

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Фізичний факультет
Кафедра астрофізики

УДК 524.354

Магістерська робота

РОЗРАХУНОК ЕЛЕМЕНТІВ ОРБИТИ ГЕОСТАЦІОНАРНОГО СУПУТНИКА ЗІ
СПОСТЕРЕЖЕНЬ У РАДІОДІАПАЗОНІ.

Виконав: студент VI курсу, групи ФзФм-61
напряму підготовки (спеціальності)
“Фізика та астрономія”

_____ Коваль Д. М.

(підпис)

(прізвище та ініціали)

Керівник: _____ док. ф.-м. н. Новосядлий Б. С.

(підпис)

(прізвище та ініціали)

Рецензент: _____

(підпис)

(прізвище та ініціали)

м. Львів – 2021 р.

Анотація

Здійснено аналіз та підбір алгоритму обробки даних отриманих із установки «Паганель-360», який би на базі отриманих даних дав ефемериди спостережуваних об'єктів у заданій замовником точності. Для обчислення ефемерид було обрано алгоритм SDP4 (Simplified deep-space perturbations models) в силу надійності та перевіреності цього алгоритму часом. Оскільки оригінальний код SGP був створений 1965 року, та в подальшому розширений до SDP у 1985 р., то обидва алгоритми були реалізовані на мові FORTRAN. Основною задачею цієї роботи стало уточнення TLE даних поданих і відкритий доступ в силу їх відхилення від істинних через брак спостережень який породжує неактуальні дані деяких супутників чи їх повну відсутність в деяких випадках. Знаходження уточнених елементів орбіти в стандартизованому форматі TLE являється важливою задачею для багатьох розрахунків небесної механіки та може бути використаний в подальшому для розв'язку різноманітних задач локації та детекції об'єктів. Такі дані збирає NORAD починаючи з 1960 року коли роботами М. Лейна та К. Кранфорда зацікавились військові США. Однак, очевидно, що на сьогоднішній день, потреба в таких даних є не лише у військових США, а у більшості галузях сучасного життя, що породжує потребу у їх незалежному отриманні. Першим кроком для отримання таких даних стало уточнення існуючих даних.

Abstract

Here were done analysis and selection of the algorithm for processing the data obtained from the installation "Paganel-360", which on the basis of the obtained data would give the ephemeris of the observed objects in the accuracy specified by the customer. The SDP4 algorithm (Simplified deep-space perturbations models) was chosen to calculate ephemeris due to the reliability and time-tested nature of this algorithm. Since the original SGP code was created in 1965 and later expanded to SDP in 1985, both algorithms were implemented in FORTRAN. The main task of this work was to clarify the TLE data submitted and open access due to their deviation from the true because of lack of observations which generates irrelevant data of some satellites or their complete absence in some cases. Finding refined orbit elements in a standardized TLE format is an important task for many calculations of celestial mechanics and can be used later to solve various problems of location and detection of objects. Such data have been collected by NORAD since 1960, when the US military became interested in the work of M. Lane and K. Cranford. However, it is clear that today, the need for such data is not only in the US military, but in most areas of modern life, which creates the need for their independent receipt. The first step in obtaining such data was to clarify the existing dat

Зміст

Перелік позначень.....	6
Вступ	8
1. СИСТЕМИ КООРДИНАТ.....	10
1.1.1 Геоцентрична інерційна система координат (Earth Centered Inertial - ECI)	10
1.1.2 ДЕКАРТОВА ГЕОЦЕНТРИЧНА СИСТЕМА КООРДИНАТ (EARTH CENTERED EARTH FIXED- ECEF)	10
1.1.3 ТОПОЦЕНТРИЧНА ГОРИЗОНТАЛЬНА СИСТЕМА КООРДИНАТ	10
1.1.4 ОРБИТАЛЬНА СИСТЕМА КООРДИНАТ	11
2. ПРОБЛЕМА ДВОХ ТІЛ.....	12
3. ДИНАМІКА ТА КІНЕМАТИКА ОРБИТ СУПУТНИКІВ	17
3.1. ЗАКОНИ КЕПЛЕРА	17
3.2. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ РУХУ АБО ДРУГИЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА.....	18
3.3. ТРЕТІЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА	20
3.4. КЕПЛЕРОВІ ЕЛЕМЕНТИ ОРБИТИ	24
3.5. АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ПОЗИЦІЇ ТА ШВИДКОСТІ СУПУТНИКА	26
4. СПРОЩЕНА ПРОПАГАЦІЙНА МОДЕЛЬ	28
4.1. ОСНОВНІ ЧИННИКИ ЗБУРЕНЬ.....	28
4.2. ЗБУРЕННЯ У ЗВ'ЯЗКУ З ГЕОПОТЕНЦІЯМ.....	28
4.3. ЗБУРЕННЯ ПОВ'ЯЗАНІ ІЗ СОНЦЕМ ТА МІСЯЦЕМ	29
5. ПРОПАГАЦІЙНА МОДЕЛЬ SGP4	30
5.1. ЕФЕМЕРИДИ ТА TLE ФОРМАТ	30
5.2. ЗБУРЕННЯ ПОРОДЖЕНІ АТМОСФЕРОЮ	33
5.3. ЗБУРЕННЯ ПОРОДЖЕНІ СОНЯЧНИМ ВИПРОМІНЕННЯМ	33
5.4. ПІДСУМОК	34
6. СИСТЕМА «ПАГАНЕЛЬ-360».....	35
6.1. СИСЛИЙ ОПИС РОБОТИ ПРИСТРОЮ «ПАГАНЕЛЬ-360».....	35
6.2. ТАКТИКО ТЕХНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ «ПАГАНЕЛЬ360»	35

7. ORBITTOOL ТА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ПОШУКУ КООРДИНАТ	36
7.1. ORBITTOOL	36
7.2. ПОСТАНОВКА ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ	37
7.3. РОЗВ'ЯЗОК ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТА ЇЇ ОСОБЛИВОСТІ	37
7.3. ДАНІ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ РОЗВ'ЯЗКІВ	39
Висновки:	40
Використана література:	41

Перелік позначень

SGP – Simplified general perturbations models

SDP – Simplified deep-space perturbations models

TLE – Two-line element set

NORAD – Командування повітряно-космічної оборони Північної Америки North American Aerospace Defense

