

Львівський національний університет імені Івана Франка

Фізичний факультет

Кафедра астрофізики

УДК 524.31.084

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА НА ТЕМУ:

**“Вплив обертання на характеристики
холодних вироджених карликів”**

Виконав студент групи ФзФм-61:

Спеціальності “104 Фізика та астрономія”

Михальчук В.В.

Керівник: доц. Стельмах О.М.

Рецензент: доц. кафедри теоретичної фізики

імені професора Івана Вакарчука

Гнатенко Х. П.

Львів - 2021

АНОТАЦІЯ

Знайдено наближений аналітичний розв'язок рівняння рівноваги холодного виродженого карлика, у якому фігурують два незалежні параметри - параметр релятивізму у центрі зорі x_0 і безрозмірна кутова швидкість осьового обертання Ω . Для опису внутрішньої області узагальнено спосіб визначення сталих інтегрування шляхом використання інтегральної форми рівняння рівноваги, який раніше запропоновано у роботах М. Вавруха, Н.Тишка, Д.Дзіковського і О.Стельмах. Опис периферійної області карлика виконано за ідеєю роботи Дж.Монагана і І.Роксбурга, де сталі інтегрування визначаються з умови зшивання на сфері, що дорівнює радіусу карлика без обертання. Розраховано залежність маси, полярного і екваторіального радіусів від кутової швидкості при $x_0 = 7.32$, що відповідає проміжній області мас і центральних густин для спостережуваних карликів. Результати близькі до одержаних в роботах Р.Джеймса, М.Вавруха та Д.Дзіковського.

ABSTRACT

The approximate solution of mechanical equilibrium equation of cold degenerate dwarf was found with two independent parameters – the relativistic parameter in stellar center x_0 and dimensionless angular velocity of axial rotation Ω . It is generalized the method of determination of integration constants for the description of internal region using the integral form of equilibrium equation, which was previously proposed in the works of M.Vavrukh, N.Tyshko, D.Dzиковskiyi and O.Stelmakh. The description of peripheral region of dwarf was performed on the idea of work J.J.Monaghan and I.W.Roxburgh, where integration constants were determined from the

condition of stitching on the sphere, which equals the radius without rotation. The dependence of mass, polar and equatorial radii on the angular velocity at $x_0 = 7.32$ were calculated, which corresponds to the intermediate region of mass and central densities for the observed dwarfs. The results are close to obtained in the works of R.James, M.Vavrukh and D.Dzikovskyi.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1. Історія дослідження вироджених карликів.	7
2. Основні чинники формування структури вироджених карликів. Моделі і рівняння рівноваги.	16
2.1. Залежність $n \rightleftharpoons x_0$.	20
2.2. Лінеаризація рівняння рівноваги.	21
3. Розрахунки характеристик карликів.	30
4. Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях.	36
4.1. Аналіз стану виробничих умов	37
4.2. Організаційно - технічні заходи:	38
4.2.1. Мікрокліматичні умови.	38
4.2.2. Норми освітленості.	39
4.2.3. Електробезпека.	40
4.2.4. Заходи безпеки при роботі з обладнанням (безпека праці з комп'ютером).	41
4.2.5. Протипожежні заходи.	42
ВИСНОВКИ	43
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	44
.....	44

ВСТУП

Вироджені карлики складають найбільш багаточисельну сім'ю серед компактних об'єктів Всесвіту і є кінцевою стадією еволюції зір малих і середніх мас. За допомогою космічних обсерваторій протягом останніх 30 років відкрито карлики різних спектральних класів, з різними масами, радіусами і ефективними температурами поверхні. У зв'язку з цим виникла проблема побудови загальної теорії будови вироджених карликів, яка повинна інтерпретувати всю різноманітність їхніх характеристик. До найважливіших факторів, які формують структуру карликів, належать гравітаційний стиск, осьове обертання, міжчастинкові взаємодії, неповне виродження електронної підсистеми, магнітні поля, неоднорідність хімічного складу, ефекти загальної теорії відносності. Згідно з сучасними уявленнями, масивні вироджені карлики вважають попередниками наднових типу Ia. Тому розрахунок критичних значень маси карликів та критичних значень центральної густини є актуальною задачею. Оскільки осьове обертання карликів призводить до збільшення їхньої маси, то дослідження впливу обертання є актуальною задачею. В роботах Р.Джеймса, Дж.Монагана та І. Роксбурга досліджено вплив обертання в області малих кутових швидкостей та невеликих центральних густин. Тому поставлена мені задача про розрахунок впливу обертання на характеристики масивних карликів є актуальною як з точки зору результатів, так і розробки методів розрахунку.

Метою роботи є вивчення впливу обертання на характеристики виродженого карлика у рамках моделі Чандрасекара.

У зв'язку з цим необхідно було розв'язати такі **основні завдання:**

1. Розв'язати рівняння рівноваги при різних значеннях кутової швидкості ($0 \leq \omega \leq \omega_{max}$).

2. Визначити залежність полярного і екваторіального радіуса від кутової швидкості для фіксованого значення параметра релятивізму x_0 . Визначити форму поверхні обертового карлика.

3. Визначити залежність повної маси карлика від кутової швидкості і порівняти з результатами розрахунків інших авторів.

Нами запропоновано новий алгоритм знаходження розв'язків рівняння рівноваги шляхом узагальнення підходу М.Вавруха зі співавторами і підходу Дж.Монагана та І. Роксбурга.

РОЗДІЛ 1

Історія дослідження вироджених карликів.

У минулому столітті, такому багатому на астрономічні сенсації, першими були відкриті білі карлики. 1914 р. американський астроном В. Адамс, аналізуючи спектри подвійної системи Сіріуса, найяскравішого об'єкта неба, зробив висновок про те, що обидві зорі мають близькі температури фотосфер, а дуже малу світність Сіріуса В ($3 \cdot 10^{-3} L_{\odot}$) пояснив його малими розмірами [1], хоча на той час зі спостережень орбітального руху компонент системи вже було відомо, що маса супутника близька до маси Сонця [2]. Вважаючи, що обидві компоненти належать до спектрального класу А зір головної послідовності і приписуючи їм ефективну температуру $8 \cdot 10^3 K$, на основі закону Стефана-Больцмана Адамс оцінив величину радіуса Сіріуса В – $18.8 \cdot 10^3$ км. Він став прототипом нового класу зір – білих карликів. За сучасними даними (див. [3]) Сіріус А належить до класу A1V, має масу $2.063 M_{\odot}$, радіус $1.7144 R_{\odot}$, світність $24.74 L_{\odot}$ і ефективну температуру близько $9900 K$. Його супутник належить до класу DA2, має масу $1.018 M_{\odot}$, радіус близько 5900 км, ефективну температуру близько $25.4 \cdot 10^3 K$ і світність $2.448 \cdot 10^{-2} L_{\odot}$ [3]. Як виявилось згодом, спектральні закономірності білих карликів кардинально відрізняються від закономірностей зір інших класів світності, що й було причиною завищеного значення радіуса Сіріуса В в роботі Адамса. Згідно з теперішніми уявленнями Сіріус В належить до масивних карликів, але не є рекорсменом ні за масою, ні за світністю.

Існуюча на початку минулого століття політропна теорія внутрішньої

будови зір як газових куль, створена працями Лена [4], Емдена [5], Фаулера [6], Ріттера [7], Еддінгтона [8] та ін. не могла пояснити фізичні причини існування і стійкості білих карликів. Відкриття вироджених карликів породило проблему побудови теорії внутрішньої будови та еволюції зір на релятивістських стадіях, характерною ознакою яких є високі та надвисокі густини у надрах цих об'єктів. З метою пояснення стійкості зір, у яких практично відсутні джерела енергії, Фаулер 1926 р. висунув ідею, яка ґрунтувалась на рівнянні стану холодного нерелятивістського виродженого електронного газу при високих густинах матерії [34]. Це одна з визначальних праць, що стала віхою не тільки в астрофізиці, а й у фізиці загалом. Адже задовго до створення мікроскопічних теорій явищ надплинності та надпровідності Фаулер припустив, що стійкість вироджених карликів є макроскопічним проявом квантових властивостей електронів, а саме виродження електронної підсистеми білого карлика. Уперше в астрофізиці застосувавши статистику Фермі-Дірака до моделі однорідного ідеального нерелятивістського електронного газу, він одержав рівняння стану, згідно з яким в асимптотиці низьких температур тиск не залежить від температури, а визначається лише концентрацією електронів.

Як впливає зі спостережень мас і радіусів білих карликів, їхня середня густина має порядок 10^5 г/см³. При таких густинах електрони є релятивістськими, а їх імпульси на поверхні Фермі мають порядок m_0c (де m_0 - маса електрона, c - швидкість світла), що вимагало узагальнення теорії Фаулера, а саме врахування ефектів спеціальної теорії відносності. Таке узагальнення виконав Чандрасекар, побудувавши теорію холодних білих карликів у рамках двокомпонентної сферично-симетричної моделі при $T = 0K$, що складається з ідеального релятивістського електронного газу та ядерної підсистеми з однорідним хімічним вмістом, розглядаючи

її як статичне безструктурне неперервне середовище [34], [10]. Модель Чандрасекара має два безрозмірні параметри - параметр релятивізму ($x_0 = \hbar k_F / m_0 c$ - безрозмірний імпульс електрона на поверхні Фермі у центрі зорі) та μ_e - так звана безрозмірна ефективна електронна молекулярна маса (частка маси ядра атома, що припадає на один електрон, утворений при повній іонізації атома, виражена в атомних одиницях маси; для чисто гелієвого карлика, наприклад, $\mu_e = 2.0$). Рівновага між тиском електронного газу і гравітаційним стиском з боку ядерної підсистеми, що описується звичайним диференціальним рівнянням другого порядку, визначає розподіл густини вздовж радіуса. Це дозволяє розрахувати макроскопічні характеристики моделі - масу карлика, його радіус, повну енергію як функції згаданих параметрів. З теорії Чандрасекара випливають два важливі висновки - обмеження на масу карлика ($M \leq 5.75 \mu_e^{-2} M_\odot$) та специфічна однозначна залежність маса - радіус (чим менший радіус, тим більша маса). Гранична маса досягається при $x_0 \rightarrow \infty$, коли радіус прямує до нуля. Подібне обмеження на масу релятивістських електронних, а також нейтронних конфігурацій було одержано раніше в роботі Ландау [11] за допомогою варіаційного принципу у рамках простішої моделі з однорідною густиною. Висновки теорії Чандрасекара підтверджувались наявними спостережуваними даними, яких, однак, у той час було надзвичайно мало.

Пояснюючи причину існування білих карликів при $T = 0K$, теорія Фаулера-Чандрасекара не вирішувала проблему джерел енергії карликів, що випромінюють, а також шляхи їхньої еволюції. В роботах, присвячених цій тематиці, дискутувались в основному дві гіпотези щодо джерел енергії - гравітаційний стиск [12] і залишкові термоядерні реакції в поверхневих шарах білих карликів [13].

Обидві ці гіпотези проаналізовано в роботах наукового співробітника

Астрономічної обсерваторії Львівського університету, професора С.Каплана [14], [15]. Встановлено, що хоча в карликах невеликої світності основним джерелом енергії є гравітаційний стиск, це значення є незначним, бо зоря вже досягла виродження. Тому білий карлик випромінює за рахунок енергії ядерної підсистеми, яку наближено можна розглядати як ідеальний класичний газ, а гравітаційний стиск як охолодження. Використовуючи співвідношення між температурою виродженого газу, світністю зорі та її масою, одержане у роботі Шацмана [14], С.Каплан вперше одержав залежність світності карлика від часу і характерний час охолодження 10^9 років. У згаданій роботі досліджено також питання про залежність світності білого карлика, у поверхневих шарах якого проходять реакції протонного чи азотно-вуглецевого циклу. На основі розрахунку абсолютних зоряних величин зроблено важливий висновок про те, що білі карлики ранніх спектральних класів випромінюють термоядерну енергію. Цей висновок цілком застосовний до гарячих карликів, відкритих наприкінці минулого століття, світність яких у декілька разів перевищує світність Сонця [16].

