Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра теоретичної фізики

УДК 530.135

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

на тему:

"Довжина у квантованому просторі"

Виконав: студент групи ФзФм-62

спеціальності 104 "Фізика та астрономія"

Слотвінський М.Т.

Керівник: доц. Гнатенко Х.П.

Рецензент: доц. Кошмак І.О.

Львів - 2021

АНОТАЦІЯ

Розглядається некомутативна алгебра канонічного типу, яка описує особливості структури простору на планківських масштабах. Алгебра є сферично-симетрична, а також дозволяє зберегти симетрію відносно інверсії часу. У квантованому просторі зі збереженими сферичною симетрією та симетрією відносно інверсії часу обчислюються власні значення оператора квадрату довжини у координатному та імпульсному просторі з точністю до другого порядку за параметрами некомутативності. Знаходиться вираз для мінімальної довжини у координатному та імпульсному просторі.

ABSTRACT

Noncommutative canonical algebra which describes the features of space structure on the Planck scale is considered. Algebra is rotationally invariant, and also allows preserve time reversal symmetry. In a quantized space with preserved rotational symmetry and time reversal symmetry the eigenvalues of the length square operator in the coordinate and momentum space are calculated up to the second order to noncommutative parameters. The expression for the minimal length in the coordinate and momentum space is found.

Зміст

Розділ 1

Вступ

Некомутативність координат часто дасліджується у наш час, але початок історії цієї ідеї почася ще у XX столітті. Першим хто представив теорію щодо некомутативності координат був Гейзенберг у 1927 році. У своєму листі до Пайрлс він припустив, що принцип невизначеності координат може вирішити проблему ультрафіолетових розбіжностей у квантовій теорії поля. Перша стаття з ідеєю некомутативності була опублікована Снайдером [1]. Багато вчених досліджували фізичні системи у некомутативному просторі [17-24]. Щоб описати квантований простір було запропоновано некомутативну алгебру Лі типу, нелінійні деформовані алгебри та некомутативну алгебру канонічного типу.

У некомутативному просторі канонічного типу оператори координат X_i та імпульсів P_i задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{1.1}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.2}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{1.3}$$

Варто зауважити, що у порівнянні зі звичайними комутаційними співвідношеннями:

$$[x_i, x_j] = 0, \tag{1.4}$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.5}$$

$$[p_i, p_j] = 0, \tag{1.6}$$

у некомутативному просторі для координат виконується рівність (1). Комутатор координат дорівнює $i\hbar\theta_{ij}$, де параметри θ_{ij} називають **параметрами некомутативності.** У некомутативному фазовому просторі виконуються такі співвідношення

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{1.7}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \gamma_{ij}), \tag{1.8}$$

$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij}, \tag{1.9}$$

тут θ_{ij}, η_{ij}, γ_{ij} – константи.

У просторі з некомутативністю координат Лі типу виконуються такі рівності

$$[X_i, X_j] = i\hbar(\theta^0_{ij}t + \theta^k_{ij}X_k), \tag{1.10}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \bar{\theta}^k_{ij}X_k + \tilde{\theta}^k_{ij}P_k), \tag{1.11}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{1.12}$$

Тут $i, j, k = (1, 2, 3)$, θ^0_{ij}, θ^k_{ij}, $\bar{\theta}^k_{ij}$, $\tilde{\theta}^k_{ij}$ – константи.

Відомими нелінійними алгебрами є нерелятивістська алгебра Снайдера

$$[X_i, X_j] = i\hbar\beta^2(P_jX_i - P_iX_j), \tag{1.13}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \beta^2 P_iP_j), \tag{1.14}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.15}$$

$i, j = (1, 2, 3)$ Алгебра Кемпфа

$$[X_i, X_j] = i\hbar\frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 + \beta P^2}(P_iX_j - P_jX_i), \tag{1.16}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij}(1 + \beta P^2) + \beta' P_iP_j), \tag{1.17}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{1.18}$$

тут β, β' – параметри деформації.

У роботі вивчається довжина у квантованому просторі, канонічного типу, який є сферично-симетричний та інваріантний відносно інверсії часу.

Актуальність проблеми: зумовлена важливістю проведених обчислень для подальших досліджень впливу квантованості простору на властивості фізичних систем, для оцінки величини кванта простору.

Об'єкт дослідження: довжина у сферично-симетричному, інваріантному відносно інверсії часу квантованому просторі канонічного типу.