a – велика піввісь

A – площа перерізу

\bar{A} – константа інтегрування для площини орбіти

b – мала піввісь

B^* – балістичний коефіцієнт

c_ω – коефіцієнт опору

\bar{C} – вектор площини орбіти

e – ексцентриситет

e_x – базисний вектор осі x для обраної референцної системи

e_y – базисний вектор осі y для обраної референцної системи

e_z – базисний вектор осі z для обраної референцної системи

E – ексцентриситична аномалія

G – гравітаційна константа

h – енергетична константа для центрального поля

i – нахил площини орбіти

k – кількість обертів за день

L – обертальний момент

m_s – маса супутника

M – середня аномалія

M_E – маса Землі

n – середня кутова швидкість

ν – істина аномалія

$\dot{\nu}$ – кутова швидкість супутника

ω – аргумент перигею

Ω – пряме піднесення висхідного вузла

p – параметр еліпса

q_0 – густина атмосфери

\bar{r} – радіус-вектор

$\dot{\bar{r}}$ – швидкість

$\ddot{\bar{r}}$ – прискорення

$\ddot{\bar{r}}_{\text{Drag}}$ – прискорення породжене опором атмосфери

$\ddot{\bar{r}}_{\text{Solar}}$ – прискорення породжене впливом Сонця

t_0 – Час епохи або час на момент передування в перигеї

T – період обертання

Вступ

Для розв'язку першопочаткової задачі проекту, а саме знаходження власних координат на базі спостережень у радіодіапазоні за сузір'ям штучних супутників землі, необхідно мати карту цього сузір'я із відповідною точністю та відповідно до вимог проекту дана карта не може бути запозичена з сторонніх джерел, а має будуватись із власних спостережень та обчислень. Тому розв'язок основної задачі вимагає отримання ефемерид та обчислення очікуваних позицій спостережуваних об'єктів на базі отриманих ефемерид. Самі ефемериди можна отримати із спостережень за об'єктами впродовж їх руху. Обчислення передбачуваних позицій та траєкторій супутників являється доволі складеною задачею, адже розрахунок траєкторії тіла вимагає врахування усіх сил, що діють на об'єкт, а для супутників це не лише Земля, а й Місяць, Сонце, Атмосфера та інші збурення. І саме ці «інші збурення» призводять до постійного відхилення супутників від передбачуваних траєкторій в силу зміни ефемерид супутника з часом, тому було прийнято рішення вести постійні спостереження за супутниками для отримання їх ефемерид та розрахунок траєкторій по оновленим траєкторіям, таким чином можна на деякий проміжок часу отримати точне передбачення руху супутника. Отже для незалежної системи локації наземних тіл необхідна незалежна система пропагації руху супутників, яка може бути побудована лише на незалежних спостереженнях. На даний момент в наших силах уточнити існуючі, але не точні ефемериди, маючи прототип «Паганель-360», який надає нам можливість проводити перевірку правильності ефемерид та проводити їх уточнення. Для отримання даних які ми би змогли перевірити слід обрахувати положення супутника виходячи з його ефемерид та розрахувати відповідні кути під якими ми можемо спостерігати його, після чого ми зможемо порівняти реальні кути спостереження із отриманими із існуючих ефемерид. На базі такої зв'язки ми можемо корегувати та уточнювати ефемериди. Для цього необхідно мати алгоритм обробки ефемерид із врахуванням особливостей поставленої задачі. Таким алгоритмом став алгоритм, що обчислюється на базі моделі SDP4. Цей

алгоритм було розроблено компанією Aeronutronic-Ford для NASA та аерокосмічних військ США. Даний алгоритм був обраний в силу його відкритості та надійності. На сьогодні є багато його реалізацій на різних мовах програмування. Він є реалізованим на Java script, Python, C#, C++. Власне було обрано реалізацію на C++ через зручність та незначну перевагу в швидкості обчислення. Реалізацією алгоритмів SGP4 та SDP4 на C++, серед інших, є OrbitTool, який взято за основу та на базі якого надбудовано алгоритм уточнення ефемерид.

1. СИСТЕМИ КООРДИНАТ

1.1.1 Геоцентрична інерційна система координат (Earth Centered Inertial - ECI)

Геоцентрична Інерційна Система координат має початок в центрі землі. Вісь x лежить в площині екватора та направлена на точку весняного рівнодення. Вісь z направлена на північний полюс землі і є паралельною до осі обертання землі. Вісь y будується виходячи з напрямку попередніх двох осей так щоб утворилась «права» система координат. ECI використовується для опису стандартних кватерніонів, таких як кватерніон на надір з точки спостереження.

1.1.2 ДЕКАРТОВА ГЕОЦЕНТРИЧНА СИСТЕМА КООРДИНАТ (EARTH CENTERED EARTH FIXED- ECEF)

Геоцентрична Система координат, яка має початок в гео-центрі. Вісь x лежить в площині екватора та направлена на нульовий меридіан. Вісь z направлена від надиру до зеніту і задає напрямок на північ. Вісь y направлена відповідно до попередніх двох осей таким чином щоб утворювати «праву» трійку векторів. Ця система координат широко використовується для обчислень часів спостережень та відстежування супутників чи поточної гео-локації.

1.1.3 ТОПОЦЕНТРИЧНА ГОРИЗОНТАЛЬНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Топоцентрична система координат має початок на поверхні геоїда та будується наступним чином: вісь z направлена від надиру до зеніту в поточній точці на геоїді і лежить на прямій що з'єднує точку на геоїді із центром геоїда, осі x та y лежать в площині дотичні до поверхні геоїда в точці спостереження та направлені на південь та захід відповідно. Дана система є зручною для ведення

об'єкта на небі і спостереження установки «Паганель-360» задаються саме в цій системі координат.

1.1.4 ОРБИТАЛЬНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Центр такої системи координат лежить в центрі супутника. Вісь z направлена на надир землі, направлена на центр землі, таким чином положення супутника у цій системі координат має від'ємне значення по осі z , яке задає суму висоти супутника над поверхнею землі і радіуса землі в відповідних координатах. Вісь y направлена перпендикулярно до площини орбіти супутника таким чином щоб вісь x , утворюючи праву трійку векторів була направлена в один пів-простір що і вектор швидкості супутника, при цьому слід пам'ятати що вісь x не обов'язково паралельно до вектора швидкості (і являється точно непаралельна для еліптичних орбіт у всіх точках крім двох: апогея і перигея). Або, щоб додатній напрям обертання навколо осі у співпадав з напрямом обертання супутника.

2. ПРОБЛЕМА ДВОХ ТІЛ

Для розгляду проблеми двох тіл розглянемо спочатку два тіла. Одне масивне і друге менш масивне, яке обертається навколо першого – Земля та супутник, що обертається навколо землі. Покладемо, що маса Землі M , а маса супутника m . Тоді згідно 2го закону Ньютона можемо записати:

$$\vec{F}_m = m\ddot{\vec{r}}_m = -\frac{GMm}{|r|^2} \frac{\vec{r}}{|r|} \quad (1.1)$$

$$\vec{F}_M = m\ddot{\vec{r}}_M = +\frac{GMm}{|r|^2} \frac{\vec{r}}{|r|} \quad (1.2)$$

Зробимо заміну $\mathbf{r} = \mathbf{r}_M + \mathbf{r}_m$. Тоді:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M + m_{corr})}{|r|^3} \vec{r}. \quad (1.3)$$

Це базове диференціальне рівняння для опису проблеми двох тіл, де $m_{corr} = Mm/(m + M)$. Це рівняння може бути розв'язане в рамках різних систем координат (див. 1.2.1-1.2.4). Розглядаючи Землю та супутник, оскільки $m \ll M$, можна вважати $m = 0$, тоді рівняння виглядатиме:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{|r|^2} \frac{\vec{r}}{|r|} \quad (1.4)$$

Це «просте» рівняння є основою для усіх пропagaційних моделей, однак його розв'язок не є тривіальною задачею. Цю задачу можна звести до проблеми «доцентрової сили» у якій потенціалом буде гравітаційна сила:

$f(\mathbf{r}) = -GM/|r|^2$, тоді рівняння можна переписати як:

$$\ddot{\vec{r}} = f(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{|r|}. \quad (1.5)$$

Для початку слід показати що траєкторія такого руху лежить у одній площині, для цього утворимо векторний добуток із радіус вектором зліва і справа нашого рівняння:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = f(\vec{r}) \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{|\vec{r}|} = 0. \quad (1.6)$$

Такі рівність є справедливою, оскільки ліва частина рівняння є нульовою. У цьому легко переконатись представивши ліву сторону як похідну по часу від векторного добутку

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = (\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = 0. \quad (1.7)$$

Дане рівняння показує що векторний добуток є незалежний від часу і може бути проінтегрований по t , що приведе нас до рівняння збереження:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{C}. \quad (1.8)$$

Це рівняння збереження показує, що супутник рухається у одній сталій площині і ця площина визначається радіус вектором та його першою похідною – швидкістю. Радіус вектор і вектор швидкості є перпендикулярними до вектора \vec{C} і цей константний вектор задає важливі елементи для опису орбіти. Також, виходячи з вище наведених рівнянь видно, що площина руху може бути нахилена що до базисних векторів системи координат X та Y . Такий нахил описується параметром i – нахил орбіти. Ще одним важливим параметром є кут Ω , який являється кутом між базисним вектором X та лінією перетину площини руху супутника із площиною XY (рис. 1.2.1.)

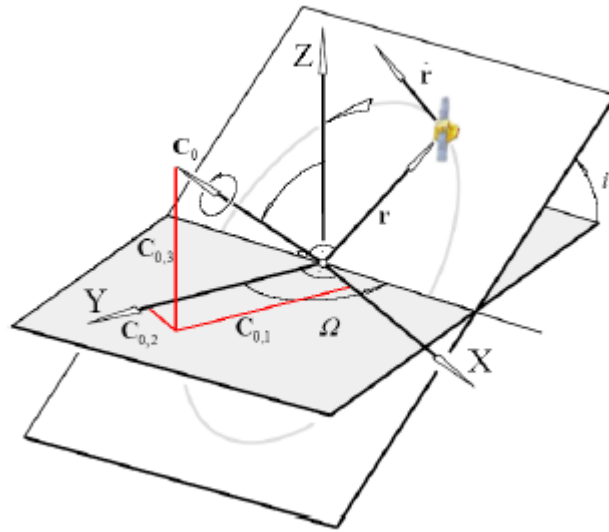


Рис 1.2.1.