У 40-х роках минулого століття Ландау [11], Оппенгеймер та ряд інших авторів неоднократно висували гіпотезу про можливість існування нейтронних ядер в центральних областях зір, або про перехід газових зір у нейтронний стан після вичерпування запасів термоядерної енергії. Еволюційний (не катаклізмичний) сценарій переходу газу, який складається з атомних ядер і електронів, передбачає наявність електронів з максимальною енергією, близькою до $32 m_0 c^2$, що відповідає густині речовини, близькій до $6 \cdot 10^{10}$ г/см³. У роботі С.Каплана [32] показано, що у білих карликах не може реалізуватися стан з такою густиною матерії через гравітаційну нестійкість. При таких густинах використання теорії гравітації Ньютона неправомірне і необхідно застосовувати загальну те-

орію відносності. У згаданій роботі С.Каплан дослідив залежність маси карлика від параметра релятивізму x_0 у рамках моделі Чандрасекара, використавши рівняння рівноваги у гравітаційному полі Айнштайна, запропоноване Оппенгеймером і Волковим [18], зберігаючи у ньому члени першого порядку малості за параметром c^{-2} , і враховуючи їх методом теорії збурень. При цьому у ролі нульового наближення використано функцію Емдена для політропи $n = 3$, що відповідає умові $x_0 \gg 1$. Виявилось, що маса карлика в області великих значень x_0 є немонотонною функцією цього параметра, має максимум при скінченному значенні x_0 , що відповідає густині речовини, близькій до значення $2.5 \cdot 10^{10}$ г/см³. Відношення критичної маси до граничної маси в теорії Чандрасекара складає 0.96 (при $\mu_e = 2.0$). Знайдене значення критичної густини, при якому настає гравітаційна нестійкість, виявилось удвічі меншим від того, при якому мав би наступати перехід до нейтронного стану. На цій основі автор зробив висновок про те, що існування нейтронних зір є малоймовірним. Нейтронні зорі були відкриті через 18 років.

З точки зору сучасних уявлень теорія Чандрасекара є доволі ідеалізованою як щодо моделі (однофазна електрон-ядерна система з однорідним хімічним вмістом), так і використаного рівняння стану ідеального виродженого релятивістського електронного газу при $T = 0K$. Вона не враховує багатьох суттєвих чинників формування структури вироджених карликів - відхилення від повного виродження парамагнітної електронної підсистеми (впливу теплових ефектів), міжчастинкових кулонівських взаємодій, радіальної неоднорідності хімічного вмісту, впливу магнітних полів, осьового обертання, можливих фазових перетворень при охолодженні, тощо. У другій половині минулого століття з'явилися праці, у яких в рамках моделі Чандрасекара досліджувались окремі важливі аспекти фізики вироджених карликів. У цьому контексті слід від-

значити роботу Солпітера [19], у якій виконано наближене врахування внеску кулонівських взаємодій до рівняння стану моделі при високих густинах і $T = 0K$, а також Солпітера і Гамади [20], присвячену розрахунку співвідношення "маса - радіус" для однорідних електрон-ядерних моделей із зарядом ядер $2 \leq z \leq 26$ на основі рівняння стану Солпітера і при врахуванні можливого процесу нейтронізації, але без врахування ефектів загальної теорії відносності (ЗТВ). У роботі Джеймса [21] чисельним методом розв'язано рівняння рівноваги для карликів малих мас, доповнюючи модель Чандрасекара осьовим обертанням. Зельдович і Новіков розвинули варіаційний метод розрахунку характеристик вироджених карликів у рамках цієї ж моделі при врахуванні ефектів ЗТВ [22].

Невеликий обсяг спостережуваних даних стримував розвиток теорії вироджених карликів. Становище різко змінилось наприкінці ХХ ст., коли за допомогою космічних обсерваторій в околицях Сонця було відкрито тисячі вироджених карликів з різними світностями, масами і радіусами, що належать до різних спектральних класів. Найбільш вражаючим фактом, що свідчить про велику різноманітність характеристик карликів, є розподіл їх на площині "маса - радіус", чого не можна пояснити у рамках теорії Чандрасекара. Для інтерпретації сучасних спостережуваних даних виникла необхідність узагальнення цієї теорії на основі адекватних моделей. Це стосується насамперед молодих гарячих карликів, а також масивних карликів у подвійних системах. Гіпотеза, згідно з якою карлики подвійних систем можуть бути попередниками наднових типу Ia, потребує визначення критичних характеристик (маса, густина у центрі) при одночасному врахуванні основних чинників, серед яких є і конкуруючі.

На кафедрі астрофізики нашого університету в 2010-2020 р.р. виконано серію досліджень, що узагальнюють теорію Чандрасекара. Зокрема вперше розв'язано обернену задачу теорії - визначення параметрів x_0 і μ_e

на основі відомих зі спостережень мас і радіусів для конкретних карликів [23], [24]. У зв'язку з тим, що для маломасивних карликів параметр μ_e виявився суттєво меншим за 2.0, то для опису таких об'єктів запропоновано трипараметричну модель із неоднорідним хімічним вмістом, що враховує гравітаційну диференціацію речовини вздовж радіуса [24]. Цю модель застосовано до опису гелій - водневих карликів невеликих мас. Розв'язано обернену задачу, визначено парціальні розподіли гелію і водню вздовж радіуса зорі, а також парціальні маси для великої кількості карликів, використовуючи дані про загальні маси і радіуси з каталога [25].

Наближені оцінки температури всередині більшості карликів, отримані на основі їхньої низької світності [26], дають значення порядку $(10^6 \div 10^7)K$. Протягом останніх трьох десятиліть відкрито також карлики високої світності з ефективними температурами атмосфер порядку $(5 \div 9)10^4K$. В роботі [27] показали, що спостережуваний розподіл параметрів на площині "маса - радіус" можна представити як неперервну послідовність кривих "маса - радіус" (пучок кривих), кожна з яких відповідає сталій ефективній температурі. Це вимагало використовувати моделі, у яких електронна підсистема має часткове виродження, а не абсолютне. Розглянуто однофазну модель зі сталим хімічним вмістом, використавши рівняння стану електронної підсистеми згідно з розкладами Зоммерфельда [28] до квадрата температури. При цьому вважалось, що ядро є ізотермічним з температурою T_0 ($0 \leq r < R_c = \xi_0 R$, де R - радіус зорі, R_c - радіус ядра), а в області периферії ($R_c \leq r \leq R$) координатна залежність температури моделювалась. Це модель з чотирма безрозмірними параметрами - x_0 , μ_e , T_0^* і ξ_0 ($T_0^* = T_0 k_B / m_0 c^2$). За фіксованих значень μ_e і ξ_0 маса і радіус зорі є функціями параметрів x_0 і T_0^* , маючи різну залежність від T_0^* . Так виникає залежність "маса - радіус -

температура ядра, що відповідає спостережуваним даним для карликів малих мас. Розв'язано обернену задачу, використовуючи дані про маси, радіуси та ефективні температури більше 3000 карликів спектрального типу DA з каталогу [29]. При цьому ξ_0 вважався вільним параметром ($0 \leq \xi_0 \leq 1.0$).

У роботі [30] вперше досліджено вплив осьового обертання карликів у рамках моделі Чандрасекара в широкій області зміни параметра релятивізму x_0 , що відповідає як маломасивним карликам (яким присвячено роботи [22, 31]), так і карликам проміжних і великих мас.

Одночасне врахування впливу конкуруючих факторів - міжчастинкових взаємодій та осьового обертання на характеристики карликів проміжних і великих мас виконано у роботах [32, 33]. Розраховано залежність мас і радіусів у рамках чотирипараметричної моделі від параметрів x_0 , μ_e , z і Ω (безрозмірна кутова швидкість). Встановлено залежність максимальної маси карлика від параметрів z і Ω при великих значеннях параметра релятивізму, що є узагальненням межі Чандрасекара. Показано, що в області значень заряду ядра $2 \leq z \leq 17$ вплив обертання може призводити до значення маси, яке перевищує межу Чандрасекара. В області $z > 17$ вплив обертання не може компенсувати зменшення маси за рахунок міжчастинкових взаємодій і гранична маса менша межі Чандрасекара. На основі рівняння Оппенгеймера - Волкова [19] при використанні рівняння стану, що враховує міжчастинкові взаємодії, розраховано критичні характеристики масивного карлика (масу і густину в центрі зорі). Це відповідає моделі, що враховує міжчастинкові взаємодії, ефекти ЗТВ та осьове обертання. Встановлено область стійкості масивного карлика - інтервал зміни критичної маси карлика з осьовим обертанням і без нього.

Врахування впливу осьового обертання на характеристики білих кар-

ликів ґрунтується на використанні розв'язків задачі про механічну рівновагу зір з обертанням у політропній теорії. Крім того, ця задача має і самостійне значення, адже обертання властиве зорям всіх спектральних класів і класів світності. В останні роки появились роботи, у яких внутрішня структура зорі з відомою масою, радіусом та кутовою швидкістю, відомими зі спостережень, розраховується на основі рівняння рівноваги обертової політропи з індексом $n = 1$.

РОЗДІЛ 2

Основні чинники формування структури вироджених карликів. Моделі і рівняння рівноваги.

Вироджені карлики такі ж різноманітні, як і зорі інших типів. Карлики відрізняються за своєю масою, радіусами, ефективною температурою поверхні, наявністю магнітних полів, кутовою швидкістю осьового обертання, хімічним вмістом та іншими чинниками. Більшість карликів є одиничними зорями (польовими), але відомо багато карликів у подвійних системах. Всі вони об'єднані своєю основною властивістю - високими густинами речовини, внаслідок чого електронна підсистема карликів знаходиться у виродженому стані, в основному - у стані релятивістського виродження, що забезпечує їх існування і стабільність без суттєвих джерел енергії. Таку ідею висунув Фаулер у 1926 р. [34], застосувавши статистику Фермі до опису моделі невзаємодіючих електронів при низьких температурах. Чандрасекар узагальнив ідею Фаулера, побудувавши просту двокомпонентну модель холодного карлика, що складається з підсистеми ідеального релятивістського виродженого електронного газу при $T = 0K$ і підсистеми ядер, яка розглядається як неперервне статичне класичне середовище з однорідним хімічним вмістом.

Рівновага між тиском електронної підсистеми і гравітаційним стиском ядерної підсистеми визначає структуру виродженого карлика і всі його характеристики (масу, радіус, повну енергію та ін.). Вираз для тиску у моделі однорідного релятивістського виродженого ідеального електрон-

ного газу з концентрацією N_e/V при $T = 0K$ добре відомий [10]

$$P = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3h^3} F(x), \quad (2.1)$$

$$F(x) = 8 \int_0^x dy y^4 (1 + y^2)^{-1/2} = x(2x^2 - 3)(1 + x^2)^{1/2} + 3 \ln[1 + \sqrt{1 + x^2}],$$

де

$$x = \hbar k_F (m_0 c)^{-1} = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N_e}{V} \right)^{1/3} \frac{1}{m_0 c} \quad (2.2)$$

має назву параметра релятивізму і є безрозмірним імпульсом Фермі (в одиницях $m_0 c$, де m_0 - маса електрона, c - швидкість світла). Як видно з формули (2.1), тиск визначається лише концентрацією електронів.

