визначаються як:

$$\omega_1 = \omega_{eff}, \tag{5.181}$$

$$\omega_2 = \omega_3 = ... = \omega_N =$$

$$= \left(\omega_{eff}^2 + \frac{2kN}{m_{eff}} + \frac{kN\langle\theta^2\rangle m_{eff}\omega_{eff}^2}{3} + \frac{2k^2\langle\theta^2\rangle N^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.182}$$

$n_i^{(a)}$ – квантові числа ($n_i^{(a)} = 0, 1, 2...$). У (5.180) ми взяли до уваги те, що осцилятори H_{osc}^a, H_{osc}^b знаходяться в основних станах.

Зауважимо, що перший доданок у (5.180) відповідає спектру центра мас системи. Спектру відносного руху відповідають доданки з $a = 2..N$. Щоб це показати, означимо координати та імпульси центра мас $\mathbf{x}^c = \sum_n \mathbf{x}^{(n)}/N$, $\mathbf{p}^c = \sum_n \mathbf{p}^{(n)}$, координати та імпульси відносного руху $\Delta\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^c$, $\Delta\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(n)} - \mathbf{p}^c/N$. Гамільтоніан (5.177) можемо переписати у такому вигляді:

$$H_0 = H^c + H_{rel} + H_{osc}^a + H_{osc}^b, \tag{5.183}$$

$$H^c = \frac{(\mathbf{p}^c)^2}{2Nm_{eff}} + \frac{Nm_{eff}\omega_{eff}^2(\tilde{\mathbf{x}}^c)^2}{2} - \frac{N\kappa^2}{2m_{eff}\omega_{eff}^2}, \tag{5.184}$$

$$H_{rel} = \sum_n \left(\frac{(\Delta\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m_{eff}} + \frac{m_{eff}\omega_{eff}^2(\Delta\mathbf{x}^{(n)})^2}{2} \right) +$$

$$+\frac{k}{2}\sum_{\substack{m,n \\ m\neq n}}(\Delta\mathbf{x}^{(n)} - \Delta\mathbf{x}^{(m)})^2 + \frac{k}{12}\sum_{\substack{m,n \\ m\neq n}}\langle\theta^2\rangle(\Delta\mathbf{p}^{(n)} - \Delta\mathbf{p}^{(m)})^2, \tag{5.185}$$

$$[H^c, H_{rel}] = [H^c, H_{osc}^a + H_{osc}^b] = [H_{rel}, H_{osc}^a + H_{osc}^b] = 0, \tag{5.186}$$

тут

$$\tilde{\mathbf{x}}^c = \left(x_1^c + \frac{\kappa}{m_{eff}\omega_{eff}^2}, x_2^c, x_3^c \right). \tag{5.187}$$

На основі виразу (5.180) можемо зробити висновок, що некомутативність координат та некомутативність імпульсів впливають на частоти у спектрі симетричної мережі осциляторів. Однорідне поле зумовлює зміщення енергетичних рівнів системи на константу. Звернімо увагу, що у границі $\langle\theta^2\rangle \to 0$, $\langle\eta^2\rangle \to 0$ (простір зі звичними комутаційними співвідношеннями для операторів координат та операторів

імпульсів), із виразу $E_{\{n_1\},\{n_2\},\{n_3\}}$ отримаємо відомий результат для спектру N взаємодіючих осциляторів в однорідному полі

$$E_{\{n_1\},\{n_2\},\{n_3\}} = \hbar\omega\left(n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + n_3^{(1)} + \frac{3}{2}\right) +$$

$$+\sum_{a=2}^{N}\hbar\left(\omega^2 + \frac{2Nk}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(n_1^{(a)} + n_2^{(a)} + n_3^{(a)} + \frac{3}{2}\right) - \frac{N\kappa^2}{2m\omega^2}. \quad (5.188)$$

Поклавши $\omega = 0$ у (5.180), знайдемо енергетичні рівні системи N частинок з осциляторною взаємодією

$$E_{\{n_1\},\{n_2\},\{n_3\}} = \frac{\hbar\langle\eta^2\rangle}{6m^2}\left(n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + n_3^{(1)} + \frac{3}{2}\right) +$$

$$+\hbar\left(\frac{2kN}{m} + \frac{\langle\eta^2\rangle}{6m^2} + \frac{2k^2\langle\theta^2\rangle N^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{a=2}^{N}\left(n_1^{(a)} + n_2^{(a)} + n_3^{(a)} + \frac{3}{2}\right) -$$

$$-\frac{3N\kappa^2 m}{\langle\eta^2\rangle} + 3\hbar\omega_{osc}, \quad (5.189)$$

m – маса частинок. У (5.189) перший доданок описує спектр центра мас системи частинок. Звернімо увагу, що на відміну від спектру центра мас системи частинок з осциляторною взаємодією у звичному просторі, у сферично-симетричному квантованому просторі спектр центра мас системи не є неперервний. Він відповідає спектру гармонічного осцилятора з частотою $\hbar\langle\eta^2\rangle/6m^2$ у звичному просторі. Аналізуючи другий доданок у (5.189), маємо, що частоти у спектрі відносного руху залежать від параметрів кооординатної та імпульсної некомутативностей. Отже, квантованість простору впливає на частоти у спектрі відносного руху. Цікаво зауважити, що відповідно до виразів (5.180) та (5.189), вплив некомутативності координат на енергетичні рівні системи взаємодіючих осциляторів та на енергетичні рівні системи частинок з осци-

ляторною взаємодією зростає зі збільшенням кількості частинок, які формують систему.

Поклавши $k = 0$, із (5.189) знайдемо енергетичні рівні системи N вільних частинок у однорідному полі у квантованому фазовому просторі зі сферичною симетрією

$$E_{\{n_1\},\{n_2\},\{n_3\}} = \sum_{a=1}^{N} \frac{\hbar\langle\eta^2\rangle}{6m^2}\left(n_1^{(a)} + n_2^{(a)} + n_3^{(a)} + \frac{3}{2}\right) - \\ -\frac{3N\kappa^2 m}{\langle\eta^2\rangle} + 3\hbar\omega_{osc}. \qquad (5.190)$$

Звернімо увагу, що отриманий вираз відповідає спектру системи N осциляторів з частотами, які визначаються параметрами імпульсної некомутативності та масами частинок системи $\hbar\langle\eta^2\rangle/6m^2$. Некомутативність координат не впливає на енергетичні рівні системи вільних частинок.

У наступних підрозділах будуть досліджені випадки, коли система складається з двох та трьох взаємодіючих осциляторів.

Система двох осциляторів з осциляторною взаємодією

Дослідімо детально випадок, коли система складається з двох осциляторів з масами m_1, m_2 та частотами ω_1, ω_2, які взаємодіють між собою. Запишемо гамільтоніан системи:

$$H_s = \frac{(\mathbf{P}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{P}^{(2)})^2}{2m_2} + \frac{m_1\omega_1^2(\mathbf{X}^{(1)})^2}{2} + \frac{m_2\omega_2^2(\mathbf{X}^{(2)})^2}{2} + \\ +k(\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)})^2, \qquad (5.191)$$

тут координати та імпульси $\mathbf{X}^{(n)}$, $\mathbf{P}^{(n)}$ задовольняють співвідношення (5.68)-(5.70), $(n = 1, 2)$. Система двох взаємодіючих осциляторів часто розглядається в різних розділах фізики, це, зокрема, молекулярна

фізика [229, 230], двофотонна квантова оптика [238, 239] (див. також роботи [220, 240] та посилання у них).

Перейшовши до координат та імпульсів, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення (5.10), (5.11), та порахувавши середнє від гамільтоніану (5.191) за хвильовими функціями основних станів гармонічних осциляторів H^a_{osc}, H^b_{osc}, запишемо гамільтоніан H_0 (5.16)

$$H_0 = \frac{(\mathbf{p}^{(1)})^2}{2m^{(1)}_{eff}} + \frac{(\mathbf{p}^{(2)})^2}{2m^{(2)}_{eff}} + \frac{m^{(1)}_{eff}(\omega^{(1)}_{eff})^2(\mathbf{x}^{(1)})^2}{2} +$$

$$+\frac{m^{(2)}_{eff}(\omega^{(2)}_{eff})^2(\mathbf{x}^{(2)})^2}{2} + k(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)})^2 + \frac{k}{6}\Big(\langle(\theta^{(1)})^2\rangle(\mathbf{p}^{(1)})^2 +$$

$$\langle(\theta^{(2)})^2\rangle(\mathbf{p}^{(2)})^2 - 2\langle\theta^{(1)}\theta^{(2)}\rangle(\mathbf{p}^{(1)}\cdot\mathbf{p}^{(2)})\Big) + H^a_{osc} + H^b_{osc}, \quad (5.192)$$

де введено такі позначення:

$$m^{(n)}_{eff} = m_n\left(1 + \frac{m_n^2\omega_n^2\langle(\theta^{(n)})^2\rangle}{6}\right)^{-1}, \quad (5.193)$$

$$\omega^{(n)}_{eff} = \left(\omega_n^2 + \frac{\langle(\eta^n)^2\rangle}{6m_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{m_n^2\omega_n^2\langle(\theta^{(n)})^2\rangle}{6}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.194)$$

$$\langle\theta^{(n)}\theta^{(m)}\rangle = \frac{c^{(n)}_\theta c^{(m)}_\theta l_P^4}{\hbar^2}\langle\psi^a_{0,0,0}|\tilde{a}^2|\psi^a_{0,0,0}\rangle = \frac{3c^{(n)}_\theta c^{(m)}_\theta l_P^4}{2\hbar^2}, \quad (5.195)$$

$$\langle(\eta^{(n)})^2\rangle = \frac{\hbar^2(c^{(n)}_\eta)^2}{l_P^4}\langle\psi^b_{0,0,0}|(\tilde{p}^b)^2|\psi^b_{0,0,0}\rangle = \frac{3\hbar^2(c^{(n)}_\eta)^2}{2l_P^4}. \quad (5.196)$$

Нагадаємо, що для координат $x^{(n)}_i$ та імпульсів $p^{(n)}_i$ виконуються звичні комутаційні співвідношення. Отже, для H_0 можемо записати енергетичні рівні:

$$E_{\{n_1\},\{n_2\},\{n_3\}} = \hbar\omega_+\left(n^{(1)}_1 + n^{(1)}_2 + n^{(1)}_3 + \frac{3}{2}\right) +$$

$$+\hbar\omega_-\left(n^{(2)}_1 + n^{(2)}_2 + n^{(2)}_3 + \frac{3}{2}\right) + 3\hbar\omega_{osc}. \quad (5.197)$$

Тут для зручності використано такі позначення:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\sum_n \left((\omega_{eff}^{(n)})^2 + \frac{2k}{m_{eff}^{(n)}} + \frac{k m_{eff}^{(n)} (\omega_{eff}^{(n)})^2 \langle (\theta^{(n)})^2 \rangle}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{2k^2}{3} \left(\langle (\theta^{(n)})^2 \rangle + \langle \theta^{(1)} \theta^{(2)} \rangle \right) \right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{D}, \qquad (5.198)$$

$$D = \left(\sum_n (\omega_{eff}^{(n)})^2 + \sum_n \frac{2k}{m_{eff}^{(n)}} + \sum_n \frac{k m_{eff}^{(n)} (\omega_{eff}^{(n)})^2 \langle (\theta^{(n)})^2 \rangle}{3} + \right.$$

$$\left. + \sum_n \frac{2k^2}{3} \left(\langle (\theta^{(n)})^2 \rangle + \langle \theta^{(1)} \theta^{(2)} \rangle \right) \right)^2 - 4 \prod_n \left((\omega_{eff}^{(n)})^2 + \frac{2k}{m_{eff}^{(n)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{k m_{eff}^{(n)} (\omega_{eff}^{(n)})^2 \langle (\theta^{(n)})^2 \rangle}{3} + \frac{2k^2}{3} \left(\langle (\theta^{(n)})^2 \rangle + \langle \theta^{(1)} \theta^{(2)} \rangle \right) \right) +$$

$$+4 \left(\frac{2k}{m_{eff}^{(2)}} + \frac{k m_{eff}^{(1)} (\omega_{eff}^{(1)})^2 \langle \theta^{(1)} \theta^{(2)} \rangle}{3} + \frac{2k^2}{3} \left(\langle (\theta^{(2)})^2 \rangle + \langle \theta^{(1)} \theta^{(2)} \rangle \right) \right) \times$$

$$\left(\frac{2k}{m_{eff}^{(1)}} + \frac{k m_{eff}^{(2)} (\omega_{eff}^{(2)})^2 \langle \theta^{(1)} \theta^{(2)} \rangle}{3} + \frac{2k^2}{3} \left(\langle (\theta^{(1)})^2 \rangle + \langle \theta^{(1)} \theta^{(2)} \rangle \right) \right). \qquad (5.199)$$

Звернімо увагу, що у випадку однакових мас та частот осциляторів $m_1 = m_2$, $\omega_1 = \omega_2$ отримаємо:

$$m_{eff}^{(n)} = m_{eff}, \qquad (5.200)$$

$$\omega_{eff}^{(n)} = \omega_{eff}, \qquad (5.201)$$

та вирази для частот зводяться до таких результатів:

$$\omega_- = \omega_{eff}, \qquad (5.202)$$

$$\omega_+ = \left(\omega_{eff}^2 + \frac{4k}{m_{eff}} + \frac{2k \langle \theta^2 \rangle m_{eff} \omega_{eff}^2}{3} + \frac{8k^2 \langle \theta^2 \rangle}{3} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.203)$$

які відповідають (5.181), (5.182) при $N = 2$.

Система трьох осциляторів з осциляторною взаємодією

Розгляньмо три осцилятори з масами m_1, $m_2 = m_3 = m$, та частотами ω_1, $\omega_2 = \omega_3 = \omega$ з осциляторною взаємодією. Запишемо гамільтоніан системи:

$$H_s = \frac{(\mathbf{P}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{P}^{(2)})^2}{2m} + \frac{(\mathbf{P}^{(3)})^2}{2m} + \frac{m_1\omega_1^2(\mathbf{X}^{(1)})^2}{2} +$$

$$+\frac{m\omega^2(\mathbf{X}^{(2)})^2}{2} + \frac{m\omega^2(\mathbf{X}^{(3)})^2}{2} +$$

$$+k(\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)})^2 + k(\mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(3)})^2 + k(\mathbf{X}^{(3)} - \mathbf{X}^{(3)})^2. \qquad (5.204)$$

Варто зауважити, що гамільтоніан (5.204) з $\omega_1 = \omega = 0$ розглядався для опису взаємодії кварків [226–228].

Знайдемо спектр системи з точністю до другого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативностей. Отже, розгляньмо гамільтоніан H_0 (5.16), який для системи трьох осциляторів має такий вигляд:

$$H_0 = \sum_n \frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m_{eff}^{(n)}} + \sum_n \frac{m_{eff}^{(n)}(\omega_{eff}^{(n)})^2(\mathbf{x}^{(n)})^2}{2} +$$

$$+\frac{k}{2}\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(m)})^2 + \frac{k}{12}\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}\Big(\langle(\theta^{(n)})^2\rangle(\mathbf{p}^{(n)})^2 +$$

$$+\langle(\theta^{(m)})^2\rangle(\mathbf{p}^{(m)})^2 - 2\langle\theta^{(n)}\theta^{(m)}\rangle(\mathbf{p}^{(n)}\cdot\mathbf{p}^{(m)})\Big) + H_{osc}^a + H_{osc}^b, \quad (5.205)$$

тут $m_{eff}^{(n)}$, $\omega_{eff}^{(n)}$, $\langle\theta^{(n)}\theta^{(m)}\rangle$, $\langle(\eta^{(n)})^2\rangle$ визначаються як (5.193)-(5.196).

На основі виразу (5.205) знайдемо спектр системи трьох осциляторів з осциляторною взаємодією у квантованому фазовому просторі

зі сферичною симетрією:

$$E_{\{n_1\},\{n_2\},\{n_3\}} = \sum_{a=1}^{3} \hbar\tilde{\omega}_a \left(n_1^{(a)} + n_2^{(a)} + n_3^{(a)} + \frac{3}{2} \right) + 3\hbar\omega_{osc}. \quad (5.206)$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\omega_{eff}^2 + (\omega_{eff}^{(1)})^2 + \frac{2k}{m_{eff}} + \frac{4k}{m_{eff}^{(1)}} + A_1 - \sqrt{D} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.207)$$

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\omega_{eff}^2 + (\omega_{eff}^{(1)})^2 + \frac{2k}{m_{eff}} + \frac{4k}{m_{eff}^{(1)}} + A_1 + \sqrt{D} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.208)$$

$$\tilde{\omega}_3 = \left(\omega_{eff}^2 + \frac{6k}{m_{eff}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + k m_{eff} \langle \theta^2 \rangle \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.209)$$

де

$$D = \left(\omega_{eff}^2 - (\omega_{eff}^{(1)})^2 + \frac{4k}{m_{eff}} - \frac{4k}{m_{eff}^{(1)}} + A_2 \right)^2 + \left(\frac{2k}{m} + A_3 \right) \times$$

$$\times \left(2(\omega_{eff}^{(1)})^2 - 2\omega_{eff}^2 + 8 \left(\frac{2k}{m} + A_4 \right) \left(\frac{2k}{m_1} + A_5 \right) \left(\frac{2k}{m} + A_3 \right)^{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{8k}{m_{eff}^{(1)}} - \frac{6k}{m} + A_6 \right). \quad (5.210)$$

Також ми ввели такі позначення:

$$A_1 = \left(\frac{k m_{eff} \omega_{eff}^2}{3} + \frac{2k^2}{3} \right) \langle \theta^2 \rangle +$$

$$+ \left(\frac{2k m_{eff}^{(1)} (\omega_{eff}^{(1)})^2}{3} + \frac{8k^2}{3} \right) \langle (\theta^{(1)})^2 \rangle + \frac{8k^2}{3} \langle \theta \theta^{(1)} \rangle, \quad (5.211)$$

$$A_2 = \left(\frac{2km_{eff}\omega_{eff}^2}{3} + \frac{10k^2}{3}\right)\langle\theta^2\rangle -$$

$$-\left(\frac{2km_{eff}^{(1)}(\omega_{eff}^{(1)})^2}{3} + \frac{8k^2}{3}\right)\langle(\theta^{(1)})^2\rangle - \frac{2k^2}{3}\langle\theta\theta^{(1)}\rangle, \tag{5.212}$$

$$A_3 = \left(\frac{8k^2}{3} + \frac{km_{eff}\omega_{eff}^2}{3}\right)\langle\theta^2\rangle - \frac{2k^2}{3}\langle\theta\theta^{(1)}\rangle, \tag{5.213}$$

$$A_4 = \left(\frac{km_{eff}^{(1)}(\omega_{eff}^{(1)})^2}{3} + \frac{4k^2}{3}\right)\langle\theta\theta^{(1)}\rangle + \frac{2k^2}{3}\langle\theta^2\rangle, \tag{5.214}$$

$$A_5 = \left(\frac{km_{eff}(\omega_{eff}^2)}{3} + \frac{2k^2}{3}\right)\langle\theta\theta^{(1)}\rangle + \frac{4k^2}{3}\langle(\theta^{(1)})^2\rangle, \tag{5.215}$$

$$A_6 = -\left(km_{eff}\omega_{eff}^2 + 4k^2\right)\langle\theta^2\rangle +$$

$$+\left(\frac{4km_{eff}^{(1)}(\omega_{eff}^{(1)})^2}{3} + \frac{16k^2}{3}\right)\langle(\theta^{(1)})^2\rangle + \frac{2k^2}{3}\langle\theta\theta^{(1)}\rangle, \tag{5.216}$$

та

$$m_{eff} = m_{eff}^{(2)} = m_{eff}^{(3)}, \tag{5.217}$$

$$\omega_{eff} = \omega_{eff}^{(2)} = \omega_{eff}^{(3)}, \tag{5.218}$$

$$\theta = \theta^{(2)} = \theta^{(3)}. \tag{5.219}$$

У частковому випадку $m_1 = m$, $\omega_1 = \omega$, на основі (5.206) отримаємо (5.180) з $N = 3$. А саме, маємо:

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_{eff}, \tag{5.220}$$

$$\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \left(\omega_{eff}^2 + \frac{6k}{m_{eff}} + k\langle\theta^2\rangle m_{eff}\omega_{eff}^2 + 6k^2\langle\theta^2\rangle\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.221}$$

Для системи частинок з осциляторною взаємодією, яка описується гамільтоніаном (5.204) з $\omega = \omega_1 = 0$, енергетичні рівні визначаються як (5.206) з частотами (5.207), (5.208), (5.209) у яких

$$m_{eff}^{(1)} = m_1, \quad m_{eff} = m, \tag{5.222}$$

$$\omega_{eff}^{(1)} = \sqrt{\frac{\langle(\eta^{(1)})^2\rangle}{6m_1^2}}, \tag{5.223}$$

$$\omega_{eff} = \sqrt{\frac{\langle(\eta)^2\rangle}{6m^2}}. \tag{5.224}$$

Зауважимо, що спектр центра мас не є неперервний, що зумовлено некомутативністю імпульсів. Спектр центра мас відповідає спектру гармонічного осцилятора з частотою $\tilde{\omega}_1$ (5.207) з (5.222)-(5.224) у звичному просторі.

У випадку, коли імпульси комутують $[P_i^{(n)}, P_j^{(m)}] = 0$ ($\eta_{ij}^{(n)} = 0$), спектр системи, яка описується гамільтоніаном (5.204) з $\omega = \omega_1 = 0$, визначається як (5.206) з частотами

$$\tilde{\omega}_1 = 0, \tag{5.225}$$

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2k}{m} + \frac{4k}{m^{(1)}} + \frac{2k^2}{3}\langle\theta^2\rangle + \frac{8k^2}{3}\langle(\theta^{(1)})^2\rangle + \right.$$
$$\left. + \frac{8k^2}{3}\langle\theta\theta^{(1)}\rangle + \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.226}$$

$$\tilde{\omega}_3 = \left(\frac{6k}{m} + 6k^2\langle\theta^2\rangle\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.227}$$

тут

$$D = \left(\frac{4k}{m} - \frac{4k}{m^{(1)}} + \frac{10k^2}{3}\langle\theta^2\rangle - \frac{8k^2}{3}\langle(\theta^{(1)})^2\rangle - \frac{2k^2}{3}\langle\theta\theta^{(1)}\rangle\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{2k}{m} + \frac{8k^2}{3}\langle\theta^2\rangle - \frac{2k^2}{3}\langle\theta\theta^{(1)}\rangle\right) \times$$

$$\times\left(-\frac{6k}{m}+\frac{8k}{m^{(1)}}+8\left(\frac{2k}{m}+\frac{4k^2}{3}\langle\theta\theta^{(1)}\rangle+\frac{2k^2}{3}\langle\theta^2\rangle\right)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{2k}{m_1}+\frac{2k^2}{3}\langle\theta\theta^{(1)}\rangle+\frac{4k^2}{3}\langle(\theta^{(1)})^2\rangle\right)\left(\frac{2k}{m}+\frac{8k^2}{3}\langle\theta^2\rangle-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2k^2}{3}\langle\theta\theta^{(1)}\rangle\right)^{-1}-4k^2\langle\theta^2\rangle+\frac{16k^2}{3}\langle(\theta^{(1)})^2\rangle+\frac{2k^2}{3}\langle\theta\theta^{(1)}\rangle\right). \tag{5.228}$$

Вирази для частот отримано, поклавши $\omega_{eff}=\omega_{eff}^{(1)}=0$, $m_{eff}^{(1)}=m_1$, $m_{eff}=m$ у (5.207), (5.208), (5.209). Зауважимо, що некомутативність координат впливає на частоти спектру відносного руху (5.226), (5.227) та не впливає на спектр центра мас системи (5.225).

5.7.2 Ланцюжок гармонічних осциляторів

Дослідімо вплив некомутативності координат та некомутативносьті імпульсів (5.68)-(5.70) на систему N гармонічних осциляторів, які взаємодіють з осциляторною взаємодією та утворюють замкнений ланцюжок. Запишемо гамільтоніан:

$$H_s=\sum_{n=1}^{N}\frac{(\mathbf{P}^{(n)})^2}{2m}+\sum_{n=1}^{N}\frac{m\omega^2(\mathbf{X}^{(n)})^2}{2}+$$

$$+k\sum_{n=1}^{N}(\mathbf{X}^{(n+1)}-\mathbf{X}^{(n)})^2, \tag{5.229}$$

з періодичними граничними умовами

$$\mathbf{X}^{(N+1)}=\mathbf{X}^{(1)}. \tag{5.230}$$

У гамільтоніані (5.229) k – константа, m, ω – маси та частоти осциляторів.

Перейшовши до представлення (5.71), (5.72), перепишемо гамільтоніан H_s так:

$$H_s = \sum_{n=1}^{N} \Bigg(\frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m} + \frac{m\omega^2(\mathbf{x}^{(n)})^2}{2} +$$

$$+k(\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)})^2 - \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot [\mathbf{x}^{(n)} \times \mathbf{p}^{(n)}])}{2m} - \frac{m\omega^2(\boldsymbol{\theta} \cdot [\mathbf{x}^{(n)} \times \mathbf{p}^{(n)}])}{2} -$$

$$-k(\boldsymbol{\theta} \cdot [(\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}) \times (\mathbf{p}^{(n+1)} - \mathbf{p}^{(n)})]) +$$

$$+\frac{[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}^{(n)}]^2}{8m} + \frac{m\omega^2}{8}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}^{(n)}]^2 + \frac{k}{4}[\boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{p}^{(n+1)} - \mathbf{p}^{(n)})]^2 \Bigg). \tag{5.231}$$

Для ланцюжка гармонічних осциляторів маємо:

$$\Delta H = \sum_{n=1}^{N} \Bigg(\frac{[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}^{(n)}]^2}{8m} + \frac{m\omega^2}{8}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}^{(n)}]^2 -$$

$$-\frac{m\omega^2(\boldsymbol{\theta} \cdot [\mathbf{x}^{(n)} \times \mathbf{p}^{(n)}])}{2} - \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot [\mathbf{x}^{(n)} \times \mathbf{p}^{(n)}])}{2m} -$$

$$-k\boldsymbol{\theta} \cdot [(\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}) \times (\mathbf{p}^{(n+1)} - \mathbf{p}^{(n+1)})] +$$

$$+\frac{k}{4}[\boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{p}^{(n+1)} - \mathbf{p}^{(n)})]^2 - \frac{\langle \eta^2 \rangle (\mathbf{x}^{(n)})^2}{12m} -$$

$$-\frac{\langle \theta^2 \rangle m\omega^2(\mathbf{p}^{(n)})^2}{12} - \frac{k}{6}\langle \theta^2 \rangle (\mathbf{p}^{(n+1)} - \mathbf{p}^{(n)})^2 \Bigg). \tag{5.232}$$

Отже, аналізуючи вираз для ΔH (5.232), можемо зробити висновок, що з точністю до другого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативностей ми можемо досліджувати гамільтоніан H_0, який для зручності перепишемо у такому вигляді:

$$H_0 = \sum_{n=1}^{N} \Bigg(\frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m_{eff}} + \frac{m_{eff}\omega_{eff}^2(\mathbf{x}^{(n)})^2}{2} +$$

$$+k(\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)})^2 +$$

$$+\frac{k}{6}\langle\theta^2\rangle(\mathbf{p}^{(n+1)}-\mathbf{p}^{(n)})^2+H^a_{osc}+H^b_{osc}\Bigg), \tag{5.233}$$

$$m_{eff}=m\left(1+\frac{m^2\omega^2\langle\theta^2\rangle}{6}\right)^{-1}, \tag{5.234}$$

$$\omega_{eff}=\left(\omega^2+\frac{\langle\eta^2\rangle}{6m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{m^2\omega^2\langle\theta^2\rangle}{6}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.235}$$

Доданки H^a_{osc}, H^b_{osc} комутують з H_0. Координати та імпульси $\mathbf{x}^{(n)}$, $\mathbf{p}^{(n)}$ задовольняють звичні комутаційні співвідношення. Записавши:

$$\mathbf{x}^{(n)}=\sqrt{\frac{\hbar}{Nm_{eff}\omega_{eff}}}\sum_{l=1}^{N}\exp\left(\frac{2\pi inl}{N}\right)\tilde{\mathbf{x}}^{(l)}, \tag{5.236}$$

$$\mathbf{p}^{(n)}=\sqrt{\frac{\hbar m_{eff}\omega_{eff}}{N}}\sum_{l=1}^{N}\exp\left(-\frac{2\pi inl}{N}\right)\tilde{\mathbf{p}}^{(l)}, \tag{5.237}$$

отримаємо H_0 у такому вигляді:

$$H_0=$$

$$\frac{\hbar\omega_{eff}}{2}\sum_n\left(1+\frac{4km_{eff}\langle\theta^2\rangle}{3}\sin^2\frac{\pi n}{N}\right)\tilde{\mathbf{p}}^{(n)}(\tilde{\mathbf{p}}^{(n)})^\dagger+$$

$$+\frac{\hbar\omega^2_{eff}}{2}\sum_n\left(1+\frac{8k}{m_{eff}\omega^2_{eff}}\sin^2\frac{\pi n}{N}\right)\tilde{\mathbf{x}}^{(n)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(n)})^\dagger. \tag{5.238}$$

Означивши оператори

$$a^{(n)}_j=\frac{1}{\sqrt{2w_n}}\left(w_n\tilde{x}^{(n)}_j+i\tilde{p}^{(n)}_j\right), \tag{5.239}$$

$$w_n=\left(1+\frac{8k}{m_{eff}\omega^2_{eff}}\sin^2\frac{\pi n}{N}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(1+\frac{4km_{eff}\langle\theta^2\rangle}{3}\sin^2\frac{\pi n}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{5.240}$$

знайдемо:

$$H_0 = \hbar\omega_{eff} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \left(1 + \frac{4km_{eff}\langle\theta^2\rangle}{3} \sin^2 \frac{\pi n}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{8k}{m_{eff}\omega_{eff}^2} \sin^2 \frac{\pi n}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \left((a_j^{(n)})^\dagger a_j^{(n)} + \frac{1}{2}\right). \qquad (5.241)$$

Отже, енергетичні рівні ланцюжка осцилятора у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі з точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей мають такий вигляд

$$E_{\{n_1\},\{n_2\},\{n_3\}} = \hbar \sum_{a=1}^{N} \left(\omega_{eff}^2 + \frac{8k}{m_{eff}} \sin^2 \frac{\pi a}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{4km_{eff}\langle\theta^2\rangle}{3} \sin^2 \frac{\pi a}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(n_1^{(a)} + n_2^{(a)} + \right.$$

$$\left. + n_3^{(a)} + \frac{3}{2}\right) = \sum_{a=1}^{N} \hbar\omega_a \left(n_1^{(a)} + n_2^{(a)} + n_3^{(a)} + \frac{3}{2}\right), \qquad (5.242)$$

тут $n_i^{(a)}$ – квантові числа, ($n_i^{(a)} = 0, 1, 2...$). Врахувавши (5.234), (5.235), можемо записати частоти

$$\omega_a^2 = \left(\omega^2 + \frac{\langle\eta^2\rangle}{6m^2}\right) \left(1 + \frac{m^2\omega^2\langle\theta^2\rangle}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{4k^2m\langle\theta^2\rangle}{3} \sin^2 \frac{\pi a}{N}\right) + \frac{8k}{m} \sin^2 \frac{\pi a}{N} + \frac{32k^2\langle\theta^2\rangle}{3} \sin^4 \frac{\pi a}{N}. \qquad (5.243)$$

У випадку ланцюжка частинок з осциляторною взаємодією, розглянувши гамільтоніан (5.229) з $\omega = 0$, з точністю до другого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативностей маємо такий вираз для енергетичних рівнів

$$E_{\{n_1\},\{n_2\},\{n_3\}} = \sum_{a=1}^{N} \hbar\omega_a \left(n_1^{(a)} + n_2^{(a)} + n_3^{(a)} + \frac{3}{2}\right) + 3\hbar\omega_{osc}, \quad (5.244)$$

де

$$\omega_a^2 = \frac{8k}{m}\sin^2\frac{\pi a}{N} + \frac{\langle\eta^2\rangle}{6m^2} + \frac{32k^2\langle\theta^2\rangle}{3}\sin^4\frac{\pi a}{N}. \tag{5.245}$$

Важливо зауважити, що у випадку некомутативного простору ($\theta_{ij} \neq 0$, $\eta_{ij} = 0$) спектр ланцюжка частинок з осциляторною взаємодією має вигляд (5.244) з

$$\omega_a^2 = \frac{8k}{m}\sin^2\frac{\pi a}{N} + \frac{32k^2\langle\theta^2\rangle}{3}\sin^4\frac{\pi a}{N}. \tag{5.246}$$

Звернімо увагу, що $\omega_N^2 = 0$ та відповідає спектру центра мас системи.