Цей допоміжний вектор \vec{C}_0 можна подати як добуток векторів:

$$\vec{C}_0 = \begin{pmatrix} \sin(i) \sin(\Omega) \\ -\sin(i) \cos(\Omega) \\ \cos(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Де e_x, e_y, e_z – це одиничні базисні вектори обраної системи координат.

З допомогою цього рівняння можна спростити рівняння руху, подавши його у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \ddot{r}_{\parallel} \\ \ddot{r}_{\perp} \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & \sin(i) \\ 0 & -\sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Omega) & \sin(\Omega) & 0 \\ -\sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Дане рівняння застосовне для 2-ох мірного випадку. Тут видно що прискорення \ddot{r} розкладене на тангенціальне та нормальне прискорення.

Перейшовши до полярних координат:

$$\vec{r} = |r| (\cos(\nu)x + \sin(\nu)y) . \quad (1.11)$$

Можемо переписати рівняння руху таким чином:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{C} = -\frac{GM}{|r|^2} \frac{\vec{r}}{|r|} \times \vec{C} = -GM \left(\frac{\vec{r} \dot{\vec{r}}}{|r|^3} \vec{r} - \frac{\vec{r}^2}{|r|^3} \dot{\vec{r}} \right) . \quad (1.12)$$

Для скалярний добуток $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}$ можна переписати як $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = |\mathbf{r}||\dot{\mathbf{r}}|\cos(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, де величина $|\dot{\mathbf{r}}|\cos(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ являється проекцією вектора швидкості на радіус вектор, отже рівняння може бути переписане наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\dot{\vec{r}} \times \vec{C}) = GM \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{r}}{|r|} \right) . \quad (1.13)$$

Інтегрування цього рівняння приведе до наступного розв'язку:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{C} = GM \frac{\vec{r}}{|r|} + \vec{A} . \quad (1.14)$$

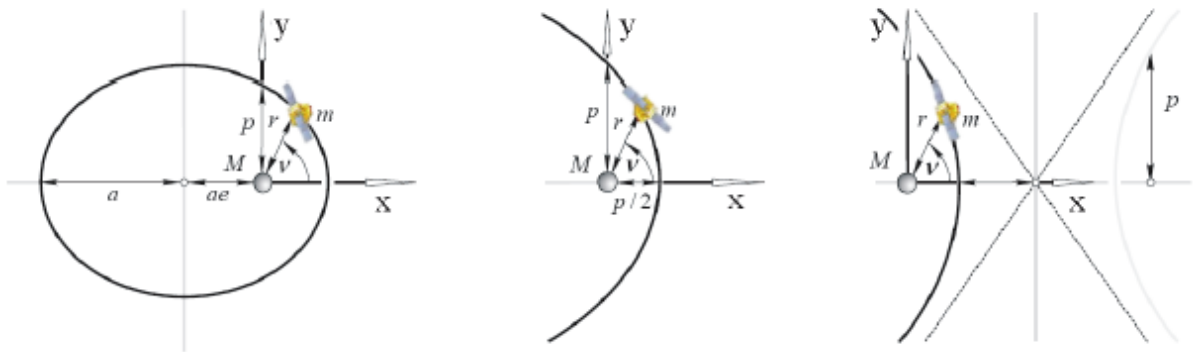
Константа інтегрування \vec{A} є лінійною комбінацією радіус-вектора \vec{r} та векторного добутку $\dot{\vec{r}} \times \vec{C}$ такою, що \vec{A} лежить у площині руху і може бути записано, як $\vec{A} = |A|\chi$. Скалярний добуток A та радіус-вектора \vec{r} приведе до:

$$\vec{C} \left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right) = GMr \left(1 + \frac{A}{GM} \chi \frac{\vec{r}}{|r|} \right) \quad (1.15)$$

Переписавши цю формулу враховуючи, що $\frac{\chi \vec{r}}{|r|} = \cos(\nu)$ дає нам розв'язок рівняння руху і радіальну відстань між супутником і центром мас системи.

$$\vec{r} = \frac{\vec{C}^2/GM}{1 + \frac{A}{GM} \cos(\nu)} = \frac{p}{1 + e \cos(\nu)}, \quad (1.16)$$

Де $p = \vec{C}^2/GM$ і $e = A/GM$. Це рівняння в полярних координатах лінії зрізу конуса з параметром p і ексцентриситетом e . Це може бути еліпс, парабола або гіпербола залежно від параметра e . На базі диференційного рівняння руху або останнього його представлення через параметри p та e можна будувати пропагаційні алгоритми з допомогою чисельних розв'язків цих рівнянь, однак такі пропатори не є точними, а відповідно і ефективними, оскільки ця модель враховує лише взаємодію двох тіл в ідеальних умовах і не враховує багато факторів які збурюють гравітаційний потенціал землі та призводять до затухання руху супутника. Перед тим як Ньютон описав такий рух математично Кеплер зумів побудувати 3 закони на емпіричній основі спостережень Тихо Брахе, які достатньо точно описують рух супутників навколо гравітаційного центру.



(1) еліпс $0 \leq e \leq 1$

(2) парабола $e = 1$

(3) гіпербола $e > 1$

Рис. 1.2.2

3. ДИНАМІКА ТА КІНЕМАТИКА ОРБІТ СУПУТНИКІВ

3.1. ЗАКОНИ КЕПЛЕРА

Фундаментальні параметри орбіти були описані Кеплером у його трьох законах для планетарного руху.

1. Орбіта кожної планети в сонячній системі являється еліпсом із Сонце у одному із еліпсів.
2. Радіус-вектор планети замітає однакові площі за однакові проміжки часу.
3. Квадрат періоду руху планети пропорційний до кубу великої пів-осі її траєкторії.

Ці закони були введені що до траєкторії планет у сонячній системі і застосовуються для конкретної планети та сонця однак із певними уточненнями їх можна застосувати і до супутників. Для цього слід врахувати, що траєкторія супутника не обмежується лише еліпсом, а може бути будь якою із можливих конічних зрізів. Закони Кеплера застосовні до супутників із врахування, що Земля і Супутник є точковими тілами і лише при розгляді задачі двох тіл. У першому наближенні землю можна вважати точковим тілом оскільки форма Землі слабо відрізняється від Сфери, а це означає, що згідно гравітаційного закону Ньютона, Землю можна вважати точковим тілом при розрахунку гравітаційних взаємодій. З іншого боку, супутник теж можна вважати точковим тілом в силу його малих розмірів. Звісно для побудови точних пропагацій орбіт супутників слід враховувати неоднорідність гравітаційного поля землі пов'язану із її не сферичністю та розподілом густини в деяких випадках. Такі уточнення враховуються у алгоритмах SGP4/SDP4, SGP8/SDP8 з допомогою введення грамонік гравітаційного потенціалу та врахування гравітаційного впливу інших небесних тіл.

Закони Кеплера підсумовують фундаментальні параметри орбіти супутника які можна отримати із законів Ньютона, як показано далі.

3.2. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ РУХУ АБО ДРУГИЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

Для доведення другого закону Кеплера слід ввести наступне: маса супутника є набагато меншою за масу Землі, а тому можемо вважати, що Земля знаходиться у фокусі еліптичної орбіти і є непорушною, а супутник літає по орбіті навколо Землі. Очевидно що доцентрове прискорення $\ddot{\vec{r}}$ є антипаралельним радіус вектору, а отже можна показати, що момент імпульсу системи зберігається. Запишемо момент імпульсу:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}}) = m (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) . \quad (2.1)$$

Щоб показати що момент імпульсу зберігається необхідно знайти похідну за часом моменту руху і переконатись що вона нульова

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{L} = \frac{\partial}{\partial t} m (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{L} &= m (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) \\ &= 0 = \text{const.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отже момент імпульсу системи зберігається, оскільки ми маємо справу із центральною гравітаційною силою. Отож \vec{L} тотожне константі інтегрування \bar{C} у виведенні рівняння руху із законів Ньютона. \vec{L} не змінює свого напрямку і модуля і радіус-вектор \vec{r} завжди перпендикулярний до \vec{L} .