Густина речовини теж можна виразити через параметр x ,

$$\rho = (m_{\text{я}} + z m_0) \frac{N_e}{zV} \cong m_u \mu_e \frac{1}{3\pi^3} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^3 x^3 \left(1 + \frac{m_0}{m_u \mu_e} \right). \quad (2.3)$$

Тут $m_{\text{я}}$ - маса ядра, m_u - атомна одиниця маси, μ_e - доля маси ядра, що припадає на один електрон при повній іонізації атома ($\mu_e = A/z$, де z - заряд ядра, A - число баріонів у ньому). Величина μ_e близька до 2.0 і має назву безрозмірної електронної молекулярної маси.

У випадку неоднорідної моделі, яка відповідає реальному карлику, рівняння стану зображається у вигляді

$$P(r) = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3h^3} F(x(r)), \quad (2.4)$$

де $P(r)$ - тиск на поверхні сфери радіуса r ,

$$x(r) = \hbar (3\pi^2 n(r))^{1/3} \frac{1}{m_0 c} \quad (2.5)$$

локальне значення параметра релятивізму, $n(r)$ - густина електронів, а

$$\rho(r) = m_u \mu_e \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^3 x^3(r) \left(1 + \frac{m_0}{m_u \mu_e} \right) \quad (2.6)$$

локальне значення густини речовини на цій сфері. Підставляючи вирази (2.4) і (2.5) у рівняння механічної рівноваги зорі без обертання

$$\nabla P(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) \nabla \Phi_{\text{grav}}(\mathbf{r}), \quad (2.7)$$

у якому

$$\Phi_{grav}(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (2.8)$$

позначає гравітаційний потенціал, знаходимо рівняння

$$\Delta(\sqrt{1 + x^2(r)} - 1) = -\frac{32\pi^2 G}{3(\hbar c)^3} (m_0 m_u \mu_e c^2)^2 x^3(r). \quad (2.9)$$

Це звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку для локального параметра релятивізму $x(r)$. Для зручності наступного розв'язування його і обчислення характеристик вводять безрозмірні змінні. Найзручнішими є такий вибір змінних [24]

$$\xi = r/\lambda, \quad y(\xi) = \{(1 + x^2(r))^{1/2} - 1\} \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = (1 + x_0^2)^{1/2} - 1, \quad (2.10)$$

де x_0 - значення параметра релятивізму у центрі зорі ($x_0 \equiv x(r = 0)$).

Визначаючи масштаб довжини λ умовою

$$\frac{32\pi^2 G}{3(\hbar c)^3} \{m_0 m_u \mu_e c^2 \varepsilon_0 \lambda\}^2 = 1, \quad (2.11)$$

одержуємо однопараметричне рівняння [24]

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{dy}{d\xi} = - \left\{ y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right\}^{3/2}, \quad (2.12)$$

де згідно з означення (2.10) $y(0) = 1$. Регулярним розв'язком цього рівняння відповідає гранична умова $dy/d\xi = 0$ при $\xi = 0$. Параметром рівняння (2.12) є x_0 , яке визначає $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0(x_0)$. Але всі характеристики карлика визначаються двома параметрами - x_0 і μ_e .

Найважливішими додатковими чинниками формування структури реальних карликів є осьове обертання, міжчастинкові кулонівські взаємодії та неповне виродження електронної підсистеми. Для масивних карликів найважливішим є перші два з них. Вплив обертання найперше досліджувався в роботі [22], а міжчастинкових взаємодій - у роботі [20]. Оскільки ці чинники є конкуруючими (обертання призводить до збільшення маси, а взаємодії - до зменшення), то їх треба враховувати одночасно, що виконано вперше у роботі [32].

При наявності осевого обертання рівняння (2.7) для моделі Чандра-секара узагальнюється таким чином

$$\nabla P(\mathbf{r}) = -\rho\{\nabla\Phi_{grav}(\mathbf{r}) + \nabla\Phi_c(\mathbf{r})\}, \quad (2.13)$$

де $\Phi_c(\mathbf{r})$ - відцентровий потенціал, який у сферичній системі координат, вісь Oz якої збігається з віссю обертання, має вигляд

$$\Phi_c(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.14)$$

де ω - стала кутова швидкість, θ - полярний кут.

Модель з обертанням має осеву симетрію, а рівняння (2.13) набуває вигляду

$$\Delta(\sqrt{1+x^2(\mathbf{r})} - 1) = 2\omega^2 \frac{m_u \mu_e}{m_0 c^2} - Cx^3(\mathbf{r}) \quad (2.15)$$

$$C = \frac{32\pi^2 G(m_u \mu_e m_0 c^2)^2}{3(hc)^3}.$$

У безрозмірних змінних

$$\xi = r/\lambda, \quad Y(\xi, \theta|x_0) = \varepsilon_0^{-1}\{[1+x^2(r, \theta)]^{1/2} - 1\}, \quad (2.16)$$

рівняння (2.15) стає диференціальним рівнянням другого порядку у частинних похідних

$$\Delta_{\xi, \theta} Y(\xi, \theta|x_0) = \Omega^2 - \left\{ Y^2(\xi, \theta|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta|x_0) \right\}^{3/2}, \quad (2.17)$$

де

$$\Omega^2 = 2\omega^2 m_u \mu_e \lambda^2 (m_0 c^2 \varepsilon_0)^{-1} \quad (2.18)$$

є квадратом безрозмірної кутової швидкості. Рівнянню (2.17) відповідають граничні умови

$$Y(\xi, \theta|x_0) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} Y(\xi, \theta|x_0) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (2.19)$$

Рівняння (2.17) - двовимірне і двопараметричне, у ньому фігурують незалежні безрозмірні параметри x_0 і Ω . У границі $x_0 \gg 1$ рівняння (2.12)

має асимптотику рівняння Емдена для політропи з індексом $n = 3$. А в границі $x_0 \ll 1$, ввівши масштаб довжини λ умовою

$$\frac{32\pi^2 G}{3(hc)^3} \{2^{3/4} m_0 m_u \mu_e c^2 \lambda^2 \varepsilon^{1/4} \varepsilon_0^{1/4}\}^2 = 1, \quad (2.20)$$

рівняння (2.12) можна звести до рівняння Емдена для політропи $n = 3/2$. Таку ж асимптотику щодо параметра x_0 має і рівняння (2.17). Отже, диференціальне рівняння рівноваги виродженого карлика (з обертанням чи без нього) у двокомпонентній моделі з довільним значенням параметра релятивізму відповідає рівнянню рівноваги політропи з індексом $3/2 \leq n \leq 3$. Це дозволяє розвинути наближений метод розрахунку розв'язків рівняння (2.17) на основі знайдених розв'язків рівняння політропи з осьовим обертанням, використовуючи інтегральну форму рівняння рівноваги (див. [35]).

2.1. Залежність $n \rightleftharpoons x_0$.

Вище встановлено, що область зміни параметра релятивізму ($0 \leq x_0 \leq \infty$) відповідає області зміни індекса політропи ($3/2 \leq n \leq 3$). Детальнішу залежність між параметром x_0 і n можна встановити за критерієм близькості розв'язків рівняння (2.12) і рівняння Емдена для політропи з індексом n , а саме

$$\tilde{\xi}_1(n) = \xi_1(x_0), \quad (2.21)$$

де $\xi_1(x_0)$ - перший корінь розв'язку рівняння (2.12) для заданого x_0 ($y(\xi_1(x_0)) = 0$), а $\tilde{\xi}_1(n)$ - аналогічний корінь розв'язку рівняння

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{d\xi^2} + \frac{2 d\tilde{y}}{\xi d\xi} = -\tilde{y}^n(\xi), \quad (2.22)$$

що визначається умовою $\tilde{y}(\xi) = 0$. Оскільки $y(0) = \tilde{y}(0) = 1$, $y(\xi_1(x_0)) = \tilde{y}(\tilde{\xi}_1(n)) = 0$, то кожному x_0 відповідає певне значення $n(x_0)$. Значення

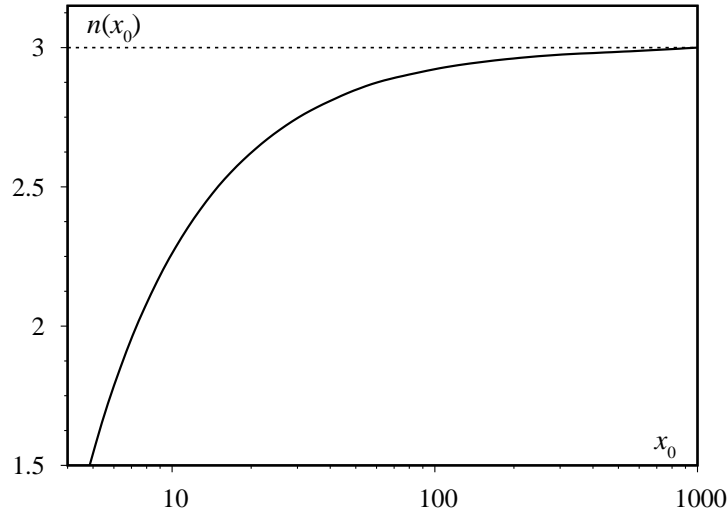


Рис. 2.1. Залежність індекса політропи n від параметра релятивізму x_0 .

$\xi_1(x_0)$ і $\xi_1(n)$ знайдено чисельним методом з розв'язків рівнянь (2.12) і (2.22). Залежність n від x_0 зображено на рисунку 2.1. На рис. 2.1 для x_0 використано логарифмічну шкалу.

2.2. Лінеаризація рівняння рівноваги.

Один з варіантів знаходження наближеного розв'язку рівняння (2.17) може ґрунтуватися на лінеаризації цього рівняння щодо параметра Ω^2 . Аналогічно до способу лінеаризації рівняння рівноваги політроп з $n > 1$ (див. [35]), будемо шукати розв'язок у вигляді

$$Y^I(\xi, \theta|x_0) = y(\xi|x_0) + \Omega^2 \Psi(\xi, \theta|x_0), \quad (2.23)$$

де $y(\xi|x_0)$ є розв'язком рівняння (2.12), а $\psi(\xi, \theta|x_0)$ - невідома функція змінних ξ, θ . У загальному випадку

$$\Psi(\xi, \theta|x_0) = \psi_0(\xi|x_0) + \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t) \psi_{2l}(\xi|x_0), \quad (2.24)$$

де $P_{2l}(t)$ - поліном Лежандра порядку $2l$. Підставляючи вирази (2.23) і (2.24) у рівняння (2.17), у наближенні Ω^2 знаходимо систему лінійних

рівнянь для невідомих функцій

$$\begin{aligned}\Delta_{\xi}\psi_0(\xi|x_0) &= 1 - \Phi(\xi|x_0)\psi_0(\xi|x_0), \\ \Delta_{\xi}\psi_{2l}(\xi|x_0) &= \left\{ \frac{2l(2l+1)}{\xi^2} - \Phi(\xi|x_0) \right\} \psi_{2l}(\xi|x_0), \quad l \geq 1, \\ \Phi(\xi|x_0) &= 3 \left\{ y(\xi|x_0) + \frac{1}{\varepsilon_0} \right\} \left\{ y^2(\xi|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|x_0) \right\}^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Граничні умови (2.19) співпадають з умовами для $y(\xi|x_0)$, тому функції $\psi_0(\xi|x_0)$, $\psi_{2l}(\xi|x_0)$ при $\xi = 0$ мають нульові граничні умови і асимптотику

$$\psi_0(\xi|x_0) = \frac{\xi^2}{6} + \dots, \quad \psi_{2l}(\xi|x_0) = \xi^{2l} + \dots \quad \text{при} \quad \xi \ll 1.\tag{2.26}$$

У змінних $\eta = \xi \cdot 3^{1/2}(1+\varepsilon_0)^{1/2}(2+\varepsilon_0)^{1/2}\varepsilon_0^{-1}$ рівняння для функції $\psi_{2l}(\xi|x_0)$ в асимптотиці $\xi \rightarrow 0$ співпадають із рівняннями для сферичних функцій Бесселя першого роду [36]. У випадку $x_0 \gg 1$ функції $\psi_0(\xi|x_0)$, $\psi_{2l}(\xi|x_0)$ співпадають з розв'язками для політропи з індексом $n = 3$.