Некомутативність імпульсів зумовлює дискретність спектру центра мас ланцюжка взаємодіючих частинок. Із (5.244), (5.245) маємо, що спектр центра мас системи відповідає спектру тривимірного гармонічного осцилятора з частотою, визначеною як

$$\omega_N^2 = \frac{\langle\eta^2\rangle}{6m^2}. \tag{5.247}$$

У границі $\langle\theta^2\rangle \to 0$, $\langle\eta^2\rangle \to 0$ з (5.243) отримаємо добре відомий результат

$$\omega_a^2 = \omega^2 + \frac{8k}{m}\sin^2\frac{\pi a}{N}, \tag{5.248}$$

який, для прикладу, був представлений у роботах [225, 241].

Отже, на основі результатів досліджень можемо зробити висновок, що некомутативність координат та некомутативність імпульсів впливають на частоти у спектрах систем гармонічних осциляторів з осциляторною взаємодією.

5.8 Слабкий принцип еквівалентності у сферично-симетричному просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів

5.8.1 Рух в однорідному гравітаційному полі

Дослідімо виконання слабкого принципу еквівалентності у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі канонічного типу (5.68)-(5.70). Із цією метою знайдемо вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на рух частинки чи тіла у гравітаційному полі. Для початку проаналізуймо рух частинки m у однорідному гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі зі збереженою сферичною симетрією (5.68)-(5.70).

Розгляньмо випадок, коли поле напрямлене вздовж осі X_1 та запишемо гамільтоніан

$$H_p = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + mgX_1, \tag{5.249}$$

тут m – маса частинки, константа g характеризує поле. Перейшовши до представлення (5.77), (5.80), запишемо вираз для повного гамільтоніану:

$$H = H_p + H^a_{osc} + H^b_{osc} =$$

$$= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mgx_1 - \frac{(\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{L})}{2m} + \frac{mg}{2}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]_1 +$$

$$+\frac{[\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{x}]^2}{8m} + H^a_{osc} + H^b_{osc}, \tag{5.250}$$

де $\mathbf{L} = [\mathbf{x}\times\mathbf{p}]$. Врахувавши (5.16), (5.17), (5.250), маємо:

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mgx_1 + \frac{\langle\eta^2\rangle\mathbf{x}^2}{12m} + H^a_{osc} + H^b_{osc}, \tag{5.251}$$

$$\Delta H = -\frac{(\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{L})}{2m} + \frac{mg}{2}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]_1 + \frac{[\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{x}]^2}{8m} - \frac{\langle\eta^2\rangle\mathbf{x}^2}{12m}. \tag{5.252}$$

Взявши до уваги результати, отримані в підрозділі 5.2, та проаналізувавши вираз для ΔH (5.252), робимо висновок, що для дослідження руху частинки в однорідному гравітаційному полі з точністю до другого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативностей можемо записати гамільтоніан (5.251). Варто звернути увагу, що відповідно до (5.251) некомутативність координат не впливає на рух частинки у однорідному гравітаційному полі.

Врахувавши (5.251), знайдемо рівняння руху:

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m}, \tag{5.253}$$

$$\dot{p}_i = -mg\delta_{i,1} - \frac{\langle\eta^2\rangle x_i}{6m}. \tag{5.254}$$

Проаналізуємо траєкторію частинки у однорідному гравітаційному полі. Із рівнянь (5.253), (5.254) для частинки з початковими координатами та швидкостями x_{0i}, υ_{0i} отримаємо:

$$x_i(t) = \left(x_{0i} + 6g\frac{m^2}{\langle\eta^2\rangle}\delta_{1,i}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\langle\eta^2\rangle}{6m^2}}t\right) +$$

$$+\upsilon_{0i}\sqrt{\frac{6m^2}{\langle\eta^2\rangle}}\sin\left(\sqrt{\frac{\langle\eta^2\rangle}{6m^2}}t\right) - 6g\frac{m^2}{\langle\eta^2\rangle}\delta_{1,i}. \tag{5.255}$$

Зауважимо, що при $\langle\eta^2\rangle \to 0$, вираз (5.255) перейде у відомий результат для траєкторії частинки у однорідному гравітаційному полі:

$$x_i(t) = \frac{1}{2}\delta_{1,i}gt^2 + x_{0i}. \tag{5.256}$$

Із (5.255) маємо, що рух частинки у однорідному полі у кванованому фазовому просторі зі сферичною симетрією залежить від її маси. Отже, некомутативність імпульсів зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності.

Важливо звернути увагу, що при виконанні рівності (5.78), можемо записати:

$$\frac{\langle \eta^2 \rangle}{m^2} = B = \text{const}, \tag{5.257}$$

$$x_i(t) = \left(x_{0i} + \frac{6g}{B}\delta_{1,i} \right) \cos\left(\sqrt{\frac{B}{6}} t \right) +$$

$$+ \upsilon_{0i} \sqrt{\frac{6}{B}} \sin\left(\sqrt{\frac{B}{6}} t \right) - \frac{6g}{B}\delta_{1,i}, \tag{5.258}$$

де B – константа, яка не залежить від маси. Отже, у випадку, коли тензор імпульсної некомутативності залежить від маси як (5.79), частинки з різними масами рухаються в однорідному гравітаційному полі у просторі (5.68)-(5.70) по однакових траєкторіях. Слабкий принцип еквівалентності виконується.

Розгляньмо більш загальний випадок. Дослідімо рух системи частинок в однорідному гравітаційному полі у квантованому фазовому просторі зі збереженою сферичною симетрією. Гамільтоніан системи частинок (макроскопічного тіла) з масою M у однорідному гравітаційному полі має такий вигляд:

$$H_s = \frac{(\mathbf{P}^c)^2}{2M} + MgX_1^{(c)} + H_{rel}, \tag{5.259}$$

де $\mathbf{P}^c$, $\mathbf{X}^{(\mathbf{c})}$ – імпульси та координати центра мас системи. Доданок H_{rel} у (5.259) відповідає відносному руху.

У підрозділі 5.4 ми показали, що при виконанні рівностей (5.75), (5.78), координати та імпульси центра мас задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (5.81)-(5.83), а також координати та імпульси центра мас, координати та імпульси відносного руху можуть бути представлені через координати та імпульси центра мас та відносного руху, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення

(див. (5.88)-(5.94)). Отже, з точністю до другого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативностей гамільтоніан системи частинок (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі може бути переписаний у такому вигляді

$$H_0 = \frac{(\mathbf{p}^c)^2}{2M} + Mgx_1^c + \frac{\langle(\eta^c)^2\rangle(\mathbf{x}^c)^2}{12M} + \langle H_{rel}\rangle_{ab} + \\ + H_{osc}^a + H_{osc}^b. \tag{5.260}$$

Тут $\langle H_{rel}\rangle_{ab}$ – гамільтоніан H_{rel}, усереднений за основними станами гармонічних осциляторів H_{osc}^a, H_{osc}^b. Зауважимо, що оператор $\langle H_{rel}\rangle_{ab}$ залежить від операторів координат та імпульсів відносного руху $\Delta x_i^{(n)}$, $\Delta p_i^{(n)}$, для яких виконуються такі рівності:

$$[\Delta x_i^{(n)}, x_j^c] = [\Delta p_i^{(n)}, x_j^c] = [\Delta x_i^{(n)}, p_j^c] = [\Delta p_i^{(n)}, p_j^c] = 0, \tag{5.261}$$

$$[\Delta x_i^{(n)}, H_{osc}^a] = [\Delta p_i^{(n)}, H_{osc}^a] = 0, \tag{5.262}$$

$$[\Delta x_i^{(n)}, H_{osc}^b] = [\Delta p_i^{(n)}, H_{osc}^b] = 0. \tag{5.263}$$

Отже, знайдемо

$$[H_0, \langle H_{rel}\rangle_{ab}] = 0. \tag{5.264}$$

Траєкторія центра мас системи частинок у однорідному гравітаційному полі має такий вигляд:

$$x_i^c(t) = \left(x_{0i}^c + 6g\frac{M^2}{\langle(\eta^c)^2\rangle}\delta_{1,i}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^c)^2\rangle}{6M^2}}t\right) + \\ + \upsilon_{0i}^c\sqrt{\frac{6M^2}{\langle(\eta^c)^2\rangle}}\sin\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^c)^2\rangle}{6M^2}}t\right) - 6g\frac{M^2}{\langle(\eta^c)^2\rangle}\delta_{1,i}. \tag{5.265}$$

Вираз для траєкторії не залежить від маси системи та її композиції у випадку виконання рівності (5.78). Якщо задовольняється умова

(5.78), ефективний тензор імпульсної некомутативності визначається як (5.85). Маємо:

$$\frac{\langle(\eta^c)^2\rangle}{M^2} = \frac{3\hbar^2\tilde{\alpha}^2}{2l_P^4} = B = \text{const}, \tag{5.266}$$

$$x_i^c(t) = \left(x_{0i}^c + \frac{6g}{B}\delta_{1,i}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{B}{6}}t\right) +$$

$$+\upsilon_{0i}\sqrt{\frac{6}{B}}\sin\left(\sqrt{\frac{B}{6}}t\right) - \frac{6g}{B}\delta_{1,i}. \tag{5.267}$$

Отже, при виконанні рівності (5.78), слабкий принцип еквівалентності зберігається також і для системи частинок (макроскопічного тіла).

На завершення підрозділу звернімо увагу, що на основі результату (5.255) можемо знайти траєкторію руху центра мас системи N невзаємодіючих частинок в однорідному полі:

$$x_i^c(t) = \sum_a \mu_a x_i^{(a)}(t) = -\sum_a 6g\mu_a \frac{m_a^2}{\langle(\eta^{(a)})^2\rangle}\delta_{1,i} +$$

$$+\sum_a \mu_a\left(x_{0i}^{(a)} + 6g\frac{m_a^2}{\langle(\eta^{(a)})^2\rangle}\delta_{1,i}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^{(a)})^2\rangle}{6m_a^2}}t\right) +$$

$$+\sum_a \mu_a \upsilon_{0i}^{(a)}\sqrt{\frac{6m_a^2}{\langle(\eta^a)^2\rangle}}\sin\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^a)^2\rangle}{6m_a^2}}t\right), \tag{5.268}$$

тут індекс a відповідає частинкам, m_a – маси частинок, $x_{0i}^{(a)}$ – початкові координати $\upsilon_{0i}^{(a)}$ – початкові швидкості частинки з індексом a. При виконанні рівності (5.78), із виразу (5.268) отримаємо (5.265), де $x_{0i}^{(c)} = \sum_a \mu_a x_{0i}^{(a)}$, $\upsilon_{0i}^{(c)} = \sum_a \mu_a \upsilon_{0i}^{(a)}$.

5.8.2 Квантові та класичні рівняння руху в неоднорідному гравітаційному полі та слабкий принцип еквівалентності

Знайдемо рівняння руху частинки в неоднорідному гравітаційному полі у квантованому фазовому просторі зі сферичною симетрією та дослідімо виконання слабкого принципу еквівалентності. Для частинки з масою m в гравітаційному полі $G\tilde{M}/X$, $X = |\mathbf{X}| = \sqrt{\sum_i X_i^2}$ маємо гамільтоніан:

$$H_p = \frac{P^2}{2m} - \frac{G\tilde{M}m}{X}. \tag{5.269}$$

Кординати та імпульси частинки X_i, P_i задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (5.68)-(5.70).

Використавши представлення (5.77), (5.80), з точністю до другого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативностей для частинки в неоднорідному гравітаційному полі можемо розглядати гамільтоніан (5.16), який має такий вигляд:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{G\tilde{M}m}{x} + \frac{\langle\eta^2\rangle x^2}{12m} - \frac{G\tilde{M}mL^2\langle\theta^2\rangle}{8x^5} + \\ + \frac{G\tilde{M}m\langle\theta^2\rangle}{24}\left(\frac{2}{x^3}p^2 + \frac{6i\hbar}{x^5}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}) - \frac{\hbar^2}{x^5}\right) + \\ + H^a_{osc} + H^b_{osc}. \tag{5.270}$$

Знайдемо рівняння руху

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{G\tilde{M}m\langle\theta^2\rangle}{12}\left(\frac{1}{x^3}\mathbf{p} - \frac{3\mathbf{x}}{x^5}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})\right), \tag{5.271}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{G\tilde{M}m\mathbf{x}}{x^3} - \frac{\langle\eta^2\rangle\mathbf{x}}{6m} - \frac{G\tilde{M}m\langle\theta^2\rangle}{4}\left(\frac{1}{x^5}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})\mathbf{p} - \right. \\ \left. - \frac{2\mathbf{x}}{x^5}p^2 + \frac{5\mathbf{x}}{2x^7}L^2 + \frac{5\hbar^2\mathbf{x}}{6x^7} - \frac{5i\hbar}{x^7}\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})\right). \tag{5.272}$$

Із (5.271), (5.272) у класичній границі $\hbar \to 0$ отримаємо:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\upsilon} - \frac{G\tilde{M}m^2\langle\theta^2\rangle}{12}\left(\frac{1}{x^3}\boldsymbol{\upsilon} - \frac{3\mathbf{x}}{x^5}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\right), \tag{5.273}$$

$$\dot{\boldsymbol{\upsilon}} = -\frac{G\tilde{M}\mathbf{x}}{x^3} - \frac{\langle\eta^2\rangle\mathbf{x}}{6m^2} -$$

$$-\frac{G\tilde{M}m^2\langle\theta^2\rangle}{4}\left(\frac{1}{x^5}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\boldsymbol{\upsilon} - \frac{2\mathbf{x}}{x^5}\upsilon^2 + \frac{5\mathbf{x}}{2x^7}[\mathbf{x}\times\boldsymbol{\upsilon}]^2\right). \tag{5.274}$$

Тут, для зручності ми використали таке позначення: $\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{p}/m$.

Важливо відзначити, що рівняння руху частинки у неоднорідному гравітаційному полі залежать від величин $m^2\langle\theta^2\rangle$ та $\langle\eta^2\rangle/m^2$. У випадку, коли задовольняється рівність (5.75), маємо, що добуток $m^2\langle\theta^2\rangle$ не залежить від маси та може бути переписаний як:

$$\langle\theta^2\rangle m^2 = A = \text{const}, \tag{5.275}$$

де константа A є однаковою для частинок з різними масами. Отже, врахувавши рівності (5.257), (5.275), отримаємо такі рівняння руху:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\upsilon} - \frac{G\tilde{M}A}{12}\left(\frac{1}{x^3}\boldsymbol{\upsilon} - \frac{3\mathbf{x}}{x^5}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\right), \tag{5.276}$$

$$\dot{\boldsymbol{\upsilon}} = -\frac{G\tilde{M}\mathbf{x}}{x^3} - \frac{B\mathbf{x}}{6} -$$

$$-\frac{G\tilde{M}A}{4}\left(\frac{1}{x^5}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\boldsymbol{\upsilon} - \frac{2\mathbf{x}}{x^5}\upsilon^2 + \frac{5\mathbf{x}}{2x^7}[\mathbf{x}\times\boldsymbol{\upsilon}]^2\right). \tag{5.277}$$

Рівняння (5.276), (5.277) не залежать від маси, а залежать від констант A, B, які є однаковими для частинок з різними масами. Тому, рівності (5.75), (5.78) дозволяють відновити незалежність класичних рівнянь руху частинки у неоднорідному гравітаційному полі від її маси, зберегти принцип еквівалентності.

Звернімо увагу, що коли задовольняються рівності (5.75), (5.78),

квантові рівняння руху (5.271), (5.272) є такими:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\upsilon} - \frac{G\tilde{M}A}{12}\left(\frac{1}{x^3}\boldsymbol{\upsilon} - \frac{3\mathbf{x}}{x^5}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\right), \tag{5.278}$$

$$\dot{\boldsymbol{\upsilon}} = -\frac{G\tilde{M}\mathbf{x}}{x^3} - \frac{B\mathbf{x}}{6} - \frac{G\tilde{M}A}{4}\left(\frac{1}{x^5}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\boldsymbol{\upsilon} - \frac{2\mathbf{x}}{x^5}\upsilon^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{5\mathbf{x}}{2x^7}[\mathbf{x}\times\boldsymbol{\upsilon}]^2 + \frac{5\hbar^2\mathbf{x}}{6m^2x^7} - \frac{5i\hbar}{mx^7}\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\right). \tag{5.279}$$

Бачимо, що навіть при виконанні умов для параметрів координатної та імпульсної некомутативностей (5.75), (5.78) квантові рівняння руху частинки в гравітаційному полі залежать від маси, проте маса входить в ці рівняння тільки у вигляді відношення $\hbar/m$. Така залежність рівнянь від маси є і у звичному просторі (просторі зі звичними комутаційними співвідношеннями для координат та імпульсів) [242]. Вона зумовлена рівністю:

$$[\mathbf{x}, \boldsymbol{\upsilon}] = i\hbar\frac{\hat{I}}{m}. \tag{5.280}$$

Отже, при виконанні умов (5.75), (5.78), слабкий принцип еквівалентності зберігається, квантові рівняння руху частинки у неоднорідному гравітаційному полі у квантованому фазовому просторі канонічного типу залежать від відношення сталої Планка до маси $\hbar/m$, класичні рівняння руху не залежать від маси.

Також можемо показати, що при виконанні рівностей (5.75), (5.78), рух центра мас системи частинок (макроскопічного тіла) у неоднорідному полі не залежить від маси системи та від її композиції. Для дослідження руху центра мас системи частинок з масою M у некомутативному фазовому просторі зі збереженою сферичною симетрією,

врахувавши (5.88)-(5.94), можемо записати:

$$H_s = \frac{(P^c)^2}{2M} - \frac{G\tilde{M}M}{(X^c)^2} + H_{rel}, \tag{5.281}$$

$$H_0 = \frac{(p^c)^2}{2M} - \frac{G\tilde{M}M}{x^c} + \frac{\langle(\eta^c)^2\rangle(x^c)^2}{12M} -$$

$$-\frac{G\tilde{M}M(L^c)^2\langle\theta^2\rangle}{8(x^c)^5} + \frac{G\tilde{M}M\langle(\theta^c)^2\rangle}{24}\left(\frac{2}{(x^c)^3}(p^c)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{6i\hbar}{(x^c)^5}(\mathbf{x}^c \cdot \mathbf{p}^c) - \frac{\hbar^2}{(x^c)^5}\right) + \langle H_{rel}\rangle_{ab} + H^a_{osc} + H^b_{osc}. \tag{5.282}$$

Рівняння руху центра мас системи мають такий вигляд:

$$\dot{\mathbf{x}}^c = \boldsymbol{\upsilon}^c - \frac{G\tilde{M}A}{12}\left(\frac{1}{(x^c)^3}\boldsymbol{\upsilon}^c - \frac{3\mathbf{x}^c}{(x^c)^5}(\mathbf{x}^{\mathbf{c}} \cdot \boldsymbol{\upsilon}^c)\right), \tag{5.283}$$

$$\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^c = -\frac{G\tilde{M}\mathbf{x}^c}{(x^c)^3} - \frac{B\mathbf{x}^c}{6} - \frac{G\tilde{M}A}{4}\left(\frac{1}{(x^c)^5}(\mathbf{x}^c \cdot \boldsymbol{\upsilon}^c)\boldsymbol{\upsilon}^c - \right.$$

$$\left. - \frac{2\mathbf{x}^c}{(x^c)^5}(\upsilon^c)^2 + \frac{5\mathbf{x}^c}{2(x^c)^7}[\mathbf{x}^c \times \boldsymbol{\upsilon}^c]^2\right). \tag{5.284}$$

Звернімо увагу, що у випадку, коли умови (5.75), (5.78) не задовольняються, рівняння руху системи частинок (макроскопічного тіла) у неоднорідному гравітаційному полі залежать від $\langle(\theta^c)^2\rangle$, $\langle(\eta^c)^2\rangle$. За означенням ефективні тензори некомутативності визначаються тензорами некомутативності частинок, які входять до складу системи, а саме: $\theta^c_{ij} = \sum_n \mu_n^2 \theta^{(n)}_{ij}$, $\eta^c_{ij} = \sum_n \eta^{(n)}_{ij}$ (див. (5.84), (5.85)). Отже, рівняння руху центра мас системи частинок у гравітаційному полі залежать від маси системи та від мас частинок, які її формують.

Важливо звернути увагу, що залежності параметрів у тензорах некомутативності від маси (5.75), (5.78) узгоджуються з умовами для параметрів некомутативності (3.273), (3.274), які були запропоновані у третьому розділі роботи, для розв'язання фундаментальних проблем

у шестивимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу.

На завершення відзначимо, що результати з дослідження фізичних систем у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі, отримані у цьому розділі, можуть бути легко узагальнені на випадок різних означень тензорів координатної та імпульсної некомутативностей для яких $\langle\theta_{ij}\rangle = \langle\eta_{ij}\rangle = 0$, оскільки вони явно не залежать від виглядів цих тензорів, а визначаються середніми $\langle\theta^2\rangle$, $\langle\eta^2\rangle$. Отже, на основі висновків, представлених в цьому підрозділі та в підрозділі 4.4, маємо, що некомутативна алгебра для координат та імпульсів частинок

$$[X_i^{(n)}, X_j^{(m)}] = i\delta_{nm}\bar{c}_\theta^{(n)} \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^a, \quad (5.285)$$

$$[X_i^{(n)}, P_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{nm}\left(\delta_{ij} + \frac{\bar{c}_\theta^{(n)}\bar{c}_\eta^{(n)}}{4\hbar^2}(\mathbf{p}^a \cdot \mathbf{p}^b)\delta_{ij} - \frac{\bar{c}_\theta^{(n)}\bar{c}_\eta^{(n)}}{4\hbar^2} p_j^a p_i^b\right), \quad (5.286)$$

$$[P_i^{(n)}, P_j^{(m)}] = i\delta_{nm}\bar{c}_\eta^{(n)} \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^b, \quad (5.287)$$

з константами $\bar{c}_\theta^{(n)}$ обернено пропорційними до маси та $\bar{c}_\eta^{(n)}$ пропорційними до маси не зумовлює порушення симетрії відносно інверсії часу, сферичної симетрії, принципу еквівалентності, та є еквівалентна до алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу.

5.9 Висновки до розділу 5

Отримано вираз для мінімальної довжини (5.55) у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі (5.1)-(5.3) на основі розв'язку задачі на власні значення оператора квадрата довжини. Знайдено,

що мінімальна довжина у фазовому просторі, який характеризується сферично-симетричною некомутативною алгеброю (5.1)-(5.3), визначається величинами параметрів координатної на імпульсної некомутативності.

Сферично-симетричну алгебру канонічного типу з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів (5.1)-(5.3) узагальнено для координат та імпульсів різних частинок (5.68)-(5.70). Досліджено комутаційні співвідношення для координат та імпульсів центра мас. Знайдено залежності тензорів координатної та імпульсної некомутативностей від маси (5.76), (5.79) при яких співвідношення для координат та імпульсів центра мас відповідають співвідношенням некомутативної алгебри з ефективними тензорами некомутативності. У результаті розв'язано проблему опису системи багатьох частинок в рамках сферично-симетричної алгебри канонічного типу з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів.

Досліджено представлення для координат та імпульсів, які задовольняють співвідношення сферично-симетричної алгебри (5.68)-(5.70). Отримано, що при виконанні умов (5.75), (5.78), координати у некомутативному фазовому просторі (5.77) не залежать від маси, а імпульси (5.80) пропорційні до маси, як це є у звичному просторі.

Розглянуто систему двох частинок з кулонівською взаємодією у некомутативному фазовому просторі зі сферичною симетрією (5.68)-(5.70). З точністю до другого порядку за параметрами некомутативності знайдено поправки до енергетичних рівнів системи, зумовлені некомутативністю координат (5.143), (5.144) та некомутативністю імпульсів (5.142). Встановлено, що ці поправки мають різні залежності від квантових чисел та від параметрів системи (зведена маса μ, параметр взаємодії κ). Зважаючи на це, ми прийшли до висновку, що

існують системи, енергетичні рівні яких є більш чутливі до некомутативності координат чи до некомутативності імпульсів. А саме, ми показали, що вплив імпульсної некомутативності добре проявляється для енергетичних рівнів з $l = 0$ та великим квантовим числом n для атомів з малою зведеною масою (для прикладу, атом водню). Вплив некомутативності координат добре проявляється для ns енергетичних рівнів з малими квантовими числами n для атомів з великою зведеною масою.

Проаналізовано вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на спектри атома водню та екзотичних атомів (мюонний атом водню, антипротонний атом гелію). Ми прийшли до висновку, що поправки до енергетичних рівнів з $l > 1$ мюонного атома водню, зумовлені некомутативністю координат (5.143), є у $8.8 \cdot 10^6$ разів більші від цих поправок для атома водню. Вплив некомутативності імпульсів на енергетичні рівні мюонного атома водню є у 206.8 разів меншим ніж на енергетичні рівні атома водню, що пов'язано з великою зведеною масою атома. Отже, дослідження спектру мюонного атома водню дозволяють краще вивчати відмінність впливу координатної та імпульсної некомутативностей на енергетичні рівні системи.

Знайдено оцінки для параметрів координатної та імпульсної некомутативностей (5.157), (5.158), на основі порівняння теоретичного результату для поправок до частоти переходу $(n, l) = (36, 34) \to (34, 32)$ для антипротонного гелію з експериментальними даними. Отримані результати (5.157), (5.158) не накладають строгих обмежень на величини параметрів координатної та імпульсної некомутативностей, що пов'язано з малою точністю експериментальних даних відомих на сьогодні. Важливо зауважити, що антипротонний гелій є більш чутливий до некомутативності координат у порівнянні з атомом водню, оскільки

зведена маса цього атома є на 3 порядки більша від зведеної маси атома водню. Зважаючи на це, покращення точності експериментальних даних для спектру антипротонного атома гелію відкриє можливість отримати більш строге обмеження для величини параметра координатної некомутативності.

Знайдено та проаналізовано вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на енергетичні рівні симетричної мережі гармонічних осциляторів (система осциляторів з взаємодією всі зі всіма) у однорідному полі (5.180). Встановлено, що некомутативність впливає на частоти системи. Однорідне поле зумовлює зміщення енергетичних рівнів на константу. На основі отриманого результату досліджено часткові випадки, а саме систему частинок з осциляторною взаємодією та систему вільних частинок. Встановлено, що спектр системи вільних частинок у квантованому фазовому просторі з сферичною симетрією не є неперервний. Енергетичні рівні системи вільних частинок відповідають енергетичним рівням системи N осциляторів з частотами, які визначаються параметрами імпульсної некомутативності та масами частинок $\langle\eta^2\rangle/6m^2$. Знайдено, що некомутативність імпульсів також зумовлює дискретність спектру центра мас системи частинок з осциляторною взаємодією (перший доданок у (5.189)). Некомутативність координат та некомутативність імпульсів впливають на частоти у спектрі відносного руху (див. другий доданок у (5.189)). На основі отриманих результатів ми прийшли до висновку, що вплив некомутативності координат та енергетичні рівні симетричної мережі осциляторів, а також на енергетичні рівні системи частинок, які взаємодіють всі зі всіма з осциляторною взаємодією збільшується при збільшенні числа частинок, що формують системи.

Отримано вираз для енергетичних рівнів замкнутого ланцюжка

гармонічних осциляторів у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Знайдено, що з точністю до другого порядку за параметрами координатної та імпульсної некомутативності форма спектру системи у квантованому просторі відповідає спектру цієї системи у звичному просторі (5.242). Квантованість простору впливає лише на частоти системи (5.243).

Отримано та досліджено класичні та квантові рівняння руху частинки у гравітаційному полі у квантованому фазовому просторі зі збереженою сферичною симетрією. Показано, що з точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей некомутативність координат не впливає на траєкторію руху частинки у однорідному гравітаційному полі. На рух частинки впливає тільки некомутативність імпульсів. Траєкторія руху частинки у однорідному гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі зі сферичною симетрією відповідає траєкторії гармонічного осцилятора у звичному просторі та залежить від параметра імпульсної некомутративності та від маси частинки (див. (5.255)). Некомутативність імпульсів зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності. Виконання цього принципу для частинки у однорідному полі у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі можна відновити, припустивши, що тензор імпульсної некомутативності залежить від маси як (5.79).

У більш загальному випадку, для частинки у неоднорідному гравітаційному полі, рівняння руху, записані з точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей, залежать від параметрів координатної та імпульсної некомутативностей. При виконанні рівностей (5.75), (5.78), квантові рівняння руху залежать від відношення сталої Планка до маси (5.278),(5.279), а класичні рівняння руху не залежать від маси. Показано, що умови (5.75), (5.78) дозволяють також віднови-

ти незалежність руху центра мас системи частинок (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі від маси системи та її композиції. На основі отриманих результатів, запропоновано сферично-симетричну, інваріантну відносно інверсії часу алгебру з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів (5.285)-(5.287), яка описує квантовний фазовий простір зі збереженим слабким принципом еквівалентності.

Розділ 6

Проблема опису руху макроскопічного тіла у просторі з некомутативністю Лі типу та принцип еквівалентності

6.1 Вступ

Багато уваги приділялося дослідженням простору з некомутативністю Лі типу (1.39) [26–29, 121–127]. Зокрема, вивчалися проблеми побудови некомутативних алгебр Лі типу [27, 28, 121, 124], проблеми теорії поля [122, 123, 125, 243], атом водню [244, 245]. У статтях [26, 121] знайдено та проаналізовано рівняння Ньютона для частинки, на яку діє постійна сила, у квантованих просторах, які характеризуються співвідношеннями (1.40)-(1.42), (1.43)-(1.46), (1.50)-(1.53), (1.54)-(1.57).

Проблема опису руху системи багатьох частинок, відома як проблема футбольного м'яча [168, 169, 246–248], існує також у квантованому просторі, який описується некомутативною алгеброю Лі типу (1.39). Важливим є розв'язання цієї проблеми, оскільки це дозволить вивчати вплив квантованості простору на широкий клас фізичних систем.

У цьому розділі ми досліджуємо дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас багаточастинкової системи у квантованому просторі (1.39) та знаходимо умови, при яких ці співвідношення відпо-

відають співвідношенням алгебри Лі типу. На основі ідеї про зв'язок параметрів алгебри з масою розв'язується проблема порушення слабкого принципу еквівалентності в рамках різних некомутативних алгебр Лі типу. Також ми знаходимо, що припущення про залежність параметрів деформованої алгебри від маси дозволяє побудувати послідовну фізичну теорію опису руху багаточастинкових систем та зберегти принцип еквівалентності у квантованому просторі, який характеризується алгеброю

$$[t, X_i] = 0, \tag{6.1}$$

$$[X_i, X_j] = i\hbar f\left(\frac{t}{\tau}\right)\theta_{ij}, \tag{6.2}$$

де θ_{ij} – параметри некомутативності, які є константами, $i, j = (1, 2, 3)$, t відіграє роль параметру. τ – константа, яка має розмірність часу, $f\left(t/\tau\right)$ – функція від часу

$$f\left(\frac{t}{\tau}\right) = f\left(\mathrm{sh}\left(\frac{t}{\tau}\right), \mathrm{ch}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right), \tag{6.3}$$

чи

$$f\left(\frac{t}{\tau}\right) = f\left(\sin\left(\frac{t}{\tau}\right), \cos\left(\frac{t}{\tau}\right)\right). \tag{6.4}$$

Алгебра (6.1), (6.2) з (6.3) чи (6.4) відома у літературі, як алгебра з деформацією кручення (twist deformed algebra) [249, 250].

Структура розділу є наступна: у підрозділі 6.2 розв'язується проблема опису системи частинок у некомутативному просторі Лі типу; у підрозділі 6.3 досліджується слабкий принцип еквівалентності в рамках різних некомутативних алгебр та пропонується шлях для його відновлення; у підрозділі 6.4 запропоновано умови на параметри алгебри з деформацією кручення при яких координати центра мас не залежать від імпульсів відносного руху та можуть розглядатися як кінематичні

змінні, також відновлюється слабкий принцип еквівалентності; розділ закінчується висновками.