Для того щоб показати, що радіус вектор замітає однакові ділянки за однакові часи слід виразити елементарну площу dA яку замітає вектор \vec{r} за час dt .

$$dA = \frac{1}{2} \vec{r}(t) \times \vec{r}(t + dt) = \frac{1}{2} \vec{r}(t) \times (\vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t) dt) = \frac{1}{2} \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) dt, \quad (2.4)$$

Геометрична інтерпретація зображена нижче на рис 2.2.1

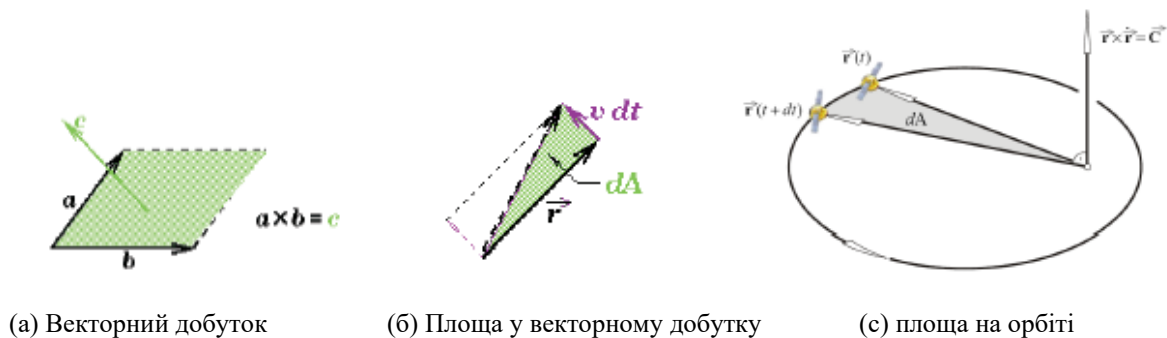


Рис. 2.2.1

Площа яку замітає радіус-вектор визначається часами t_1 та t_2 , які є межами інтеграла:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dA = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dt = \frac{1}{2} \vec{C} (t_2 - t_1). \quad (2.5)$$

Отже другий закон Кеплера можна записати як:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \vec{C} \quad (2.6)$$

Цей закон дає представлення про швидкість супутника на орбіті. Він рухатиметься швидше у точках які знаходяться ближче до фокусу із Землею ніж у точках які знаходяться далі.

3.3. ТРЕТІЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

Третій закон Кеплера говорить про те, що квадрат періоду руху супутника пропорційний до куба головної пів-осі. Це можна показати виходячи із цього рівняння:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dA = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dt = \frac{1}{2} \vec{C} (t_2 - t_1). \quad (2.7)$$

Якщо ми перенесемо диференціал часу у ліву частину та константу для часів t_1 та t_2 , які відповідають повному періоду руху, тоді:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \vec{C} = \frac{1}{2} \sqrt{GMa(1 - e^2)}. \quad (2.8)$$

врахувавши що $A = \pi ab$ отримаємо таке рівняння:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T} \quad (2.9)$$

Об'єднавши попередні два рівняння отримаємо 3й закон Кеплера:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (2.10)$$

Для детальнішого розгляду руху по орбіті слід розглянути константу \vec{C} у полярних координатах. Для цього запишемо

$$\vec{r} = |r|(\cos(\nu) x + \sin(\nu) y), \quad (2.11)$$

Тоді запишемо:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = |r|^2 \dot{\nu} x \times y = |r|^2 \dot{\nu} \vec{C}. \quad (2.12)$$

Та перейдемо до полярних координат і отримаємо:

$$\frac{\dot{\nu} p^2}{(1 + e \cos(\nu))^2} = C \quad (2.13)$$

$$\frac{p^2}{(1 + e \cos(\nu))^2} d\nu = C dt. \quad (2.14)$$

Невизначене інтегрування приведе нас до наступного вигляду:

$$\int_{\nu_0}^{\nu} \frac{p^2}{(1 + e \cos(\nu))^2} d\nu = C (t - t_0). \quad (2.15)$$

Цей інтеграл не може бути розв'язаним для усіх чисельних значень ексцентриситету. Для розв'язку цього інтегралу для орбіт із $e < 1$ слід ввести ексцентриситичну аномалію E . Для цього слід зробити заміну змінних $\nu \rightarrow E$. На рис. 1.3.1 зображено E . Рівняння яке визначає E може бути записане так:

$$|r| \cos(\nu) = a \cos(E) - ae. \quad (2.16)$$

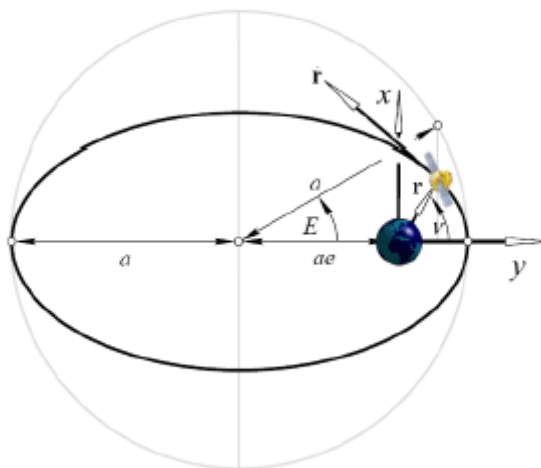


Рис. 2.3.1

Записавши $|r|$ у полярних координатах отримаємо:

$$\frac{p \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)} = a (\cos(E) - e) . \quad (2.17)$$

Використавши співвідношення для a та e у еліпсі, можемо перетворити попереднє рівняння наступним чином:

$$\cos(\nu) = \frac{\cos(E) - e}{1 - e \cos(E)} \quad (2.18)$$

$$\sin(\nu) = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin(E)}{1 - e \cos(E)} . \quad (2.19)$$

Використавши формулу половинного кута отримаємо:

$$\tan^2\left(\frac{\nu}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\nu)}{1 + \cos(\nu)} = \frac{1 + e}{1 - e} \frac{1 - \cos(E)}{1 + \cos(E)} = \frac{1 + e}{1 - e} \tan^2\left(\frac{E}{2}\right) \quad (2.20)$$

Або

$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right) . \quad (2.21)$$

Цей вираз задає істинну аномалію як функцію ексцентриситичної аномалії. Це рівняння також називають рівністю Гауса.

Продиференціювавши рівняння для косинуса та використавши рівняння для синуса ексцентриситичної аномалії можемо отримати наступне рівняння:

$$\frac{dv}{dE} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos(E)}. \quad (2.22)$$

Проінтегрувавши попереднє рівняння та об'єднавши його із невизначеним інтегралом, який визначає константу C , можемо отримати зв'язок між часом t та E :

$$E - e \sin(E) = \frac{C}{a^2 \sqrt{1-e^2}} (t - t_0) = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} (t - t_0) = M, \quad (2.23)$$

Тут M це середня аномалія. Це найбільш застосовне рівняння Кеплера в небесній механіці. Це рівняння пов'язує полярні координати супутника і час. Розв'язавши це трансцендентне рівняння можемо отримати ексцентреситичну аномалію для кожного моменту часу. Середня аномалія M описує середній рух супутника n :

$$M = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} (t - t_0) = n(t - t_0). \quad (2.24)$$

Це означає що якщо запустити супутник навколо того самого силового гравітаційного центра що і основний супутник але з постійною швидкістю рівною середній швидкості супутника то ці супутники будуть зустрічатись у 2х точках на орбіті – перигеї та апогеї. Окрім середньої швидкості також є потреба знати точну швидкість супутника в кожний момент часу, така швидкість може бути записана таким чином:

$$\dot{v} = \frac{C}{p^2} (1 + e \cos(v))^2 \quad (2.25)$$

З цього виразу видно, що кутова швидкість змінюється відповідно до істинної аномалії і лише при $e = 0$, для випадку руху по колу, ця швидкість стала.