Зрозуміло, що у застосованому способі лінеаризації припускається, що $y(\xi|x_0) > 0$, а внесок обертання є поправкою. Тобто формули (2.23)-(2.26) застосовні в області $0 \leq \xi \leq \xi_1(x_0)$. У периферійній області ($\xi_1(x_0) \leq \xi$) доданок $\left\{ Y^2 + \frac{2}{\varepsilon_0} Y \right\}^{3/2}$ у правій стороні рівняння (2.17) є малим порівняно з Ω^2 , тому в цій області рівняння (2.17) наближено замінимо рівнянням

$$\Delta_{\xi,\theta} Y^{II}(\xi, \theta|x_0) = \Omega^2.\tag{2.27}$$

Загальний розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}Y^{II}(\xi, \theta|x_0) &= \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} (1 - P_2(t)) + \\ &+ \Omega^2 \left\{ C_0 + C_2(x_0) \xi^2 P_2(t) + C_4(x_0) \xi^4 P_4(t) + \right. \\ &\left. + \frac{b_1(x_0)}{\xi} + \frac{b_3(x_0) P_2(t)}{\xi^3} + \frac{b_5(x_0) P_4(t)}{\xi^5} + \dots \right\},\end{aligned}\tag{2.28}$$

оскільки $\Delta_{\xi,\theta} \{ \xi^{2l} P_{2l}(t) = \Delta_{\xi,\theta} \{ P_{2l}(t) / \xi^{2l+1} \} = 0$ для $l \geq 0$. Сталі C_0 , b_1 , C_2 , b_3 , b_5 , C_4 визначаються з умов зшивання $Y^I(\xi, \theta|x_0) = Y^{II}(\xi, \theta|x_0)$, $\frac{d}{d\xi} Y^I(\xi, \theta|x_0) = \frac{d}{d\xi} Y^{II}(\xi, \theta|x_0)$ при $\xi = \xi_1(x_0)$.

Далі розглянемо рівняння (2.17), щоб визначити функцію $Y^I(\xi, \theta|x_0)$.

Використаємо інтегральну форму цього рівняння

$$\begin{aligned}
Y(\xi, \theta|x_0) &= 1 + \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} (1 - P_2(t)) + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_V Q(\xi, \xi') \left\{ Y^2(\xi', \theta|x_0) + \frac{2}{\varepsilon} Y(\xi', \theta|x_0) \right\}^{3/2} d\xi', \\
Q(\xi, \xi') &= |\xi - \xi'|^{-1} - (\xi')^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Підставляючи у рівняння (2.29) вирази (2.23) і (2.24), одержуємо лінеаризовану форму рівняння, яке визначає сталі інтегрування $a_{2l}(x_0)$,

$$\begin{aligned}
y(\xi|x_0) + \Omega^2 \{ \psi_0(\xi|x_0) + \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t) \psi_{2l}(\xi|x_0) \} &= \\
= 1 + \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} (1 - P_2(t)) + \frac{1}{4\pi} \int_V Q(\xi, \xi') \left[y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right]^{3/2} + \\
+ \Omega^2 \Phi(\xi'|x_0) \left[\psi_0(\xi'|x_0) + \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t') \psi_{2l}(\xi'|x_0) \right] d\xi'.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Зауважимо, що інтегрування у формулі (2.29) виконується за повним об'ємом зорі. Але у рівнянні (2.30) слід інтегрувати лише за тою частиною об'єму зорі, у якій застосовна лінеаризація, тобто в області $|\xi'| \leq \xi_1(x_0)$, де $y(\xi'|x_0) \geq 0$.

Для спрощення рівності (2.30) використаємо розклад ядра $Q(\xi, \xi')$ в ряд за поліномами Лежандра

$$Q(\xi, \xi') = \begin{cases} \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} + \sum_{l \geq 1} \frac{P_{2l}(t) P_{2l}(t')}{\xi^{2l+1}} (\xi')^{2l} & \text{при } \xi > \xi'; \\ \sum_{l \geq 1} \frac{P_{2l}(t) P_{2l}(t')}{(\xi')^{2l+1}} (\xi)^{2l} & \text{при } \xi' > \xi. \end{cases} \tag{2.31}$$

Рівняння (2.12) еквівалентне рівнянню

$$y(\xi|x_0) = 1 + \frac{1}{4\pi} \int Q(\xi, \xi') \left[y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right]^{3/2} d\xi'. \tag{2.32}$$

Використовуючи розклад (2.31) та інтегруючи за кутовими змінними ве-

ктора ξ' , одержуємо одновимірне інтегральне рівняння:

$$y(\xi|x_0) = 1 + \int_0^\xi \{(\xi')^2/\xi - \xi'\} \left\{ y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right\}^{3/2} d\xi', \quad (2.33)$$

при $\xi_1 \leq \xi(x_0)$ і $y(\xi|x_0) = 0$ при $\xi \geq \xi_1(x_0)$. Зауважимо, що у рівнянні (2.32) інтегрування виконується за всіма значеннями ξ' ($0 \leq \xi' \leq \infty$; $0 \leq \theta' \leq \pi$; $0 \leq \varphi' \leq 2\pi$). В інтегралі у рівності (2.30) треба мати на увазі, що $y(\xi'|x_0)$ відмінна від нуля лише в області $\xi' \leq \xi_1(x_0)$, де $\xi_1(x_0)$ - безрозмірний радіус карлика в моделі Чандрасекара. Тому в інтегралі

$$J(\xi|x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} Q(\xi, \xi') \left\{ y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right\}^{3/2} d\xi' \quad (2.34)$$

підінтегральна функція відмінна від нуля лише у незаштрихованій області (див. рис. 2.2), а $\xi_0(t')$ визначає поверхню, близьку до поверхні еліпсоїда обертання. При цьому $\xi_p(x_0)$ визначає мінімальну відстань по-

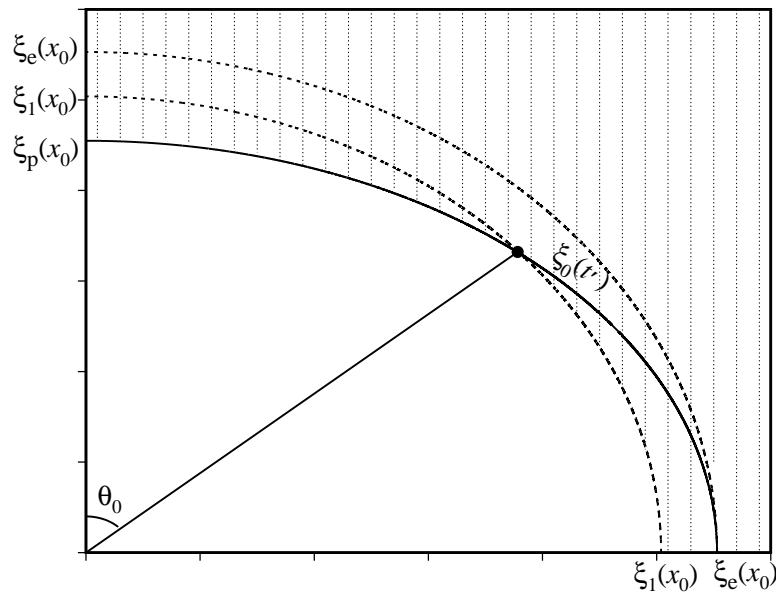


Рис. 2.2. Область інтегрування в інтегралі (2.34).

верхні від початку координат, $\xi_l(x_0)$ - максимальну, куту θ відповідає

$t(x_0) = \cos \theta_0$. В області $0 \leq \xi \leq \xi_p(x_0)$

$$J(\xi|x_0) = \int_0^\xi \{(\xi')^2/\xi - \xi'\} \left\{ y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right\}^{3/2} d\xi' - \\ - \frac{1}{2} \sum_{l \geq 1} P_{2l}(t) \xi^{2l} L_{2l}(x_0); \quad (2.35)$$

$$L_{2l}(x_0) = 2 \int_{t(x_0)}^1 dt' P_{2l}(t') \int_{\xi_0(t')}^{\xi_1(x_0)} \left\{ y^2(\xi'|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi'|x_0) \right\}^{3/2} (\xi')^{1-2l} d\xi'.$$

Згідно з рівнянням (2.33)

$$J(\xi|x_0) = y(\xi|x_0) - 1 - \frac{1}{2} \sum_{l \geq 1} P_{2l}(t) \xi^{2l} L_{2l}(x_0). \quad (2.36)$$

В області $\xi_p(x_0) \leq \xi \leq \xi_1(x_0)$ інтеграл $J(\xi|x_0)$ відрізняється від виразу (2.36) поправками, пропорційними Ω^6 , якими будемо нехтувати. При інтегруванні інших доданків підінтегральної функції в (2.30) слід скористатись рівняннями (2.25). Зокрема

$$\frac{1}{4\pi} \int_{V_1} Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') \Phi(\xi'|x_0) \psi_0(\xi'|x_0) d\xi' = \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') d\xi' - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') \{1 - \Phi(\xi'|x_0) \psi_0(\xi'|x_0)\} d\xi'. \quad (2.37)$$

Використовуючи розклади (2.31), знаходимо, що

$$\frac{1}{4\pi} \int_{V_1} Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') d\xi' = -\frac{\xi^2}{6} - \frac{1}{2} \sum_{l \geq 1} \xi^{2l} P_{2l}(t) \tilde{I}_{2l}(x_0); \quad (2.38)$$

$$\tilde{I}_2(x_0) = -2 \int_{t_0}^1 P_2(t') \ln \xi_0(t') dt';$$

$$\tilde{I}_{2l}(x_0) = (l-1)^{-1} \int_{t_0}^1 P_{2l}(t') (\xi_0^{2-2l}(t') - \xi_1^{2-2l}(x_0)) dt' \quad \text{при } l \geq 2.$$

Другий доданок формули (2.37)

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \int_{V_1} Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') \{1 - \Phi(\xi'|x_0)\psi_0(\xi'|x_0)\} d\xi' = \\
& = -\int_0^\xi \left(\frac{(\xi')^2}{\xi} - \xi' \right) \{1 - \Phi(\xi'|x_0)\psi_0(\xi'|x_0)\} d\xi' - \\
& -\frac{1}{2} \sum_{l \geq 1} P_{2l}(t) \xi^{2l} \int_{-1}^1 dt' P_{2l}(t') \int_{\xi}^{\xi_0(t')} \{1 - \Phi(\xi'|x_0)\psi_0(\xi'|x_0)\} (\xi')^{1-2l} d\xi' = \\
& = \psi_0(\xi|x_0) + \frac{1}{2} \sum_{l \geq 2} P_{2l}(t) \xi^{2l} D_{2l}(x_0); \\
& D_{2l}(x_0) = \int_{t_0}^1 dt' P_{2l}(t') \int_{\xi_0(t')}^{\xi_1(x_0)} (\xi')^{1-2l} \{\Delta_{\xi'} \psi_0(\xi'|x_0)\} d\xi'.
\end{aligned}$$

За допомогою співвідношень (2.36)-(2.38) вдається спростити рівність (2.30) до такого вигляду:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t) \psi_{2l}(\xi|x_0) = -\frac{\xi^2}{6} P_2(t) - \frac{1}{2} \sum_{l \geq 1} P_{2l}(t) \xi^{2l} \times \\
& \times \{I_{2l}(x_0) - D_{2l}(x_0) + \Omega^{-2} L_{2l}(x_0)\} + \\
& + \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') P_{2l}(t') \chi_{2l}(\xi'),
\end{aligned} \tag{2.39}$$