Представлені у розділі результати опубліковано у статтях [40, 42].

6.2 Некомутативна алгебра для координат та імпульсів центра мас та параметри некомутативності

6.2.1 Комутатор координат пропорційний часу

Розгляньмо для початку частковий випадок некомутативної алгебри Лі типу, коли комутатор просторових координат пропорційний до часу (1.40)-(1.42). У класичній границі $\hbar \to 0$ комутаційні співвідношення (1.40)-(1.42) перейдуть у такі дужки Пуассона [26]

$$\{X_i, X_j\} = \frac{t}{\kappa}\left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}\right), \tag{6.5}$$

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij}, \tag{6.6}$$

$$\{P_i, P_j\} = 0, \tag{6.7}$$

де індекси ρ, τ є фіксованими та різними, $i, j = (1, 2, 3)$. Для прикладу, якщо ми виберемо $\rho = 1$, $\tau = 2$, отримаємо:

$$\{X_1, X_2\} = \frac{t}{\kappa}, \tag{6.8}$$

$$\{X_2, X_3\} = \{X_1, X_3\} = 0. \tag{6.9}$$

У загальному випадку координати різних частинок можуть задовольняти некомутативну алгебру з різними параметрами κ. Отже, розгляньмо таке узагальнення некомутативної алгебри (1.40)-(1.42)

$$\{X_i^{(a)}, X_j^{(b)}\} = \frac{t}{\kappa_a}\left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}\right)\delta_{ab}, \tag{6.10}$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\delta_{ij}, \tag{6.11}$$

$$\{P_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = 0, \tag{6.12}$$

де індекси a та b позначають частинки.

Дослідімо дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас. Розгляньмо систему N частинок з масами m_a та введемо координати та імпульси центра мас, координати та імпульси відносного руху, як у випадку звичного простору $\tilde{\mathbf{P}} = \sum_a \mathbf{P}^{(a)}$, $\tilde{\mathbf{X}} = \sum_a \mu_a \mathbf{X}^{(a)}$, $\Delta\mathbf{P}^a = \mathbf{P}^{(a)} - \mu_a\tilde{\mathbf{P}}$ $\Delta\mathbf{X}^{(a)} = \mathbf{X}^{(a)} - \tilde{\mathbf{X}}$, де $\mu_a = m_a/M$, $M = \sum_a m_a$. Координати $X_i^{(a)}$ та імпульси $P_i^{(a)}$ частинок задовольняють співвідношення (6.10)-(6.12). Для координат та імпульсів центра мас, координат та імпульсів відносного руху отримаємо такі рівності:

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = t\sum_a \frac{\mu_a^2}{\kappa_a}\left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}\right), \tag{6.13}$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = 0, \tag{6.14}$$

$$\{\Delta X_i^{(a)}, \Delta X_j^{(b)}\} = t\left(\frac{\delta^{ab}}{\kappa_a} - \frac{\mu_a}{\kappa_a} - \frac{\mu_b}{\kappa_b} + \sum_c \frac{\mu_c^2}{\kappa_c}\right)\left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}\right), \tag{6.15}$$

$$\{\Delta X_i^{(a)}, \Delta P_j^{(b)}\} = \delta_{ab} - \mu_b, \tag{6.16}$$

$$\{\Delta X_i^{(a)}, \tilde{X}_j\} = t\left(\frac{\mu_a}{\kappa_a} - \sum_c \frac{\mu_c^2}{\kappa_c}\right)\left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}\right), \tag{6.17}$$

$$\{\Delta P_i^{(a)}, \Delta P_i^{(b)}\} = \{\tilde{P}_i, \Delta P_j^{(b)}\} = 0. \tag{6.18}$$

Аналізуючи (6.13), (6.14), можемо зробити висновок, що координати центра мас задовольняють алгебру Лі типу (6.10)-(6.12) з параметрами, які залежать від параметрів некомутативної алгебри для координат та імпульсів частинок κ_a, а також від величин μ_a

$$\tilde{\theta}_{ij}^0 = \sum_a \frac{\mu_a^2}{\kappa_a}\left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{j\tau}\delta_{i\rho}\right) = \frac{1}{\kappa_{eff}}\left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}\right). \tag{6.19}$$

Тут ми використали позначення:

$$\frac{1}{\kappa_{eff}} = \sum_a \frac{\mu_a^2}{\kappa_a}. \tag{6.20}$$

Із (6.19) випливає, що координати та імпульси центра мас систем частинок (макроскопічних тіл) з однаковими масами M, проте різними масами частинок m_a, які входять до їх складу, задовольняють співвідношення алгебри Лі з різними параметрами. Також варто відзначити, що дужки Пуассона $\{\Delta X_i^{(a)}, \tilde{X}_j\}$ відмінні від нуля, маємо (6.17). Отже, на рух центра мас системи частинок у квантованому просторі з алгеброю Лі типу (1.40)-(1.42) впливає відносний рух і навпаки.

Розгляньмо таку залежність параметра алгебри Лі типу від маси:

$$\frac{\kappa_a}{m_a} = \gamma_\kappa = \text{const}, \tag{6.21}$$

тут γ_κ – константа, яка є однаковою для частинок з різними масами. При виконанні рівності (6.21) маємо: $\{\Delta X_i^{(a)}, \tilde{X}_j\} = 0$. Звідси випливає, що рух центра мас та відносний рух можуть розглядатися незалежно. Також у випадку, коли рівність (6.21) задовольняється, отримаємо, що параметр некомутативної алгебри Лі типу для координат та імпульсів центра мас визначається як

$$\tilde{\theta}_{ij}^0 = \frac{1}{\gamma_\kappa M} \left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{j\tau}\delta_{i\rho}\right). \tag{6.22}$$

Отже, дужки Пуассона для координат центра мас системи залежать від її маси та не залежать від мас та параметрів κ_a частинок, які її формують. Звернімо увагу, що порівнявши (6.22) з (6.19) отримаємо

$$\frac{\kappa_{eff}}{M} = \gamma_\kappa. \tag{6.23}$$

Отже, залежність (6.21) також виконується для κ_{eff}. Ефективний параметр алгебри Лі типу (6.22) є обернено пропорційний до маси системи.

6.2.2 Комутатор координат пропорційний координаті

Дослідімо інший випадок алгебри з некомутативністю Лі типу, а саме коли комутатор просторових координат пропорційний просторовій координаті (1.43)-(1.46). У класичній границі отримаємо такі дужки Пуассона:

$$\{X_k, X_\gamma\} = \frac{X_l}{\tilde{\kappa}}, \quad \{X_l, X_\gamma\} = -\frac{X_k}{\tilde{\kappa}}, \tag{6.24}$$

$$\{P_k, X_\gamma\} = \frac{P_l}{\tilde{\kappa}}, \quad \{P_l, X_\gamma\} = -\frac{P_k}{\tilde{\kappa}}, \tag{6.25}$$

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij}, \quad \{X_\gamma, P_\gamma\} = 1, \tag{6.26}$$

$$\{X_k, X_l\} = \{P_m, P_n\} = 0, \tag{6.27}$$

тут індекси k, l, γ є фіксовані та різні, $k, l, \gamma = (1, 2, 3)$, $i \neq \gamma$, $j \neq \gamma$ та $m, n = (1, 2, 3)$, $\tilde{\kappa}$ – константа [26]. Розгляньмо таке узагальнення алгебри Лі типу (6.24)-(6.27) для координат $X^{(a)}$ та імпульсів $P^{(a)}$ різних частинок

$$\{X_k^{(a)}, X_\gamma^{(b)}\} = \delta_{ab}\frac{X_l^{(a)}}{\tilde{\kappa}}, \quad \{X_l^{(a)}, X_\gamma^{(b)}\} = -\delta_{ab}\frac{X_k^{(a)}}{\tilde{\kappa}}, \tag{6.28}$$

$$\{P_k^{(a)}, X_\gamma^{(b)}\} = \delta_{ab}\frac{P_l^{(a)}}{\tilde{\kappa}}, \quad \{P_l^{(a)}, X_\gamma^{(b)}\} = -\delta_{ab}\frac{P_k^{(a)}}{\tilde{\kappa}}, \tag{6.29}$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\delta_{ij}, \quad \{X_\gamma^{(a)}, P_\gamma^{(b)}\} = \delta_{ab}, \tag{6.30}$$

$$\{X_k^{(a)}, X_l^{(b)}\} = \{P_m^{(a)}, P_n^{(b)}\} = 0. \tag{6.31}$$

Індекси a, b позначають частинки. У цьому випадку для координат та імпульсів центра мас, координат та імпульсів відносного руху, означених звично, взявши до уваги (6.28)-(6.31), знайдемо:

$$\{\tilde{X}_k, \tilde{X}_\gamma\} = \sum_a \frac{\mu_a^2 X_l^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a}, \quad \{\tilde{X}_l, \tilde{X}_\gamma\} = -\sum_a \frac{\mu_a^2 X_k^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a}, \tag{6.32}$$

$$\{\tilde{P}_k, \tilde{X}_\gamma\} = \sum_a \frac{\mu_a P_l^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a}, \quad \{\tilde{P}_l, \tilde{X}_\gamma\} = -\sum_a \frac{\mu_a P_k^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a}, \tag{6.33}$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\tilde{X}_\gamma, \tilde{P}_\gamma\} = 1 \tag{6.34}$$

$$\{\tilde{X}_k, \tilde{X}_l\} = \{\tilde{P}_m, \tilde{P}_n\} = 0. \tag{6.35}$$

Важливо зауважити, що співвідношення для координат центра мас (6.32) не відповідають співвідношенням алгебри Лі типу (6.28). Дужки Пуассона для координат центра мас залежать від виразів

$$\sum_a \frac{\mu_a^2 X_l^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a} \neq \frac{1}{\tilde{\kappa}_{eff}} \tilde{X}_l, \tag{6.36}$$

$$\sum_a \frac{\mu_a^2 X_k^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a} \neq \frac{1}{\tilde{\kappa}_{eff}} \tilde{X}_k, \tag{6.37}$$

які залежать від параметрів $\tilde{\kappa}_a$, координат частинок, що формують систему, їхніх мас, та не пропорційні до координат центра мас. Такий самий висновок можна зробити, аналізуючи рівності (6.33). Дужки Пуассона (6.33) не відповідають співвідношенням (6.29) некомутативної алгебри (6.28)-(6.31). Дужки Пуассона для імпульсів та координат центра мас не пропорційні до імпульсів центра мас, а залежать від імпульсів та мас частинок, які формують систему, а також від параметрів $\tilde{\kappa}_a$

$$\sum_a \frac{\mu_a P_l^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a} \neq \frac{\tilde{P}_l}{\tilde{\kappa}_{eff}}, \tag{6.38}$$

$$\sum_a \frac{\mu_a P_k^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a} \neq \frac{\tilde{P}_k}{\tilde{\kappa}_{eff}}. \tag{6.39}$$

Отже, існує проблема опису руху центра мас макроскопічного тіла (системи частинок) у просторі з некомутативною алгеброю Лі типу (6.28)-(6.31). Ми не можемо узагальнювати співвідношення алгебри Лі (6.28)-(6.31) для координат та імпульсів центра мас. Із (6.32)-(6.35)

випливає, що вплив квантованості простору на рух систем (макроскопічних тіл) з однаковими масами та різними композиціями є різний.

Відзначимо, що у випадку, коли виконується умова:

$$\frac{\tilde{\kappa}_a}{m_a} = \gamma_{\tilde{\kappa}} = \text{const}, \tag{6.40}$$

можемо записати:

$$\{\tilde{X}_k, \tilde{X}_\gamma\} = \frac{1}{\tilde{\kappa}_{eff}}\tilde{X}_l, \quad \{\tilde{X}_l, \tilde{X}_\gamma\} = -\frac{1}{\tilde{\kappa}_{eff}}\tilde{X}_k, \tag{6.41}$$

$$\{\tilde{P}_k, \tilde{X}_\gamma\} = \frac{\tilde{P}_l}{\tilde{\kappa}_{eff}}, \quad \{\tilde{P}_l, \tilde{X}_\gamma\} = -\frac{\tilde{P}_k}{\tilde{\kappa}_{eff}}, \tag{6.42}$$

де ми використали позначення:

$$\tilde{\kappa}_{eff} = \gamma_{\tilde{\kappa}} M. \tag{6.43}$$

Тут $\gamma_{\tilde{\kappa}}$ – константа, яка не залежить від маси. Отже, якщо виконується умова (6.40) у співвідношеннях (6.41), (6.42) маємо координати та імпульси центра мас. Отже, дужки Пуассона (6.41), (6.42) відповідають співвідношенням некомутативної алгебри Лі типу (6.28), (6.29).

Звернімо увагу, що у просторі з некомутативністю Лі типу (6.28)-(6.31) координати центра мас та координати відносного руху задовольняють такі рівності

$$\{\Delta X_k^{(a)}, \tilde{X}_\gamma\} = \{\tilde{X}_k, \Delta X_\gamma^{(a)}\} = \frac{\mu_a X_l^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a} - \sum_b \frac{\mu_b^2 X_l^{(b)}}{\tilde{\kappa}_b}, \tag{6.44}$$

$$\{\Delta X_l^{(a)}, \tilde{X}_\gamma\} = \{\tilde{X}_l, \Delta X_\gamma^{(a)}\} = -\frac{\mu_a X_k^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a} + \sum_b \frac{\mu_b^2 X_k^{(b)}}{\tilde{\kappa}_b}, \tag{6.45}$$

$$\{\Delta X_k^{(a)}, \tilde{X}_l\} = \{\Delta X_l^{(a)}, \tilde{X}_k\} = 0, \tag{6.46}$$

$$\{\tilde{P}_k, \Delta X_\gamma^{(a)}\} = \frac{P_l^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a} - \sum_b \frac{\mu_b P_l^{(b)}}{\tilde{\kappa}_b}, \tag{6.47}$$

$$\{\tilde{P}_l, \Delta X_\gamma^{(a)}\} = -\frac{P_k^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a} + \sum_b \frac{\mu_b P_k^{(b)}}{\tilde{\kappa}_b}, \tag{6.48}$$

$$\{\Delta P_k^{(a)}, \tilde{X}_\gamma\} = \mu_a \left(\frac{P_l^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a} - \sum_b \frac{\mu_b P_l^{(b)}}{\tilde{\kappa}_b} \right), \tag{6.49}$$

$$\{\Delta P_l^{(a)}, \tilde{X}_\gamma\} = -\mu_a \left(\frac{P_k^{(a)}}{\tilde{\kappa}_a} - \sum_b \frac{\mu_b P_k^{(b)}}{\tilde{\kappa}_b} \right), \tag{6.50}$$

$$\{\tilde{P}_k, \Delta X_l^{(a)}\} = \{\tilde{P}_l, \Delta X_k^{(a)}\} = 0, \tag{6.51}$$

$$\{\Delta P_l^{(a)}, \tilde{X}_k\} = \{\Delta P_k^{(a)}, \tilde{X}_l\} = 0. \tag{6.52}$$

Навіть коли умова (6.40) задовольняється, маємо, що дужки Пуассона (6.44)-(6.52) можуть бути переписані у більш простому вигляді

$$\{\Delta X_k^{(a)}, \tilde{X}_\gamma\} = \{\tilde{X}_k, \Delta X_\gamma^{(a)}\} = \frac{1}{\tilde{\kappa}_{eff}} \Delta X_l^{(a)}, \tag{6.53}$$

$$\{\Delta X_l^{(a)}, \tilde{X}_\gamma\} = \{\tilde{X}_l, \Delta X_\gamma^{(a)}\} = -\frac{1}{\tilde{\kappa}_{eff}} \Delta X_k^{(a)}, \tag{6.54}$$

$$\{\tilde{P}_k, \Delta X_\gamma^{(a)}\} = \frac{1}{\tilde{\kappa}_a} \Delta P_l^{(a)}, \quad \{\tilde{P}_l, \Delta X_\gamma^{(a)}\} = -\frac{1}{\tilde{\kappa}_a} \Delta P_k^{(a)}, \tag{6.55}$$

$$\{\Delta P_k^{(a)}, \tilde{X}_\gamma\} = \frac{1}{\tilde{\kappa}_{eff}} \Delta P_l^{(a)}, \quad \{\Delta P_l^{(a)}, \tilde{X}_\gamma\} = -\frac{1}{\tilde{\kappa}_{eff}} \Delta P_k^{(a)}, \tag{6.56}$$

проте вони не дорівнюють нулеві. Отже, модифікація співвідношень для координат та імпульсів (6.28)-(6.31) зумовлює залежність руху центра мас системи від відносного руху та навпаки.

6.2.3 Узагальнена некомутативна алгебра Лі типу

Розгляньмо узагальнену алгебру з некомутативністю Лі типу (1.47)-(1.49), якій у класичній границі відповідають такі дужки Пуассона:

$$\{X_i, X_j\} = \theta^0_{ij} t + \theta^k_{ij} X_k, \tag{6.57}$$

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij} + \bar{\theta}^k_{ij} X_k + \tilde{\theta}^k_{ij} P_k, \tag{6.58}$$

$$\{P_i, P_j\} = 0. \tag{6.59}$$

Координати та імпульси різних частинок можуть задовольняти співвідношення некомутативної алгебри з різними параметрами. Отже, запишемо такі співвідношення:

$$\{X^{(a)}_i, X^{(b)}_j\} = \delta_{ab}\theta^{0(a)}_{ij} t + \delta_{ab}\theta^{k(a)}_{ij} X^{(a)}_k, \tag{6.60}$$

$$\{X^{(a)}_i, P^{(b)}_j\} = \delta_{ab}\delta_{ij} + \delta_{ab}\bar{\theta}^{k(a)}_{ij} X^{(a)}_k + \delta_{ab}\tilde{\theta}^{k(a)}_{ij} P^a_k, \tag{6.61}$$

$$\{P^{(a)}_i, P^{(b)}_j\} = 0. \tag{6.62}$$

Врахувавши (6.60)-(6.62), для координат та імпульсів центра мас знайдемо:

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = \sum_a \mu^2_a \theta^{0(a)}_{ij} t + \sum_a \mu^2_a \theta^{k(a)}_{ij} X^{(a)}_k, \tag{6.63}$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ij} + \sum_a \mu_a \bar{\theta}^{k(a)}_{ij} X^{(a)}_k + \sum_a \mu_a \tilde{\theta}^{k(a)}_{ij} P^a_k, \tag{6.64}$$

$$\{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = 0. \tag{6.65}$$

У випадку узагальненої некомутативної алгебри також маємо проблему невідповідності співвідношень для координат та імпульсів центра мас алгебрі Лі типу.

На основі результатів, отриманих в рамках алгебр (6.10)-(6.12), (6.28)-(6.31) знаходимо, що у випадку, коли параметри узагальненої

некомутативної алгебри Лі типу (6.57)-(6.59) залежать від маси як

$$\theta_{ij}^{0(a)} m_a = \gamma_{ij}^0 = \text{const}, \tag{6.66}$$

$$\theta_{ij}^{k(a)} m_a = \gamma_{ij}^k = \text{const}, \tag{6.67}$$

$$\tilde{\theta}_{ij}^{k(a)} m_a = \tilde{\gamma}_{ij}^k = \text{const}, \tag{6.68}$$

(тут константи γ_{ij}^0, γ_{ij}^k, $\tilde{\gamma}_{ij}^k$ є однаковими для всіх частинок та є антисиметричними за нижніми індексами), а константи $\bar{\theta}_{ij}^{k(a)}$ не залежать від параметрів частинок

$$\bar{\theta}_{ij}^{k(a)} = \bar{\theta}_{ij}^k, \tag{6.69}$$

алгебра для координат та імпульсів центра мас є алгеброю Лі типу та відтворює некомутативну алгебру для координат та імпульсів частинок з параметрами:

$$\theta_{ij}^{0(eff)} = \frac{\gamma_{ij}^0}{M}, \quad \theta_{ij}^{k(eff)} = \frac{\gamma_{ij}^k}{M}, \quad \tilde{\theta}_{ij}^{k(eff)} = \frac{\tilde{\gamma}_{ij}^k}{M}, \tag{6.70}$$

де $M = \sum_a m_a$. Маємо:

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = \theta_{ij}^{0(eff)} t + \theta_{ij}^{k(eff)} \tilde{X}_k, \tag{6.71}$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ij} + \bar{\theta}_{ij}^k \tilde{X}_k + \tilde{\theta}_{ij}^{k(eff)} \tilde{P}_k. \tag{6.72}$$

У часткових випадках (6.5)-(6.7), (6.24)-(6.27) некомутативної алгебри (6.57)-(6.59) умови (6.66)-(6.68) можуть бути переписані як (6.21), (6.40), та з (6.69) випливає:

$$\bar{\kappa}_a = \bar{\kappa}. \tag{6.73}$$

Зауважимо, що результати, представлені у цьому підрозділі, є справедливі також для квантового випадку.

У наступному підрозділі буде показано, що припущення про залежність параметрів некомутативної алгебри від маси дозволяє розв'язати проблему порушення слабкого принципу еквівалентності в рамках різних алгебр Лі типу.

6.3 Слабкий принцип еквівалентності у квантованому просторі з алгеброю Лі типу

Дослідімо виконання слабкого принципу еквівалентності у просторі з некомутативністю Лі типу. Розгляньмо рух частинки з масою m у гравітаційному полі. Запишемо гамільтоніан

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + mV(X_1, X_2, X_3), \tag{6.74}$$

тут функція $V = V(X_1, X_2, X_3)$ описує поле. Звернімо увагу, що у гамільтоніані (6.74) інерційна маса дорівнює гравітаційній (у першому та другому доданках маємо однакові маси m).

Для початку розгляньмо випадок, коли дужки Пуассона для координат пропорційні часу (6.5)-(6.7). У статті [26] рівняння руху були представлені для випадку довільного поля. Врахувавши вигляд гамільтоніану (6.74) та співвідношення алгебри Лі типу (6.5)-(6.7), для частинки у гравітаційному полі можемо записати:

$$\dot{X}_i = \{X_i, H\} = \frac{P_i}{m} + \frac{tm}{\kappa}\frac{\partial V}{\partial X_k}\left(\delta_{i\rho}\delta_{k\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{k\rho}\right), \tag{6.75}$$

$$\dot{P}_i = \{P_i, H\} = -m\frac{\partial V}{\partial X_i}. \tag{6.76}$$

Звернімо увагу, шо через те, що координати та імпульси частинки задовольняють співвідношення алгебри Лі типу (6.5)-(6.7), у рівняннях (6.75) маємо додатковий доданок, який пропорційний до маси m. От-

же, можемо зробити висновок, що слабкий принцип еквівалентності порушується у квантованому просторі Лі типу (6.5)-(6.7).

Важливо зауважити, що коли зберігається рівність (6.21), рівняння руху можуть бути переписані через відношення імпульсів до маси: $P_i' = P_i/m$

$$\dot{X}_i = P_i' + \frac{t}{\gamma_\kappa}\frac{\partial V}{\partial X_k}\left(\delta_{i\rho}\delta_{k\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{k\rho}\right), \tag{6.77}$$

$$\dot{P}_i' = -\frac{\partial V}{\partial X_i}. \tag{6.78}$$

Звернімо увагу, що у рівняння (6.77), (6.78) маса не входить. Ці рівняння залежать від константи γ_κ, яка не залежить від параметрів частинок. Тому розв'язки рівнянь (6.77), (6.78) $X_i(t)$, $P_i'(t)$ не залежать від маси. Отже, слабкий принцип еквівалентності у просторі з некомутативною алгеброю Лі типу (6.5)-(6.7) зберігається при виконанні рівності (6.21).

Розгляньмо також слабкий принцип еквівалентності у квантованому просторі, в якому комутатор двох координат пропорційний до третьої (1.43)-(1.46). Врахувавши вираз для гамільтоніану (6.74) та дужки Пуассона (6.24)-(6.27), отримаємо:

$$\dot{X}_k = \frac{P_k}{m} + \frac{mX_l}{\tilde{\kappa}}\frac{\partial V}{\partial X_\gamma}, \quad \dot{X}_l = \frac{P_l}{m} - \frac{mX_k}{\tilde{\kappa}}\frac{\partial V}{\partial X_\gamma}, \tag{6.79}$$

$$\dot{X}_\gamma = \frac{P_\gamma}{m} - \frac{mX_l}{\tilde{\kappa}}\frac{\partial V}{\partial X_k} + \frac{mX_k}{\tilde{\kappa}}\frac{\partial V}{\partial X_l}, \tag{6.80}$$

$$\dot{P}_k = -m\frac{\partial V}{\partial X_k} + \frac{mP_l}{\tilde{\kappa}}\frac{\partial V}{\partial X_\gamma}, \quad \dot{P}_l = -m\frac{\partial V}{\partial X_l} - \frac{mP_k}{\tilde{\kappa}}\frac{\partial V}{\partial X_\gamma}, \tag{6.81}$$

$$\dot{P}_\gamma = -m\frac{\partial V}{\partial X_\gamma}. \tag{6.82}$$

Аналізуючи рівняння (6.79)-(6.82), можемо зробити висновок, що якщо ми припустимо, що параметри $\tilde{\kappa}$ алгебри Лі типу (6.24)-(6.27) є одна-

ковими для частинок з різними масами, частинки в гравітаціному полі будуть рухатися зі швидкістю, яка визначається їх масою. Отже, деформація дужок Пуассона (6.24)-(6.27) зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності.

Зауважимо, що у випадку, коли параметр алгебри Лі типу (6.24)-(6.27) є залежний від маси як (6.40), маємо такі рівняння:

$$\dot{X}_k = P'_k + \frac{X_l}{\gamma_{\tilde{\kappa}}}\frac{\partial V}{\partial X_\gamma}, \quad \dot{X}_l = P'_l - \frac{X_k}{\gamma_{\tilde{\kappa}}}\frac{\partial V}{\partial X_\gamma}, \tag{6.83}$$

$$\dot{X}_\gamma = P'_\gamma - \frac{X_l}{\gamma_{\tilde{\kappa}}}\frac{\partial V}{\partial X_k} + \frac{X_k}{\gamma_{\tilde{\kappa}}}\frac{\partial V}{\partial X_l}, \tag{6.84}$$

$$\dot{P}'_k = -\frac{\partial V}{\partial X_k} + \frac{P'_l}{\gamma_{\tilde{\kappa}}}\frac{\partial V}{\partial X_\gamma}, \quad \dot{P}'_l = -\frac{\partial V}{\partial X_l} - \frac{P'_k}{\gamma_{\tilde{\kappa}}}\frac{\partial V}{\partial X_\gamma}, \tag{6.85}$$

$$\dot{P}'_\gamma = -\frac{\partial V}{\partial X_\gamma}. \tag{6.86}$$

Рівняння (6.83)-(6.86) та їх роз'язки $X_k(t)$, $X_l(t)$, $X_\gamma(t)$, $P'_k(t)$, $P'_l(t)$, $P'_\gamma(t)$ є однакові для частинок з різними масами. Отже, коли виконується рівність (6.40), слабкий принцип еквівалентності зберігається у просторі з алгеброю (6.24)-(6.27).

У більш загальному випадку некомутативної алгебри Лі типу (1.47)-(1.49) рівняння руху для частинки в гравітаційному полі (6.74) мають такий вигляд:

$$\dot{X}_i = \frac{P_i}{m} + \bar{\theta}^k_{ij}\frac{P_j X_k}{m} + \tilde{\theta}^k_{ij}\frac{P_j P_k}{m} + m(\theta^0_{ij} t + \theta^k_{ij} X_k)\frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{6.87}$$

$$\dot{P}_i = -m\frac{\partial V}{\partial X_i} - m(\bar{\theta}^k_{ij} X_k + \tilde{\theta}^k_{ij} P_k)\frac{\partial V}{\partial X_j}. \tag{6.88}$$

Коли параметри θ^0_{ij}, θ^k_{ij}, $\tilde{\theta}^k_{ij}$, задовольняють умови (6.66)-(6.68) та па-

раметри $\bar{\theta}^k_{ij}$ є однакові для різних частинок (6.69), можемо записати:

$$\dot{X}_i = P'_i + \bar{\theta}^k_{ij} P'_j X_k + \tilde{\gamma}^k_{ij} P'_j P'_k + (\gamma^0_{ij} t + \gamma^k_{ij} X_k) \frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{6.89}$$

$$\dot{P}'_i = -\frac{\partial V}{\partial X_i} - (\bar{\theta}^k_{ij} X_k + \tilde{\gamma}^k_{ij} P'_k) \frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{6.90}$$

тут $P'_i = P_i/m$. Аналізуючи рівняння (6.89), (6.90), бачимо, що у просторі з некомутативністю Лі типу (1.47)-(1.49) принцип еквівалентності зберігається, якщо не порушуються рівності (6.66)-(6.68), (6.69).

На завершення цього підрозділу розгляньмо випадок руху тіла (системи частинок) з масою M у гравітаційному полі у просторі з некомутативністю Лі типу та дослідімо виконання слабкого принципу еквівалентності. Розгляньмо гамільтоніан:

$$H = \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3) + H_{rel}, \tag{6.91}$$

де $\tilde{X}_i$, $\tilde{P}_i$ – координати та імпульси центра мас тіла, функція $V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3)$ описує поле. Гамільтоніан H_{rel} залежить від координат та імпульсів відносного руху.

Для початку дослідімо випадок некомутативної алгебри Лі типу, яка характеризується співвідношеннями (1.40)-(1.42). Як було показано у попередньому підрозділі, координати та імпульси центра мас, координати та імпульси відносного руху задовольняють рівності (6.13)-(6.18). У попередньому підрозділі ми також прийшли до висновку, що у випадку коли параметр алгебри Лі типу залежить від маси (6.21), маємо $\{\Delta X^{(a)}_i, \tilde{X}_j\} = 0$. Отже, виконується рівність:

$$\{\frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3), H_{rel}\} = 0, \tag{6.92}$$

та ми можемо розглядати рух центра мас незалежно від відносного руху. Врахувавши (6.91) та (6.13), (6.14), знайдемо рівняння руху для

центра мас тіла у гравітаційному полі:

$$\dot{\tilde{X}}_i = \frac{\tilde{P}_i}{M} + tM \sum_a \frac{\mu_a^2}{\kappa_a} \left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}\right) \frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_j}, \tag{6.93}$$

$$\dot{\tilde{P}}_i = -M \frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_i}. \tag{6.94}$$

Зауважимо, що крім залежності швидкості тіла від його маси M, із (6.93) можемо зробити висновок, що у випадку, коли параметри некомутативної алгебри Лі типу є однаковими для різних частинок, швидкість тіла у гравітаційному полі залежить від мас частинок, які його формують, та від параметрів κ_a. Це також зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності. Врахувавши рівність (6.21) та використавши позначення $\tilde{P}'_i = \tilde{P}_i/M$, отримаємо:

$$\dot{\tilde{X}}_i = \tilde{P}'_i + t \sum_a \frac{1}{\gamma_\kappa} \left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}\right) \frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_j}, \tag{6.95}$$

$$\dot{\tilde{P}}'_i = -\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_i}. \tag{6.96}$$

З (6.95), (6.96) маємо, що рівняння руху тіла у гравітаційному полі не залежать від мас частинок, які його формують, та від повної маси тіла. Слабкий принцип еквівалентності зберігається.

У квантованому просторі з узагальненою алгеброю Лі типу (6.57)-(6.59), розглянувши випадок, коли впливом відносного руху на рух центра мас можна знехтувати та врахувавши умови на параметри алгебри (6.66)-(6.68), (6.69), можемо записати такі рівняння руху тіла у гравітаційному полі $V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3)$

$$\dot{\tilde{X}}_i = \tilde{P}'_i + \left(\bar{\theta}^k_{ij}\tilde{X}_k + \tilde{\gamma}^k_{ij}\tilde{P}'_k\right)\tilde{P}'_j + \left(\gamma^0_{ij}t + \gamma^k_{ij}\tilde{X}_k\right)\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_j}, \tag{6.97}$$

$$\dot{\tilde{P}}'_i = -\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_i} - \left(\bar{\theta}^k_{ij}\tilde{X}_k + \tilde{\gamma}^k_{ij}\tilde{P}'_k\right)\frac{\partial V}{\partial \tilde{X}_j}, \tag{6.98}$$

тут $\tilde{P}_i' = \tilde{P}_i/M$, M маса тіла. Отримані рівняння залежать від констант γ_{ij}^0, γ_{ij}^k, $\tilde{\gamma}_{ij}^k$ та є однаковими для тіл з різними масами та різними композиціями. Отже, слабкий принцип еквівалентності відновлюється у некомутативному просторі Лі типу, якщо параметри алгебри задовольняють рівності (6.66)-(6.68), (6.69).