Із законів Кеплера видно, що існує 6 основних параметрів які описують траєкторію руху супутника – Кеплерові елементи орбіти.

3.4. КЕПЛЕРОВІ ЕЛЕМЕНТИ ОРБИТИ

Кеплерові елементи – це шість елементів, що визначають положення небесного тіла у просторі у задач двох тіл. Аномалія містить в собі

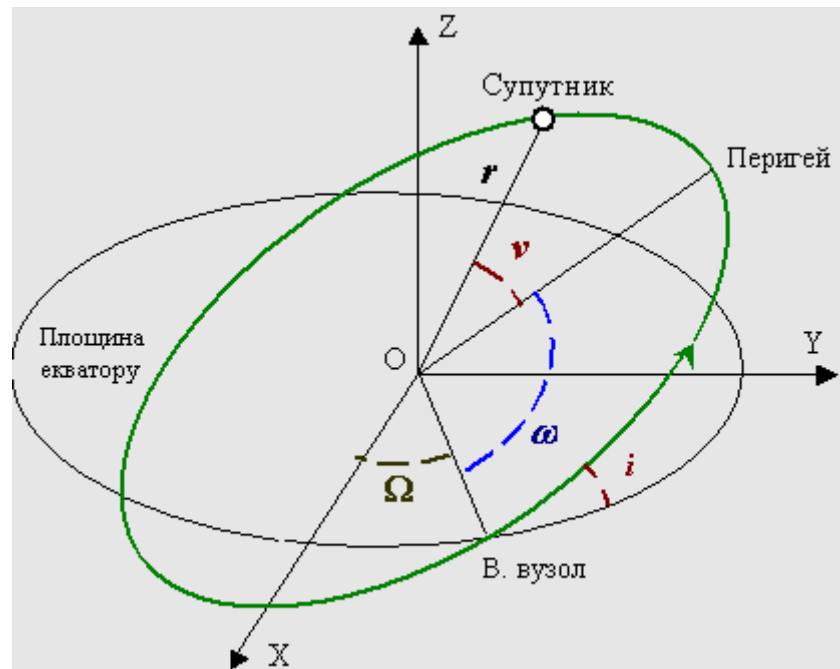


Рис. 1.1.1.

- Велика піввісь (a)
- Ексцентриситет (e)
- Нахил орбіти (i)
- Довгота висхідного вузла (Ω)
- середня аномалія ($M_o = n(t-t_0)$)
- Аргумент перицентру (ω)
- Епоха (t_0)

Нахил орбіти небесного тіла — це кут між площиною його орбіти і площиною відліку (базовою площиною).

Довгота висхідного вузла - один з основних елементів орбіти, що використовується для математичного опису орієнтації площини орбіти відносно базової площини. Визначає кут в базовій площині, утворений між базовим напрямком на нульову точку і напрямком на точку висхідного вузла орбіти, в якій орбіта перетинає базову площину в напрямку з півдня на північ.

Аргумент перицентру — визначається як кут між напрямками з притягального центру на висхідний вузол орбіти і на перицентр (найближчу до притягального центру точку орбіти супутника), або кут між лінією вузлів і лінією апсид. Відраховується з притягального центру в напрямку руху супутника звичайно вибирається в межах 0° - 360° .

Ексцентриситет — числова характеристика конічного перетину, характеризує «стислість» орбіти.

Середня аномалія для тіла, що рухається по незбуреній орбіті – це добуток його середнього руху та інтервалу часу після проходження перицентру. Таким чином, середня аномалія - кутова відстань від перицентру гіпотетичного тіла, що рухається з постійною кутовою швидкістю, що дорівнює середньому руху.

Завдяки цим елементам орбіти можна описати рух одного тіла навколо іншого. Велика піввісь та ексцентриситет задають форму орбіти, нахил, довгота висхідного вузла і аргумент перицентру задають орієнтацію площини орбіти, а середня аномалія задає положення тіла на орбіті.

Для опису руху також інколи використовують ексцентричну аномалію E , яка пов'язана і середньою аномалією наступним виразом:

$$M = E - e \cdot \sin(E) \quad (2.26).$$

3.5. АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ПОЗИЦІЇ ТА ШВИДКОСТІ СУПУТНИКА

Для знаходження координат супутника слід знайти деякі проміжні елементи, загальний алгоритм знаходження координат виглядає так:

1. Знаходження середньої кутової швидкості n

$$n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (2.27)$$

2. Знаходження ексцентриситичної аномалії E в заданий час t

$$n(n - t_0) = E - e \sin(E) \quad (2.28)$$

3. Знаходження істинної аномалії v в заданий момент часу t

$$\cos(v) = \frac{\cos(E) - e}{1 - e \cos(E)} \quad (2.29)$$

$$\sin(v) = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin(E)}{1 - e \cos(E)} \quad (2.30)$$

Або

$$\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \quad (2.31)$$

4. Знаходження радіус-вектора r та константи інтегрування C

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + \cos(v)} \quad (2.32)$$

$$C = \sqrt{GMp} \quad (2.33)$$

5. Знаходження перифокальних векторів

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega)\cos(\omega) - \sin(\Omega)\sin(\omega)\cos(i) \\ \sin(\Omega)\cos(\omega) + \cos(\Omega)\sin(\omega)\cos(i) \\ \sin(\omega)\sin(i) \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} -\cos(\Omega)\sin(\omega) - \sin(\Omega)\cos(\omega)\cos(i) \\ -\sin(\Omega)\sin(\omega) + \cos(\Omega)\cos(\omega)\cos(i) \\ \cos(\omega)\sin(i) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

6. Визначення позиції та швидкості супутника

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \dot{\vec{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(v) & r\sin(v) \\ -\frac{c}{p}\sin(v) & \frac{c(\cos(v)+e)}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Або

$$\vec{r} = \vec{R}(\Omega, i, \omega)\vec{q}(a, e, M) \quad (2.37)$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{R}(\Omega, i, \omega)\dot{\vec{q}}(a, e, M) \quad (2.38)$$

Де

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & C_{0,1} \\ P_2 & Q_2 & C_{0,2} \\ P_3 & Q_3 & C_{0,3} \end{pmatrix} \vec{q} = \begin{pmatrix} a(\cos(E) - e) \\ a\sqrt{1 - e^2}\sin(E) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(v) \\ r\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

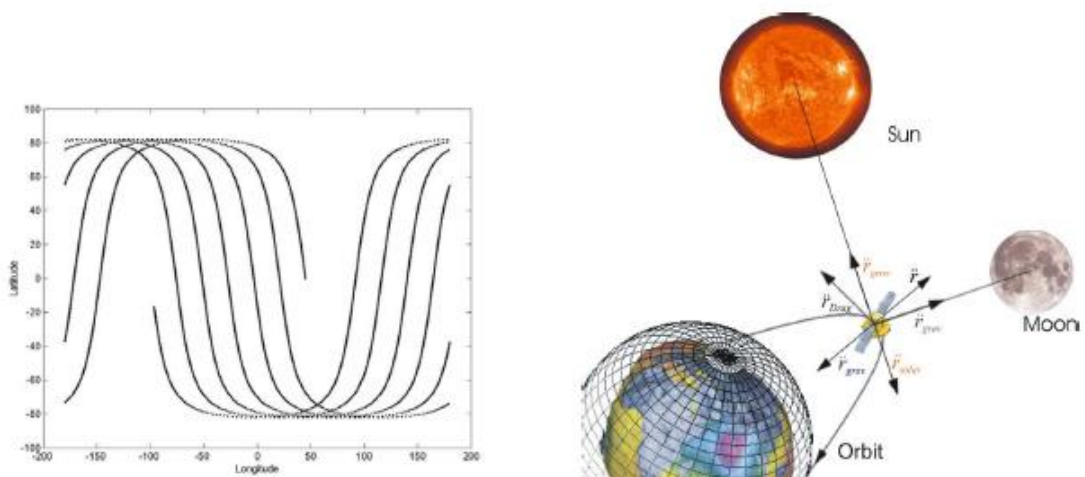
І

$$\dot{\vec{q}} = \frac{na}{1 - e\cos(E)} \begin{pmatrix} -\sin(E) \\ \sqrt{1 - e^2}\cos(E) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ e + \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