де

$$\chi_{2l}(\xi') \equiv 2l(2l+1)(\xi')^{-2} \psi_{2l}(\xi'|x_0) - \Delta_{\xi'} \psi_{2l}(\xi'|x_0). \tag{2.40}$$

Використовуючи розклади ядра (2.31), суму за індексом l у правій стороні рівності (2.39) зобразимо у вигляді

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \geq 1} \frac{a_{2l}(x_0)}{4l+1} \frac{P_{2l}(t)}{\xi^{1+2l}} \int_0^\xi (\xi')^{2l+2} \chi_{2l}(\xi') d\xi' + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) \xi^{2l} P_{2l}(t) \int_{-1}^1 P_{2l}^2(t') dt' \int_{\xi}^{\xi_1(x_0)} (\xi')^{1-2l} \chi_{2l}(\xi') d\xi' +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) \xi^{2l} P_{2l}(t) \int_{t_0}^1 P_{2l}^2(t') dt' \int_{\xi_0(t')}^{\xi_1(x_0)} (\xi')^{1-2l} \chi_{2l}(\xi' | x_0) d\xi' - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l \geq 1} P_{2l}(t) \xi^{2l} \sum_{m \geq 1} (1 - \delta_{m,l}) a_{2m}(x_0) \times \\
& \times \int_{t_0}^1 P_{2m}(t') P_{2l}(t') dt' \int_{\xi_0(t')}^{\xi_1(x_0)} (\xi')^{1-2l} \chi_{2m}(\xi' | x_0) d\xi'. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Інтегруючи частинами за змінною ξ' , суму перших двох рядів у виразі (2.41) вдається записати так:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) P_{2l}(t) \psi_{2l}(\xi | x_0) - \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) \xi^{2l} \varphi_{2l}(t) S_{2l,2l}(x_0), \tag{2.42} \\
& S_{2l,2l}(x_0) = \frac{1}{4l+1} \xi_1^{-2l} \left\{ (2l+1) \psi_{2l}(\xi_1 | x_0) + \xi_1 \frac{d}{d\xi} \psi_{2l}(\xi_1 | x_0) \right\}.
\end{aligned}$$

Третій ряд у виразі (2.41) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0) \xi^{2l} P_{2l}(t) B_{2l,2l}(x_0), \tag{2.43} \\
& B_{2l,2l}(x_0) = \int_{t_0}^1 P_{2l}^2(t') dt' \int_{\xi_0(t')}^{\xi_1(x_0)} (\xi')^{1-2l} \chi_{2l}(\xi' | x_0) d\xi'.
\end{aligned}$$

Останній ряд у виразі (2.41) зобразимо у вигляді

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \sum_{l \geq 1} P_{2l}(t) \xi^{2l} \sum_{m \geq 1} (1 - \delta_{l,m}) a_{2m}(x_0) S_{2l,2m}(x_0), \tag{2.44} \\
& S_{2l,2m}(x_0) = \int_{t_0}^1 P_{2m}(t') P_{2l}(t') dt' \int_{\xi_0(t')}^{\xi_1(x_0)} (\xi')^{1-2l} \chi_{2m}(\xi' | x_0) d\xi'.
\end{aligned}$$

Як видно зі співвідношень (2.42)-(2.44), члени типу $P_{2l}(t) \psi_{2l}(\xi | x_0)$ у рівнянні (2.39) взаємно скорочуються, а залишаються члени типу $P_{2l}(t) \xi^{2l}$. Враховуючи ортогональність поліномів Лежандра і прирівнюючи коефіцієнти при однакових множниках $\xi^{2l} \varphi_{2l}(t)$, зводимо рівність (2.39) до

системи лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь для невідомих сталих інтегрування $a_{2l}(x_0)$:

$$\begin{aligned} & a_{2l}(x_0)\{S_{2l,2l}(x_0) + B_{2l,2l}(x_0)\} + \sum_{m \geq 1} (1 - \delta_{l,m})a_{2m}(x_0)a_{2l,2m}(x_0) = \\ & = -\frac{1}{6}\delta_{l,1} - \frac{1}{2}\{\tilde{I}_{2l}(x_0) + \Omega^{-2}L_{2l}(x_0) - D_{2l}(x_0)\}, \quad l \geq 1 \end{aligned} \quad (2.45)$$

При цьому $\tilde{I}_{2l}(x_0)$, $L_{2l}(x_0)$, $D_{2l}(x_0)$ визначені формулами (2.35), (2.38), з яких видно, що вони пов'язані з відхиленням поверхні від сфер, тому зумовлені обертанням і пропорційні Ω^2 .

Система рівнянь (2.45) дає можливість знайти сталі інтегрування $a_{2l}(x_0)$ і одержати розв'язок рівняння рівноваги карлика для області $0 \leq \xi < \xi_1(x_0)$ без використання наближень і апроксимацій. Запишімо умову неперервності розв'язку рівняння рівноваги на сфері радіуса $\xi_1(x_0)$:

$$\begin{aligned} & \Omega^2 \left\{ \psi_0(\xi|x_0) + \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0)P_{2l}(t)\psi_{2l}(\xi|x_0) \right\} = \quad (2.46) \\ & = \frac{\Omega^2 \xi^2}{6}(1 - P_2(t)) + \Omega^2 \left\{ \frac{b_1(x_0)}{\xi} + \frac{b_3(x_0)P_2(t)}{\xi^3} \right. \\ & \left. + \frac{b_5(x_0)P_4(t)}{\xi^5} + \dots + C_0(x_0) + C_2(x_0)\xi^2 P_2(t) + C_4(x_0)\xi^4 P_4(t) + \dots \right\}; \\ & y'(\xi|x_0) + \Omega^2 \left\{ \psi'_0(\xi|x_0) + \sum_{l \geq 1} a_{2l}(x_0)P_{2l}(t)\psi'_{2l}(\xi|x_0) \right\} = \\ & = \frac{\Omega^2 \xi}{3}(1 - P_2(t)) + \Omega^2 \left\{ -\frac{b_1(x_0)}{\xi^2} - \frac{3b_3(x_0)P_2(t)}{\xi^4} \right. \\ & \left. - \frac{5b_5(x_0)P_4(t)}{\xi^6} + \dots + 2C_2(x_0)\xi P_2(t) + 4C_4(x_0)\xi^3 P_4(t) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Тут штрихами позначено похідні функцій за змінною ξ . Прирівнюючи коефіцієнти при однакових поліномах Лежандра і однакових степенях

Ω^2 , одержуємо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{\xi^2}{6} + C_0 + \frac{b_1}{\xi}; & \frac{y'}{\Omega^2} + \psi' &= \frac{\xi}{3} - \frac{b_1}{\xi^2}; \\ a_2\psi_2 &= -\frac{\xi^2}{6} + C_2\xi^2 + \frac{b_3}{\xi^3}; & a_2\psi'_2 &= -\frac{\xi}{3} + 2C_2\xi - \frac{3b_3}{\xi^4}; \\ a_4\psi_4 &= C_4\xi^4 + \frac{b_5}{\xi^5}; & a_4\psi'_4 &= 4C_4\xi^3 - \frac{5b_5}{\xi^6}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Тут використано такі позначення:

$$\begin{aligned} y'(\xi_f) &\equiv \frac{d}{d\xi}y(\xi|x_0) \text{ при } \xi = \xi_f; & \psi'_0(\xi_f) &\equiv \frac{d}{d\xi}\psi_0(\xi|x_0) \text{ при } \xi = \xi_f; \\ \psi'_{2l}(\xi_f) &\equiv \frac{d}{d\xi}\psi_{2l}(\xi|x_0) \text{ при } \xi = \xi_f; & \psi_0(\xi_f) &\equiv \psi_0(\xi|x_0) \text{ при } \xi = \xi_f. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Розв'язки цієї системи рівнянь:

$$\begin{aligned} C_0 &= \psi_0 + \xi \left\{ \frac{y'}{\Omega^2} + \psi'_0 \right\} - \frac{1}{2}\xi^2; \\ C_2 &= \frac{3}{5\xi^3} \left\{ \frac{5}{18}\xi^2 + a_2 \left[\psi_2 + \frac{\xi}{3}\psi'_2 \right] \right\}; \\ C_4 &= \frac{5}{9\xi^4} a_4 \left(\psi_4 + \frac{\xi}{5}\psi'_4 \right); \\ b_1 &= \xi^2 \left\{ \frac{\xi}{3} - \frac{y'}{\Omega^2} - \psi'_0 \right\}; \\ b_3 &= \xi^3 \left\{ a_2\psi_2 + \frac{\xi^2}{6} + C_2\xi^2 \right\}; \\ b_5 &= \xi^5 (a_4\psi_4 - C_4\xi^4). \end{aligned} \quad (2.49)$$

РОЗДІЛ 3

Розрахунки характеристик карликів.

Розв'язування системи рівнянь (2.45) слід виконувати методом ітерацій, як і для випадку політроп з осьовим обертанням [37]. У випадку карликів проміжних мас у нульовому наближенні замість $a_2(x_0)$ і $a_4(x_0)$ використаємо відповідні сталі для політропи з індексом $n = 2$: $a_2(x_0) \longrightarrow \tilde{a}_2(\Omega)$, $a_4(x_0) \longrightarrow \tilde{a}_4(\Omega)$. Наш підхід відрізняється від методу роботи [31], у якій $a_4 = 0$, $c_4 = 0$, $b_5 = 0$, а сталі a_2 , b_3 , b_1 , C_0 визначаються з умов зшивання на поверхні деякого радіуса $\xi_f < \xi_1(x_0)$ і не залежать від Ω , що відповідає малим значенням кутової швидкості Ω .

У нашому підході розв'язок рівняння рівноваги зображається у вигляді

$$Y^I(\xi, \theta|x_0) \equiv y(\xi|x_0) + \quad (3.1)$$

$$+ \Omega^2 \{ \psi_0(\xi|x_0) + \tilde{a}_2(\Omega) P_2(t) \psi_2(\xi|x_0) + \tilde{a}_4(\Omega) P_4(t) \psi_4(\xi|x_0) \}.$$

при $0 < \xi \leq \xi_1(x_0)$,

$$Y^{II}(\xi, \theta|x_0) = \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} (1 - P_2(t)) + \quad (3.2)$$

$$+ \Omega^2 \left\{ C_0(x_0) + \frac{b_1(x_0)}{\xi} + \frac{b_3(x_0) P_2(t)}{\xi^3} + \frac{b_5(x_0) P_4(t)}{\xi^5} + \right.$$

$$\left. + C_2(x_0) |\Omega| \xi^2 P_2(t) + C_4(x_0) |\Omega| \xi^4 P_4(t) \right\}$$

при $\xi_1(x_0) \leq \xi$, де $t = \cos \theta$.

З умови $Y(\xi, \theta|x_0) = 0$ знаходимо рівняння поверхні $\xi_0(t)$. Ця функція визначає полярний і екваторіальний радіуси $\xi_p = \xi_0(1)$, $\xi_e = \xi_0(0)$, а

також ексцентриситет

$$e = \left\{ 1 - \left(\frac{\xi_p}{\xi_e} \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.3)$$

які є функціями Ω . Поверхня карлика з обертанням близька до поверхні еліпсоїда обертання

$$\xi_0(t) = \frac{\xi_0}{\left(1 + \frac{e^2}{1-e^2} t^2 \right)^{1/2}}, \quad (3.4)$$

що дає можливість розрахувати елементи матриці $S_{2l,2l}(x_0|\Omega)$, $B_{2l,2l}(x_0|\Omega)$ а також $I_2(x_0|\Omega)$, $L_{2l}(x_0|\Omega)$, $D_{2l}(x_0|\Omega)$ і знайти $a_2(x_0|\Omega)$, $a_4(x_0|\Omega)$ у першій ітерації. Використовуючи їх, знаходимо сталі $b_3(x_0|\Omega)$, $b_5(x_0|\Omega)$, $C_2(x_0|\Omega)$, $C_4(x_0|\Omega)$ і знаходимо $a_2(x_0|\Omega)$, $a_4(x_0|\Omega)$, у другій ітерації і т.д. Таким чином знаходимо геометричні характеристики карлика $\xi_e(x_0|\Omega)$, $\xi_p(x_0|\Omega)$ і $e(x_0|\Omega)$ як функції параметра релятивізму x_0 і кутової швидкості Ω .