У наступному підрозділі буде знайдено, що зв'язок параметрів деформованої алгебри з масою є також важливий у просторі з деформацією кручення (6.1), (6.2).

6.4 Параметри деформації у просторі з деформацією кручення

Розгляньмо систему частинок у просторі з деформацією кручення (6.1), (6.2). Співвідношення алгебри (6.1), (6.2) можуть бути узагальнені на випадок координат та імпульсів різних частинок $X_i^{(a)}$, $P_i^{(a)}$ як

$$[X_i^{(a)}, X_j^{(b)}] = i\hbar\delta_{ab} f\left(\frac{t}{\tau}\right)\theta_{ij}^{(a)}, \tag{6.99}$$

$$[t, X_j^{(a)}] = 0, \quad [P_i^{(a)}, P_j^{(b)}] = 0, \tag{6.100}$$

$$[X_i^{(a)}, P_j^{(b)}] = \delta_{ij}\delta_{ab} i\hbar, \tag{6.101}$$

тут $\theta_{ij}^{(a)}$ – параметри деформації, які відповідають частинці з масою m_a.

Для координат та імпульсів центра мас координат та імпульсів відносного руху, визначених традиційно $\tilde{\mathbf{P}} = \sum_a \mathbf{P}^{(a)}$, $\tilde{\mathbf{X}} = \sum_a \mu_a \mathbf{X}^{(a)}$, $\Delta\mathbf{P}^a = \mathbf{P}^{(a)} - \mu_a\tilde{\mathbf{P}}$, $\Delta\mathbf{X}^{(a)} = \mathbf{X}^{(a)} - \tilde{\mathbf{X}}$, у просторі з деформацією кручення маємо такі співвідношення:

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = i\hbar f\left(\frac{t}{\tau}\right)\sum_a \mu_a^2\theta_{ij}^{(a)}, \tag{6.102}$$

$$[\tilde{P}_i, \tilde{P}_j] = 0, \quad [\tilde{X}, \tilde{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{6.103}$$

$$[\Delta X_i^{(a)}, \Delta X_j^{(b)}] =$$

$$= i\hbar f\left(\frac{t}{\tau}\right)\left(\delta_{ab}\theta_{ij}^{(a)} - \mu_a\theta_{ij}^{(a)} - \mu_b\theta_{ij}^{(b)} + \sum_d \mu_d^2\theta_{ij}^{(d)}\right), \tag{6.104}$$

$$[\Delta X_i^{(a)}, \Delta P_j^{(b)}] = i\hbar(\delta_{ab} - \mu_b), \tag{6.105}$$

$$[\Delta P_i^{(a)}, \Delta P_i^{(b)}] = 0. \tag{6.106}$$

Також координати центра мас та координати відносного руху задовольняють рівності:

$$[\Delta X_i^{(a)}, \tilde{X}_j] = i\hbar f\left(\frac{t}{\tau}\right)\left(\mu_a\theta_{ij}^{(a)} - \sum_d \mu_d^2\theta_{ij}^{(d)}\right). \tag{6.107}$$

Припустивши, що добуток $m_a\theta_{ij}^{(a)}$ дорівнює константі γ_{ij}, яка не залежить від маси,

$$m_a\theta_{ij}^{(a)} = \gamma_{ij} = \text{const}, \tag{6.108}$$

отримаємо, що координати центра мас, означені традиційно, задовольняють співвідношення (6.2) з ефективним параметром $\theta_{ij}^{eff} = \gamma_{ij}/M$ та комутують з координатами відносного руху $[\Delta X_i^{(a)}, \tilde{X}_j] = 0$.

Також у випадку, коли виконується умова (6.108), рівняння руху у гравітаційному полі не залежать від маси. Для частинки (макроскопічного тіла) з масою m у гравітаційному полі $V = V(X_1, X_2, X_3)$, з гамільтоніаном (6.74) у просторі з комутаційними співвідношеннями (6.1), (6.2) маємо такі рівняння руху:

$$\dot{X}_i = P_i' + f\left(\frac{t}{\tau}\right)\gamma_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{6.109}$$

$$\dot{P}_i' = -\frac{\partial V}{\partial X_i}, \tag{6.110}$$

де $P_i' = P_i/m$. Отримані рівняння не залежать від маси, отже, у просторі з деформацією кручення слабкий принцип еквівалентності відновлюється.

Звернімо увагу, що припущення про залежність параметра деформації від маси також дозволяє розв'язати проблему кінематичних змінних. Оператори координат та оператори імпульсів, які задовольняють співвідношення (6.99)-(6.101) можуть бути представлені як

$$X_i^{(a)} = x_i^{(a)} - \frac{1}{2} f\left(\frac{t}{\tau}\right) \theta_{ij}^{(a)} p_j^{(a)}, \tag{6.111}$$

$$P_i^{(a)} = p_i^{(a)}. \tag{6.112}$$

Для координат та імпульсів $x_i^{(a)}$, $p_i^{(a)}$ у представленні (6.111), (6.112) виконуються звичні рівності $[x_i^{(a)}, x_j^{(b)}] = [p_i^{(a)}, p_j^{(b)}] = 0$, $[x_i^{(a)}, p_j^{(b)}] = \delta_{ij}\delta_{ab} i\hbar$. Представлення для координат (6.111) містить імпульси $p_j^{(a)} = P_j^{(a)}$, які залежать від маси. Зважаючи на це, координати $X_i^{(a)}$ не можуть розглядатися як кінематичні змінні.

Розглянувши залежність (6.108), можемо записати:

$$X_i^{(a)} = x_i^{(a)} - f\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{\gamma_{ij} p_j^{(a)}}{2m_a}. \tag{6.113}$$

Отже, завдяки рівності (6.108) у просторі з деформацією кручення розв'язується проблема кінематичних змінних.

Врахувавши означення координат та імпульсів центра мас та використавши представлення (6.111), знайдемо:

$$\tilde{X}_i = \sum_a \mu_a X_i^{(a)} = \tilde{x}_i - \frac{1}{2} f\left(\frac{t}{\tau}\right) \sum_a \mu_a \theta_{ij}^{(a)} p_j^{(a)}, \tag{6.114}$$

$$\tilde{P}_i = \sum_a P_i^{(a)} = \tilde{p}_i, \tag{6.115}$$

де координати та імпульси $\tilde{x}_i$, $\tilde{p}_i$, визначаються як $\tilde{x}_i = \sum_a \mu_a x_i^{(a)}$, $\tilde{p}_i = \sum_a p_i^{(a)}$ та задовольняють співвідношення $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] = [\tilde{p}_i, \tilde{p}_j] = 0$,

$[\tilde{x}_i, \tilde{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Легко переконатися, що для координат (6.114) виконується (6.102).

Звернімо увагу, що з (6.114), (6.115) випливає, що координати центра мас системи залежать від імпульсів частинок $p_j^{(a)} = P_j^{(a)}$, а тому залежать від імпульсів центра мас та імпульсів відносного руху

$$\tilde{X}_i = \tilde{x}_i - \frac{1}{2} f\left(\frac{t}{\tau}\right) \sum_a \mu_a \theta_{ij}^{(a)} (\Delta P_j^{(a)} + \mu_a \tilde{P}_j). \tag{6.116}$$

У випадку, коли виконується рівність (6.108), отримаємо:

$$\tilde{X}_i = \tilde{x}_i - f\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{\gamma_{ij} \tilde{P}_j}{2M}. \tag{6.117}$$

Отже, завдяки припущенню про залежність параметрів деформації від маси (6.108) координати центра мас не залежать від імпульсів відносного руху. Рух центра мас багаточастинкової системи та відносний рухи можуть розглядатися незалежно.

6.5 Висновки до розділу 6

Досліджено проблему опису руху багаточастинкової системи в рамках різних некомутативних алгебр Лі типу (дужки Пуассона для координат пропорційні до часу (6.5)-(6.7), дужки Пуассона для координат пропорційні координаті (6.24)-(6.27), узагальнена некомутативна алгебра (6.57)-(6.59)). Співвідношення некомутативних алгебр Лі типу узагальнено для координат та імпульсів різних частинок. Ми показали, що дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас системи залежать від мас та координат частинок, що входять до її складу, та не відповідають співвідношенням некомутативної алгебри Лі типу. Знайдено, що у випадку, коли параметри θ_{ij}^0, θ_{ij}^k, $\tilde{\theta}_{ij}^k$ узагальненої некомутативної алгебри Лі типу (6.57)-(6.59), які відповідають частинці, є обернено пропорційні до її маси (6.66)-(6.68), а параметри $\bar{\theta}_{ij}^k$ є

однаковими для різних частинок (6.69), дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас системи відтворюють співвідношення узагальненої алгебри Лі типу. Отже, проблема опису руху багаточастинкової системи розв'язується. У часткових випадках, коли дужки Пуассона для координат пропорційні до часу (6.5)-(6.7), дужки Пуассона для двох координат пропорційні іншій координаті (6.24)-(6.27), умови (6.66)-(6.68) зводяться до (6.21), (6.40), відповідно. Ми також знайшли, що у квантованому просторі (6.5)-(6.7) завдяки умові (6.21) дужки Пуассона для координат центра мас та відносного руху дорівнюють нулю. Як результат, рух центра мас та відносний рух є незалежними. У випадку коли дужки Пуассона для координат пропорційні до іншої координати (6.24)-(6.27), рух центра мас багаточастинкової системи та відносний рухи не можуть вивчатися окремо, навіть при залежності параметра алгебри (6.40) від маси.

Знайдено рівняння руху частинки (тіла) у гравітаційному полі у просторі з некомутативністю Лі типу та проаналізовано виконання слабкого принципу еквівалентності. Отримано, що рівняння руху для частинки (тіла) у гравітаціному полі у просторі з некомутативною алгеброю Лі типу містять доданки залежні від маси. Отже, слабкий принцип еквівалентності не виконується. Отримано, що припущення про залежність параметрів алгебри Лі типу (6.57)-(6.59) від маси (6.66)-(6.68), а також умова (6.69) дозволяють відновити незалежність руху тіла у гравітаційному полі від його маси та від мас частинок, які входять до його складу, та, як наслідок, зберегти слабкий принцип еквівалентності.

Знайдено, що результати та висновки, отримані в рамках алгебри з некомутативністю Лі типу, можуть бути узагальнені на випадок, коли комутатор координат пропорційний до функції часу. Розгляну-

то простір з деформацією кручення, який характеризується співвідношеннями (6.1), (6.2). Показано, що у такому просторі не виконується слабкий принцип еківівалентності, координати частинок залежать від маси, координати центра мас системи залежать від імпульсів відносного руху. Встановлено, що у випадку, коли добуток параметра деформації та маси є величиною сталою (6.108), відновлюється слабкий принцип еквівалентності, некомутативні координати не залежать від маси та можуть розглядатися як кінематичні змінні, координати центра мас не залежать від імпульсів відносного руху.

Отже, припустивши, що параметри алгебр, які описують квантований простір, залежать від маси, можна розв'язати важливі проблеми у некомутативному просторі Лі типу, у просторі з деформацією кручення. А також, як було показано у попередніх розділах роботи, залежність параметрів деформованих алгебр від маси важлива у просторі з деформованою алгеброю Снайдера, у просторі з деформованою алгеброю Кемпфа, квантованому фазовому просторі канонічного типу, квантованому фазовому просторі канонічного типу зі сферичною симетрією. Отримані результати дозволяють зробити висновок, що ідея про залежність параметрів деформованих алгебр від маси є важлива для побудови послідовної теорії квантованого простору зі збереженими фундаментальними законами та принципами.

Розділ 7

Кореляційні функції бозе-газу у квантованому просторі та можливості експериментального спостереження нулів статистичної суми

7.1 Вступ

У розділі розглядається простір з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом, який описується деформованою алгеброю (1.71) [131–135]. Важливо зауважити, що деформація комутаційного співвідношення для оператора координати та імпульсу (1.71) пов'язана з q-деформованою алгеброю для операторів знищення a та породження a^+

$$[a, a^+]_q = aa^+ - qa^+a = 1. \tag{7.1}$$

А саме, алгебра (1.71) відповідає алгебрі (7.1) з параметром

$$q = \frac{1 + \hbar\sqrt{\alpha\beta}}{1 - \hbar\sqrt{\alpha\beta}}, \tag{7.2}$$

[251]. Зауважимо, що дослідження q-деформованих комутаційних співвідношень привернули багато уваги (див., для прикладу [133, 251–254] та посилання у них).

У розділі вивчається система бозе-частинок у квантованому просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (1.71), чи еквівалентно q-деформований бозе-газ. Знаходяться та досліджуються двочасові кореляційні функції такої системи та встановлюється зв'язок цих функцій зі сатистичною сумою q-деформованого бозе-газу при комплексній температурі. Така статистична сума може мати нулі, які відомі у літературі, як нулі Фішера [37].

Нулі статистичної суми з гамільтоніаном, який містить комплексні параметри, після публікацій Лі та Янга [35, 36] відомі у літературі, як нулі Лі-Янга. У роботі [36] Лі та Янг дослідили нулі статистичної суми спінової системи. А саме, була розглянута модель Ізінга з комплексним магнітним полем. Вчені довели теорему про те, що нулі статистичної суми цієї системи є уявними. У статті [255] знайдено, що для будь-якої моделі, подібної до моделі Ізінга з феромагнітною взаємодією, виконується теорема про те, що нулі статистичної суми є уявні (див. також [256–258]).

Аналіз нулів статистичної суми проводиться для вивчення термодинамічних властивостей багаточастинкових систем, дослідження фазових переходів [259]. Зокрема, широко використовується у статистичній фізиці метод аналізу густини нулів статистичної суми [260–262]. Цей метод був представлений у статті [260]. Тому знаходження та дослідження нулів Лі-Янга та нулів Фішера мають фундаментальну важливість (див., для прикладу, роботи [263–266] та посилання у них).

Фізичні системи, які описуються гамільтоніанами з комплексними параметрами, довгий час розглядалися, як такі, що експериментально не можуть бути реалізовані. Тому вважалося, що нулі Лі-Янга чи нулі Фішера не можуть бути експериментально визначені, а лише обчислені теоретично. У 2012 році у роботі [38] було запропоновано шлях

для експериметального спостереження нулів Лі-Янга. А вже у 2015 році проведено перший експеримент з вимірювання когерентності спіну, який взаємодіє з системою спінів з взаємодією Ізінга. Цей експеримент дозволив виміряти нулі Лі-Янга для спінової системи.

У літературі відомо багато робіт, які присвячені дослідженню нулів статистичної суми для спінових систем [38, 39, 260–262, 267–276]. Нулі Лі-Янга чи нулі Фішера для бозе- чи фермі-систем є не так добре дослідженими (див., для прикладу, [277–281]).

У цьому розділі ми знаходимо зв'язок нулів двочасових кореляційних функцій бозе-газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (q-деформованого бозе-газу) з нулями Фішера. Також ми встановлюємо, що подібний зв'язок існує для нулів двочасових кореляційних функцій взаємодіючого бозе-газу та нулів кореляційних функцій пробного спіна, який взаємодіє зі спіновою системою. Ці нулі пов'язані з нулями Лі-Янга. Такі результати відкривають нові можливості для експериментального спостереження нулів статистичної суми.

Розділ має таку структуру. У підрозділі 7.2 досліджуються нулі кореляційних функцій для q-деформованого бозе-газу та встановлюється їх зв'язок із нулями Фішера. Детально розглядається випадок q-деформованих бозе-частинок на двох рівнях. Можливості експериментального спостереження нулів статистичної суми вивчаються у підрозділах 7.3, 7.4. А саме, у підрозділі 7.3 знаходиться зв'язок нулів кореляційних функцій взаємодіючого бозе-газу, який описується моделлю Бозе-Хаббарда, з нулями Лі-Янга. Нулі кореляціної функції для спіна, який взаємодіє зі спіновою системою, та їх зв'язок з нулями статистичної суми знайдено у підрозділі 7.4. В кінці розділу представлено висновки.

Результати, висвітлені у цьому розділі, опубліковано у статтях

[52, 57, 60].

7.2 Зв'язок нулів двочасових кореляційних функцій q-деформованого бозе-газу з нулями Фішера

Розгляньмо N бозе-частинок на s рівнях ϵ_i $(i = 1, 2, ...s)$ у просторі, який характеризується співвідношенням (1.71). Гамільтоніан системи має вигляд:

$$H = \sum_{i=1}^{s} \epsilon_i a_i^+ a_i, \tag{7.3}$$

див., для прикладу, [282–284]. Оператори a_i^+, a_i – оператори породження та знищення бозона на i-тому рівні. Для a_i^+, a_i виконуються q-деформовані співвідношення (7.1). Оператори, які відповідають різним рівням, комутують.

$$[a_i, a_j^+] = [a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0, \tag{7.4}$$

де $i \neq j$. Також для оператора кількості частинок $\hat{n}_i$ на i-ому рівні та операторів породження та знищення a_i^+, a_i виконуються такі комутаційні співвідношення:

$$[a_i, \hat{n}_i] = a_i, \tag{7.5}$$

$$[a_i^+, \hat{n}_i] = -a_i^+, \tag{7.6}$$

(див., для прикладу, [285]) Оператори a_i, a_i^+, $\hat{n}_i$ можуть бути представлені через оператори знищення та породження b_i, b_i^+, комутатори для яких мають звичний вигляд:

$$[b_i, b_j^+] = \delta_{ij}, \tag{7.7}$$

А саме, існує таке представлення

$$a_i = b_i f(b_i^+ b_i), \tag{7.8}$$

$$a_i^+ = f(b_i^+ b_i) b_i^+, \tag{7.9}$$

де функція f має такий вигляд:

$$f(x) = \sqrt{\frac{[x]_q}{x}}, \tag{7.10}$$

$$[x]_q = \frac{q^x - 1}{q - 1}, \tag{7.11}$$

(див., для прикладу, [286]). Звернімо увагу, що оператори b_i, b_i^+ та оператор кількості частинок

$$\hat{n}_i = b_i^+ b_i, \tag{7.12}$$

задовольняють звичні комутаційні співвідношення:

$$[b_i, \hat{n}_i] = b_i, \tag{7.13}$$

$$[b_i^+, \hat{n}_i] = -b_i^+. \tag{7.14}$$

Енергетичні рівні системи бозе-частинок з гамільтоніаном (7.3) є такими:

$$E_{n_1, n_2, ..., n_s} = \sum_{i=1}^{s} \epsilon_i [n_i]_q, \tag{7.15}$$

де n_i – числа заповнення, $n_i = 0, 1, 2, ...$, $[n_i]_q$ позначає q-деформовані числа заповнення, які визначаються як (7.11).

Зауважимо, що ми вивчаємо канонічний ансамбль з фіксованою кількістю частинок N. Тому для чисел заповнення n_i виконується така умова:

$$\sum_{i=1}^{s} n_i = N. \tag{7.16}$$

Дослідімо двочасові кореляційні функції для бозе-газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (q-деформованого бозе-газу). Ці функції означаються як

$$\langle\prod_{j=1}^{s} a_j^+(t_1)a_j(t_2)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)}\mathrm{Tr}e^{-\beta H}a_1^+(t_1)a_1(t_2)...a_s^+(t_1)a_s(t_2), \quad (7.17)$$

тут оператори $a_j(t)$ мають такий вигляд

$$a_j(t) = e^{iHt/\hbar}a_j e^{-iHt/\hbar}, \quad (7.18)$$

$Z(\beta)$ – статистична сума

$$Z(\beta) = \mathrm{Tr}e^{-\beta H}, \quad (7.19)$$

$$\beta = \frac{1}{kT}. \quad (7.20)$$

Врахувавши вигляд гамільтоніану системи (7.3) у виразі (7.18), можемо записати:

$$a_j(t) = e^{i\epsilon_j a_j^+ a_j t/\hbar}a_j e^{-i\epsilon_j a_j^+ a_j t/\hbar}. \quad (7.21)$$

Перепишемо оператори $a_j(t)$ у зручному вигляді для обчислення кореляційних функцій. Для цього використаємо такі тотожності

$$a_j f(a_j^+ a_j) = f(a_j a_j^+)a_j = f(q a_j^+ a_j + 1)a_j, \quad (7.22)$$

$$f(a_j^+ a_j)a_j = f(a_j a_j^+/q - 1/q)a_j = a_j f(a_j^+ a_j/q - 1/q), \quad (7.23)$$

які виконуються для довільної функції f, для якої існує розклад в ряд Тейлора (див., для прикладу, [287]). На основі тотожності (7.23), запишемо $a_j(t)$ як

$$a_j(t) = a_j e^{-i\epsilon_j t/q\hbar}e^{-i(1-1/q)\epsilon_j a_j^+ a_j t/\hbar}. \quad (7.24)$$

Для оператора $a_j^+(t)$, спряженого до $a_j(t)$, маємо такий результат:

$$a_j^+(t) = e^{i\epsilon_j t/q\hbar}e^{i(1-1/q)\epsilon_j a_j^+ a_j t/\hbar}a_j^+. \quad (7.25)$$

Використавши отримані вирази (7.24), (7.25), запишемо двочасову кореляційну функцію (7.17)

$$\langle\prod_{j=1}^{s} a_j^+(t_1)a_j(t_2)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)}\mathrm{Tr}e^{-\beta H}\prod_{j=1}^{s} e^{i\epsilon_j\tau/q\hbar}e^{i(1-1/q)\epsilon_j a_j^+ a_j\tau/\hbar}a_j^+ a_j =$$

$$= e^{i\sum_j \epsilon_j\tau/q\hbar}\frac{1}{Z(\beta)}\mathrm{Tr}e^{-\beta H}e^{\sum_j i(1-1/q)\epsilon_j a_j^+ a_j\tau/\hbar}\prod_{j=1}^{s} a_j^+ a_j, \tag{7.26}$$

тут для зручності ми ввели позначення:

$$\tau = t_1 - t_2. \tag{7.27}$$

Врахувавши (7.3), перепишемо вираз для кореляційної функції у такому вигляді:

$$\langle\prod_{j=1}^{s} a_j^+(t_1)a_j(t_2)\rangle = e^{i\sum_j \epsilon_j\tau/q\hbar}\frac{1}{Z(\beta)}\mathrm{Tr}e^{-\tilde{\beta}H}\prod_{j=1}^{s} a_j^+ a_j, \tag{7.28}$$

де $\tilde{\beta}$ – комплексна температура, яка визначається як:

$$\tilde{\beta} = \beta - i\left(1 - \frac{1}{q}\right)\frac{\tau}{\hbar} = \beta + i\beta_1. \tag{7.29}$$

Важливо зазначити, що уявна частина комплексної температури β_1 появляється через квантованість простору (чи q-деформацією співвідношень для операторів породження та знищення), а також пов'язана з еволюцією системи. Зауважимо, що, поклавши $q = 1$, отримаємо, що величина $\tilde{\beta}$ є дійсною.

Вираз для кореляційної функції можна переписати як

$$\langle\prod_{j=1}^{s} a_j^+(t_1)a_j(t_2)\rangle = e^{i\sum_j \epsilon_j\tau/q\hbar}\frac{1}{Z(\beta)}\left(-\frac{1}{\tilde{\beta}}\right)^s\left(\prod_{j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial\epsilon_j}\right)\mathrm{Tr}e^{-\tilde{\beta}H}. \tag{7.30}$$

Обчисливши Tr за власними станами гамільтоніана (7.3), знайдемо:

$$Z(\tilde{\beta}) = \mathrm{Tr}e^{-\tilde{\beta}H} = \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\cdots\sum_{n_s=0}^{N} e^{-\tilde{\beta}(\epsilon_1[n_1]_q+\epsilon_2[n_2]_q+\ldots+\epsilon_s[n_s]_q)}. \tag{7.31}$$

Звернімо увагу, що сума у (7.31) не може бути факторизована, оскільки для чисел заповнення n_j виконується рівність (7.16).

Важливо, що у виразі (7.31) статистична сума залежить від комплексної температури. Отже, ми встановили зв'язок двочасової кореляційної функції q-деформованого бозе-газу з статистичною сумою при комплексній температурі (7.30), а тому знайшли зв'язок нулів кореляційної функції з нулями Фішера.

7.2.1 Дворівнева система бозе-частинок

Розгляньмо випадок дворівневої системи. Дослідімо систему N бозе-частинок, яка описуються гамільтоніаном (7.3) з $s = 2$. З умови (7.16), отримаємо: $n_2 = N - n_1$. Отже, статистична сума (7.31) може бути зведена до такого вигляду

$$Z(\tilde{\beta}) = \sum_{n_1=0}^{N} e^{-\tilde{\beta}(\epsilon_1[n_1]_q+\epsilon_2[N-n_1]_q)}. \tag{7.32}$$

Запишемо кореляційну функцію у цьому випадку

$$\langle a_1^+(t_1)a_1(t_2)a_2^+(t_1)a_2(t_2)\rangle =$$

$$= e^{i\sum_j \epsilon_j\tau/q\hbar}\frac{1}{Z(\beta)}\sum_{n_1=0}^{N} e^{-\tilde{\beta}(\epsilon_1[n_1]_q+\epsilon_2[N-n_1]_q)}[n_1]_q[N-n_1]_q =$$

$$= e^{i\sum_j \epsilon_j\tau/q\hbar}\frac{Z_c(\tilde{\beta})}{Z(\beta)}. \tag{7.33}$$

Для зручності ми ввели позначення:

$$Z_c(\tilde{\beta}) = \sum_{n_1=0}^{N} e^{-\tilde{\beta}(\epsilon_1[n_1]_q+\epsilon_2[N-n_1]_q)}[n_1]_q[N-n_1]_q. \tag{7.34}$$

Зауважимо, що нулі статистичної суми $Z_c(\tilde{\beta})$ відповідають нулям кореляційної функції. Знайдемо нулі кореляційної функції та нулі ста-

тистичної суми у часткових випадках, коли кількість частинок у системі мала.

Для одночастинкової системи ($N = 1$) маємо, що кореляційна функція дорівнює нулеві, та статистичну суму можемо записати як:

$$Z(\tilde{\beta}) = e^{-\tilde{\beta}\epsilon_1}\left(1 + e^{-\tilde{\beta}\Delta\epsilon}\right), \tag{7.35}$$

де

$$\Delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1. \tag{7.36}$$

Рівняння $Z(\tilde{\beta}) = 0$ має такі розв'язки:

$$\beta = 0, \quad \beta_1\Delta\epsilon = \pi(2n+1), \quad n = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{7.37}$$

де β та β_1 є дійсна та уявна частини $\tilde{\beta}$.

Введемо нову змінну $z = e^{-\tilde{\beta}\epsilon_1}$. В комплексній площині z нулі лежать на колі одиничного радіуса. Звернімо увагу, що із (7.29) маємо, що у випадку, коли оператори породження та знищення задовольняють звичні співвідношення ($q = 1$), уявна частина температури дорівнює нулеві $\beta_1 = 0$. Тому у звичному просторі статистична сума бозе-газу (7.3) з $s = 2$ не має нулів.

У випадку двочастинкової системи $N = 2$, ми також маємо тривіальний результат для кореляційної функції. Ця функція дорівнює нулю.

Для системи трьох частинок $N = 3$ можемо записати

$$Z_c(\tilde{\beta}) = (1+q)e^{-\tilde{\beta}(\epsilon_1(q+1)+\epsilon_2)}\left(1 + e^{-\tilde{\beta}q\Delta\epsilon}\right). \tag{7.38}$$

Кореляційна функція має нулі при

$$\beta = 0, \quad \beta_1 q\Delta\epsilon = \pi(2n+1), \quad n = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{7.39}$$

Із (7.29) та (7.39) маємо, що кореляційна функція дорівнює нулеві при

$$\tau = \frac{\hbar}{(q-1)\Delta\epsilon}\pi(2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{7.40}$$

Нулі кореляційної фукції лежать на колі одиничного радіуса в площині z. Коли параметр деформації q дорівнює одиниці, кореляційна функція не має скінченних нулів. Звернімо увагу, що у границі $q \to 1$ нулі кореляційної функції прямують до нескінченості.

У загальному випадку для системи N бозе-частинок нулі статистичної суми та нулі кореляційної функції в комплексній площині $z = e^{-\tilde{\beta}\epsilon_1}$ визначаються як нулі поліному з дійсними степенями

$$Z = \sum_{n_1=0}^{N} z^{[n_1]_q + [N-n_1]_q \epsilon_2/\epsilon_1}, \tag{7.41}$$

$$Z_c = \sum_{n_1=0}^{N} z^{[n_1]_q + [N-n_1]_q \epsilon_2/\epsilon_1} [n_1]_q [N-n_1]_q. \tag{7.42}$$

При $q = 2$ величини

$$[n_1]_q = 2^{n_1} - 1, \tag{7.43}$$

$$[N-n_1]_q = 2^{N-n_1} - 1, \tag{7.44}$$

є цілими. Тому у випадку, коли відношення ϵ_2/ϵ_1 є також цілим, вирази (7.41), (7.42) можуть бути переписаними, як поліноми z з цілими степенями. Маємо:

$$Z = \sum_{n_1=0}^{N} z^{(2^{n_1}-1) + (2^{N-n_1}-1)\epsilon_2/\epsilon_1}, \tag{7.45}$$

$$Z_c = \sum_{n_1=0}^{N} z^{(2^{n_1}-1) + (2^{N-n_1}-1)\epsilon_2/\epsilon_1} (2^{n_1}-1)(2^{N-n_1}-1). \tag{7.46}$$

Нулі статистичної суми (7.45) та нулі кореляційної функції (7.46) представлено на рис. 7.1. Зауважимо, що кількість нулів Фішера є більшою

від числа частинок N. Це пов'язано з тим, що залежність енергії від кількості q-деформованих бозе-частинок на заданому рівні є експоненційною.

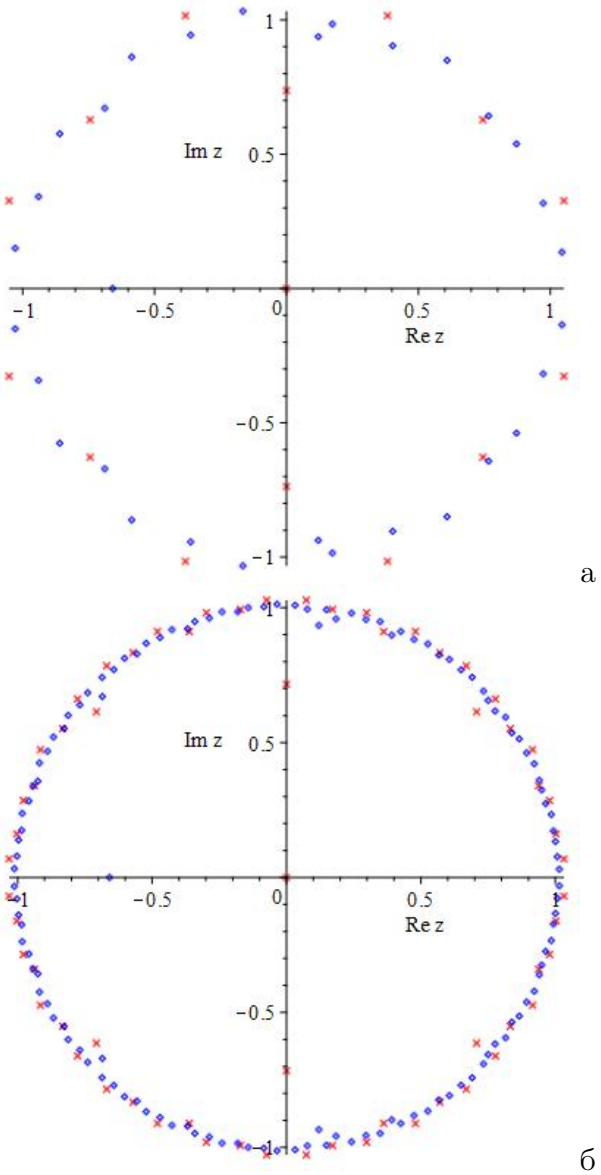


Рис. 7.1: Нулі Фішера (7.45) (позначені хрестиками) та нулі кореляційної функції (7.46) (позначені колами) для $q = 2$, $\epsilon_2 = 0$ (а) $N = 5$, (б) $N = 7$.