4. СПРОЩЕНА ПРОПАГАЦІЙНА МОДЕЛЬ

4.1. ОСНОВНІ ЧИННИКИ ЗБУРЕНЬ

Кеплерові елементи орбіти є достатнім підґрунтям для визначення позиції супутника в заданий момент часу. Однак слід врахувати, що самі закони Кеплера не є достатньо точними, адже ці закони підрозумівають достатньо ідеальний випадок із наявністю сферично-симетричних тіл, без впливу атмосфери та інших тіл в системі. Найбільшу похибку вносить відмінність форми поверхні землі від сфери. Цю похибку вирішують введенням зональних гравітаційних гармонік J_i . Також слід враховувати викривлення гравітаційного потенціалу з рахунок Місяця, припливів та відпливів, вплив різного роду випромінення, але ці ефекти не є такими значними. Джерела похибок, які ми можемо врахувати, в основному періодичні і по тривалості періоду їх розділяють на короткотривалі і довготривалі. Короткотривалі ефекти мають період зміни менший за період обертання супутника, довготривалі – більший. На рис.3.2.1 показано зміни елементів орбіти супутника в часі за рахунок впливу періодичних чинників та основні сили які призводять до відхилення орбіти супутника від кеплерової



4.2. ЗБУРЕННЯ У ЗВ'ЯЗКУ З ГЕОПОТЕНЦІАЛОМ

Оскільки Земля не є сферою а має форму геоїда, який має виступ на екваторі та згладжена на полюсах відносно умовної ідеальної сфери. Така форма

породжена обертанням землі та відцентровими силами. Така форма призводить до викривлення геопотенціалу землі та впливає на всі Кеплереві елементи орбіти. Форма землі описується як деформація Землі другого порядку. Згідно до рівнянь Лагранжа фактор згладження Землі J_2 призводить до наступних диференціальних рівнянь для прямого піднесення висхідного вузла і аргументу перигея:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{R_E^2}{p_0^2} n_0 \cos(i_0) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2}{p_0^2} n_0 (5 \cos^2(i_0) - 1) \quad (3.2)$$

Де R_E радіус Землі а числове значення J_2 для Землі складає $1.08284e-3$. Обидві ці похідні найменші при колових орбітах, $e = 0$, але мають свої мінімуми для нахилів:

$$i_{\min, \dot{\Omega}} = \cos^{-1}(0) = 90^\circ \quad (3.3)$$

$$i_{\min, \dot{\omega}} = \cos^{-1} \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 63.43^\circ \text{ or } 116.57^\circ \quad (3.4)$$

Слід зауважити, що алгоритм SDP4 використовує J_2, J_3, J_4 – три зональні гармоніки для точнішого опису збурень елементів орбіти.

4.3. ЗБУРЕННЯ ПОВ'ЯЗАНІ ІЗ СОНЦЕМ ТА МІСЯЦЕМ

Сонце та Місяць створюють періодичні відхилення у всіх Кеплеревих елементах, однак короткотривалі відхилення вони створюють лише для прямого

піднесення висхідного вузла та аргументу перигею. Для орбіт близьких до колових застосовне наступне наближення:

$$\begin{aligned} \text{Сонце: } \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= -1.54 \cdot 10^{-3} \frac{\cos(i_0)}{k} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= -3.38 \cdot 10^{-3} \frac{\cos(i_0)}{k} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{Місяць:} \quad (3.6)$$

Та

$$\begin{aligned} \text{Сонце: } \frac{\partial \omega}{\partial t} &= 0.77 \cdot 10^{-3} \frac{5 \cos^2(i_0) - 1}{k} \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= 1.69 \cdot 10^{-3} \frac{5 \cos^2(i_0) - 1}{k} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{Місяць:} \quad (3.8)$$

Де k це кількість обертів за день а $\dot{\Omega}$ і $\dot{\omega}$ подаються в градусах за один день. Ці поправки мають мінімуми при тих самих значеннях нахилу орбіти для колових орбіт.

5. ПРОПАГАЦІЙНА МОДЕЛЬ SGP4

5.1. ЕФЕМЕРИДИ ТА TLE ФОРМАТ

Ефемериди – це координати спостережуваного тіла в певні моменти часу, часто послідовні і чітко періодичні. Для планет Сонячної системи існує кілька ефемерид: DE200/LE200, VSOP, EPM.

Для штучних супутників ефемериди – це координати та його швидкість і прискорення в певні моменти часу. На базі ефемерид будується стандартизовані TLE дані які використовуються пропagaційними моделями. TLE являє собою

табличку із 2х стрічок у яких міститься інформація про елементи орбіти об'єкта.

Нижче наведений приклад таких даних:

```
ISS (ZARYA)
1 25544U 98067A 08264.51782528 -.00002182 00000-0 -11606-4 0 2927
2 25544 51.6416 247.4627 0006703 130.5360 325.0288 15.72125391563537
```

У цій таблиці із 3ох стрічок зашифровані основні дані для обчислень траєкторії руху та положення об'єкта. Нульова стрічка це заголовок, ця стрічка не є обов'язковою. У першій стрічці містяться фактичні дані про об'єкт:

01-01 – номер стрічки

03-07 – номер супутника в базі NORAD (25544)

08-08 – класифікація (U-unclassified)

10-11 – міжнародне позначення, останні дві цифри року запуску {98}

12-14 – міжнародне позначення, номер запуску в цьому році {067}

15-17 – міжнародне позначення, частина запуску {A}

19-20 – останні дві цифри року епохи {08}

21-32 – час епохи, ціла частина – номер дня в році, дробова – частина дня {264.51782528}

34-43 – перша похідна середнього руху, ділена на 2 {-.00002182}

45-52 – друга похідна середнього руху, ділена на 6 {00000-0}

54-61 – коефіцієнт затухання B^* {-11606-4} *-0.11606e-4*

63-63 – типи ефемерид (зараз – завжди 0) {0}

65-68 – номер елемента {292}

69-69 – контрольна сума по модулю 10 {7}

Друга стрічка, як і перша, являється обов'язковою і в ній містяться наступні дані:

01-01 – номер стрічки
03-07 – номер супутника в базі NORAD (25544)
09-16 – нахил орбіти в градусах (51.6416)
18-25 – Довгота висхідного вузла в градусах {247.4627}
27-33 – ексцентриситет {0006703} *0.0006703*
35-42 – аргумент перицентра {130.5360}
44-51 – середня аномалія в градусах {325.0288}
53-63 – частота обертання, середній рух {15.72125391}
64-68 – номер витка на момент епохи {56353}
69-69 – контрольна сума по модулю 10 {7}

Слід зауважити, що ці елементи орбіти усереднюють в рамках моделей SDP4 або SGP4 і не являються Кеплеровими елементами осцилюючої орбіти.

Контрольна сума являє собою модуль 10 від кількості символів в стрічці та існує для попередньої валідації формату даних.

Дані про всі небесні тіла можна знайти на офіційному сайті <http://celestrak.com/NORAD/elements/> - ці дані в подальшому стануть основою для побудови власних TLE даних.

5.2. ЗБУРЕННЯ ПОРОДЖЕНІ АТМОСФЕРОЮ

Сила тертя або опору атмосфери породжує силу, що направлена завжди в протилежному до напрямку руху напрямі і породжує прискорення \vec{r}_{Drag}'' :

$$\vec{r}_{Drag}'' = -\frac{1}{2}q_0 \left(\frac{c_w A}{m} \right) \dot{r}^2 = -\frac{1}{2}q_0 B^* \dot{r}^2 \quad (4.1)$$

де q_0 це густина атмосфери, c_w це коефіцієнт опору. A це площа перерізу супутника, а m – його маса. Сила тертя призводить до втрат енергії системою і як наслідок призводить до зниження орбіти супутника, але цей процес відбувається дуже повільно.