Згідно з формулами (2.11), (2.16) повна маса карлика дорівнює

$$M(x_0|\Omega) = \int_V d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \lambda^3 \frac{m_u \mu_e}{3\pi^2} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^3 2\pi \varepsilon_0^2 \times \quad (3.5)$$

$$\int_{-1}^1 dt \int_0^{\xi_0(t)} d\xi \xi^2 \left(Y^2(\xi, \theta|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta|x_0) \right)^{3/2} = \frac{M_0}{\mu_e^2} \mathcal{M}(x_0|\Omega),$$

де

$$M_0 = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{m_u^2}; \quad (3.6)$$

$$\mathcal{M}(x_0|\Omega) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt \int_0^{\xi_0(t)} d\xi \xi^2 \left(Y^2(\xi, \theta|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta|x_0) \right)^{3/2}.$$

Для карлика без обертання

$$M(x_0|0) = \frac{M_0}{\mu_e} \mathcal{M}(x_0|0); \quad \mathcal{M}(x_0|0) = \int_0^{\xi_1(x_0)} d\xi \xi^2 \left(y^2(\xi|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|x_0) \right)^{3/2}. \quad (3.7)$$

Вплив обертання характеризується відношенням

$$\eta = \frac{\mathcal{M}(x_0|\Omega)}{\mathcal{M}(x_0|0)}. \quad (3.8)$$

Ще в більшій мірі обертання впливає на величину моменту інерції відносно осі обертання

$$I(x_0|\Omega) = \frac{M_0 R_0^2}{2\mu_e^4 \varepsilon_0^2} \int_{-1}^1 dt (1-t^2) \int_0^{\xi_1(x_0)} d\xi \cdot \xi^4 \left(Y^2(\xi, \theta|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta|x_0) \right)^{3/2}, \quad (3.9)$$

де

$$R_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{h^3}{c G}\right)^{1/2} \frac{1}{m_0 m_u}. \quad (3.10)$$

Для карлика без обертання

$$I(x_0|0) = \frac{2m_0 R_0^2}{3\mu_e^4 \varepsilon_0^2} \int_0^{\xi_1(x_0)} d\xi \cdot \xi^4 \left(y^2(\xi|x_0) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi|x_0) \right)^{3/2}. \quad (3.11)$$

Відношення

$$\zeta(x_0|\Omega) = \frac{I(x_0|\Omega)}{I(x_0|0)} \quad (3.12)$$

визначає вплив обертання на величину моменту інерції. Полярний і екваторіальний радіуси

$$R_p(x_0|\Omega) = R_0 \frac{\xi_p(\xi_0|\Omega)}{\mu_e \varepsilon_0}, \quad R_e(x_0|\Omega) = R_0 \frac{\xi_e(\xi_0|\Omega)}{\mu_e \varepsilon_0}. \quad (3.13)$$

При відсутності обертання є радіус сфери

$$R_p(x_0|\Omega) < R(x_0) = R_0 \frac{\xi_1(\xi_0)}{\mu_e \varepsilon_0} < R_e(x_0|\Omega). \quad (3.14)$$

В таблиці 3.1 наведено залежність сталих інтегрування для політропи з індексом $n = 2$ з роботи [39], які використовуються нами при розрахунках $Y^{II}(\xi, \theta|x_0)$. На рисунку 3.1 зображено розв'язок рівняння рівноваги при $x_0 = 7.32$ як функцію змінної ξ при $\Omega = 0$ (крива 2) та при

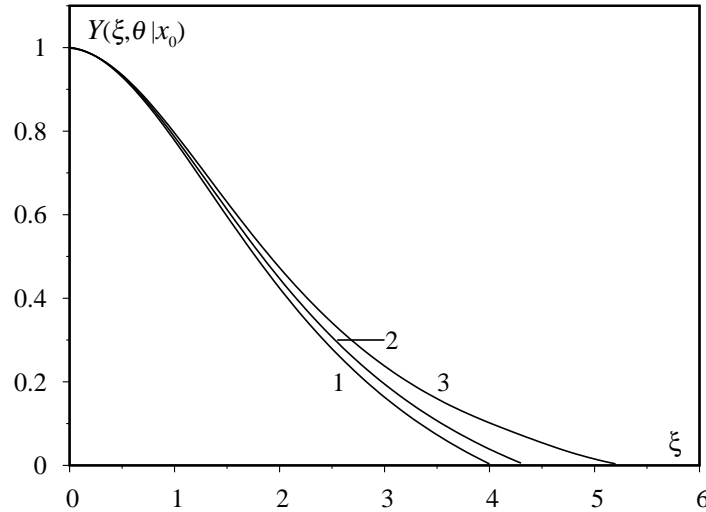


Рис. 3.1. Розв'язки рівняння механічної рівноваги $Y(\xi, \theta | x_0)$ від змінної ξ при $\Omega = \Omega_{max}$. Крива 1 відповідає $t = 1$, крива 3 - $t = 0$, крива 2 - модель карлика без обертання.

$\Omega = \Omega_{max} = 0.12$ (крива 1 відповідає $t = 1$, крива 3 - $t = 0$). В таблиці 3.2 наведено залежність сталих інтегрування у функції $Y^{II}(\xi, \theta | x_0)$ від кутової швидкості Ω . В таблиці 3.3 наведено залежність ексцентриситету, полярного і екваторіального радіусів та маси карлика від кутової швидкості Ω для значення параметра релятивізму $x_0 = 7.32$. На рисунку 3.2 наведено залежність маси карлика від параметра релятивізму x_0 . Нижня крива відповідає карлику без обертання, верхня крива - при $\Omega = \Omega_{max}$. При цьому хрестики відповідають розрахункам Р.Джеймса ($0 < x_0 \leq 6.25$); світлі кружечки відповідають результатам роботи М.Вавруха, Д.Дзіковського, С.Смерчинського; трикутник зображає значення маси, розрахованої нами при $x_0 = 7.32$ (зображено стрілкою). З рисунка видно, що одержане нами значення добре узгоджується з результатами згаданих авторів.

Таблиця 3.1

Залежність характеристик моделі політропи з індексом $n = 2$ від кутової швидкості у наближенні $a_{2l} = 0$ при $l \geq 4$.

Ω	$e(\Omega)$	$\xi_p(\Omega)$	$\xi_e(\Omega)$	$\alpha_2(\Omega)$	$\alpha_4(\Omega)$	$\alpha_6(\Omega)$	$\eta(n, \Omega)$	$\zeta(n, \Omega)$
0.01000	0.04721	4.34935	4.35421	-11.76340	0.00246147	$1.48767 \cdot 10^{-5}$	1.00171	1.00488
0.02000	0.09451	4.34402	4.36354	-11.79790	0.00989875	0.00012479	1.00277	1.00839
0.03000	0.14201	4.33505	4.37943	-11.85630	0.0224803	0.00063061	1.00456	1.01432
0.04000	0.18980	4.32233	4.40235	-11.93980	0.04049	0.00203777	1.00710	1.02282
0.05000	0.23799	4.30569	4.43305	-12.05020	0.0643543	0.00511351	1.01043	1.03407
0.06000	0.28674	4.28492	4.47267	-12.19020	0.0946777	0.01110026	1.01460	1.04837
0.07000	0.33622	4.25972	4.52288	-12.36350	0.132292	0.0213357	1.01970	1.06613
0.08000	0.38668	4.22972	4.58614	-12.57560	0.17834	0.0385013	1.02583	1.08790
0.09000	0.43851	4.19441	4.66638	-12.83470	0.234427	0.0660378	1.03312	1.11449
0.10000	0.49235	4.15304	4.77023	-13.15390	0.302915	0.109525	1.04180	1.14709
0.11000	0.54939	4.10427	4.91037	-13.55680	0.387596	0.17879	1.05218	1.18763
0.12000	0.61252	4.04496	5.11712	-14.09670	0.49591	0.295119	1.06482	1.23955
0.13000	0.69297	3.96298	5.51494	-14.97470	0.652591	0.533935	1.08102	1.31176
0.13100	0.70393	3.95164	5.58787	-15.11580	0.674935	0.575974	1.08299	1.32119
0.13200	0.71647	3.93889	5.67916	-15.28500	0.700528	0.626144	1.08508	1.33147
0.13300	0.73205	3.92384	5.80605	-15.50820	0.732067	0.689267	1.08738	1.34318
0.13400	0.76146	3.90235	6.09263	-15.97620	0.787996	0.783569	1.09038	1.36011
0.13401	0.76245	3.90193	6.10328	-15.99310	0.789697	0.785217	1.09045	1.36051
0.13402	0.76370	3.90144	6.11673	-16.01470	0.791813	0.78704	1.09052	1.36101
0.13403	0.76558	3.90081	6.13717	-16.04740	0.79495	0.789276	1.09062	1.36172

Таблиця 3.2

Залежність сталих інтегрування від кутової швидкості Ω та параметра релятивізму x_0 .

Ω	C_0	C_2	C_4	b_1	b_3	b_5
0.01	-5542.02	-0.0368105	$1.33136 \cdot 10^{-6}$	24119	-47.0217	0.0171914
0.02	-1387.92	-0.0374073	$5.35402 \cdot 10^{-6}$	6036.2	-47.1596	0.069135
0.03	-618.641	-0.0384175	$1.21591 \cdot 10^{-5}$	2687.54	-47.393	0.157007
0.04	-349.394	-0.0398618	$2.19002 \cdot 10^{-5}$	1515.5	-47.7268	0.282791
0.05	-224.771	-0.0417715	$3.48079 \cdot 10^{-5}$	973.018	-48.1681	0.449465
0.07	-116.256	-0.0471908	$7.15539 \cdot 10^{-5}$	500.651	-49.4205	0.923956
0.08	-89.7625	-0.0508595	$9.64603 \cdot 10^{-5}$	385.327	-50.2683	1.24557
0.09	-71.599	-0.0553413	0.000126797	306.261	-51.304	1.63729
0.1	-58.6068	-0.0608627	0.00016384	249.706	-52.5799	2.11563
0.11	-48.994	-0.0678318	0.000209642	207.861	-54.1904	2.70706
0.12	-41.6827	-0.0771707	0.000268227	176.035	-56.3486	3.46354

Таблиця 3.3

Залежність характеристик моделі виродженого карлика від кутової швидкості у наближенні $a_{2l} = 0$ при $l \geq 4$.