Звернімо увагу, що знайдена рівність (7.30) пов'язує нулі статистичної суми з експериментально спостережуваними величинами. Тому отриманий результат відкриває нові можливості для спостереження нулів Фішера. Тут варто також зауважити, що нещодавно q-

деформований осцилятор був експериментально реалізований з використанням коливального контуру [288]. Тому ми сподіваємося, що отриманий результат (7.30) відкриє можливість експериментального спостереження нулів Фішера для системи, описаної у роботі [288].

Квантованість простору (1.71) чи q-деформація комутаційних співвідношень для операторів породження та знищення ефективно зумовлюють взаємодію бозе-частинок [289,290]. Тому з метою пошуку нових можливостей спостереження нулів статистичної суми важливо дослідити також кореляційні функції взаємодіючого бозе-газу, що буде зроблено у наступному підрозділі.

7.3 Кореляційні функції взаємодіючого бозе-газу та нулі Лі-Янга

Дослідімо кореляційні функції системи N бозе-частинок з гамільтоніаном:

$$H = \sum_{i=1}^{s} \epsilon_i \hat{n}_i + \gamma \sum_{i=1}^{s} \hat{n}_i^2, \tag{7.47}$$

де s – кількість рівнів, ϵ_i – енергетичні рівні невзаємодіючих частинок, γ – константа взаємодії ($\gamma > 0$ відповідає відштовхуванню, $\gamma < 0$ відповідає притягянню), $\hat{n}_i$ – оператор кількості частинок на i-тому рівні, який має вигляд

$$\hat{n}_i = a_i^+ a_i, \tag{7.48}$$

де a_i^+, a_i – оператори породження та знищення частинки, для яких виконується співвідношення $[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$. Власні значення оператора $\hat{n}_i$ є такими $n_i = 0, 1, 2, ...$ Зауважимо, що ми розглядаємо гамільтоніан (7.47), який є спрощеним варіантом гамільтоніану Бозе-

Хаббарда [291–293]. Також ми вивчаємо випадок, коли кількість частинок системи є фіксована та дорівнює N. Тому для чисел заповнення n_i виконується умова (7.16).

Для системи з гамільтоніаном (7.47) порахуємо двочасову кореляційну функцію:

$$\langle a_j^+(t_1)a_j(t_2)\rangle = \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}e^{-\beta H}a_j^+(t_1)a_j(t_2), \tag{7.49}$$

де оператори $a_j(t)$ визначаються як

$$a_j(t) = e^{iHt/\hbar}a_j e^{-iHt/\hbar}, \tag{7.50}$$

Z – статистична сума

$$Z = \mathrm{Tr}e^{-\beta H}, \tag{7.51}$$

$\beta = 1/kT$.

Врахувавши вигляд гамільтоніану (7.47), отримаємо:

$$a_j(t) = e^{i(\epsilon_j\hat{n}_j+\gamma(\hat{n}_j)^2)t/\hbar}a_j e^{-i(\epsilon_j\hat{n}_j+\gamma(\hat{n}_j)^2)t/\hbar}. \tag{7.52}$$

Використавши тотожність

$$a_j f(\hat{n}) = a_j f(a_j^+ a_j) = f(a_j a_j^+)a_j = f(\hat{n}+1)a_j, \tag{7.53}$$

(див., для прикладу, [287]), ми можемо переписати $a_j(t)$ як

$$a_j(t) = e^{i(\epsilon_j\hat{n}_j+\gamma(\hat{n}_j)^2)t/\hbar}e^{-i(\epsilon_j(\hat{n}_j+1)+\gamma(\hat{n}_j+1)^2)t/\hbar}a_j =$$

$$= e^{-i(\epsilon_j+\gamma+2\gamma\hat{n}_j)t/\hbar}a_j. \tag{7.54}$$

Запишемо оператор $a_j(t)$ у вигляді

$$a_j(t) = a_j e^{-i(\epsilon_j-\gamma+2\gamma\hat{n}_j)t/\hbar}, \tag{7.55}$$

та знайдемо спряжений оператор

$$a_j^+(t) = e^{i(\epsilon_j-\gamma+2\gamma\hat{n}_j)t/\hbar}a_j^+. \tag{7.56}$$

Підставивши вирази для $a_j(t)$ та $a_j^+(t)$ в (7.49), отримаємо такий результат

$$\langle a_j^+(t_1)a_j(t_2)\rangle = e^{i(\epsilon_j-\gamma)\tau/\hbar}\frac{1}{Z}\mathrm{Tr}e^{-\beta H}e^{i2\gamma\hat{n}_j\tau/\hbar}a_j^+a_j =$$

$$e^{i(\epsilon_j-\gamma)\tau/\hbar}\frac{1}{Z}\mathrm{Tr}e^{-\beta\tilde{H}}\hat{n}_j, \qquad (7.57)$$

де ми використали позначення:

$$\tau = t_1 - t_2. \qquad (7.58)$$

Означимо гамільтоніан

$$\tilde{H} = \sum_{k=1}^{s}\tilde{\epsilon}_k\hat{n}_k + \gamma\sum_{k=1}^{s}\hat{n}_k^2, \qquad (7.59)$$

де

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k, \quad \text{коли} \quad k \neq j, \qquad (7.60)$$

$$\tilde{\epsilon}_j = \epsilon_j - i\frac{2\gamma\tau}{\beta\hbar}. \qquad (7.61)$$

У (7.61) індекс j відповідає енергетичному рівню, для якого розраховується двочасова кореляційна функція (7.49). Цей індекс є фіксований. Важливо звернути увагу, що гамільтоніан (7.59) залежить від комплексного параметра (7.61). Обчисливши Tr за власними станами операторів кількості частинок, знайдемо:

$$\langle a_j^+(t_1)a_j(t_2)\rangle =$$

$$= \frac{e^{i(\epsilon_j-\gamma)\tau/\hbar}}{Z}\sum_{n_1}\sum_{n_2}...\sum_{n_s}n_j\exp\left(-\beta\sum_{k=1}^{s}(\tilde{\epsilon}_k n_k + \gamma n_k^2)\right). \qquad (7.62)$$

Нагадаймо, що для чисел заповнення у (7.62) виконується умова (7.16). Тому у (7.62) сума за числами заповнення не може бути факторизована.

Ввівши позначення:

$$\tilde{Z} = \mathrm{Tr} e^{-\beta \tilde{H}} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} ... \sum_{n_s} \exp\left(-\beta \sum_{k=i}^{s} (\tilde{\epsilon}_k n_k + \gamma n_k^2)\right), \qquad (7.63)$$

де числа n_k задовольняють умову (7.16), перепишемо кореляційну функцію у такому вигляді:

$$\langle a_j^+(t_1) a_j(t_2) \rangle = -i \frac{\hbar}{2\gamma} \frac{e^{i(\epsilon_j - \gamma)\tau/\hbar}}{Z} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tau}. \qquad (7.64)$$

Важливо звернути увагу, що гамільтоніан у статистичній сумі (7.63) залежить від комплексних величин. Отже, статистична сума $\tilde{Z}$ може дорівнювати нулеві. Відзначимо, що відповідно до отриманої рівності (7.64) нулі Лі-Янга статистичної суми (7.63) пов'язані з нулями кореляційної функції. На основі (7.64), врахувавши, що при $\tau = 0$ $\tilde{Z} = Z$, отримаємо:

$$\tilde{Z} = Z \left(i \frac{2\gamma}{\hbar} \int_0^\tau d\tau' \langle a_j^+(t_2 + \tau') a_j(t_2) \rangle e^{-i(\epsilon_j - \gamma)\tau'/\hbar} + 1 \right). \qquad (7.65)$$

7.3.1 Система бозе-частинок на двох рівнях

Дослідімо кореляційні функції системи N бозе-частинок з гамільтоніаном (7.47) у випадку $s = 2$. Врахувавши (7.16), маємо $n_2 = N - n_1$. Запишемо кореляційну функцію для рівня з $j = 1$ системи

$$\langle a_1^+(t_1) a_1(t_2) \rangle =$$

$$= \frac{e^{i(\epsilon_1 - \gamma)\tau/\hbar}}{Z} e^{-\beta\epsilon_2 N - \beta\gamma N^2} \sum_{n_1=0}^{N} n_1 e^{-\beta(n_1(\epsilon_1 - \epsilon_2 - 2\gamma N) + 2\gamma n_1^2)} e^{i2\gamma n_1 \tau/\hbar}. \qquad (7.66)$$

Відповідно до (7.63) статистична сума з гамільтоніаном, який містить комплексні параметри, для дворівневої системи має такий вигляд:

$$\tilde{Z} = e^{-\beta\epsilon_2 N - \beta\gamma N^2} \sum_{n_1=0}^{N} e^{-\beta(n_1(\epsilon_1 - \epsilon_2 - 2\gamma N) + 2\gamma n_1^2)} e^{i2\gamma n_1 \tau/\hbar}. \qquad (7.67)$$

Введемо таку комплексну змінну:

$$q = e^{-\beta(\epsilon_1-\epsilon_2)+i2\gamma\tau/\hbar} = \rho e^{i\phi}, \tag{7.68}$$

тут

$$\rho = e^{-\beta(\epsilon_1-\epsilon_2)}, \tag{7.69}$$

$$\phi = \frac{2\gamma\tau}{\hbar}. \tag{7.70}$$

Відзначимо, що змінні ρ, ϕ можуть розглядатися, як незалежні, якщо є незалежними параметри $\epsilon_1 - \epsilon_2$ та τ в гамільтоніані. У цьому випадку можемо записати статистичну суму $\tilde{Z}$, як функцію q, у такому вигляді:

$$\tilde{Z} = e^{-\beta\epsilon_2 N-\beta\gamma N^2} P_1(q,\beta), \tag{7.71}$$

тут

$$P_1(q,\beta) = \sum_{n_1=0}^{N} q^{n_1} e^{-\beta 2\gamma n_1(n_1-N)}. \tag{7.72}$$

Введемо позначення

$$P_2(q,\beta) = \sum_{n_1=0}^{N} n_1 q^{n_1} e^{-\beta 2\gamma n_1(n_1-N)} = q\frac{\partial P_1}{\partial q}, \tag{7.73}$$

та запишемо кореляційну функцію як

$$\langle a_1^+(t_1)a_1(t_2)\rangle = \frac{e^{i(\epsilon_1-\gamma)\tau/\hbar}}{Z} e^{-\beta\epsilon_2 N-\beta\gamma N^2} P_2(q,\beta). \tag{7.74}$$

Відзначимо, що тут зручніше розглядати похідну за q ніж похідну за τ, як було зроблено у (7.64). Звернімо увагу, що нулі статистичної суми пов'язані з нулями полінома P_1, а нулі кореляційної функції з нулями полінома P_2.

При високих температурах, розглянувши границю $\beta \to 0$, маємо, що нулі статистичної суми пов'язані з нулями полінома

$$P_1(q,0) = \sum_{n_1=0}^{N} q^{n_1} = \frac{q^{N+1}-1}{q-1}, \tag{7.75}$$

а нулі кореляційної функції пов'язані з нулями полінома

$$P_2(q,0) = \sum_{n_1=0}^{N} n_1 q^{n_1} = \frac{q}{(q-1)^2}\left(Nq^{N+1} - (N+1)q^N + 1\right). \tag{7.76}$$

Із (7.75) випливає, що нулі Лі-Янга лежать в комплексній площині q на колі одиничного радіуса, а саме:

$$\rho = 1, \quad \phi = \frac{2\pi l}{N+1}, \tag{7.77}$$

де $l = 1, 2, ...N$. На рисунку 7.2 представлено нулі кореляційної функції та нулі Лі-Янга при $\beta \to 0$.

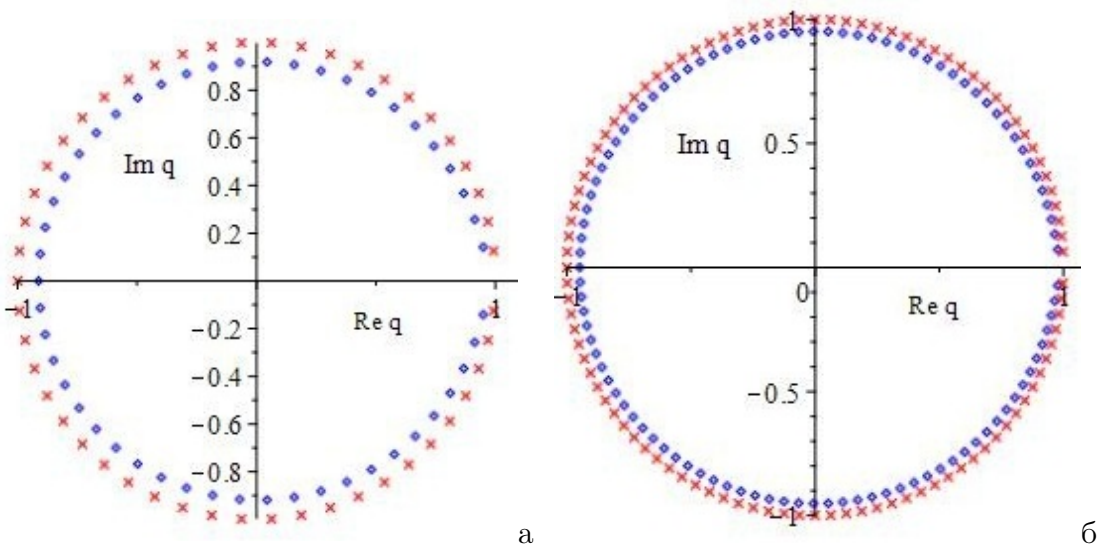


Рис. 7.2: Нулі кореляційної функції, позначені колами та нулі Лі-Янга, позначені хрестиками, у границі $\beta \to 0$ для (а) $N = 50$, (б) $N = 100$.

На основірівності (7.73) та за теоремою Гаусса-Лукаса, можемо зробити висновок, що опукла оболонка нулів полінома P_1 (нулів Лі-Янга)

містить нулі полінома P_2. Отже, опукла оболонка нулів Лі-Янга містить нулі кореляційної функції, що добре видно на рисунках 7.2-7.7, де нулі кореляційної функції та нулі статистичної суми представлено для різних кількостей частинок системи N та при різних температурах β.

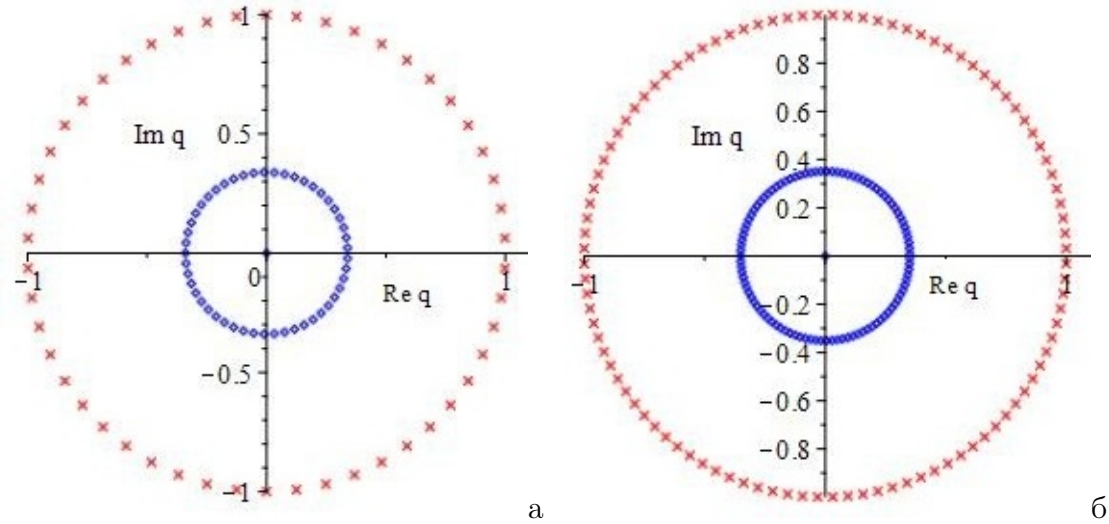


Рис. 7.3: Нулі кореляціної функції (7.74) (позначені колами) та нулі Лі-Янга (7.71) (позначені хрестиками) для (а) $N = 50$, $2\beta\gamma = -1$ (б) $N = 100$, $2\beta\gamma = -1$.

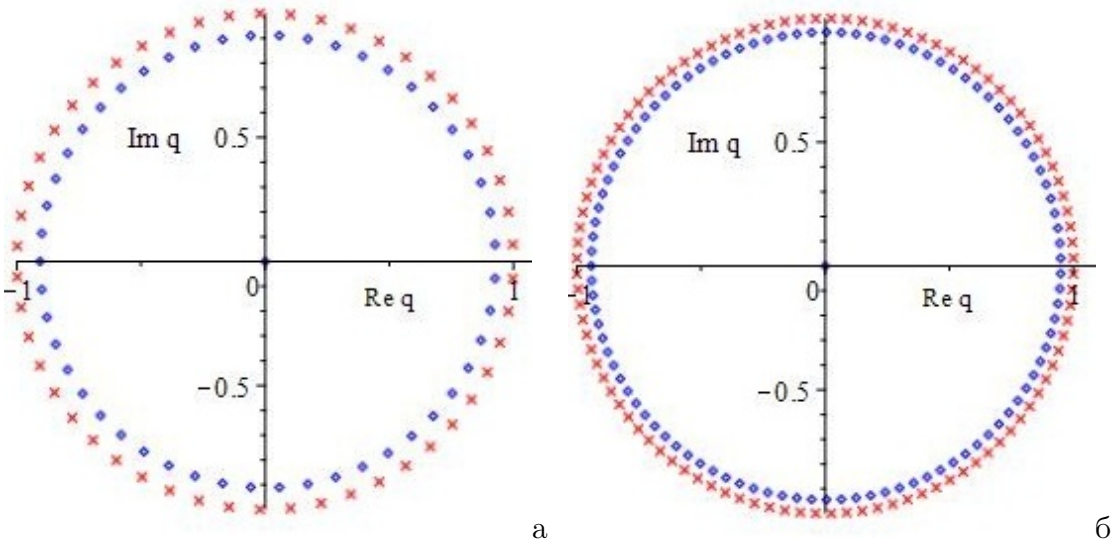


Рис. 7.4: Нулі кореляційної функції (7.74) (позначені колами) та нулі Лі-Янга (7.71) (позначені хрестиками) для (а) $N = 50$, $2\beta\gamma = -0.01$ (б) $N = 100$, $2\beta\gamma = -0.01$.

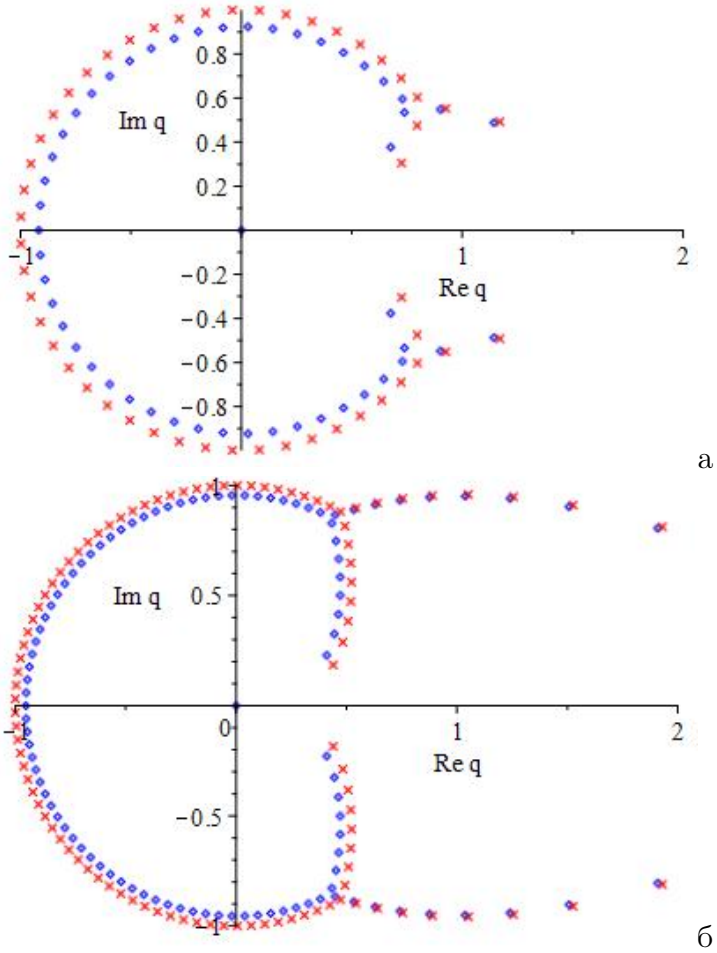


Рис. 7.5: Нулі кореляційної функції (7.74) (позначені колами) та нулі Лі-Янга (7.71) (позначені хрестиками) для (а) $N = 50$, $2\beta\gamma = 0.01$ (б) $N = 100$, $2\beta\gamma = 0.01$.

Зауважимо також, що за теоремою Куртца [294] нулі полінома степеня $n \geq 2$ з додатніми коефіцієнтами

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \tag{7.78}$$

є дійсні та різні, якщо виконується умова:

$$a_i^2 - 4a_{i-1}a_{i+1} > 0, \quad i = 1, 2...n-1. \tag{7.79}$$

Оскільки коефіцієнти полінома є додатніми, то в цьому випадку нулі цього полінома є від'ємні.

Для полінома $P_1(q, \beta)$ умова (7.79) задовольняється при

$$\beta\gamma > \frac{\ln 2}{2}. \tag{7.80}$$

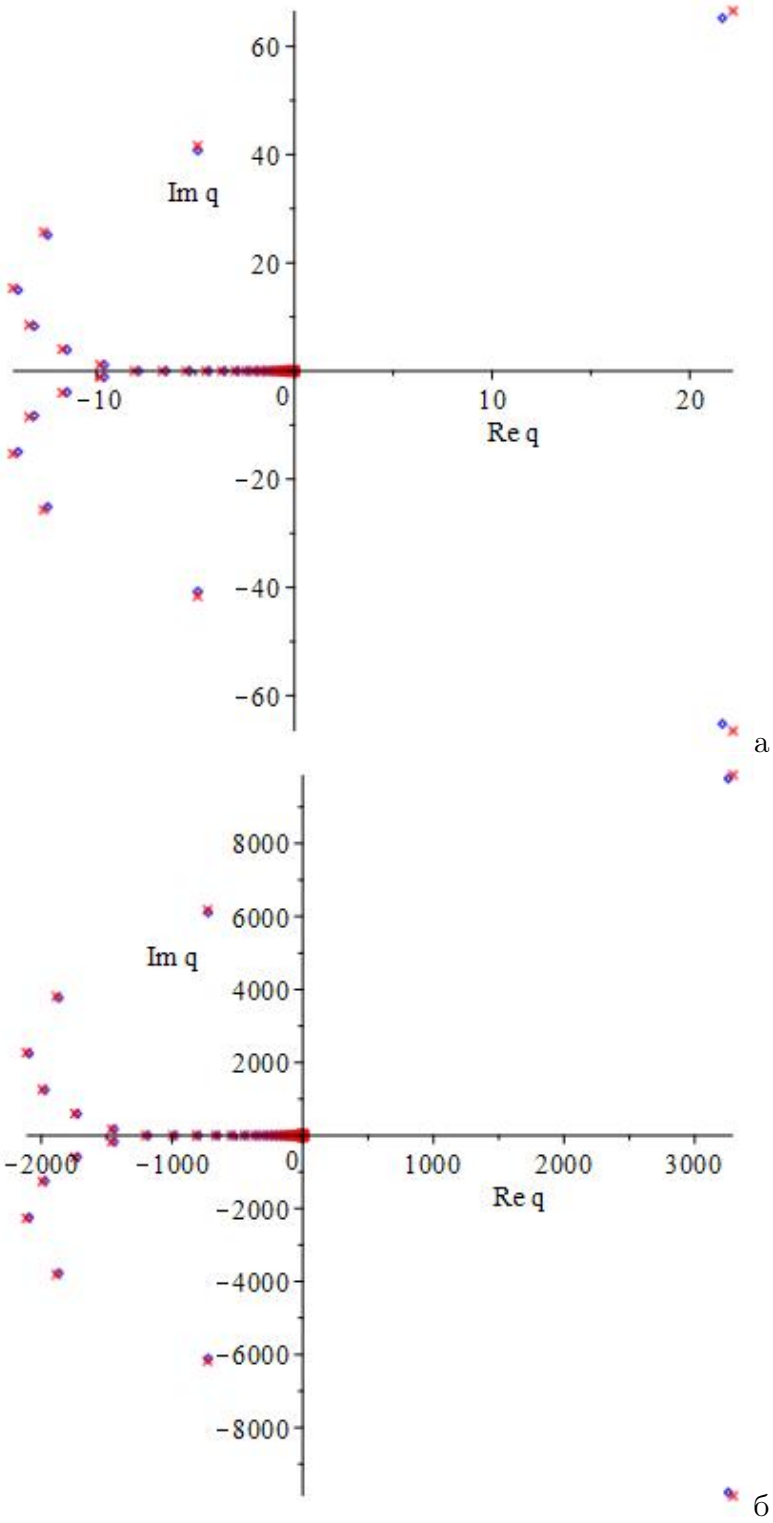


Рис. 7.6: Нулі кореляційної функції (7.74) (позначені колами) та нулі Лі-Янга (7.71) (позначені хрестиками) для (а) $N = 50$, $2\beta\gamma = 0.1$ (б) $N = 100$, $2\beta\gamma = 0.1$.

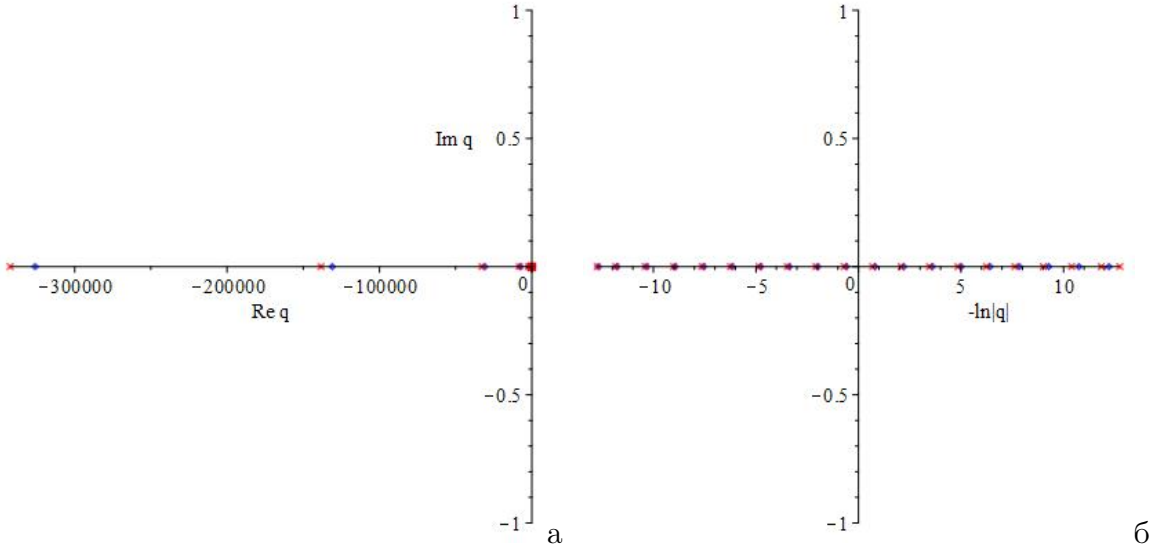


Рис. 7.7: Нулі кореляціної функції (7.74) (позначені колами) та нулі Лі-Янга (7.71) (позначені хрестиками) для $N = 20$, $2\beta\gamma = \ln 2$ (а) на комплексній площині q; (б) в логарифмічній шкалі.

Врахувавши (7.79), для $P_2(q, \beta)$ можемо записати:

$$\beta\gamma > \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\ln\left(1 + \frac{1}{(N-1)^2 - 1}\right). \tag{7.81}$$

Отримуємо, що ці умови виконуються при $\gamma > 0$. Відзначимо, що умова (7.81) накладає сильніше обмеження на $\beta\gamma$ ніж (7.80). Звідси маємо, що у випадку, коли нулі статистичної суми є дійсними, також дійсними є нулі кореляційної функції. Цей висновок також випливає з теореми Гауса-Лукаса. Отже, при виконанні умови (7.80), нулі статистичної суми та кореляційної функції є дійсними, що показано на рисунку 7.7.

Дослідімо також верхню межу значень нулів кореляційної функції та нулів Лі-Янга. Таку межу визначає межа Фудзівара (Fujiwara) [295]. Для полінома P_1 у випадку $\gamma > 0$ отримаємо, що верхня межа нулів Лі-Янга визначається як

$$2e^{2\beta\gamma(N-1)}. \tag{7.82}$$

Верхня межа для нулів кореляційної функції (нулів полінома P_2) у

випадку $\gamma > 0$ має вигляд:

$$2(1 - 1/N)e^{2\beta\gamma(N-1)}. \tag{7.83}$$

Ці результати пояснюють зображені на рисунках (7.5)-(7.7) нулі Лі-Янга та нулі кореляційної функції для систем з різними кількостями частинок, а також при різних температурах у випадку $\gamma > 0$.

Коли $\gamma < 0$ та кількість частинок N є велика, верхня межа для значень нулів полінома P_1 має такий вигляд:

$$\max(2e^{-2\beta|\gamma|}, 2^{(1-1/N)}), \tag{7.84}$$

та верхня межа нулів полінома P_2 має вигляд:

$$2(1/N)^{1/(N-1)}e^{-2\beta|\gamma|}. \tag{7.85}$$

Ці результати пояснюють рисунки 7.3, 7.4, на яких представлено нулі Лі-Янга та нулі кореляційної функції у випадку, коли бозе-частинки притягуються. При низьких температурах, у границі $\beta \to \infty$ отримаємо:

$$P_1 = 1 + q^N, \quad P_2 = Nq^N. \tag{7.86}$$

Отже, можемо зробити висновок, що у границі $\beta \to \infty$ нулі Лі-Янга лежать на колі

$$q = e^{i\pi(2n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, ...N - 1, \tag{7.87}$$

а нулі кореляційної функції досягаються при $q = 0$.

У наступному розділі буде досліджено можливості експериментального спостереження нулів статистичної суми для спінових систем.

7.4 Двочасові кореляційні функції спінових систем та нулі Лі-Янга

Розгляньмо достатньо загальний гамільтоніан

$$H = H' - h\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z. \tag{7.88}$$

де σ_j^α – оператори Паулі, $\alpha = x, y, z$, чи $1, 2, 3$. Ми розглядаємо тільки одне обмеження на вираз для H', а саме, що комутатор цього гамільтоніану з $\sum_{i=1}^{N}\sigma_j^z$ дорівнює нулю

$$[H', \sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z] = 0. \tag{7.89}$$

Для прикладу, гамільтоніан H' може бути гамільтоніаном Ізінга

$$H' = -\sum_{jj'} J_{jj'}\sigma_j^z\sigma_{j'}^z, \tag{7.90}$$

(див., для прикладу, [296, 297]) гамільтоніаном Гайзенберга

$$H' = -\sum_{jj'} J_{jj'}(\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_{j'}) \tag{7.91}$$

(див., для прикладу, [297]) чи іншим гамільтоніаном, для якого виконується рівність (7.89).

Оператори Паулі σ_j^α пов'язані зі спіновими операторами $s_j^\alpha = \hbar\sigma_j^\alpha/2$. Для σ_j^α виконуються такі комутаційні та антикомутаційні співвідношення:

$$[\sigma_j^\alpha, \sigma_{j'}^\beta] = 2i\delta_{jj'}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\sigma_j^\gamma, \tag{7.92}$$

$$\{\sigma_i^\alpha, \sigma_i^\beta\} = 2\delta^{\alpha\beta}, \tag{7.93}$$

де $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ – антисиметричний тензор (див., для прикладу, [233]).