5.3. ЗБУРЕННЯ ПОРОДЖЕНІ СОНЯЧНИМ ВИПРОМІНЕННЯМ

Прискорення породження Сонячним випроміненням залежить від здатності супутником відбивати чи поглинати випромінення:

$$\vec{r}_{solar}'' = -4.5 \cdot 10^{-6} (1 + \chi) \frac{A}{m} \quad (4.2)$$

де χ це коефіцієнт відбивання, значення якого лежать в діапазоні від 0 до 1. Збурення породжене Сонячним випроміненням співмірне із опором атмосфери для орбіт із висотою 800 км і менше для нижчих орбіт. Зменшення цього випромінення для нижчих орбіт зумовлене поглинанням випромінення атмосферою, по цій же причині його внесок є більшим для вищих висот.

5.4. ПІДСУМОК

Метою алгоритму SGP4 є врахування періодичних збурень та розрахунку траєкторії супутників враховуючи поправки для Кеплеревих елементів орбіти. Для супутників із періодом обертання більшим за 225 хвилин було створено алгоритм SDP4 оскільки для їх руху потрібно враховувати більше факторів.

6. СИСТЕМА «ПАГАНЕЛЬ-360»

6.1. СИСЛИЙ ОПИС РОБОТИ ПРИСТРОЮ «ПАГАНЕЛЬ-360»

«Паганель-360» - пристрій, що здатний аналізувати випромінювання з небесної сфери в радіодіапазоні, фіксуючи при цьому інтенсивність сигналу, положення джерела сигналу на небесній сфері та час спостереження.

Пристрій «Паганель-360» може реєструвати радіовипромінювання всіх геостаціонарних супутників, які є видимими з точки розташування об'єкта над горизонтом. Небесна сфера сканується у заданому діапазоні висот над горизонтом та у повному куті (360 град) по азимуту, реєструються всі наявні джерела радіовипромінювання у діапазоні частот 10,7...12,75 ГГц та довільної поляризації. У результаті сканування пристрій отримує картину просторового розташування у сферичній системі координат джерел радіовипромінювання на небесній сфері у вказаному діапазоні частот та поляризації.

6.2. ТАКТИКО ТЕХНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ «ПАГАНЕЛЬ360»

Пасивна система спостереження.

Вага – 60 кг.

Габаритні розміри (Д/Ш/В) – 700X700X500 мм

Похибка визначення положення джерела випромінювання - 0,05 град СКВ

Швидкість сканування небесної сфери – до 2 хв.

Напруга живлення – 24 В, споживаний стум – 5 А

7. ORBITTOOL ТА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ПОШУКУ КООРДИНАТ

7.1. ORBITTOOL

OrbitTool – це сукупність бібліотек алгоритмів побудованих на базі алгоритмів SGP4 та SDP4 та реалізовані на мові C++. Даний програмний пакет було розроблено для визначення позиції супутника в заданий момент часу та обрахунку Азимуту та Елевації пристрою спостереження в заданий момент часу для заданих координат за якими можна було би побачити апарат.

Для цього у OrbitTool реалізовані основні алгоритми необхідні для зчитування TLE даних, та обрахунків координат супутників в межах відповідних моделей.

Архітектуру цього пакету програм можна побачити на Рис 6.1.1.

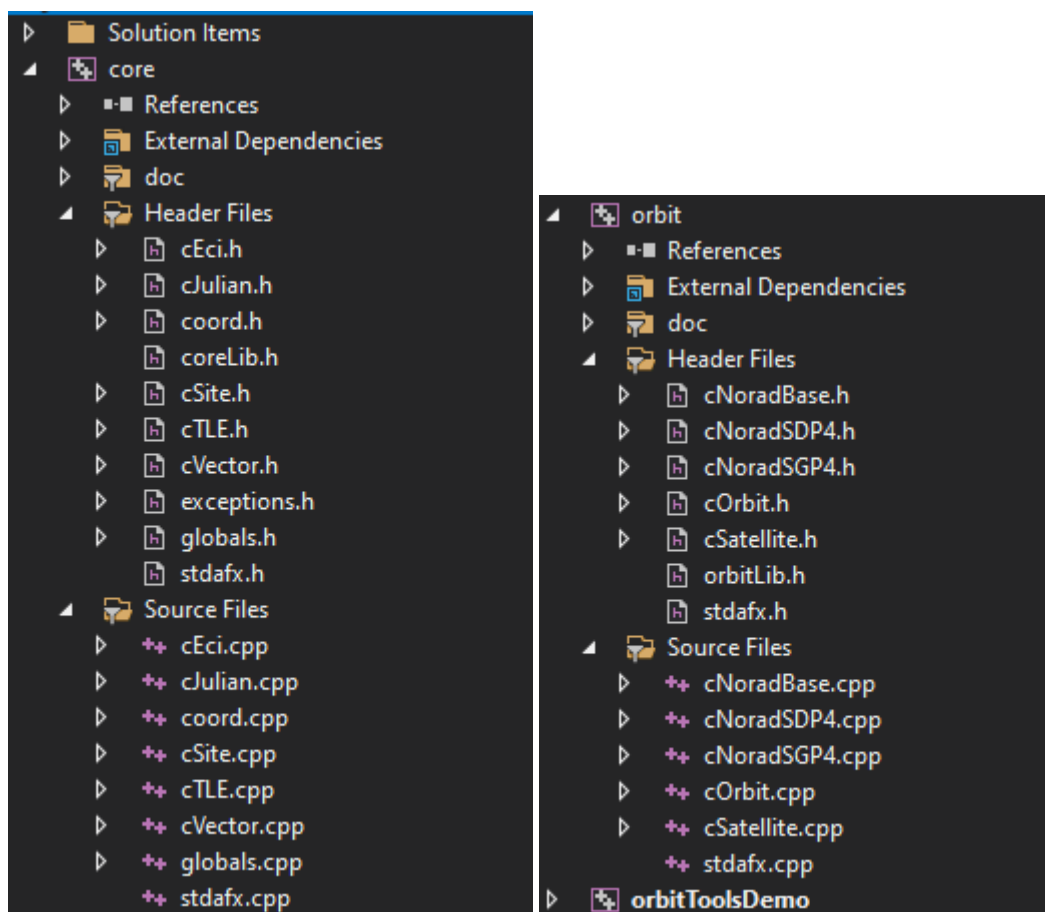


Рис 6.1.1.

7.2. ПОСТАНОВКА ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ

OrbitTool було обрано через зручний формат даних у якому подаються результати обробки TLE даних алгоритмом SDP4. Цей пакет дає нам азимут та елевацію з якими ми можемо спостерігати за обраним супутником в заданий момент часу в заданих координатах на землі. Основною задачею цієї роботи є знаходження уточнених параметрів TLE маючи свої точні координати та результати обробки відомих TLE.

Отже суть задачі полягає у знаходженні невідомих вхідних параметрів маючи вихідні дані.

7.3. РОЗВ'ЯЗОК ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТА ЇЇ ОСОБЛИВОСТІ

Аналітичний розв'язок оберненої задачі знаходити надто важко і в цьому немає сенсу. Це пов'язано із емпіричною природою алгоритмів на яких побудована модель SDP4, лиш цей факт вже унеможлиблює знаходження розв'язку задачі аналітичним методом. Також слід врахувати, що вхідними даними для алгоритму являються 12 параметрів, серед яких 6 деформованих Кеплерових елементів орбіти та параметри середовища, час спостереження та 3 координати спостереження, що в сумі складає 16 параметрів. Очевидно, що аналітично обернути розв'язок побудований на 16 параметрах та частково побудований на емпіричних закономірностях не вийде.

Тому було обрано чисельні методи знаходження необхідного набору параметрів.

Наступним кроком у розв'язку задачі є підбір параметрів, які являються для нас шуканими величинами, при яких результат пропагаційного алгоритму співпадатиме з спостережуваними даними. Значно спрощує задачу можливість

точно встановити свої координати та виміряти азимут та елевацію на спостережуваний супутник разом із часом спостереження

Визначивши параметри, які необхідно підібрати, слід визначитись із алгоритмом. Враховуючи вище сказане єдиним варіантом залишаються алгоритми побудовані на принципі алгоритму Монте-Карло.