Ω	$e(\Omega)$	$\xi_p(\Omega)$	$\xi_e(\Omega)$	$\tilde{a}_2(\Omega)$	$\tilde{a}_4(\Omega)$	$\mathcal{M}(x_0 \Omega)$
0.01000	0.04945	4.35092	4.35625	-11.76340	0.00246147	1.87632
0.02000	0.09821	4.34500	4.36611	-11.79790	0.00989875	1.87832
0.03000	0.14712	4.33521	4.38290	-11.85630	0.0224803	1.88171
0.04000	0.19609	4.32165	4.40721	-11.93980	0.04049	1.88652
0.05000	0.24516	4.30446	4.43995	-12.05020	0.0643543	1.89287
0.06000	0.29444	4.28381	4.48253	-12.19020	0.0946777	1.90087
0.07000	0.34414	4.25990	4.53704	-12.36350	0.132292	1.91072
0.08000	0.39461	4.23292	4.60677	-12.57560	0.17834	1.92266
0.09000	0.44643	4.20306	4.69712	-12.83470	0.234427	1.93706
0.10000	0.50070	4.17046	4.81789	-13.15390	0.302915	1.95444
0.11000	0.55966	4.13506	4.98969	-13.55680	0.387596	1.9757
0.12000	0.62948	4.09625	5.27175	-14.09670	0.49591	2.00241

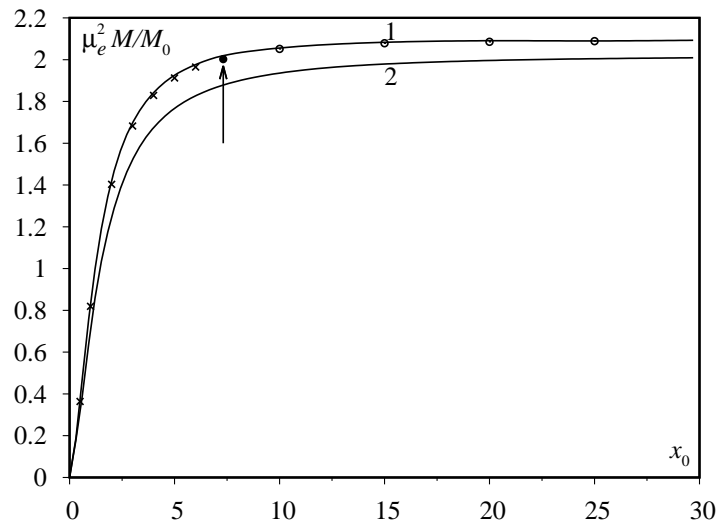


Рис. 3.2. Залежність маси карлика від параметра релятивізму. Крива 2 відповідає моделі карлика без обертання, крива 1 - при $\Omega = \Omega_{max}$. Хрестики відповідають розрахункам роботи [22], світлі кружечки і крива 1 - результати роботи [40], трикутник зображає значення маси, розрахованої в даній роботі при $x_0 = 7.32$ (зображено стрілкою).

РОЗДІЛ 4

Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях.

Охорона праці - це система правових та соціально-економічних, організаційно-технічних і лікувально-профілактичних заходів і засобів, спрямованих на збереження життя, здоров'я і працездатності людини в процесі трудової діяльності. В умовах сучасного виробництва вирішення проблеми забезпечення безпеки праці бачиться в реалізації принципу управління безпекою праці як однієї із складових поняття «якість життя людини», а також у визначенні рівня допустимого ризику як інтегрального критерію досягнутого рівня техніки, технології, організації і управління виробництвом. Дотримання правил техніки безпеки у виробничих та науково-дослідних установах має велике значення. Будь-який вид праці супроводжується нервово-психічним та мускульним навантаженням на організм людини. У зв'язку із науково-технічним прогресом зменшується роль мускульної праці, але росте розумове навантаження на людину, через що виникає проблема розумової втоми. Розумова праця поєднує роботи, пов'язані з прийомом і переробкою інформації, що вимагають переважно напруженості сенсорного апарату, уваги, пам'яті, а також активізації процесів мислення та емоційної сфери. Ступінь емоційного навантаження на організм, що вимагає переважно інтенсивної роботи мозку по одержанню і переробці інформації, визначає напруженість праці. Умови праці визначають санітарно-гігієнічну атмосферу, яка характеризується мікрокліматом, дією шкідливих і отруйних речовин, випромінюванням і т. д. Усі ці фактори разом або кожен із них зокрема

в певних умовах можуть негативно впливати на організм людини. Через це умови праці повинні задовольнятися вимогам, які б дали можливість людині виконувати роботу без шкоди для її здоров'я, без перевтоми та з високою ефективністю праці. Це є вимоги: психологічні, фізіологічні і технічні. Важливими є ще питання виробничої санітарії, загальні санітарно-гігієнічні норми і питання пожежної профілактики. А також розглянемо, як проводиться аналіз стану виробничих умов, розглядаються заходи безпеки при роботі з обладнанням.

4.1. Аналіз стану виробничих умов

Під час написання дипломної роботи на базі кафедри астрофізики я працював з комп'ютером. Під час роботи з ними, що на сьогодні складає основу практично всіх робіт, треба мати на увазі, що комп'ютери – це джерело багатьох різновидів шкідливого впливу. Особливо, треба відзначити наступні:

1. Електромагнітне випромінювання радіочастотного діапазону, яке генерується в першу чергу котушками стрічкової розгортки дисплею. Цей вид випромінювання є найбільш шкідливим для мозку, очей та шлунку. Як наслідок маємо сонливість, головні болі, розлад нервової системи. При систематичному опроміненні можуть виникати зміни у складі крові, сповільнення пульсу, нервово - психічні захворювання, трофічні явища (ламкість нігтів, випадання волосся та ін.) Вплив цього випромінювання спадає пропорційно квадрату відстані від джерела, яким є дисплей комп'ютера.
2. Рентгенівське випромінювання, що генерується в трубці дисплею внаслідок гальмування високоенергетичних електронів (15-25 кеВ). Це

випромінювання впливає на організм в цілому. На рівні користувача комп'ютера боротися з цим випромінюванням практично неможливо. Тому у цьому випадку треба вимагати, щоб робоче місце було обладнане дисплеями відповідної якості.

3. Потік заряджених частинок (пилу) та іонів обох полярностей (сильно впливає на очі). Треба також відзначити миготіння екрану та довгу монотонну сидячу роботу.

Комп'ютери знаходяться у комп'ютерній лабораторії з розмірами: ширина - 4 м, висота - 4,5 м, довжина - 9 м. Тут є 5 робочих місць, кімната має 2 вікна розмірами: ширина - 1,5 м, висота - 3 м. Освітлення – змішане. Достатньо природнього і штучного освітлення для нормальних умов праці у лабораторії.

4.2. Організаційно - технічні заходи:

Забезпечення нормальних санітарно - гігієнічних умов праці та дотримання вимог роботи з обладнанням – це важлива умова успішного виконання будь-якої роботи.

4.2.1. Мікрокліматичні умови. Мікрокліматичні умови виробничого середовища (температура, вологість, швидкість руху повітря) - це ще одна важлива характеристика гігієнічних умов праці. Температура тіла підтримується завдяки терморегуляції організму. Терморегуляція організму різко погіршується при температурі повітря вище 30 °С і вологості 85% і більше: спостерігається наростаюча слабкість, тіло перегрівається, головний біль, шум у вухах і т. д. При інтенсивній праці в таких умовах можливі тяжкі форми перегріву (судорожна хвороба, тепловий удар). Також шкідливо впливають на організм людини різні коливання

температури. При зміні мікрокліматичних факторів у певних межах людина відчувається нормально. Санітарними нормами (СН 245-63) регламентуються певні мікрокліматичні умови в робочих приміщеннях. Оптимальними умовами в холодний період є: температура повітря 14 – 21 °С, швидкість руху повітря не більше 0.2-0.3 м/сек, вологість 40-60%. У теплий період: температура 17 – 25 °С, вологість 40-60%, швидкість руху повітря не більше 0.3 м/сек. Кондиціонування повітря – це ефективний засіб для створення комфортного мікроклімату для користувачів комп'ютерами. При забезпеченні кондиціонування повітря забезпечуються постійність параметрів мікроклімату (температури, вологості, швидкості руху та чистоти повітря) незалежно від зовнішніх умов.

4.2.2. Норми освітленості. Раціональне освітлення виробничих приміщень є одним з найважливіших факторів боротьби з травматизмом і професійними захворюваннями. Правильно організоване освітлення створює сприятливі умови праці, підвищує її продуктивність. Освітлення в виробничих службових і допоміжних приміщеннях регламентується санітарними нормами СН 245-63. Освітлення на робочому місці повинно бути таким, щоб працюючий міг без напруження зору виконувати свою роботу. Недоліки бувають такі: недостатність освітленості, її надмірність і неправильний напрямок світла. Використовують два види освітлення у виробничих приміщеннях: природне (сонячне) і штучне. Також використовується освітлення лампами розжарювання і люмінесцентне освітлення. Освітлення буває робоче і аварійне, передбачене на випадок відключення робочого освітлення і повинне давати не менш 10% норми освітлення. Люксметри – прилади, з допомогою яких проводиться контроль і вимірювання освітленості. На кафедрі астрофізики в приміщенні з комп'ютерами встановлені два світильники по 5 ламп розжарювання потужністю 100 Вт, що дозволяє створити потрібну освітленість

робочих місць. Також є природне бокове освітлення.

4.2.3. Електробезпека. Дія електричного струму на організм людини. Розрізняють теплову, механічну, хімічну і біологічну дію електричного струму на організм людини. Механізм ураження електричним струмом, явища, пов'язані з ураженням, і навіть величина вражаючого струму ще не достатньо вивчені. Значну небезпеку для людини має дія сили струму, яка зводиться не тільки до перетворення електричної енергії в теплову, але і до електролізу крові. Найнебезпечнішою є дія, яка приводить до паралічу нервової системи, зміни ритму дихання, серцевої діяльності, опіків. Для людини вже є сильно небезпечним змінний електричний струм величиною у 100 мА. До розладу кровообігу та серцевої діяльності може призвести як безпосередня дія електричного струму, що проходить через серце - первинна фібриляція, так і внаслідок рефлекторного спазму артерій - вторинна фібриляція. Наслідки ураження електричним струмом залежать від ряду фізичних факторів: електричного опору тіла людини, величини і роду струму, тривалості ураження, шляхів протікання струму, частоти струму, величини напруги. Усі прилади і джерела струму мають бути надійно заземлені. При наявності заземлення через тіло людини, при дотиканні до оголеного проводу, пройде лише частина загального струму, якщо врахувати, що опір людини становить 1000 Ом, то струм 0,5 А є граничним для системи. Сила струму буде безпечною, якщо вона менша 0,01 А. Межею безпеки сили струму прийнято вважати (0,01-0,1)А. Величина струму залежить від лінійної напруги мережі і від опору тіла людини. Для напруги нормою слід вважати межу до 25 В. Вище цієї напруги до 42 В електричний струм викликає больові подразнення шкіри, опіки. Серйозну небезпеку становить напруга 42 В змінного струму і вище. Для захисту від високої напруги використовують різноманітні системи і способи: встановлення захисного заземлення;

конструктивне виконання електрообладнання, ізоляції проводів, оформлення струмопровідних частин та ін.; застосування індивідуальних захисних засобів; використання килимків, діелектричних рукавиць, ботів; систематична перевірка знань по охороні праці.

4.2.4. Заходи безпеки при роботі з обладнанням (безпека праці з комп'ютером).

1. У приміщенні, де проводяться роботи з комп'ютерами, доцільно, щоб вікна були розміщені на північ або північний схід. На вікнах треба встановити жалюзі для регулювання освітленості або штори для захисту від прямого попадання світла на екран. Стіни фарбують в малонасичені кольори, стелю - в білий. Площа одного робочого місця має бути не менше 6 м, а об'єм - не менше 20 м³. Робочі місця з комп'ютерами слід розташовувати на відстані не менше 1.5 м від вікон, на відстані не менше 1 м від інших стін, а відстань між сусідніми робочими місцями не повинна бути меншою від 1.5 м. Робочий стіл має мати висоту 720 мм з можливістю регулювання висоти в межах 680-760 мм. Оптимальні розміри столу 1600x900 мм. Робоче крісло має бути обладнане підйомно - поворотним пристроєм для регулювання висоти сидіння та спинки, а також кута їх нахилу. Кут між плечем і передпліччям повинен бути не меншим, ніж 90 градусів. Під столом повинен бути вільний простір для ніг 600x500x650 мм.
2. Освітлення в приміщенні має бути змішаним (природним і штучним). Природне освітлення має бути боковим. Світильники загального освітлення доцільно розташовувати між рядами робочих місць. Необхідно передбачити можливість місцевого освітлення. Відношення яскравості екрана комп'ютера до яскравості оточуючих поверхонь в робочій зоні не повинне бути меншим, як 3:1. При розміщенні на робочому

місці, поверхня екрану комп'ютера має бути на відстані 400-700 мм від очей.