Розгляньмо також пробний спін-1/2, який взаємодіє зі спіновою системою з гамільтоніаном (7.88). Ця взаємодія описується як

$$H_{int} = -\lambda\sigma_0^z \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^z, \tag{7.94}$$

де λ – константа зв'язку, оператор σ_0^z відповідає пробному спіну.

Отже, ми вивчаємо спінову систему, яка описується гамільтоніаном:

$$H_T = H + H_0 + H_{int}, \tag{7.95}$$

де H_0 відповідає гамільтоніану пробного спіну в магнітному полі h_0

$$H_0 = -h_0\sigma_0^z. \tag{7.96}$$

Зауважимо, що подібний до (7.95) гамільтоніан вивчався в статті [38].

Порахуймо кореляційну функцію для пробного спіну. Розгляньмо двочасову кореляційну функцію, яка має такий вигляд:

$$\langle\sigma_0^+(t+\tau)\sigma_0^-(t)\rangle = \frac{1}{Z_T}\mathrm{Tr}e^{-\beta H_T}\sigma_0^+(t+\tau)\sigma_0^-(t), \tag{7.97}$$

тут

$$\sigma_0^{\pm} = \frac{\sigma_0^x \pm i\sigma_0^y}{2}, \tag{7.98}$$

$$Z_T = \mathrm{Tr}e^{-\beta H_T}, \tag{7.99}$$

$$\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_{1,2,\ldots,N}\mathrm{Tr}_0. \tag{7.100}$$

Запишемо вигляд оператора σ_0^- у представленні Гайзенберга. Врахувавши, що комутатор операторів пробного спіну з іншими операторами дорівнює нулю, знайдемо:

$$\sigma_0^-(t) = e^{iH_Tt/\hbar}\sigma_0^- e^{-iH_Tt/\hbar} =$$

$$e^{-i\lambda\sigma_0^z\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z t/\hbar - ih_0\sigma_0^z t/\hbar}\sigma_0^- e^{i\lambda\sigma_0^z\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z t/\hbar + ih_0\sigma_0^z t/\hbar}. \tag{7.101}$$

Взявши до уваги також антикомутаційне співвідношення:

$$\{\sigma_0^-, \sigma_0^z\} = 0, \tag{7.102}$$

отримаємо такий результат:

$$\sigma_0^-(t) = \sigma_0^- e^{i2\lambda\sigma_0^z \sum_{j=1}^N \sigma_j^z t/\hbar + i2h_0\sigma_0^z t/\hbar}. \tag{7.103}$$

Знайдемо також вигляд оператора $\sigma_0^+(t)$, який є спряженим до $\sigma_0^-(t)$

$$\sigma_0^+(t) = e^{-i2\lambda\sigma_0^z \sum_{j=1}^N \sigma_j^z t/\hbar - i2h_0\sigma_0^z t/\hbar}\sigma_0^+. \tag{7.104}$$

На основі отриманих результатів отримаємо такий вираз для добутку операторів $\sigma_0^-(t)$ та $\sigma_0^+(t+\tau)$

$$\sigma_0^+(t+\tau)\sigma_0^-(t) = e^{-i2\lambda\sigma_0^z \sum_{j=1}^N \sigma_j^z (t+\tau)/\hbar - i2h_0\sigma_0^z (t+\tau)/\hbar} \times$$

$$\times \sigma_0^+\sigma_0^- e^{i2\lambda\sigma_0^z \sum_{j=1}^N \sigma_j^z t/\hbar + i2h_0\sigma_0^z t/\hbar} =$$

$$= \frac{1}{2}(1+\sigma_0^z) e^{-i2\lambda\sigma_0^z \sum_{j=1}^N \sigma_j^z \tau/\hbar - i2h_0\sigma_0^z \tau/\hbar}. \tag{7.105}$$

Отже, врахувавши (7.95), можемо записати двочасову кореляційну функцію як

$$\langle \sigma_0^+(t+\tau)\sigma_0^-(t)\rangle = \frac{1}{Z_T}\mathrm{Tr}_{1,2,\ldots,N}\mathrm{Tr}_0 e^{-\beta H_T}\frac{1}{2}(1+\sigma_0^z) \times$$

$$\times e^{-i2\lambda\sigma_0^z \sum_{j=1}^N \sigma_j^z \tau/\hbar - i2h_0\sigma_0^z \tau/\hbar} =$$

$$= \frac{1}{Z_T}\mathrm{Tr}_{1,2,\ldots,N} e^{-\beta(H' - h\sum_{i=1}^N \sigma_j^z)}\mathrm{Tr}_0\frac{1}{2}(1+\sigma_0^z) \times$$

$$\times e^{(\beta\lambda - i2\lambda\tau/\hbar)\sigma_0^z \sum_{j=1}^N \sigma_j^z + (\beta h_0 - 2ih_0\tau/\hbar)\sigma_0^z}. \tag{7.106}$$

Для оператора $\hat{A}$, який комутує з σ_0^z виконується така рівність

$$\mathrm{Tr}_0\frac{1}{2}(1+\sigma_0^z)e^{\sigma_0^z\hat{A}} = e^{\hat{A}}, \tag{7.107}$$

Врахувавши це, порахуємо Tr за пробним спіном та отримаємо важливий результат:

$$\langle \sigma_0^+(t+\tau)\sigma_0^-(t)\rangle =$$

$$= \frac{e^{(\beta h_0 - 2ih_0\tau/\hbar)}}{Z_T}\mathrm{Tr}_{1,2,\ldots,N} e^{-\beta(H' - \tilde{h}\sum_{j=1}^N \sigma_j^z)} =$$

$$= e^{(\beta h_0 - 2ih_0\tau/\hbar)}\frac{Z(\beta,\tilde{h})}{Z_T}, \qquad (7.108)$$

де $Z(\beta,\tilde{h})$ – статистична сума з гамільтоніаном (7.88) у комплексному магнітному полі

$$\tilde{h} = h + \lambda - i\frac{2\lambda\tau}{\beta\hbar}. \qquad (7.109)$$

Отже, рівність (7.108) пов'язує двочасову кореляційну функцію пробного спіну зі статистичної сумою спінової системи у випадку комплексного магнітного поля. Звідси можемо зробити висновок, що існує прямий зв'язок нулів Лі-Янга (нулів статистичної суми $Z(\beta,\tilde{h})$) та нулів кореляційної функції.

7.4.1 Кореляційні функції спінів у трикутному спіновому кластері

Одна із найпростіших фізичних систем, яка описується гамільтоніаном (7.95) є трикутний спіновий кластер. Гамільтоніан цієї системи

$$H_T = -J\sigma_0^z\sigma_1^z - J\sigma_0^z\sigma_2^z - J\sigma_1^z\sigma_2^z - h(\sigma_0^z + \sigma_1^z + \sigma_2^z) =$$

$$= -J\sigma_1^z\sigma_2^z - h(\sigma_1^z + \sigma_2^z) - h\sigma_0^z - J\sigma_0^z(\sigma_1^z + \sigma_2^z), \qquad (7.110)$$

може бути записаний як (7.95), де

$$H = -J\sigma_1^z\sigma_2^z - h(\sigma_1^z + \sigma_2^z), \tag{7.111}$$

$$H_0 = -h\sigma_0^z, \tag{7.112}$$

$$H_{\text{int}} = -J\sigma_0^z(\sigma_1^z + \sigma_2^z), \tag{7.113}$$

тут $\lambda = J$, $h_0 = h$. Тобто один із спінів трикутного спінового кластера, для прикладу σ_0, розглядаємо як пробний (див. рис. 7.8).

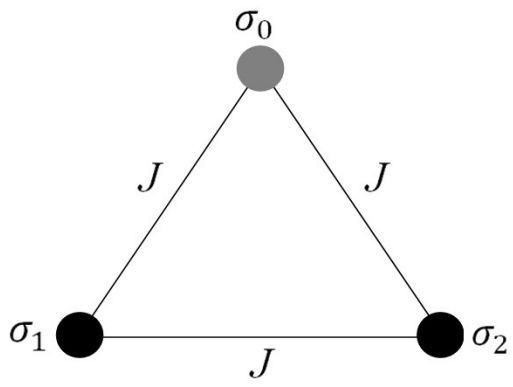


Рис. 7.8: Трикутний спіновий кластер, де σ_0 – пробний спін. Часова кореляційна функція пробного спіну є пропорційна до статистичної суми спінів σ_1 та σ_2 в комплексному магнітному полі.

Важливо зауважити, що така проста модель Ізінга (7.110) описує спіни, для прикладу, молекулярного трикутника диспрозію (Molecular Dysprosium Triangle) [298].

Відповідно до отриманого результату (7.108) існує зв'язок часової кореляційної функції спіна σ_0 з статистичною сумою двох інших спінів системи, які описуються гамільтоніаном (7.111) в комплексному магнітному полі (7.109). Статистична сума визначається як

$$Z(\beta, \tilde{h}) = e^{\beta(J-2\tilde{h})}\left(q^2 + 2qe^{-2\beta J} + 1\right), \tag{7.114}$$

де, для зручності, ми ввели позначення

$$q = e^{2\beta\tilde{h}}. \tag{7.115}$$

Статистична сума дорівнює нулю $Z(\beta, \tilde{h}) = 0$, коли

$$q_{\pm} = -e^{-2\beta J} \pm \sqrt{e^{-4\beta J} - 1}. \tag{7.116}$$

Звернімо увагу, що для $J < 0$ (антиферомагнітна взаємодія) розв'язки (7.116) є дійсними. У цьому випадку нулі статистичної суми не лежать на колі, що узгоджується з результатами статей [38, 299].

При $J > 0$ (феромагнітна взаємодія) маємо:

$$q_{\pm} = -e^{-2\beta J} \pm i\sqrt{1 - e^{-4\beta J}}. \tag{7.117}$$

Звернімо увагу, що $|q_{\pm}| = 1$. Отже, результат (7.117) може бути переписаний як

$$q_{\pm} = e^{i\phi}, \tag{7.118}$$

$$\phi = \mp \mathrm{arctg}\sqrt{e^{4\beta J} - 1} + \pi(2n + 1),$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{7.119}$$

Звідси випливає, що статистична сума дорівнює нулю при уявному магнітному полі. Цей висновок узгоджується з теоремою Лі-Янга.

Врахувавши (7.109), (7.115) та (7.118) отримаємо, що кореляційна функція та статистична сума мають нулі при

$$h = -\lambda, \tag{7.120}$$

$$\tau = \frac{\hbar}{4\lambda}\left(\mp \mathrm{arctg}\sqrt{e^{4\beta J} - 1} + \pi(2n + 1)\right). \tag{7.121}$$

Отже, у моменти часу (7.121) кореляційна функція та квадрат її модуля дорівнють нулю. Квадрат модуля кореляційної функції для

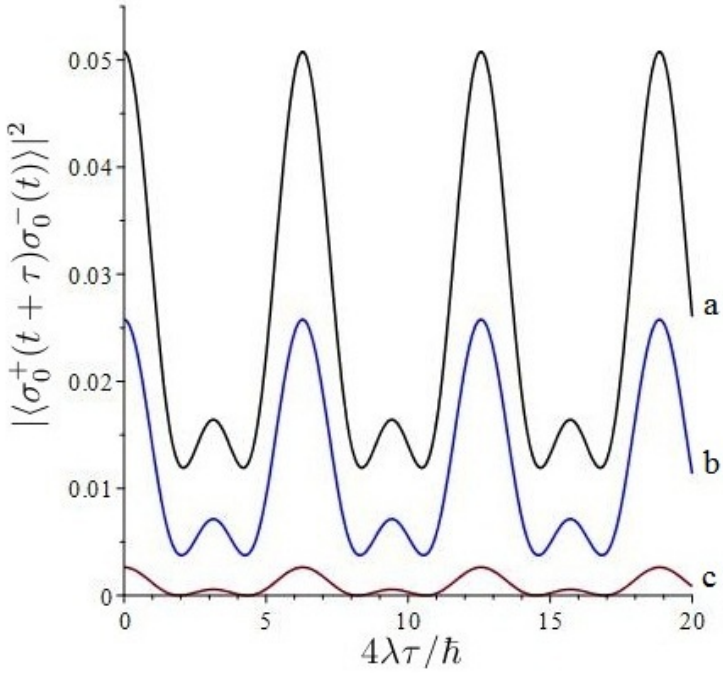


Рис. 7.9: Квадрат модуля хвильової функції (7.108) для $\beta\lambda = \beta J = 0.5$ та (a) $\beta h = -0.1$, (b) $\beta h = -0.2$, (c) $\beta h = -0.5$

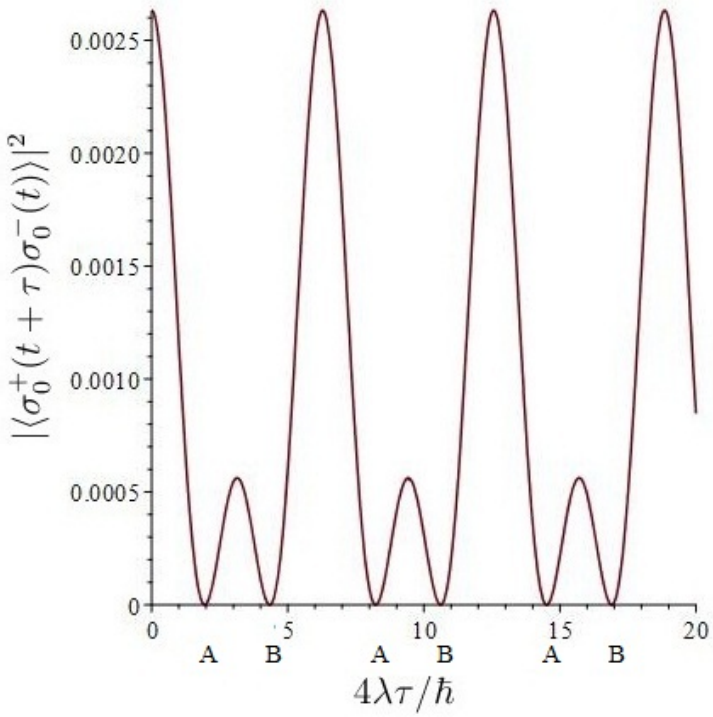
трикутного спінового кластера

$$|\langle\sigma_0^+(t+\tau)\sigma_0^-(t)\rangle|^2$$
$$= \frac{e^{2h(\beta+J)}}{(e^{3\beta J}\mathrm{ch}(3\beta J) + 3e^{-\beta J}\mathrm{ch}(\beta J))^2}$$
$$\times \left\{(\mathrm{ch}(2\beta(h+\lambda))\cos(4\lambda\tau/\hbar) + e^{-2\beta J})^2\right.$$
$$\left. + \mathrm{sh}^2 2\beta(h+\lambda)\sin^2(4\lambda\tau/\hbar)\right\}, \tag{7.122}$$

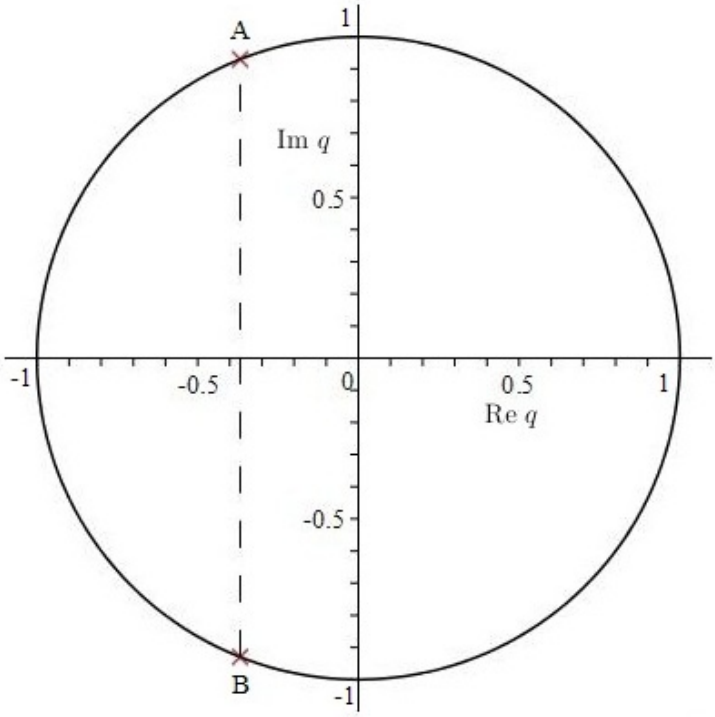
для різних магнітних полів h у випадку $\lambda = J$ представлено на рисунку 7.5. Щоб отримати (7.122) ми взяли до уваги (7.108), (7.114) та обчислили статистичну суму

$$Z_T = Tre^{\beta H_T} = 2e^{3\beta J}\mathrm{ch}(3\beta J) + 6e^{-\beta J}\mathrm{ch}(\beta J). \tag{7.123}$$

Як представлено на рис. 7.9, рис. 7.10 (a), коли $h = -\lambda$ кореляційна функція має нулі, які відповідають нулям Лі-Янга. Нулі кореля-



а



б

Рис. 7.10: Квадрат модуля кореляційної функції (7.108) для $\beta\lambda = \beta J = -\beta h = 0.5$ (b) нулі Лі-Янга (7.117). Нулі Лі-Янга позначені A та B відповідають нулям кореляційної функції A, B

ційної функції, позначені на рис. 7.10 (а) як A, B, відповідають нулям Лі-Янга, які позначені як A, B на рис 7.10 (б).

7.5 Висновки до розділу 7

У розділі пораховано часові кореляційні функції системи бозе-частинок у квантованому просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (q-деформований бозе-газ). Знайдено зв'язок кореляційних функцій системи зі статистичною сумою при комплексній температурі. А саме, кореляційну функцію q-деформованого бозе-газу представлено у вигляді (7.30).

На основі результату (7.30) можемо зробити висновок, що нулі кореляційної фукнкції q-деформованого бозе-газу (бозе-газу у квантованому просторі) пов'язані з нулями Фішера статистичної суми. Важливо відзначити, що комплексна температура появляється через q-деформацією комутаційних співвідношень для операторів породження та знищення, а також через еволюцією системи. Досліджено частковий випадок дворівневої системи бозе-частинок з q-деформованими комутаційними співвідношеннями для операторів породження та знищення. Знайдено, що нулі кореляційної функції для одночастинкової системи ($N = 1$) та системи трьох частинок ($N = 3$) в z-площині лежать на колі одиничного радіуса, що відповідає повністю уявним нулям у β-площині. Кореляційна функція у цьому випадку дорівнює нулю у моменти часу, які визначаються як (7.40). Детально досліджено випадок, коли $q = 2$, відношення ϵ_2/ϵ_1 є цілим та нулі кореляційної функції, а також нулі Фішера є нулями полінома з цілими степенями. Знайдено, що нулі статистичної суми та нулі кореляційної функції (рис. 7.1) у цьому випадку лежать близько до кола з одиничним радіусом.

Отриманий зв'язок нулів кореляційної функції з нулями Фішера відкриває нову можливість спостереження цих нулів на експерименті. Зауважимо, що часові кореляційні функції є експериментально спостережуваними величинами. Тому результат (7.30) пов'язує нулі Фішера з експериментально спостережуваними величинами. Зазначимо, що нещодавно q-деформований осцилятор був експериментально реалізований, використовуючи коливальний контур [288]. Тому знайдений зв'язок нулів кореляційних функцій з нулями статистичної суми може відкрити можливість експериментального спостереження нулів Фішера для системи, запропонованої у роботі [288].

Досліджено також можливості експериментального спостереження нулів статистичної суми для інших систем. Встановлено, що зв'язок нулів статистичної суми з нулями кореляційної функції існує також для взаємодіючого бозе-газу та спінових систем. А саме, знайдено що двочасові кореляційні функції взаємодіючого бозе-газу можуть бути представлені у вигляді (7.64). Із отриманого результату (7.64) випливає існування зв'язку кореляційних функцій зі статистичною сумою системи з комплексним параметрами, які пов'язані з параметрами взаємодії бозе-частинок. Тому існує зв'язок нулів двочасових кореляційних функцій з нулями статистичної суми, які відомі, як нулі Лі-Янга. Важливо відзначити, що система взаємодіючих бозе-частинок може реалізовуватися експериментально [292, 293]. Тому знайдена рівність (7.64) відкриває нові можливості спостереження нулів Лі-Янга для бозе-систем на експериментах. Зауважимо, що у випадку, коли взаємодія між бозе-частинками є притягальною, у границі $\beta \to \infty$, що відповідає низьким температурам, нулі Лі-Янга лежать на колі $q = e^{i\pi(2n+1)}$, де $n = 0, 1, 2, ...N - 1$, а нулі кореляційної функції досягаються при $q = 0$. Зовсім інша ситуація спостерігається при відштов-

хуванню бозе-частинок. У цьому випадку знайдено умови на температуру та параметр взаємодії (див. (7.80), (7.81)), при яких нулі Лі-Янга та нулі кореляційної функції є дійсні. Ми зробили висновок, що нулі кореляційної функції та нулі Лі-Янга є дійсні при низьких температурах.

Знайдено можливість експериментального спостереження нулів Лі-Янга також для спінових систем. А саме, встановлено прямий зв'язок двочасової кореляційної функції спінової системи з статистичною сумою системи у комплексному полі (7.108). Уявна частина магнітного поля (7.109) пов'язана з часом еволюції. Тому експеримент з вимірювання часової кореляційної функції дає можливість спостерігати нулі статистичної суми системи. За теоремою Лі-Янга нулі статистичної суми феромагнітної спінової системи знаходяться на уявній осі магнітного поля $\tilde{h}$. Звідси випливає, що кореляційна функція та статистична сума дорінюють нулю при $\mathrm{Re}\,\tilde{h} = 0$, що відповідає $h = -\lambda$. У цьому випадку кореляційна функція дорівнює нулю у різні моменти часу. У ці моменти часу також спостерігаються нулі Лі-Янга.

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено проблеми порушення фундаментальних законів та принципів у квантованому просторі. Побудовано алгебру, яка описує квантований фазовий простір зі збереженими симетрійними властивостями (симетрія відносно інверсії часу, сферична симетрія). Знайдено та проаналізовано вплив квантованості простору на властивості класичних та квантових систем.

Серед основних наукових результатів можна виділити такі:

1. Знайдено умову на параметр алгебри Снайдера при якій координати не залежать від маси та можуть розглядатися як кінематичні змінні; імпульси пропорційні до маси; координати та імпульси центра мас задовольняють співвідношення алгебри Снайдера; кінетична енергія є адитивною та незалежною від композиції; виконується слабкий принцип еквівалентності.

2. Розв'язано проблеми опису руху макроскопічного тіла, порушення властивостей кінетичної енергії, порушення слабкого принципу еквівалентності у просторі з алгеброю Кемпфа у всіх порядках за параметрами деформації.

3. Отримано вираз для мінімальної довжини у шестивимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу на основі розв'язків задачі на власні значення оператора квадрату довжини.

4. Встановлено, що некомутативність імпульсів канонічного типу зу-

мовлює залежність траєкторії вільної частинки від маси, залежність руху центра мас системи вільних частинок від відносного руху, ефект розлітання системи вільних частинок з однаковими початковими швидкостями.

5. Запропоновано залежності параметрів координатної та імпульсної некомутативностей від маси, при яких некомутативні координати можуть розглядатися як кінематичні змінні; некомутативні імпульси пропорційні до маси; імпульс центра мас може бути означений, як інтеграл руху; траєкторія вільної частинки не залежить від її маси; виконується слабкий принцип еквівалентності, зберігаються властивості кінетичної енергії у квантованому фазовому просторі канонічного типу.

6. Знайдено верхню межу для параметра імпульсної некомутативності, яка щонайменше на 10 порядків покращує (накладає сильніше обмеження на його величину) результати, відомі у літературі. Оцінку отримано на основі досліджень зсуву перигелію Меркурію з врахуванням особливостей опису руху макроскопічних тіл у некомутативному фазовому просторі.

7. Встановлено вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів канонічного типу на параметр Етвеша для Землі та Місяця. Показано, що параметр Етвеша не дорівнює нулеві навіть у випадку рівності гравітаційної та інерційної мас.

8. Знайдено точний вираз для спектру системи двох частинок з осциляторною взаємодією у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу.

9. Отримано точний розв'язок для періоду руху по колу у неко-

мутативному фазовому просторі канонічного типу. Встановлено, що некомутативність координат та некомутативність імпульсів зумовлюють залежність періоду руху по колу від його напрямку.

10. Побудовано алгебру з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, яка є інваріантна відносно інверсії часу, сферично-симетрична, еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу та не зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності.

11. Запропоновано узагальнення сферично-симетричної алгебри канонічного типу для координат та імпульсів різних частинок, яке дозволяє розглядати співвідношення алгебри також для координат та імпульсів центра мас системи частинок.

12. З точністю до другого порядку за параметрами некомутативностей знайдено енергетичні рівні системи двох частинок з кулонівською взаємодією у сферично-симетричному квантованому фазовому просторі. На основі отриманого результату проаналізовано вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на енергетичні рівні атома водню, мюонного атома водню, антипротонного гелію. Встановлено, що дослідження енергетичних рівнів антипротонного гелію дають можливість покращити оцінки для величини кванта простору.

13. Знайдено енергетичні рівні симетричної мережі осциляторів у однорідному полі та ланцюжка осциляторів у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі.

14. Отримано квантові та класичні рівняння руху у гравітаційному полі у сферично-симетричному квантованому фазовому просто-

рі. Запропоновано залежності тензорів координатної та імульсної некомутативностей від маси, при яких класичні рівняння руху у гравітаційному полі не залежать від маси, квантові рівняння руху залежать від відношення сталої Планка до маси, отже, відновлюється слабкий принцип еквівалентності.

15. Розв'язано проблеми опису руху системи частинок та порушення слабкого принципу еквівалентності в рамках різних некомутативних алгебр Лі типу (комутатор координат пропорційний до часу, комутатор координат пропорційний координаті, узагальнена некомутативна алгебра). Знайдено умови на параметри алгебр, при яких комутаційні співвідношення для координат та імпульсів центра мас відповідають співвідношенням алгебри Лі типу, рух частинки (системи частинок) в гравітаційному полі не залежить від маси.

16. Знайдено умову на параметр алгебри з деформацією кручення при якій розв'язується проблема кінематичних змінних, координати центра мас системи частинок не залежать від імпульсів відносного руху, зберігається слабкий принцип еквівалентності.

17. Встановлено зв'язок нулів кореляційних функцій бозе-газу у просторі з мінімальною довжиною та мінімальним імпульсом (q-деформованого бозе-газу), взаємодіючого бозе-газу, спінових систем з нулями статистичної суми. На основі отриманих результатів запропоновано новий спосіб експериментального спостереження нулів Лі-Янга та нулів Фішера.

Результати, представлені у дисертації, можуть бути використаними для подальших досліджень фізичних систем в рамках теорії кван-

тованого простору, побудованої на основі ідеї про деформацію комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів. Зокрема, важливим є продовження досліджень фізичних систем у квантованому просторі, який характеризується інваріантною відносно інверсії часу, сферично-симетричною некомутативною алгеброю.

У роботі встановлено, що ідея про те, що комутаційні співвідношення для координат та імпульсів частинки можуть залежати від маси є важливою для розв'язання фундаментальних проблем (проблеми опису руху макроскопічних тіл, проблеми порушення слабкого принципу еквівалентності) в рамках різних алгебр (алгебра Снайдера, алгебра Кемпфа, алгебра з канонічними некомутативностями координат та імпульсів, некомутативна алгебра Лі типу, алгебра з деформацією кручення). Це підтверджує важливість цієї ідеї та обґрунтовує її використання у подальших дослідженнях фізичних систем у квантованому просторі, які можуть відбуватися у таких напрямках: узагальнення результатів дослідження на випадок релятивістських багаточастинкових систем, визначення одно- та багаточастинкових фізичних систем на які квантованість простору має особливий вплив з метою експериментального підтвердження теорії квантованого простору з деформованими комутаційними співвідношеннями для координат та імпульсів.

ПОДЯКИ

Автор висловлює велику вдячніть науковому консультанту проф. В. М. Ткачуку за численні консультації та дуже корисні поради під час виконання цієї роботи, старшому викладачу Ю. С. Криницькому та доц. М. І. Самару за співпрацю, колективу фізичного факультету за цікаві та плідні дискусії під час семінарів та конференцій. Велика подяка проф. Б. В. Павлику за допомогу з оформленням документів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Villalpando C., Modak S. K.* Minimal length effect on the broadening of free wave packets and its physical implications // *Phys. Rev. D.* 2019. Vol. 100, no. 2. Art. 024054. 17 p.

[2] *Chargui Y.* On the Duffin–Kemmer–Petiau equation with linear potential in the presence of a minimal length // *Phys. Lett. A.* 2018. Vol. 382, no. 14. P. 949 – 953.

[3] *Leal P., Bertolami O.* Relativistic dispersion relation and putative metric structure in noncommutative phase-space // *Phys. Lett. B.* 2019. Vol. 793. P. 240 – 246.

[4] *Mignemi S., Samsarov A.* Vacuum energy from noncommutative models // *Phys. Lett. B.* 2018. Vol. 779. P. 244 – 248.

[5] Probing noncommutative theories with quantum optical experiments / S. Dey, A. Bhat, D. Momeni et al. // *Nucl. Phys. B.* 2017. Vol. 924. P. 578 – 587.

[6] *Bouaziz D., Birkandan T.* Singular inverse square potential in coordinate space with a minimal length // *Ann. Phys.* 2017. Vol. 387. P. 62 – 74.

[7] *Khodadi M., Nozari K., Hajizadeh A.* Some astrophysical aspects of a Schwarzschild geometry equipped with a minimal measurable length // *Phys. Lett. B.* 2017. Vol. 770. P. 556 – 563.

[8] *Menculini L., Panella O., Roy P.* Quantum phase transitions of the Dirac oscillator in a minimal length scenario // *Phys. Rev. D.* 2015. Vol. 91, no. 4. Art. 045032. 8 p.

[9] *Dey S., Hussin V.* Entangled squeezed states in noncommutative spaces with minimal length uncertainty relations // *Phys. Rev. D.* 2015. Vol. 91, no. 12. Art. 124017. 8 p.

[10] *Gross D. J., Mende P. F.* String theory beyond the Planck scale // *Nucl. Phys. B.* 1988. Vol. 303, no. 3. P. 407 – 454.

[11] *Maggiore M.* A generalized uncertainty principle in quantum gravity // *Phys. Lett. B.* 1993. Vol. 304, no. 1-2. P. 65 – 69.

[12] *Witten E.* Reflections on the fate of spacetime // *Physics Today.* 1996. Vol. 49, no. 4. P. 24–30.

[13] *Seiberg N., Witten E.* String theory and noncommutative geometry // *J. High Energy Phys.* 1999. Vol. 1999, no. 09. Art. 032. 92 p.

[14] *Doplicher S., Fredenhagen K., Roberts J. E.* Spacetime quantization induced by classical gravity // *Phys. Lett. B.* 1994. Vol. 331, no. 1-2. P. 39–44.

[15] *Amati D., Ciafaloni M., Veneziano G.* Can spacetime be probed below the string size? // *Phys. Lett. B.* 1989. Vol. 216, no. 1. P. 41 – 47.

[16] On the space–time uncertainty relations of Liouville strings and D-branes / G. Amelino-Camelia, N. E. Mavromatos, J. Ellis, D. V. Nanopoulos // *Mod. Phys. Lett. A.* 1997. Vol. 12, no. 27. P. 2029–2035.

[17] *Kempf A.* Non-pointlike particles in harmonic oscillators // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1997. Vol. 30, no. 6. P. 2093–2101.

[18] Hydrogen-atom spectrum under a minimal-length hypothesis / S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, T. Takeuchi // *Phys. Rev. A.* 2005. Vol. 72, no. 1. Art. 012104. 4 p.

[19] Short distance versus long distance physics: The classical limit of the minimal length uncertainty relation / S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic et al. // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 66, no. 2. Art. 026003. 11 p.

[20] *Snyder H. S.* Quantized space-time // *Phys. Rev.* 1947. Vol. 71, no. 1. P. 38–41.

[21] *Djemai A. E. F., Smail H.* On quantum mechanics on noncommutative quantum phase space // *Commun. Theor. Phys.* 2004. Vol. 41, no. 6. P. 837–844.

[22] *Li K., Chamoun N.* Hydrogen atom spectrum in noncommutative phase space // *Chin. Phys. Lett.* 2006. Vol. 23, no. 5. P. 1122–1123.