Тож для розв'язку оберненої задачі, за відправну точку ми беремо TLE дані які надає NORAD. Кожному з параметрів покладають певне відхилення, після чого проводяться обрахунки з допомогою OrbitTool для усіх комбінацій параметрів визначаючи при цьому набір координат при яких значення розрахованого азимуту та елевації найближчі до виміряних. Після такого уточнення проводиться повторне уточнення для щойно знайденої точки. Кількість таких ітерацій визначатиме точність знайденого розв'язку. Очевидно, що для такого пошуку розв'язку важливим є кількісне значення відхилення реальних значень TLE від задокументованих, адже це відхилення визначатиме кількість елементів розбиття і в кінцевому результаті час пошуку уточнених результатів. Для оптимізації можна використати динамічне розбиття, його суть полягає у відносному розмірі розбиття, зафіксувавши кількість елементів на які ми розбиваємо область навколо певного параметра ми можемо зафіксувати кількість комбінацій параметрів, а отже зафіксувати час обрахунку, при цьому змінюючи розміри області розбиття ми змінюватимемо відстані між сусідніми елементами розбиття, що в свою чергу призведе до збільшення чи зменшення точності обрахунків відповідно.

Ще одним варіантом оптимізації такого алгоритму є наближення параметрів незалежно один від одного, це значно зменшить кількість ітерацій та час обрахунку однак такий метод застосовний лише для параметрів незалежних один від одного або для набору параметрів, які слабо відхиляються від істинних значень. Такий метод завжди дає більші похибки, які залежать від відхилення істинних параметрів від початкових і при невеликих відхиленнях цією похибкою можна знехтувати за для зменшення часу обрахунку.

7.3. ДАНІ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ РОЗВ'ЯЗКІВ

Для перевірки роботи програми розв'язку зворотної задачі було вибрано три супутники, що знаходяться на геостаціонарній або близькій до геостаціонарної орбітах.

1. ASTRA 3B

NORAD ID 36581

Супутник активний, знаходиться на геостаціонарній орбіті та періодично коректується.

Спостереження супутника проводилось за допомогою пристрою “Паганель-360” ір спостережувального майданчика з координатами (49.83194 N, 24.02972 E, h=315 м) впродовж 17-18 травня 2021 р. (див. *Додаток А табл. 1*)

2. ASTRA 1E

NORAD ID 23686

Супутник недіючий, дрейфуючий, орбіта відмінна від геостаціонарної (орбіта захоронення).

Дані про положення супутника отримані за допомогою програми трекінгу (<https://www.n2yo.com>). У дані була внесена випадкова похибка з СКВ 0,05 град та нормальним розподілом, що імітувала характеристики точності пристрою “Паганель-360”. Відібрано дані, що відповідають умові видимості супутника зі спостережного майданчика з координатами (49.83194 N, 24.02972 E, h=315 м) (див. *Додаток А табл. 2*).

3. ASTRA 2B

NORAD ID 26494

Супутник гео-синхронний, орбіта нахилена (5,2 град).

Дані про положення супутника отримані за допомогою програми трекінгу (<https://www.n2yo.com>). У дані була внесена випадкова похибка з СКВ 0,05 град та нормальним розподілом, що імітувала характеристики точності пристрою “Паганель-360” (див. *Додаток А табл. 3*)

Висновки:

В цій роботі було ознайомлено із прототипом «Паганель-360». Його технічними характеристика, особливостями роботи та даними які можна отримати з допомогою цієї установки. Вивчено технічні особливості та нюанси, які можуть призвести до появи похибок у отриманих даних та методи їх усунення.

В ході роботи було досліджено принципи побудови ефемерид та їх опис у TLE форматі. Також було досліджено моделі SGP4 та SDP4, фізичні явища на базі яких побудовані ці моделі та алгоритми з допомогою яких ці моделі реалізуються у різних програмних середовищах.

Також було розібрано та ознайомлено із програмним пакетом OrbitTool, який реалізує вище вказані моделі на мові C++, та використано цей пакет для розв'язку оберненої задачі для уточнення ефемерид спостережуваного супутника.

З допомогою алгоритму побудованого за принципом методу Монте-Карло було отримано уточненні ефемериди у TLE форматі для тестових об'єктів. Також було запропоновано метод оптимізації обчислень для певного сегменту ефемерид, які слабо відхиляються від істинних.

Уточненні ефемериди в подальшому можуть бути використані для знаходження власних координат за спостереженнями сузір'я штучних супутників Землі. Такому методу уже понад 1000 років, адже саме так орієнтувались в морі в давнину, однак сучасні технології дозволяють уточнити такий метод гео-локації до адекватного рівня, позбавивши нас при цьому деяких недоліків GPS систем для певних задач.

Використана література:

- [1] Baker, D.N., "How to cope with space weather", *Science*, 297, 2002.
- [2] Betts, J.T., "Optimal Interplanetary Orbit Transfers by Direct Transcription", *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 42, No. 3, pp. 247-268, 1994.
- [3] Binebrink, A.L., Radomski, M.S., Samii, M.V., "Atmospheric drag model calibrations for spacecraft lifetime prediction", In NASA, Goddard Space Flight Center, Flight Mechanics/ Estimation Symposium, pp. 445-458, 1989.
- [4] Born, G.H., "Motion of a Satellite under the influence of an oblate Earth (lecture Notes ASEN 3200)", Colorado Center for Astrodynamics Research, 2001.
- [5] Brouwer, D., "Solution of the problem of artificial satellite theory without drag",
- [6] *Astronomical Journal*, 64, pp. 378-398, 1959.
- [7] Bunnell, P., "Tracking Satellites in Elliptical Orbits", *Ham Radio magazine*, pp. 46-50, March 1981.
- [8] Carvahlo, G.B., "Reference Frame Definitions", Technical Report, INT-GEN-DF-ZAR-001, ARM Bremen, 2003.
- [9] Danby, J.M., "Fundamentals of Celestial Mechanics", 2nd ed. VA: Willmann-Bell, 1988.
- [10] Davidoff, M.R., "Satellite Experimenter's Handbook, 2nd Edition", American Radio Relay League, 1990.
- [11] Davies, J., K., "Satellite Astronomy, the principles and practice of astronomy from space", Ellis Horwood 1988.
- [12] Fitzpatrick, P.M., "Principles of Celestial Mechanics", Academic Press, 1970.
- [13] Grafarend, E.W., "Space-time geodesy", *Bolletino Di Geodesia e Scienze Affini*, XXXVIII No.2, pp. 305-343, 1979.
- [14] Grafarend, E.W., "Introductory lectures to geodesy, vol. I", Universität Stuttgart Geodätisches Institut (GIS), 1990.
- [15] Hilton, C.G. and Kuhlman, J.R., "Mathematical Models for the Space Defense Center", Philco-Ford Publication No. U-3871, 17—28, November 1966.

- [16] Hoots, F.R., “A Short, Efficient Analytical Satellite Theory”. AIAA Paper No. 80-1659, August 1980.
- [17] Hoots, F.R., “Theory of the Motion of an Artificial Earth Satellite”, accepted for publication in *Celestial Mechanics*.
- [18] Hujsak, R.S., “A Restricted Four Body Solution for Resonating Satellites with an Oblate Earth”, AIAA Paper No. 79-136, June 1979.
- [19] Hujsak, R.S. and Hoots, F.R., “Deep Space Perturbations Ephemeris Generation”, Aerospace Defense Command Space Computational Center Program Documentation, DCD 8, Section 3, 82—104, September 1977.
- [20] Kozai, Y., “The Motion of a Close Earth Satellite”, *Astronomical Journal* 64, 367—377, November 1959.
- [21] Lane, M.H. and Cranford, K.H., “An Improved Analytical Drag Theory for the Artificial Satellite Problem”, AIAA Paper No. 69-925, August 1969.
- [22] Lane, M.H., Fitzpatrick, P.M., and Murphy, J.J., “On the Representation of Air Density in Satellite Deceleration Equations by Power Functions with Integral Exponents”, Project Space Track Technical Report No. APGC-TDR-62-15, March 1962, Air Force Systems Command, Eglin AFB, FL.
- [23] Lane, M.H. and Hoots, F.R., “General Perturbations Theories Derived from the 1965 Lane Drag Theory”, Project Space Track Report No. 2, December 1979, Aerospace Defense Command, Peterson AFB, CO.