3. Оптимальна температура повітря в приміщенні в теплий період року повинна бути в межах 23-25 градусів, в холодний період – 22-24 градусів. Відносна вологість повітря має бути в межах 40-60% протягом року. Швидкість руху повітря в приміщенні не повинна перевищувати в теплу пору року 0.2 м/с, а у холодну пору – 0.1 м/с. Оптимальний рівень іонізації в зоні дихання вважається таким, що в 1 см³ повітря вміст легких іонів обох знаків є в межах 150-500 одиниць. Загальна кількість бактерій в 1м³ не повинна перевищувати 100. Повністю виключається наявність патогенних мікроформ. Вентиляція має бути: при об'ємі 20 м³ на одного працівника - 30 м³ за год.; при об'ємі 20-40 м³ на одного працівника - 20 м³ за год; при об'ємі більше 40 м³ на одного працівника допускається природня вентиляція.
4. Рівень шумів при роботі, що не вимагає важких розумових зусиль, не повинен перевищувати 50 дБ, а при індивідуальних роботах, які потребують значних розумових зусиль, – 40-45 дБ. При 8-годинному робочому дні допускається не більше, ніж 4 години роботи за комп'ютером. При цьому щогодини треба робити перерви 5-10 хвилин.

4.2.5. Протипожежні заходи. Основні джерела пожежі в лабораторії - електроприлади та газовий пальник. Тому робота з ними вимагає надзвичайної акуратності. Ефективним засобом захисту електрообладнання від перевантаження є оснащення їх плавкими запобіжниками або автоматичними вимикачами. Для ліквідації пожеж використовують пінні вогнегасники ОП-3 та ОП-5, а також вуглекислотні ОУ-2, ОУ-5. При гасінні пожеж на електрообладнанні використовують тільки вуглекислотні вогнегасники.

ВИСНОВКИ

1. Через сильну нелінійність рівняння рівноваги для виродженого карлика його розв'язок має різний характер у внутрішній області та в периферійній. У внутрішній області, яка дає головний внесок у характеристики (повна маса, енергія і т.д.), розв'язок можна одержати з високою точністю, якщо одночасно використовувати диференціальну та інтегральну форми рівняння рівноваги.

2. У периферійній області можна одержати наближений розв'язок, враховуючи лише відцентровий потенціал і нехтуючи гравітаційним. А сталі інтегрування можна визначити з умови зшивання розв'язків на поверхні розділу внутрішньої частини зорі і периферійної.

3. Рівняння рівноваги виродженого карлика з обертанням асимптотично відповідає рівнянню рівноваги для політропи з обертанням. Це дає можливість використати рівняння з політропної теорії як нульове наближення для карликів і спростити розрахунки сталих інтегрування методом ітерацій.

4. Розрахована нами повна маса карлика при значенні параметра релятивізму $\xi_0 = 7.32$, при різних значення кутової швидкості близька до результату, одержаному в роботі М.Вавруха і Д.Дзіковського. Результати, одержані в роботах Р.Джеймса ($x_0 \leq 6.25$), наш результат і результати М.Вавруха і Д.Дзіковського ($x_0 \geq 10$) лежать на одній кривій (при тих самих значеннях Ω).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Adams W.S. The Spectrum of the Companion of Sirius / W.S.Adams // Publ. Astr. Soc. Pasif. - 1915. - V. 27. - P. 236.
- [2] Boss L. Preliminary General Catalogue of 6188 stars for the epoch 1900. – Washington, D.C.: Carnegie Institution. - 1910. - 345 p.
- [3] Bond H.E. The Sirius System and its Astrophysical Puzzles: Hubble Space Telescope and Ground-based Astrometry / H.E. Bond, G.H.Schaefer, et al // Astron. j. - 2017. - 840:70 - P.1.
- [4] Homer Lane J. On the Theoretical Temperature of the Sun under the Hypothesis of a gaseous mass Maintining Its Volume by Its Internal Heat and Depending on the Law of Gases Known to Terrestrial Experiment / J. Homer Lane // The American J. of Science and Arts. 2d ser. - 1870. - V. 50. - P. 57.
- [5] Emden K. Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie / K. Emden. Leipzig; Berlin, 1907. - 497 p.
- [6] Fowler R. H. Emden's equation: The solutions of Emden's and similar differential equations / R. H. Fowler // MNRAS. - 1930. - V. 91. - P. 63.
- [7] Ritter A. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper. Wiedemann Annalen.// Wiedemann Annalen. - 1878. - V. 5. - P. 543.
- [8] Eddington A. S. The Internal Constitution of the Stars / A. S. Eddington. - Cambridge: Cambridge University Press, 1926. - 424 p.
- [9] Fowler R. H. On dense matter / R. H. Fowler // MNRAS. - 1926. - V. 87. - P. 114.

- [10] Chandrasekhar S. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs / S. Chandrasekhar // *Astrophys. J.* - 1931. - V. 74. - P. 81.
- [11] Chandrasekhar S. Stellar configurations with degenerate cores / S. Chandrasekhar // *MNRAS.* - 1935. - V. 95. - P. 676.
- [12] Ландау Л. К теории звезд / Ландау Л. // *Phys. Ztshr. Sow.* - 1932. - V. 1. - S. 285. // *Nature*
- [13] Marshak R.E. The Internal Temperature of White Dwarf Stars / R.E.Marshak // *Astroph. Journ.* - 1940. - V. 92. - P.321.
- [14] Schatzmann E. Théorie des Supernovae / E.Schatzmann // *Annales d'Astrophysique.* - 1946. - V. 9. - P. 199.
- [15] Каплан С.А. Источники энергии и эволюция белых карликов / С.А.Каплан // *Наукові записки Львів. держ. ун-ту. Серія фізико-математична.* - 1949. - Т. 15. - Вип. 4. - С. 101.
- [16] Каплан С.А. Охлаждение белых карликов / С.А.Каплан // *Астрон. ж.* - 1950. - Т. 27. - № 1 - С. 31.
- [17] Ваврух М.В., Смеречинський С.В., Тишко Н.Л. Нові моделі в теорії структури вироджених карликів. Монографія - Львів: Растр-7, 2018. - 267 с.
- [18] Каплан С.А. Сверхплотные звезды / С.А.Каплан // *Наукові записки Львів. держ. ун-ту. Серія фізико-математична* – 1949. - Т. 15. - № 4. - С. 109.
- [19] Oppenheimer J.R. On Massive Neutron Cores /J.R. Oppenheimer, G.M.Volkoff // *Phys. Rev.* - 1939. - V. 55. - P. 371.
- [20] Salpeter E. E. Energy and pressure of a zero-temperature plasma / E. E. Salpeter // *Astrophys. J.* - 1961. - V. 134. - P. 669.
- [21] Hamada T. Models for Zero-Temperature Stars / T. Hamada, E. E. Salpeter // *Astrophys. J.* - 1961. - V. 134. - P. 683.

- [22] James R.A. The Structure and Stability of Rotating Gas Masses / R.A. James // *ApJ*. - 1964. - V. 140. - P. 552.
- [23] Зельдович Я. Б. Релятивистская астрофизика / Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. - М.: Наука, 1967. - 656 с.
- [24] Ваврух М. В. Мікроскопічні параметри та макроскопічні характеристики реальних вироджених карликів / М. В. Ваврух, Н. Л. Тишко, С. В. Смеречинський // *Журн. фіз. досл.* - 2010. - Т. 14. - № 4. - С. 4901.
- [25] Ваврух М. В. Обратная задача теории вырожденных карликов / М. В. Ваврух, Н. Л. Тышко, С. В. Смеречинский // *Астрон. ж.* - 2011. - Т. 88. - № 6. - С. 549.
- [26] Shapiro S. L. Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars / S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky // Cornell University, Ithaca, New York - 1983. - 661 p. (Переклад: Шапиро С. Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды: в 2 ч. / С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски. М.: Мир, 1985. - 656 с.).
- [27] Ваврух М. В. Модель Чандрасекхара при конечных температурах: определение параметров и расчет характеристик вырожденных карликов / М. В. Ваврух, С. В. Смеречинский // *Астрон. ж.* - 2012. - Т. 89. - № 5. - С. 407.
- [28] Sommerfeld A. Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik / A. Sommerfeld // *Zeitschrift für Physik*. - 1928. - Bd. 47. - S. 1.
- [29] Tremblay P.-E. An Improved Spectroscopic Analysis of DA White Dwarfs from the Sloan Digital Sky Survey Data Release 4 / P.-E. Tremblay, P. Bergeron, A. Gianninas // *Astrophys. J.* - 2011. - V. 730. - P. 128.

- [30] Vavrukh M.V. The influence of the axial rotation on the degenerate dwarfs characteristics / Vavrukh M.V., Smerechynskiy S.V., Dzikovskyi D.V. // *Matem. Model. and Computing.* - 2017. - V. 4, N 4. - P. 107.
- [31] Monaghan J. J. The structure of rapidly rotating white dwarfs / J.J.Monaghan // *MNRAS.* - 1966. - V. 132. - P. 305.
- [32] Vavrukh M. Role of the interparticle interactions and axial rotation in the massive white dwarfs theory / Vavrukh M., Dzikovskyi D., Smerechinskii S. // *Advances in Astronomy and Space Physics.* - 2018. - V. 8, iss. 1. - P. 9.
- [33] Vavrukh M. Consideration of the competing factors in the calculations of the characteristics of non-magnetic degenerate dwarfs / Vavrukh M., Dzikovskyi D., Smerechinskii S. // *Ukr. Journ. Phys.* - 2018. - V. 63. - N 9. - P. 777.
- [34] Fowler R. H. On dense matter / R. H. Fowler // *MNRAS.* - 1926. - V. 87. - P. 114.
- [35] Vavrukh M.V. Method of integral equations in the polytropic theory of stars with axial rotation. I. Polytropes $n = 0$ and $n = 1$. / Vavrukh M.V., Dzikovskyi D.V. // *Matem. Model. and Computing.* - 2021. - (в друці).
- [36] Abramowitz M. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I. A. Stegun // *Government Printing Office Washington.* - 1972. - P. 1046.
- [37] Vavrukh M.V. The self-consistent description of stellar equilibrium with axial rotation / M.V.Vavrukh, N.L.Tyshko, D.V. Dzikovskyi, O.M. Stelmakh // *Math. Modelling and Computing.* - 2019. - V. 6, No 2. - P. 153.

- [38] Monaghan J. J. The Structure of Rapidly Rotating Polytropes / J. J. Monaghan, I. W. Roxburgh // MNRAS. - 1965. - Vol. 131. - P. 13-22.
- [39] M. V. Vavrukh. New approach in the theory of stellar equilibrium with axial rotation / M. V. Vavrukh, N. L. Tyshko, D. V. Dzikovskyi // Journal of Physical Studies - 2020. - Т. 24. - № 3. - С. 3902.
- [40] Ваврух М. В. Вплив міжчастинкових взаємодій на характеристики масивних вироджених карликів / М. В. Ваврух, Д. В. Дзіковський, С. В. Смеречинський // Журн. фіз. досл. - 2018. - Т. 22. - № 1. - С. 1901.