[23] *Alavi S. A.* Lamb shift and Stark effect in simultaneous space-space and momentum-momentum noncommutative quantum mechanics and θ-deformed $su(2)$ algebra // *Mod. Phys. Lett. A.* 2007. Vol. 22, no. 5. P. 377–383.

[24] *Smailagic A., Spallucci E.* Feynman path integral on the noncommutative plane // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2003. Vol. 36, no. 33. P. L467–L471.

[25] *Hatzinikitas A., Smyrnakis I.* The noncommutative harmonic oscillator in more than one dimension // *J. Math. Phys.* 2002. Vol. 43, no. 1. P. 113–125.

[26] *Daszkiewicz M., Walczyk C. J.* Newton equation for canonical, Lie-algebraic, and quadratic deformation of classical space // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 77, no. 10. Art. 105008. 7 p.

[27] *Lukierski J., Woronowicz M.* New Lie-algebraic and quadratic deformations of Minkowski space from twisted Poincare symmetries // *Phys. Lett. B.* 2006. Vol. 633, no. 1. P. 116 – 124.

[28] Lie-deformed quantum minkowski spaces from twists: Hopf-algebraic versus hopf-algebroid approach / J. Lukierski, D. Meljanac, S. Meljanac et al. // *Phys. Lett. B.* 2018. Vol. 777. P. 1 – 7.

[29] Twisted statistics and the structure of Lie-deformed Minkowski spaces / D. Meljanac, S. Meljanac, D. Pikutić, Kumar S. Gupta // *Phys. Rev. D.* 2017. Vol. 96, no. 10. Art. 105008. 6 p.

[30] *Ivetić B., Meljanac S., Mignemi S.* Classical dynamics on curved Snyder space // *Class. Quant. Grav.* 2014. Vol. 31, no. 10. Art. 105010. 13 p.

[31] *Mignemi S., Štrajn R.* Snyder dynamics in a Schwarzschild spacetime // *Phys. Rev. D.* 2014. Vol. 90, no. 4. Art. 044019. 5 p.

[32] *Kupriyanov V. G.* A hydrogen atom on curved noncommutative space // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2013. Vol. 46, no. 24. Art. 1673. 7 p.

[33] *Gáliková V., Prešnajder P.* Hydrogen atom in fuzzy spaces - exact solution // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2012. Vol. 343. Art. 012096. 9 p.

[34] *Moreno E. F.* Spherically symmetric monopoles in noncommutative space // *Phys. Rev. D.* 2005. Vol. 72, no. 4. Art. 045001. 9 p.

[35] *Yang C. N., Lee T. D.* Statistical theory of equations of state and phase transitions. I. Theory of condensation // *Phys. Rev.* 1952. Vol. 87, no. 3. P. 404–409.

[36] *Lee T. D., Yang C. N.* Statistical theory of equations of state and phase transitions. II. Lattice gas and Ising model // *Phys. Rev.* 1952. Vol. 87. P. 410–419.

[37] *Fisher M. E.* The nature of critical points // Lectures in Theoretical Physics: Volume VII C. 1965.

[38] *Wei B.-B., Liu R.-B.* Lee-Yang zeros and critical times in decoherence of a probe spin coupled to a bath // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 109, no. 18. Art. 185701. 5 p.

[39] Experimental observation of Lee-Yang zeros / Xinhua Peng, Hui Zhou, Bo-Bo Wei et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114, no. 1. Art. 010601. 5 p.

[40] *Gnatenko Kh. P.* Parameters of noncommutativity in Lie-algebraic noncommutative space // *Phys. Rev. D.* 2019. Vol. 99, no. 2. Art. 026009. 9 p.

[41] *Gnatenko Kh. P.* Kinematic variables in noncommutative phase space and parameters of noncommutativity // *Mod. Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 32, no. 31. Art. 1750166. 12 p.

[42] *Gnatenko Kh. P.* Features of description of composite system's motion in twist-deformed spacetime // *Mod. Phys. Lett. A.* 2019. Vol. 34, no. 9. Art. 1950071. 9 p.

[43] *Gnatenko Kh. P.* Rotationally invariant noncommutative phase space of canonical type with recovered weak equivalence principle // *EPL (Europhysics Letters).* 2018. Vol. 123, no. 5. Art. 50002. 7 p.

[44] *Gnatenko Kh. P.* System of interacting harmonic oscillators in rotationally invariant noncommutative phase space // *Phys. Lett. A*. 2018. Vol. 382, no. 46. P. 3317 – 3324.

[45] *Gnatenko Kh. P.* Harmonic oscillator chain in noncommutative phase space with rotational symmetry // *Ukr. J. Phys.* 2019. Vol. 64, no. 2. P. 131–136.

[46] *Гнатенко Х. П.* Особливості опису системи частинок у двовимірному квантованому просторі з некомутативністю координат канонічного типу // *Вісн. Львів. ун ту. Сер. фіз.* 2017. Т. 53. С. 22-29.

[47] *Гнатенко Х. П.* Фізичні проблеми у некомутативному просторі. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2017. 128 С.

[48] *Gnatenko Kh. P., Samar M. I., Tkachuk V. M.* Time-reversal and rotational symmetries in noncommutative phase space // *Phys. Rev. A*. 2019. Vol. 99, no. 1. Art. 012114. 6 p.

[49] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Upper bound on the momentum scale in noncommutative phase space of canonical type // *EPL (Europhysics Letters).* 2019. Vol. 127, no. 2. Art. 20008. 7 p.

[50] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Minimal length estimation on the basis of studies of the Sun-Earth-Moon system in deformed space // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2019. Vol. 28, no. 8. Art. 1950107. 13 p.

[51] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Macroscopic body in the Snyder space and minimal length estimation // *EPL (Europhysics Letters).* 2019. Vol. 125, no. 5. Art. 50003. 5 p.

[52] *Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V.* Lee–Yang zeros and two-time spin correlation function // *Physica A: Stat. Mech. Appl.* 2018. Vol. 509. P. 1095 – 1101.

[53] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Composite system in rotationally invariant noncommutative phase space // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2018. Vol. 33, no. 7. Art. 1850037. 21 p.

[54] *Gnatenko Kh. P., Laba H. P., Tkachuk V. M.* Features of free particles system motion in noncommutative phase space and conservation of the total momentum // *Mod. Phys. Lett. A.* 2018. Vol. 33, no. 23. Art. 1850131. 12 p.

[55] *Gnatenko Kh. P., Shyiko O. V.* Effect of noncommutativity on the spectrum of free particle and harmonic oscillator in rotationally invariant noncommutative phase space // *Mod. Phys. Lett. A.* 2018. Vol. 33, no. 16. Art. 1850091. 11 p.

[56] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Influence of noncommutativity on the motion of Sun-Earth-Moon system and the weak equivalence principle // *Int. J. Theor. Phys.* 2018. Vol. 57, no. 11. P. 3359–3368.

[57] *Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V. M.* Two-time correlation functions and the Lee-Yang zeros for an interacting Bose gas // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, no. 3. Art. 032116. 6 p.

[58] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Weak equivalence principle in noncommutative phase space and the parameters of noncommutativity // *Phys. Lett. A*. 2017. Vol. 381, no. 31. P. 2463–2469.

[59] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Noncommutative phase space with rotational symmetry and hydrogen atom // *Int. J. Mod. Phys. A*. 2017. Vol. 32, no. 26. Art. 1750161. 15 p.

[60] *Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V. M.* Time correlation functions and Fisher zeros for q-deformed Bose gas // *EPL (Europhysics Letters)*. 2017. Vol. 120, no. 3. Art. 30004. 6 p.

[61] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Two-particle system with harmonic oscillator interaction in noncommutative phase space // *J. Phys. Stud.* 2017. Vol. 21, no. 3. Art. 3001. 6 p.

[62] *Гнатенко Х. П., Морозко О. О., Криницький Ю. С.* Рух частинки у гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу та слабкий принцип еквівалентності // *Журн. фіз. дослідж.* 2018. Т. 22. № 1. Ст. 1001. 6 с.

[63] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Length in a noncommutative phase space // *Ukr. J. Phys.* 2018. Vol. 63, no. 2. P. 102–109.

[64] *Гнатенко Х. П., Ткачук В. М.* Багаточастинкова система у сферично-симетричному просторі з канонічною некомутатвиністю координат // *Журн. фіз. дослідж.* 2017. Т. 21. № 4. Ст. 4002. 7 с.

[65] *Gnatenko Kh.* Time-dependent correlation functions of q-deformed Bose gas and Fisher zeros // The 5th Conference "Statistical Physi-

cs: Modern Trends and Applications", dedicated to the 110th anniversary of the birth of M.M. Bogolyubov, 3-6 July 2019, Lviv, Ukraine: Programme and Abstracts. P. 109.

[66] *Гнатенко Х. П.* Вплив квантованості простору на властивості багаточастинкових систем // 19-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 13-14 червня 2019. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. С. 16.

[67] *Gnatenko Kh., Samar M.* Time reversal invariant noncommutative algebra of canonical type // International Conference of Students and Young Researchers in Theoretical and Experimental Physics "Heureka-2019", May 14-16, 2019. Lviv, Ukraine: Book of Abstracts. P. E6.

[68] *Gnatenko Kh.* Influence of space quantization on the planetary motion and minimal length estimation // International Conference of Students and Young Researchers in Theoretical and Experimental Physics "Heureka-2019", May 14-16, 2019. Lviv, Ukraine: Book of Abstracts. P. E6.

[69] *Gnatenko Kh. P.* Parameters of noncommutative algebra and fundamental problems in quantum space [Cristmass Discussions 2019, Lviv, January 10-11] // J. Phys. Stud. 2019. Vol. 23, No 1. P. 1998-2.

[70] *Gnatenko Kh. P.* Effect of noncommutativity of coordinates and noncommutativity of momenta on free particle system motion [Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 03-04 July 2018] // J. Phys. Stud. 2018. Vol. 22, no. 3. Art. 3998. P. 4-5.

[71] *Гнатенко Х. П.* Фізичні системи у сферично-симетричному квантовому просторі з некомутативністю координат на некомутативністю імпульсів // 18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 7-8 червня 2018. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. С. 37.

[72] *Гнатенко Х. П.* Екзотичні атоми у квантованому просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів [Різдвяні дискусії 2018, Львів, 11-12 січня 2018] // Журн. фіз. дослідж. 2018. Т. 22, №1. С. 1998-8.

[73] *Gnatenko Kh. P.* Parameters of noncommutativity in noncommutative phase space // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv, Zielona Góra – October 16-19, 2017: Abstracts. P. 3-4.

[74] *Гнатенко Х. П., Ткачук В. М.* Вплив квантованості простору на рух системи Сонце-Земля-Місяць та принцип еквівалентності // Тези IX наукової конференції "Вибрані питання астрономії та астрофізики", присвяченої пам'яті Богдана Бабія (1936-1993), 1-5 жовтня 2018 р. Львів, 2018. С. 64-65.

[75] *Гнатенко Х. П.* Обмеження на довжину площу та об'єм у некомутативному фазовому просторі // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2017", Львів, 16-18 травня 2017 р.: Тези доповідей. С. Е6.

[76] *Гнатенко Х. П.* Принцип еквівалентності в некомутативному фазовому просторі [Різдвяні дискусії 2017, Львів, 11-12 січня 2017] // Журн. фіз. дослідж. 2017. Т. 21, №1/2. С. 1998-3-4. P. 29.

[77] *Polchinski J.* M theory: Uncertainty and unification // *Fundamental Physics — Heisenberg and Beyond.* 2003. P. 157–166.

[78] *Jackiw R.* Observations on noncommuting coordinates and on fields depending on them // *Ann. Henri Poincarre.* 2003. Vol. 4, no. 2. P. 913–919.

[79] *Mignemi S.* Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 84, no. 2. Art. 025021. 11 p.

[80] *Mignemi S.* Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model in curved space // *Class. Quant. Grav.* 2012. Vol. 29, no. 21. Art. 215019. 19 p.

[81] *Mignemi S.* Classical dynamics on Snyder spacetime // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2015. Vol. 24, no. 06. Art. 1550043. 12 p.

[82] *Romero J. M., Zamora A.* The area quantum and Snyder space // *Phys. Lett. B.* 2008. Vol. 661, no. 1. P. 11 – 13.

[83] *Lu L., Stern A.* Particle dynamics on Snyder space // *Nucl. Phys. B.* 2012. Vol. 860, no. 1. P. 186 – 205.

[84] *Gamboa J., Loewe M., Rojas J. C.* Noncommutative quantum mechanics // *Phys. Rev. D.* 2001. Vol. 64, no. 6. Art. 067901. 3 p.

[85] Noncommutative quantum mechanics: The two-dimensional central field / J. Gamboa, F. Méndez, M. Loewe, J. C. Rojas // *Int. J. of Mod. Phys. A.* 2002. Vol. 17, no. 19. P. 2555–2565.

[86] *Nair V. P., Polychronakos A. P.* Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere // *Phys. Lett. B.* 2001. Vol. 505, no. 1-4. P. 267–274.

[87] *Bolonek K., Kosiński P.* On uncertainty relations in noncommutative quantum mechanics // *Phys. Lett. B.* 2002. Vol. 547, no. 1-2. P. 51–54.

[88] *Duval C., Horvathy P. A.* Exotic Galilean symmetry in the noncommutative plane and the Hall effect // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2001. Vol. 34, no. 47. P. 10097–10107.

[89] *Romero J. M., Santiago J. A., Vergara J. D.* Note about the quantum of area in a noncommutative space // *Phys. Rev. D.* 2003. Vol. 68, no. 6. Art. 067503. 2 p.

[90] *Christiansen H. R., Schaposnik F. A.* Noncommutative quantum mechanics and rotating frames // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 65, no. 8. Art. 086005. 7 p.

[91] *Muthukumar B., Mitra P.* Noncommutative oscillators and the commutative limit // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 66, no. 2. Art. 027701. 3 p.

[92] *Jackiw R.* Noncommuting fields and non-Abelian fluids // *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.).* 2004. Vol. 127. P. 53–62.

[93] *Dunne G., Jackiw R., Trugenberger L.* Topological (Chern-Simons) quantum mechanics // *Phys. Rev. D.* Vol. 41, no. 2. P. 661–666.

[94] *Duval C., Horváthy P. A.* The exotic Galilei group and the "Peierls substitution" // *Phys. Lett. B.* 2000. Vol. 479, no. 1-3. P. 284–290.

[95] *Banerjee R.* A novel approach to noncommutativity in planar quantum mechanics // *Mod. Phys. Lett. A.* 2002. Vol. 17, no. 11. P. 631–645.

[96] *Li K., Cao X.-H., Wang D.-Y.* Heisenberg algebra for noncommutative Landau problem // *Chin. Phys.* 2006. Vol. 15, no. 10. P. 2236–2239.

[97] *Giri P. R., Roy P.* The non-commutative oscillator, symmetry and the Landau problem // *Eur. Phys. J. C.* 2008. Vol. 57, no. 4. P. 835–839.

[98] *Geloun J. B., Gangopadhyay S., Scholtz F. G.* Harmonic oscillator in a background magnetic field in noncommutative quantum phase-space // *EPL (Europhysics Letters).* 2009. Vol. 86, no. 5. Art. 51001. 4 p.

[99] *Bertolami O., Queiroz R.* Phase-space noncommutativity and the Dirac equation // *Phys. Lett. A.* 2011. Vol. 375, no. 2011. P. 4116–4119.

[100] Entropic gravity, phase-space noncommutativity and the equivalence principle / C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata // *Class. and Quant. Grav.* 2011. Vol. 28, no. 12. Art. 125007. 8 p.

[101] *Banerjee R., Dutta Roy B., Samanta S.* Remarks on the noncommutative gravitational quantum well // *Phys. Rev. D.* 2006. Vol. 74, no. 4. Art. 045015. 7 p.

[102] *Santos V., Maluf R., Almeida C.* Thermodynamical properties of graphene in noncommutative phase–space // *Annals of Physics.* 2014. Vol. 349. P. 402 – 410.

[103] *Chaichian M., Sheikh-Jabbari M. M., Tureanu A.* Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, no. 13. P. 2716–2719.

[104] *Balachandran A. P., Padmanabhan P.* Non-Pauli effects from noncommutative spacetimes // *JHEP.* 2010. Vol. 1102:001. 16 p.

[105] *Amorim R.* Tensor operators in noncommutative quantum mechanics // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101, no. 8. Art. 081602. 4 p.

[106] *Daszkiewicz M., Lukierski J., Woronowicz M.* Towards quantum noncommutative κ-deformed field theory // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 77, no. 10. Art. 105007. 10 p.

[107] *Daszkiewicz M., Lukierski J., Woronowicz M.* κ-deformed oscillators, the choice of star product and free κ-deformed quantum fields // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2009. aug. Vol. 42, no. 35. Art. 355201. 18 p.

[108] Constraints on the quantum gravity scale from κ-Minkowski spacetime / A. Borowiec, Kumar S. Gupta, S. Meljanac, A. Pachoł // *EPL (Europhysics Letters).* 2010. Vol. 92, no. 2. Art. 20006. 6 p.

[109] *Borowiec A., Lukierski J., Pachoł A.* Twisting and κ-Poincaré // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2014. Vol. 47, no. 40. Art. 405203. 12 p.

[110] *Borowiec A., Pachol A.* κ-deformations and extended κ-Minkowski spacetimes // *SIGMA.* 2014. Vol. 10. Art. 107. 24 p.

[111] *Gomes M., Kupriyanov V. G.* Position-dependent noncommutativity in quantum mechanics // *Phys. Rev. D.* 2009. Vol. 79, no. 12. Art. 125011. 6 p.

[112] Magnetic-dipole spin effects in noncommutative quantum mechanics / H. Falomir, J. Gamboa, J. Lopez-Sarrion et al. // *Phys. Lett. B.* 2009. Vol. 680, no. 4. P. 384 – 386.

[113] Dynamics of a Dirac fermion in the presence of spin noncommutativity / A.F. Ferrari, M. Gomes, V.G. Kupriyanov, C.A. Stechhahn // *Phys. Lett. B.* 2013. Vol. 718, no. 4. P. 1475 – 1480.

[114] *Deriglazov A. A., Pupasov-Maksimov A. M.* Lagrangian for Frenkel electron and position's non-commutativity due to spin // *Eur. Phys. J. C.* 2014. Vol. 74. Art. 3101 18 p.

[115] *Vasyuta V., Tkachuk V.* Classical electrodynamics in a space with spin noncommutativity of coordinates // *Phys. Lett. B.* 2016. Vol. 761. P. 462 – 468.

[116] *Vasyuta V. M., Tkachuk V. M.* Inverse square potential in a space with spin noncommutativity of coordinates // *Ukr. J. Phys.* 2017. Vol. 62, no. 4. P. 343–348.

[117] *Hamil B.* Dirac oscillator in a space with spin noncommutativity of coordinates // *Mod. Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 32, no. 31. Art. 1750176. 14 p.

[118] *Amorim R.* Tensor coordinates in noncommutative mechanics // *J. Math. Phys.* 2009. Vol. 50, no. 5. Art. 052103. 7 p.

[119] *Amorim R.* Dynamical symmetries in noncommutative theories // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 78, no. 10. Art. 105003. 7 p.

[120] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space // *Phys. Lett. A.* 2014. Vol. 378, no. 47. P. 3509–3515.

[121] *Miao Y.-G., Wang X.-D., Yu S.-J.* Classical mechanics on noncommutative space with Lie-algebraic structure // *Ann. Phys.* 2011. Vol. 326, no. 8. P. 2091 – 2107.

[122] *Amelino-Camelia G., Arzano M.* Coproduct and star product in field theories on Lie-algebra noncommutative space-times // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 65, no. 8. Art. 084044. 8 p.

[123] *Banerjee R., Mukherjee P., Samanta S.* Lie algebraic noncommutative gravity // *Phys. Rev. D.* 2007. Vol. 75, no. 12. Art. 125020. 7 p.

[124] Twisted classical Poincare algebras / J Lukierski, H Ruegg, V N Tolstoy, A Nowicki // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1994. Vol. 27, no. 7. P. 2389–2399.

[125] *Lukierski J., Nowicki A., Ruegg H.* New quantum Poincare algebra and κ-deformed field theory // *Phys. Lett. B.* 1992. Vol. 293, no. 3. P. 344 – 352.

[126] More about the q-deformed Poincare algebra / S. Giller, P. Kosinski, M. Majewski et al. // *Phys. Lett. B.* 1992. Vol. 286, no. 1. P. 57 – 62.

[127] *Daszkiewicz M.* The Henon–Heiles system defined on Lie-algebraically deformed Galilei spacetime // *Mod. Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 32, no. 13. Art. 1750075. 11 p.

[128] *Daszkiewicz M.* Canonical and Lie-algebraic twist deformations of Galilei algebra // *Mod. Phys. Lett. A.* 2008. Vol. 23, no. 07. P. 505–517.

[129] *Kempf A., Mangano G., Mann R. B.* Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation // *Phys. Rev. D.* 1995. Vol. 52, no. 2. P. 1108–1118.

[130] *Kempf A.* Noncommutative geometric regularization // *Phys. Rev. D.* 1996. Vol. 54, no. 8. P. 5174–5178.

[131] *Hinrichsen H., Kempf A.* Maximal localization in the presence of minimal uncertainties in positions and in momenta // *J. Math. Phys.* 1996. Vol. 37. P. 2121 – 2137.

[132] *Kempf A.* Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1994. Vol. 35, no. 9. P. 4483–4496.

[133] *Quesne C., Tkachuk V. M.* Harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in both position and momentum in a SUSYQM framework // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2003. Vol. 36, no. 41. P. 10373–10389.

[134] *Quesne C., Tkachuk V. M.* Deformed algebras, position-dependent effective masses and curved spaces: an exactly solvable Coulomb problem // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2004. Vol. 37, no. 14. P. 4267–4281.

[135] *Quesne C., Tkachuk V. M.* Generalized deformed commutation relations with nonzero minimal uncertainties in position and/or momentum and applications to quantum mechanics // *SIGMA.* 2007. Vol. 3 Art. 016. 18 p.

[136] Deformed shape invariance and exactly solvable hamiltonians with position-dependent effective mass / B. Bagchi, A. Banerjee,

C. Quesne, V. M. Tkachuk // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2005. Vol. 38, no. 13. P. 2929–2945.

[137] Hamiltonians with position-dependent mass, deformations and supersymmetry / C. Quesne, B. Bagchi, A. Banerjee, V. M. Tkachuk // *Bulg. J. Phys.* 2006. Vol. 33, no. 4. P. 308–318.

[138] Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations / L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 65, no. 12. Art. 125027. 8 p.

[139] Effect of the minimal length uncertainty relation on the density of states and the cosmological constant problem / L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 65, no. 12. Art. 125028. 7 p.

[140] *Dadić I., Jonke L., Meljanac S.* Harmonic oscillator with minimal length uncertainty relations and ladder operators // *Phys. Rev. D.* 2003. Vol. 67, no. 8. Art. 087701. 4 p.

[141] *Brau F., Buisseret F.* Minimal length uncertainty relation and gravitational quantum well // *Phys. Rev. D.* 2006. Vol. 74, no. 3. Art. 036002. 5 p.

[142] *Bouaziz D., Bawin M.* Regularization of the singular inverse square potential in quantum mechanics with a minimal length // *Phys. Rev. A.* 2007. Vol. 76, no. 3. Art. 032112. 13 p.

[143] *Bouaziz D., Bawin M.* Singular inverse square potential in arbitrary dimensions with a minimal length: Application to the motion of a

dipole in a cosmic string background // *Phys. Rev. A.* 2008. Vol. 78, no. 3. Art. 032110. 8 p.

[144] *Tkachuk V. M.* Field equation in a deformed space with minimal length // *J. Phys. Stud.* 2007. Vol. 11, no. 1. P. 41–44.

[145] *Frydryszak A. M., Tkachuk V. M.* Aspects of pre-quantum description of deformed theories // *Czech. J. Phys.* 2003. Vol. 53, no. 11. P. 1035–1040.

[146] *Chung W. S., Hassanabadi H.* New generalized uncertainty principle from the doubly special relativity // *Phys. Lett. B.* 2018. Vol. 785. P. 127 – 131.

[147] *Chung W. S., Hassanabadi H.* A new higher order GUP: one dimensional quantum system // *Eur. Phys. J. C.* 2019. Vol. 79:213.

[148] *Ali A. F., Das S., Vagenas E. C.* Discreteness of space from the generalized uncertainty principle // *Phys. Lett. B.* 2009. Vol. 678, no. 5. P. 497 – 499.

[149] *Ali A. F., Das S., Vagenas E. C.* Proposal for testing quantum gravity in the lab // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 84, no. 4. Art. 044013. 10 p.

[150] *Pedram P.* A higher order GUP with minimal length uncertainty and maximal momentum // *Phys. Lett. B.* 2012. Vol. 714, no. 2. P. 317 – 323.

[151] *Pedram P.* A higher order GUP with minimal length uncertainty and maximal momentum II: Applications // *Phys. Lett. B.* 2012. Vol. 718, no. 2. P. 638 – 645.

[152] *Nozari K., Etemadi A.* Minimal length, maximal momentum, and Hilbert space representation of quantum mechanics // *Phys. Rev. D.* 2012. Vol. 85, no. 10. Art. 104029, 12 p.

[153] Planck scale effects on the stochastic gravitational wave background generated from cosmological hadronization transition: A qualitative study / M. Khodadi, K. Nozari, H. Abedi, S. Capozziello // *Phys. Lett. B.* 2018. Vol. 783. P. 326 – 333.

[154] *Shababi H., Chung W. S.* On the two new types of the higher order GUP with minimal length uncertainty and maximal momentum // *Phys. Lett. B.* 2017. Vol. 770. P. 445 – 450.

[155] *Tkachuk V. M.* Galilean and Lorentz transformations in a space with generalized uncertainty principle // *Found. Phys.* 2016. Vol. 46, no. 12. P. 1666–1679.

[156] *Brau F.* Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1999. Vol. 32, no. 44. P. 7691–7696.

[157] *Quesne C., Tkachuk V. M.* Composite system in deformed space with minimal length // *Phys. Rev. A.* 2010. Vol. 81, no. 1. Art. 012106. 8 p.

[158] *Banerjee R., Kulkarni S., Samanta S.* Deformed symmetry in Snyder space and relativistic particle dynamics // *JHEP.* 2006. Vol. 2006:05. 21 p.

[159] *Banerjee R., Kumar K., Roychowdhury D.* Symmetries of Snyder-de Sitter space and relativistic particle dynamics // *JHEP.* 2011. Vol. 2011:60.

[160] *Quesne C., Tkachuk V. M.* More on a SUSYQM approach to the harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in position and/or momentum // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2004. Vol. 37, no. 43. P. 10095–10113.

[161] *Das S., Vagenas E. C.* Universality of quantum gravity corrections // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101, no. 22. Art. 221301. 4 p.

[162] *Stetsko M. M., Tkachuk V. M.* Perturbation hydrogen-atom spectrum in deformed space with minimal length // *Phys. Rev. A.* 2006. Vol. 74, no. 1. Art. 012101. 5 p.

[163] *Stetsko M. M.* Corrections to the ns levels of the hydrogen atom in deformed space with minimal length // *Phys. Rev. A.* 2006. Vol. 74, no. 6. Art. 062105. 5 p.

[164] *Stetsko M. M., Tkachuk V. M.* Orbital magnetic moment of the electron in the hydrogen atom in a deformed space with minimal length // *Phys. Lett. A.* 2008. Vol. 372, no. 31. P. 5126–5130.

[165] *Khosropour B.* Angular momentum and Zeeman effect in the presence of a minimal length based on the Kempf-Mann-Mangano algebra // *Eur. Phys. J. Plus.* 2016. Vol. 131:247. 8 p.

[166] *Moayedi S. K., Setare M. R., Moayeri H.* Formulation of an electrostatic field with a charge density in the presence of a minimal length based on the Kempf algebra // *EPL (Europhysics Letters).* 2012. Vol. 98, no. 5. Art. 50001. 5 p.

[167] *Silagadze Z.* Quantum gravity, minimum length and Keplerian orbits // *Phys. Lett. A.* 2009. Vol. 373, no. 31. P. 2643 – 2645.

[168] *Hossenfelder S.* Multiparticle states in deformed special relativity // *Phys. Rev. D.* 2007. Vol. 75, no. 10. Art. 105005. 8 p.

[169] *Amelino-Camelia G.* Doubly-special relativity: facts, myths and some key open issues // *Symmetry.* 2010. Vol. 2(1). P. 230–271.

[170] *Hinterleitner F.* Canonical doubly special relativity theory // *Phys. Rev. D.* 2005. Vol. 71, no. 2. Art. 025016. 6 p.

[171] *Hossenfelder S.* The soccer-ball problem // *SIGMA.* 2014. Vol. 10. Art. 174. 8 p.

[172] *Magpantay J. A.* Dual doubly special relativity // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 84, no. 2. Art. 024016. 10 p.

[173] *Tkachuk V. M.* Deformed Heisenberg algebra with minimal length and the equivalence principle // *Phys. Rev. A.* 2012. Vol. 86, no. 6. Art. 062112. 4 p.

[174] MICROSCOPE mission: First results of a space test of the equivalence principle / Pierre Touboul, Gilles Métris, Manuel Rodrigues et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2017. Vol. 119, no. 23. Art. 231101. 7 p.

[175] *Santos J. F., Bernardini A. E., Bastos C.* Probing phase-space noncommutativity through quantum mechanics and thermodynamics of free particles and quantum rotors // *Physica A: Stat. Mech. Appl.* 2015. Vol. 438. P. 340 – 354.

[176] *Smailagic A., Spallucci E.* Noncommutative 3D harmonic oscillator // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2002. Vol. 35. P. L363–L368.

[177] *Acatrinei C.* Path integral formulation of noncommutative quantum mechanics // *JHEP.* 2001. Vol. 09:007 6 p.

[178] On the algebraic structure of rotationally invariant two-dimensional Hamiltonians on the noncommutative phase space / H. Falomir, P. A. G. Pisani, F. Vega et al. // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2016. Vol. 49, no. 5. Art. 055202. 18 p.

[179] Noncommutative gravitational quantum well / O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. Aragão et al. // *Phys. Rev. D.* Vol. 72, no. 2. Art. 025010. 9 p.

[180] *Saha A., Gangopadhyay S., Saha S.* Quantum mechanical systems interacting with different polarizations of gravitational waves in noncommutative phase space // *Phys. Rev. D.* 2018. Vol. 97, no. 4. Art. 044015. 21 p.

[181] Entanglement and separability in the noncommutative phase-space scenario / A. E Bernardini, C. Bastos, O. Bertolami et al. // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015. Vol. 626. P. 012046.

[182] *Leal P., Bernardini A. E., Bertolami O.* Quantum cloning and teleportation fidelity in the noncommutative phase-space // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2019. Vol. 52, no. 37. Art. 375302. 18 p.

[183] *Ho P.-M., Kao H.-C.* Noncommutative quantum mechanics from noncommutative quantum field theory // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88, no. 15. Art. 151602. 4 p.

[184] *Belluccii S., Yeranyan A.* Noncommutative quantum scattering in a central field // *Phys. Lett. B.* 2005. Vol. 609, no. 3-4. P. 418–423.

[185] *Gnatenko Kh. P.* Composite system in noncommutative space and the equivalence principle // *Phys. Lett. A.* 2013. Vol. 377, no. 43. P. 3061–3066.

[186] *Saha A.* Colella-Overhauser-Werner test of the weak equivalence principle: A low-energy window to look into the noncommutative structure of space-time? // *Phys. Rev. D.* 2014. Vol. 89, no. 2. Art. 025010. 5 p.

[187] *Bertolami O., Leal P.* Aspects of phase-space noncommutative quantum mechanics // *Phys. Lett. B.* 2015. Vol. 750. P. 6 – 11.

[188] *Gnatenko Kh. P.* Minimal length, area, and volume in a space with noncommutativity of coordinates // *J. Phys. Stud.* 2016. Vol. 20, no. 1/2. Art. 1001. 5 p.

[189] *Deriglazov A.* Quantum mechanics on noncommutative plane and sphere from constrained systems // *Phys. Lett. B.* 2002. Vol. 530, no. 1. P. 235 – 243.

[190] Phase-space noncommutative quantum cosmology / C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 78, no. 2. Art. 023516. 10 p.

[191] Anisotropic harmonic oscillator, non-commutative Landau problem and exotic Newton–Hooke symmetry / P. D. Alvarez, J. Gomis, K. Kamimura, M. S. Plyushchay // *Phys. Lett. B.* 2008. Vol. 659, no. 5. P. 906 – 912.

[192] *Dadic I., Jonke L., Meljanac S.* Harmonic oscillator on noncommutative spaces // *Acta Phys.Slov.* 2005. Vol. 55. P. 149–164.

[193] Analytical and numerical analysis of a rotational invariant D = 2 harmonic oscillator in the light of different noncommutative phase-space configurations / E. M. C. Abreu, M. V. Marcial,

A. C. R. Mendes, W. Oliveira // *JHEP*. 2013. Vol. 2013:138. 17 p.

[194] *Saha A., Gangopadhyay S., Saha S.* Noncommutative quantum mechanics of a harmonic oscillator under linearized gravitational waves // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 83, no. 2. Art. 025004. 6 p.

[195] *Nath D., Roy P.* Noncommutative anisotropic oscillator in a homogeneous magnetic field // *Ann. Phys.* 2017. Vol. 377. P. 115 – 124.

[196] *Kijanka A., Kosiński P.* Noncommutative isotropic harmonic oscillator // *Phys. Rev. D.* 2004. Vol. 70, no. 12. Art. 127702. 3 p.

[197] *Jing J., Chen J.-F.* Non-commutative harmonic oscillator in magnetic field and continuous limit // *Eur. Phys. J. C.* 2009. Vol. 60, no. 4. P. 669–674.

[198] *Romero J. M., Santiago J. A., Vergara J. D.* Newton's second law in a non-commutative space // *Mod. Phys. Lett. A.* 2003. Vol. 310, no. 1. P. 9–12.

[199] *Daszkiewicz M. C., Walczyk J.* Classical mechanics of many particles defined on canonically deformed nonrelativistic space-time // *Mod. Phys. Lett. A.* 2011. Vol. 26, no. 11. P. 819–832.

[200] *Lin B.-S., Jing S.-C., Heng T.-H.* Deformation quantization for coupled harmonic oscillators on a general noncommutative space // *Mod. Phys. Lett. A.* 2008. Vol. 23, no. 06. P. 445–456.

[201] *Harko T., Liang S.-D.* Energy-dependent noncommutative quantum mechanics // *Eur. Phys. J. C.* 2019. Vol. 79:300. 22 p.

[202] Scaling of variables and the relation between noncommutative parameters in noncommutative quantum mechanics / O Bertolami, J G Rosa, C M L de Aragao et al. // *Mod. Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 21, no. 10. P. 795–802.

[203] *Djemai A. E. F.* Noncommutative classical mechanics // *Int. J. Theor. Phys.* 2004. Vol. 43, no. 2. P. 299–314.

[204] Precession of Mercury's perihelion from ranging to the MESSENGER spacecraft / Ryan S. Park, William M. Folkner, Alexander S. Konopliv et al. // *The Astronomical Journal.* 2017. Vol. 153:121. 7 p.

[205] *Castello-Branco K. H. C., Martins A. G.* Free-fall in a uniform gravitational field in noncommutative quantum mechanics // *J. Math. Phys.* 2010. Vol. 51, no. 10. Art. 102106. 25 p.

[206] *Bars I., Terning J.* Extra dimensions in space and time. New York, NY: Springer, 2010.

[207] *Williams J. G., Turyshev S. G., Boggs D. H.* Lunar laser ranging tests of the equivalence principle // *Class. Quantum Grav.* 2012. Vol. 29, no. 18. Art. 184004. 11 p.

[208] *Domingos J. M.* Time reversal in classical and quantum mechanics // *Int. J Theor. Phys.* 1979. Vol. 18, no. 3. P. 212 – 230.

[209] Formulation, interpretation and application of non-commutative quantum mechanics / F G Scholtz, L Gouba, A Hafver, C M Rohwer // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2009. Vol. 42, no. 17. Art. 175303. 13 p.

[210] *Sheikh-Jabbari M. M.* C, P, and T invariance of noncommutative gauge theories // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84, no. 23. P. 5265–5268.

[211] *Chaichian M., Nishijima K., Tureanu A.* Spin-statistics and CPT theorems in noncommutative field theory // *Phys. Lett. B.* 2003. Vol. 568, no. 1. P. 146 – 152.

[212] *Chaichian M., Sheikh-Jabbari M. M., Tureanu A.* Noncommutativity of space-time and the hydrogen atom spectrum // *Eur. Phys. J. C.* 2004. Vol. 36, no. 2. P. 251–252.

[213] *Chair N., Dalabeeh M. A.* The noncommutative quadratic Stark effect for the H-atom // *J. Phys. A.* 2005. Vol. 38, no. 7. P. 1553–1558.

[214] *Stern A.* Noncommutative point sources // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 100, no. 6. Art. 061601. 4 p.

[215] *Zaim S., Khodja L., Delenda Y.* Second-order corrections to the noncommutative Klein-Gordon equation with a Coulomb potential // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2011. Vol. 26, no. 23. P. 4133–4144.

[216] Dirac equation in noncommutative space for hydrogen atom / T. C. Adorno, M. C. Baldiotti, M. Chaichian et al. // *Phys. Lett. B.* 2009. Vol. 682, no. 2. P. 235–239.

[217] *Khodja L., Zaim S.* New treatment of the noncommutative Dirac equation with a Coulomb potential // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2012. Vol. 27, no. 19. Art. 1250100. 13 p.

[218] *Masum H., Dulat S., Tohti M.* Relativistic hydrogen-like atom on a noncommutative phase space // *Int. J. Theor. Phys.* 2017. Vol. 56, no. 9. P. 2724–2737.

[219] Precision measurement of the hydrogen 1s-2s frequency via a 920-km fiber link / A. Matveev, C. G. Parthey, K. Predehl et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110, no. 23. Art. 230801. 5 p.

[220] *Jellal A., Kinani E. H. E., Schreiber M.* Two coupled harmonic oscillators on noncommutative plane // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2005. Vol. 20, no. 7. P. 1515—-1529.

[221] *Jabbari I., Jahan A., Riazi Z.* Partition function of the harmonic oscillator on a noncommutative plane // *Turk. J. Phys.* 2009. Vol. 33. P. 149–154.

[222] Probing deformed commutators with macroscopic harmonic oscillators / M. Bawaj, C. Biancofiore, M. Bonaldi et al. // *Nat. Commun.* 2015. Vol. 6. Art. 7503. 7 p.

[223] *Ponte M. A., Oliveira M. C., Moussa M. H. Y.* Decoherence in a system of strongly coupled quantum oscillators. i. symmetric network // *Phys. Rev. A.* 2004. Vol. 70, no. 2. Art. 022324. 16 p.

[224] *Ponte M. A., Mizrahi S. S., Moussa M. H. Y.* Networks of dissipative quantum harmonic oscillators: A general treatment // *Phys. Rev. A.* 2007. Vol. 76, no. 3. Art. 032101. 10 p.

[225] *Plenio M. B., Hartley J., Eisert J.* Dynamics and manipulation of entanglement in coupled harmonic systems with many degrees of freedom // *New Journal of Physics.* 2004. Vol. 6. Art. 36. 39 p.

[226] *Isgur N., Karl G.* p-wave baryons in the quark model // *Phys. Rev. D.* Vol. 18, no. 11. P. 4187–4205.

[227] *Glozman L., Riska D.* The spectrum of the nucleons and the strange hyperons and chiral dynamics // *Phys. Rep.* 1996. Vol. 268, no. 4. P. 263 – 303.

[228] *Capstick S., Roberts W.* Quark models of baryon masses and decays // *Prog. Part. Nucl. Phys.* 2000. Vol. 45. P. S241 – S331.

[229] *Ikeda S., Fillaux F.* Incoherent elastic-neutron-scattering study of the vibrational dynamics and spin-related symmetry of protons in the $khco_3$ crystal // *Phys. Rev. B.* 1999. Vol. 59, no. 6. P. 4134–4145.

[230] *Fillaux F.* Quantum entanglement and nonlocal proton transfer dynamics in dimers of formic acid and analogues // *Chem. Phys. Lett.* 2005. Vol. 408, no. 4. P. 302 – 306.

[231] *Hong-Yi F.* Unitary transformation for four harmonically coupled identical oscillators // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol. 42, no. 7. P. 4377–4380.

[232] *Michelot F.* Solution for an arbitrary number of coupled identical oscillators // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 45, no. 7. P. 4271–4276.

[233] *Вакарчук І. О.* Квантова механіка: Підручник — 4-те вид., доп. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2012. 872 с.: 78 іл.

[234] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Two-particle system in noncommutative space with preserved rotational symmetry // *Ukr. J. Phys.* 2016. Vol. 61, no. 5. P. 432–439.

[235] *Polchinski J.* Precision Spectroscopy of Antiprotonic Helium Atoms and Ions – Weighing the Antiproton. In: Karshenboim S.G. (eds) Precision Physics of Simple Atoms and Molecules. Lecture Notes in Physics vol 745. Springer, Berlin, Heidelberg. Springer, Berlin, Heidelberg. P. 187–201.

[236] Spectroscopy of antiprotonic helium atoms and its contribution to the fundamental physical constants / Arthur Matveev, Christian G. Parthey, Katharina Predehl et al. // *Proc. Jpn. Acad. Ser. B Phys. Biol. Sci.* 2010. Vol. 86, no. 1. P. 1–10.

[237] Two-photon laser spectroscopy of antiprotonic helium and the antiproton-to-electron mass ratio / M. Hori, A. Soter, D. Barn et al. // *Nature.* 2011. Vol. 475. P. 484–488.

[238] *Caves C. M., Schumaker B. L.* New formalism for two-photon quantum optics. I. Quadrature phases and squeezed states // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol. 31, no. 5. P. 3068–3092.

[239] *Schumaker B. L., Caves C. M.* New formalism for two-photon quantum optics. II. Mathematical foundation and compact notation // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol. 31, no. 5. P. 3093–3111.

[240] *Makarov D. N.* Coupled harmonic oscillators and their quantum entanglement // *Phys. Rev. E.* 2018. Vol. 97, no. 4. Art. 042203. 5 p.

[241] *Florencio J., Lee M. H.* Exact time evolution of a classical harmonic-oscillator chain // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol. 31, no. 5. P. 3231–3236.

[242] *Greenberger D.* The role of equivalence in quantum mechanics // *Annals of Physics.* 1968. Vol. 47, no. 1. P. 116 – 126.

[243] *Kosinski P., Maslanka P., Lukierski J.* Local field theory on κ-Minkowski space, star products and noncommutative translations // *Czech. J. Phys.* 2000. Vol. 50, no. 11. P. 1283–1290.

[244] κ-deformed phase spaces, Jordanian twists, Lorentz-Weyl algebra, and dispersion relations / D. Meljanac, S. Meljanac, S. Mignemi, R. Štrajn // *Phys. Rev. D.* 2019. Vol. 99, no. 12. Art. 126012. 12 p.

[245] *Daszkiewicz M.* The Zeeman effect for hydrogen atom in twist-deformed space-time // *Rom. J. Phys.* 2019. Vol. 64, no. 3-4. Art. 201. 8 p.

[246] *Jacobson T., Liberati S., Mattingly D.* Lorentz violation at high energy: Concepts, phenomena, and astrophysical constraints // *Ann. Phys.* 2006. Vol. 321, no. 1. P. 150 – 196.

[247] Relative locality and the soccer ball problem / Giovanni Amelino-Camelia, Laurent Freidel, Jerzy Kowalski-Glikman, Lee Smolin // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 84, no. 8. Art. 087702. 5 p.

[248] Reply to "Comment on Relative locality and the soccer ball problem" / Giovanni Amelino-Camelia, Laurent Freidel, Jerzy Kowalski-Glikman, Lee Smolin // *Phys. Rev. D.* 2013. Vol. 88, no. 2. Art. 028702. 5 p.

[249] *Daszkiewicz M.* N-enlarged Galilei Hopf algebra and its twist deformations // *Mod. Phys. Lett. A.* 2012. Vol. 27, no. 14. Art. 1250083. 7 p.

[250] *Daszkiewicz M.* Two-particle system in Coulomb potential for twist-deformed space-time // *Phys. Scr.* 2018. Vol. 93, no. 8. Art. 085202. 12 p.

[251] *Quesne C., Penson K., Tkachuk V.* Maths-type q-deformed coherent states for q>1 // *Phys. Lett. A.* 2003. Vol. 313, no. 1. P. 29 – 36.

[252] *Borowiec A., Lukierski J., Tolstoy V. N.* Quantum deformations of D=4 Lorentz algebra revisited: twistings of q-deformation // *Eur. Phys. J. C.* 2008. Vol. 57. P. 601–611.

[253] *Gavrilik A. M., Kachurik I. I.* New version of pseudo-hermiticity in the two-sided deformation of Heisenberg algebra // *Mod. Phys. Lett. A.* 2016. Vol. 31, no. 4. Art. 1650024. 15 p.

[254] *Adamska L. V., Gavrilik A. M.* Multi-particle correlations in qp-Bose gas model // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2004. Vol. 37, no. 17. P. 4787–4795.

[255] *Lieb E. H., Sokal A. D.* A general Lee-Yang theorem for one component and multicomponent ferromagnets // *Commun. Math. Phys.* 1981. Vol. 80. P. 153–179.

[256] *Kozitsky Y. V.* Hierarchical ferromagnetic vector spin model possessing the Lee–Yang property. Thermodynamic limit at the critical point and above // *J. Stat. Phys.* 1997. Vol. 87, no. 3-4. P. 799–820.

[257] *Kozitsky Y.* Laguerre entire functions and the Lee-Yang property // *Applied Math. Comput.* 2003. Vol. 141, no. 1. P. 103–112.

[258] *Kozitsky Y.* Laguerre entire functions and related locally convex spaces // *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal.* 2001. Vol. 44, no. 3. P. 225–244.

[259] *Wu Y., Yang X.* Preparation of Schrodinger cat states in noncommutative space // *Phys. Rev. D.* 2006. Vol. 73, no. 6. Art. 067701. 4 p.

[260] *Janke W., Kenna R.* The strength of first and second order phase transitions from partition function zeroes // *J. Stat. Phys.* 2001. Vol. 102, no. 5-6. P. 1211–1227.

[261] Density of partition function zeroes and phase transition strength // *Comput. Phys. Commun.* 2002. Vol. 147, no. 1. P. 443 – 446.

[262] *Janke W., Kenna R.* Phase transition strengths from the density of partition function zeroes // *Nucl. Phys. B - Proc. Suppl.* 2002. Vol. 106-107, no. 1. P. 905 – 907.

[263] *Deger A., Brandner K., Flindt C.* Lee-Yang zeros and large-deviation statistics of a molecular zipper // *Phys. Rev. E.* 2018. Vol. 97, no. 1. Art. 012115. 12 p.

[264] Lee-Yang zeros in lattice QCD for searching phase transition points / M. Wakayama, V.G. Bornyakov, D.L. Boyda et al. // *Phys. Lett. B.* 2019. Vol. 793. P. 227 – 233.

[265] Condensation of Lee-Yang zeros in scalar field theory / N. G. Antoniou, F. K. Diakonos, X. N. Maintas, C. E. Tsagkarakis // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 95, no. 5. Art. 052145. 6 p.

[266] *Zauner-Stauber V., Halimeh J. C.* Probing the anomalous dynamical phase in long-range quantum spin chains through Fisher-zero lines // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, no. 6. Art. 062118. 8 p.

[267] *Derrida B., Seze L. D., Itzykson C.* Fractal structure of zeros in hierarchical models // *J. Stat. Phys.* 1983. Vol. 33, no. 3. P. 559–569.

[268] Thin Fisher zeros / B. P. Dolan, W. Janke, D. A. Johnston, M. Stathakopoulos // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2001. Vol. 34, no. 32. P. 6211–6223.

[269] *Janke W., Johnston D., Stathakopoulos M.* Fat Fisher zeroes // *Nucl. Phys. B.* 2001. Vol. 614, no. 3. P. 494 – 512.

[270] *Ghulghazaryan R. G., Ananikian N. S.* Partition function zeros of the one-dimensional Potts model: the recursive method // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2003. Vol. 36, no. 23. P. 6297–6312.

[271] *Hovhannisyan V., Ananikian N., Kenna R.* Partition function zeros and magnetization plateaus of the spin-1 Ising–Heisenberg diamond chain // *Physica A: Stat. Mech. Appl.* 2016. Vol. 453. P. 116 – 130.

[272] Violation of Lee-Yang circle theorem for Ising phase transitions on complex networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna // *EPL (Europhysics Letters).* 2015. Vol. 111, no. 6. Art. 60009. 6 p.

[273] Partition function zeros for the Ising model on complete graphs and on annealed scale-free networks / M Krasnytska, B Berche, Yu Holovatch, R Kenna // *J. Phys. A: Math. and Theor.* 2016. Vol. 49, no. 13. Art. 135001. 34. p.

[274] *Sarkanych P., Holovatch Y., Kenna R.* Classical phase transitions in a one-dimensional short-range spin model // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2018. Vol. 51, no. 50. P. 505001.

[275] *Sarkanych P., Holovatch Y., Kenna R.* On the phase diagram of the 2d Ising model with frustrating dipole interaction // *Ukr. J. Phys.* 2015. Vol. 60, no. 4. P. 334–338.

[276] *Kuzmak A. R., Tkachuk V. M.* Detecting the Lee-Yang zeros of a high-spin system by the evolution of probe spin // *EPL (Europhysics Letters).* 2019. Vol. 125, no. 1. Art. 10004. 7 p.

[277] Classification of phase transitions of finite Bose-Einstein condensates in power-law traps by Fisher zeros / Oliver Mülken, Peter Borrmann, Jens Harting, Heinrich Stamerjohanns // *Phys. Rev. A*. 2001. Vol. 64, no. 1. Art. 013611. 6 p.

[278] Fisher zeros of a unitary Bose gas / W. van Dijk, C. Lobo, A. MacDonald, R. K. Bhaduri // *Can. J. Phys.* 2015. Vol. 93. P. 830–835.

[279] *Borrmann P., Mülken O., Harting J.* Classification of phase transitions in small systems // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84. P. 3511–3514.

[280] *Bhaduri R. K., MacDonald A., van Dijk W.* Anomalous Fisher-like zeros for the canonical partition function of noninteracting fermions // *EPL (Europhysics Letters)*. 2011. Vol. 96, no. 5. Art. 56003. 5 p.

[281] *Zvyagin A. A.* Nonequilibrium dynamics of a system with two kinds of fermions after a pulse // *Phys. Rev. B*. 2017. Vol. 95, no. 7. Art. 075122. 6 p.

[282] *Su G., lin Ge M.* Thermodynamic characteristics of the q-deformed ideal Bose gas // *Phys. Lett. A*. 1993. Vol. 173, no. 1. P. 17 – 20.

[283] Correlation functions of quantum q-oscillators / V.I. Man'ko, G. Marmo, S. Solimeno, F. Zaccaria // *Phys. Lett. A*. 1993. Vol. 176, no. 3. P. 173 – 175.

[284] *Chang Z., Chen S.-X.* Thermodynamics of a deformed Bose gas // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2002. Vol. 35, no. 46. P. 9731–9743.

[285] *Su G., Cai S., Chen J.* Bose–Einstein condensation of a relativistic q-deformed Bose gas // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2008. Vol. 41, no. 4. Art. 045007. 9 p.

[286] Physical nonlinear aspects of classical and quantum q-oscillators / V. I. Man'ko, G. Marmo, S. Solimeno, F. Zaccaria // *Int. J. Mod. Phys. A.* 1993. Vol. 08, no. 20. P. 3577–3597.

[287] *Ткачук В. М.* Фундаментальні проблеми квантової механіки: Підручник.— Львів: ЛНУ імені Івана Франка. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. 144 с.

[288] *Batouli J., Baz M. E., Maaouni A.* RLC circuit realization of a q-deformed harmonic oscillator with time dependent mass // *Phys. Lett. A.* 2015. Vol. 379, no. 28. P. 1619 – 1626.

[289] *Scarfone A. M., Swamy P. N.* An interacting particles system revisited in the framework of the q-deformed algebra // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2008. Vol. 41, no. 27. Art. 275211. 11 p.

[290] *Gavrilik A. M., Mishchenko Y. A.* Correlation function intercepts for $\tilde{\mu}$, q-deformed Bose gas model implying effective accounting for interaction and compositeness of particles // *Nucl. Phys. B.* 2015. Vol. 891. P. 466 – 481.

[291] Boson localization and the superfluid-insulator transition / M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, D. S. Fisher // *Phys. Rev. B.* 1989. Vol. 40. P. 546–570.

[292] Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms / M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger et al. // *Nature.* 2002. Vol. 415. P. 39–44.

[293] Time-resolved observation of coherent multi-body interactions in quantum phase revivals / S. Will, T. Best, U. Schneider et al. // *Nature.* 2010. Vol. 465. P. 197–201.

[294] *Kurtz D. C.* A sufficient sondition for all the roots of a polynomial to be real // *The American Mathematical Monthly.* 1992. Vol. 99. P. 259–263.

[295] *Fujiwara M.* Uber die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung // *Tohoku Mathematical Journal, First Series.* 1916. Vol. 10. P. 167–171.

[296] *Brush S. G.* History of the Lenz-Ising model // *Rev. Mod. Phys.* 1967. Vol. 39, no. 4. P. 883–893.

[297] *Bexter R. J.* Exactly solved models in statistical mechanics. Academic Press, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1982. 486 P.

[298] Spin chirality in a molecular dysprosium triangle: The archetype of the noncollinear Ising model / J. Luzon, K. Bernot, I. J. Hewitt et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 100, no. 24. Art. 247205. 4 p.

[299] *Kim S.-Y.* Yang-Lee zeros of the antiferromagnetic Ising model // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93, no. 13. Art. 130604. 4 p.

ДОДАТОК А

Список публікацій за темою дисертації

Статті у журналах, які індексуються наукометричними базами SCOPUS та Web of Science, серед них 14 статей у журналах, які належать до квартилів Q1,Q2, 6 статей у журналах, які належать до квартилю Q3 та 3 статті, які належать до квартилю Q4

1. Gnatenko Kh. P. Parameters of noncommutativity in Lie-algebraic noncommutative space // Phys. Rev. D. 2019. Vol. 99, No. 2. Art. 026009.- 9 p. (журнал належить до Q1)

2. Gnatenko Kh. P. Features of description of composite system's motion in twist-deformed spacetime // Mod. Phys. Lett. A. 2019. Vol. 34, No. 9. Art. 1950071. 9 p.(журнал належить до Q3)

3. Gnatenko Kh. P., Samar M. I., Tkachuk V. M. Time-reversal and rotational symmetries in noncommutative phase space // Phys. Rev. A. 2019. Vol. 99, No. 1. Art. 012114. 6 p. (журнал належить до Q1)

4. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Upper bound on the momentum scale in noncommutative phase space of canonical type // EPL (Europhysics Letters). 2019. Vol. 127, No. 2. Art. 20003. 7 p. (журнал належить до Q2)

5. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Minimal length estimation on the

basis of studies of the Sun-Earth-Moon system in deformed space // Int. J. Mod. Phys. D. 2019. Vol.28, No. 8. 13 p. (журнал належить до Q1)

6. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Macroscopic body in the Snyder space and minimal length estimation // EPL (Europhysics Letters). 2019. Vol. 125, No. 5. Art. 50003. 5 p. (журнал належить до Q2)

7. Gnatenko Kh. P. System of interacting harmonic oscillators in rotationally invariant noncommutative phase space // Phys. Lett. A. 2018. Vol. 382, No. 46. P. 3317-3324. (журнал належить до Q2)

8. Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V. M. Lee-Yang zeros and two-time spin correlation function // Physica A: Stat. Mech. Appl. 2018. Vol. 509. P. 1095-1101. (журнал належить до Q2)

9. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Composite system in rotationally invariant noncommutative phase space // Int. J. Mod. Phys. A. 2018. Vol. 33, No. 7. Art. 1850037. 21 p. (журнал належить до Q2)

10. Gnatenko Kh. P. Rotationally invariant noncommutative phase space of canonical type with recovered weak equivalence principle // EPL (Europhysics Letters). 2018. Vol. 123, No. 5. Art. 50002. 7 p. (журнал належить до Q2)

11. Gnatenko Kh. P., Laba H. P., Tkachuk V. M. Features of free particles system motion in noncommutative phase space and conservation of the total momentum // Mod. Phys. Lett. A. 2018. Vol. 33, No. 23. Art. 1850131. 12 p. (журнал належить до Q3)

12. Gnatenko Kh. P., Shyiko O. V. Effect of noncommutativity on the spectrum of free particle and harmonic oscillator in rotationally invari-

ant noncommutative phase space // Mod. Phys. Lett. A. 2018. Vol. 33, No. 16. Art. 1850091. 11 p. (журнал належить до Q3)

13. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Influence of noncommutativity on the motion of Sun-Earth-Moon system and the weak equivalence principle // Int. J. Theor. Phys. 2018. Vol. 57, No. 11. P. 3359-3368. (журнал належить до Q3)

14. Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V. M. Two-time correlation functions and the Lee-Yang zeros for an interacting Bose gas // Phys. Rev. E. 2017. Vol. 96, No. 3. Art. 032116. 6 p. (журнал належить до Q1)

15. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Weak equivalence principle in noncommutative phase space and the parameters of noncommutativity // Phys. Lett. A. 2017. Vol. 381, No. 31. P. 2463-2469. (журнал належить до Q2)

16. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Noncommutative phase space with rotational symmetry and hydrogen atom // Int. J. Mod. Phys. A. 2017. Vol. 32, No. 26. Art. 1750161. 15 p. (журнал належить до Q2)

17. Gnatenko Kh. P., Kargol A., Tkachuk V. M. Time correlation functions and Fisher zeros for q-deformed Bose gas // EPL (Europhysics Letters). 2017. Vol. 120, No. 3. Art. 30004. 6 p. (журнал належить до Q2)

18. Gnatenko Kh. P. Kinematic variables in noncommutative phase space and parameters of noncommutativity // Mod. Phys. Lett. A. 2017. Vol. 32, No. 31. Art. 1750166. 12 p. (журнал належить до Q2)

19. Gnatenko Kh. P. Harmonic oscillator chain in noncommutative phase

space with rotational symmetry // Ukr. J. Phys. 2019. Vol. 64, No. 2. P. 131-136. (журнал належить до Q3)

20. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Two-particle system with harmonic oscillator interaction in noncommutative phase space // J. Phys. Stud. 2017. Vol. 21, No. 3. Art. 3001. 6 p. (журнал належить до Q4)

21. Гнатенко Х. П., Морозко О. О., Криницький Ю. С. Рух частинки у гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу та слабкий принцип еквівалентності // Журн. фіз. дослідж. 2018. Т. 22, №1. Ст. 1001. 6 с. (журнал належить до Q4)

22. Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M. Length in a noncommutative phase space // Ukr. J. Phys. 2018. Vol. 63, No. 2. P. 102-109. (журнал належить до Q3)

23. Гнатенко Х. П., Ткачук В. М. Багаточастинкова система у сферично-симетричному просторі з канонічною некомутативністю координат // Журн. фіз. дослідж. 2017. Т. 21, №4. Ст. 4002. 7 с. (журнал належить до Q4)

Статті у фахових реферованих журналах

24. Гнатенко Х. П. Особливості опису системи частинок у двовимірному квантованому просторі з некомутативністю координат канонічного типу // Вісн. Львів. ун ту. Сер. фіз. 2017. Вип. 53. С. 22-29.

Монографія

25. Гнатенко Х. П. Фізичні проблеми у некомутативному просторі.

Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2017. 128 с. (розділ 1 (підрозділ 1.3), розділ 4, розділ 5 (підрозділ 5.3), розділ 8).

Тези доповідей на конференціях

26. Gnatenko Kh. P. Parameters of noncommutativity in noncommutative phase space // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Gŕa - Lviv, Zielona Gŕa - October 16-19 2017: Abstracts. P. 3-4.

27. Гнатенко Х. П. Принцип еквівалентності в некомутативному фазовому просторі [Різдвяні дискусії 2017, Львів, 11-12 січня 2017] // Журн. фіз. дослідж. 2017. Т. 21, №1/2. С. 1998-3-4.

28. Гнатенко Х. Обмеження на довжину площу та об'єм у некомутативному фазовому просторі // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2017", Львів, 16-18 травня 2017 р.: Тези доповідей. С. Е6.

29. Гнатенко Х. Екзотичні атоми у квантованому просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів [Різдвяні дискусії 2018, Львів, 11-12 січня 2018] // Журн. фіз. дослідж. 2018. Т. 22, №1. С. 1998-8.

30. Гнатенко Х. П. Фізичні системи у сферично-симетричному квантовому просторі з некомутативністю координат на некомутативністю імпульсів // 18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 7-8 червня 2018. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. С. 37.

31. Gnatenko Kh. P. Effect of noncommutativity of coordinates and noncommutativity of momenta on free particle system motion [Workshop

on Current Problems in Physics, Lviv, 03-04 July 2018] // J. Phys. Stud. 2018. Vol. 22, No. 3. Art. 3998. P. 4-5.

32. Гнатенко Х. П., Ткачук В. М. Вплив квантованості простору на рух системи Сонце-Земля-Місяць та принцип еквівалентності// Тези IX наукової конференції "Вибрані питання астрономії та астрофізики", присвяченої пам'яті Богдана Бабія (1936-1993), 1-5 жовтня 2018 р. Львів, 2018. С. 64-65.

33. Gnatenko Kh. Parameters of noncommutative algebra and fundamental problems in quantum space [Різдвяні дискусії 2019, Львів, 10-11 січня 2019] // Журн. фіз. дослідж. 2019. Т. 23, №1. С. 1998-2.

34. Gnatenko Kh., Samar M. Time reversal invariant noncommutative algebra of canonical type // International Conference of Students and Young Researchers in Theoretical and Experimental Physics "Heureka-2019", May 14-16, 2019. Lviv, Ukraine: Book of Abstracts. P. E6.

35. Gnatenko Kh. Influence of space quantization on the planetary motion and minimal length estimation // International Conference of Students and Young Researchers in Theoretical and Experimental Physics "Heureka-2019", May 14-16, 2019. Lviv, Ukraine: Book of Abstracts. P. G2.

36. Гнатенко Х. Вплив квантованості простору на властивості багаточастинкових систем // 19-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 13-14 червня 2019. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. С. 16.

37. Gnatenko Kh. P. Time-dependent correlation functions of q-deformed Bose gas and Fisher zeros // The 5th Conference "Statistical Physi-

cs: Modern Trends and Applications", dedicated to the 110th anniversary of the birth of M.M. Bogolyubov, 3-6 July 2019, Lviv, Ukraine: Programme and Abstracts. P. 109.

Апробація результатів дисертації

1. The 5th Conference ”Statistical Physics: Modern Trends and Applications”, dedicated to the 110th anniversary of the birth of M.M. Bogolyubov, 3-6 July 2019 (Lviv) [65] (доповідь біля постера);

2. 19-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 13-14 червня 2019 р. (Львів) [66] (усна доповідь).

3. Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики ”Еврика-2019”, 14-16 травня 2019 р. (Львів) [67, 68] (усна доповідь);

4. Різдвяні дискусії 10-11 січня 2019 р. (Львів) [69] (усна доповідь);

5. Workshop on Current Problems in Physics, 03-04 July 2018 (Lviv) [70] (усна доповідь);

6. 18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 7-8 червня 2018 р. (Львів) [71] (усна доповідь);

7. Різдвяні дискусії 10-11 січня 2018 р. (Львів) [72] (усна доповідь);

8. Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv, October 16-19 2017 (Zielona Góra, Poland) [73] (усна доповідь);

9. IX наукова конференція "Вибрані питання астрономії та астрофізики присвячена пам’яті Богдана Бабія (1936-1993), 1-5 жовтня 2018 р. (Львів) [74] (усна доповідь);

10. Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики ”Еврика-2017”, 16-18 травня 2017 р. (Львів) [73] (усна доповідь);

11. Різдвяні дискусії 11-12 січня 2017 р. (Львів) [76] (усна доповідь);
12. Семінар у Віденському університеті (Vienna Theory Lunch Seminar, December 12th, 2017),
13. Семінар у Інституті теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова (25 жовтня 2018 р.).