Предмет дослідження: власні значення оператора квадрата довжини, мінімальна довжина у сферично-симетричному, інваріантному відносно інверсії часу квантованому просторі канонічного типу.

Мета роботи: знаходження мінімальної довжини у квантованому просторі на основі аналізу власних значень оператора квадрата довжини в рамках некомутативної алгебри канонічного типу зі збереженою сферичною симетрією та симетрією відносно інверсії часу.

Завдання: дослідити оператор квадрата довжини у сферично-симетричному, інваріантному відносно інверсії часу квантованому просторі канонічного типу, знайти власні значення оператора квадрата довжини у координатному та імпульсному просторах, отримати вираз для мінімальної довжини.

Методи дослідження: усереднення оператора квадрата довжини за додатковими ступенями вільності, представлення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів через координати та імпульси, які задовольняють звичні співвідношення.

Практичне значення роботи: Отримані результати є важливими для знаходження оцінки величини кванта простору, тому передбачається, що вони будуть використані у подальших дослідженнях.

Структура роботи. Робота сладається зі вступу, двох розділів та висновків.

У першому розділі розглядається алгебра канонічного типу з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, яка сферично-симетрична та інваріантна відносно інверії часу.

У другому розділі знаходяться власні значення оператора квадрата довжини у координатному та імпульсному просторі. Отримуються вирази для мінімальної довжини

Результати підсумовуються у висновках.

Розділ 2

Некомутативний фазовий простір зі збереженими сферичною симетрією та симетрією відносно інверсії часу

2.1 Алгебра з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів

Розглянемо ідею узагальнення параметрів некомутативності. Для цього запишемо чому дорівнюють тензори [3-8] θ_{ij} і η_{ij} :

$$\theta_{ij} = \frac{C_\theta}{\hbar} \sum_k \epsilon_{ijk} p_k^a \tag{2.1}$$

$$\eta_{ij} = \frac{C_\eta}{\hbar} \sum_k \epsilon_{ijk} p_k^b \tag{2.2}$$

Отримаємо сферично-симетричну некомутативну алгебру:

$$[X_i, X_j] = ic_\theta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^a, \tag{2.3}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar \left(\delta_{ij} + \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar^2} (\mathbf{p}^a \cdot \mathbf{p}^b) \delta_{ij} - \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar^2} p_j^a p_i^b \right), \tag{2.4}$$

$$[P_i, P_j] = ic_\eta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^b. \tag{2.5}$$

Додаткові координати та імпульси відповідають гармонічним осциляторам:

$$H_{osc}^a = \frac{(\mathbf{p}^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 \mathbf{a}^2}{2}, \tag{2.6}$$

$$H_{osc}^b = \frac{(\mathbf{p}^b)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 \mathbf{b}^2}{2}. \tag{2.7}$$

Некомутативна алгебра (6)-(8) є еквівалентною некомутативній алгебрі канонічного типу та сферично-симетрична. Після повороту ми отримуємо наступні вирази:

$$[X'_i, X'_j] = ic_\theta \sum_k \varepsilon_{ijk} p^{a\prime}_k, \tag{2.8}$$

$$[X'_i, P'_j] =$$

$$= i\hbar\left(\delta_{ij} + \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar}(\mathbf{p}^{a\prime}\cdot\mathbf{p}^{b\prime})\delta_{ij} - \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar} p^{a\prime}_j p^{b\prime}_i\right), \tag{2.9}$$

$$[P'_i, P'_j] = ic_\eta \sum_k \varepsilon_{ijk} p^{b\prime}_k. \tag{2.10}$$

тут

$$X'_i = U(\varphi) X_i U^+(\varphi), \tag{2.11}$$

$$P'_i = U(\varphi) P_i U^+(\varphi), \tag{2.12}$$

$$p^{a\prime}_i = U(\varphi) p^a_i U^+(\varphi), \tag{2.13}$$

$$p^{b\prime}_i = U(\varphi) p^b_i U^+(\varphi), \tag{2.14}$$

Оператор повороту має вигляд

$$U(\varphi) = \exp(i\varphi(\mathbf{n}\cdot\mathbf{L^t})/\hbar), \tag{2.15}$$

$\mathbf{L^t}$ –момент кількості руху у некомутативному фазовому просторі.

Для додаткових координат та додаткових імпульсів виконуються рівності

$$[a_i, a_j] = [b_i, b_j] = [a_i, b_j] = 0, \tag{2.16}$$

$$[p^a_i, p^a_j] = [p^b_i, p^b_j] = [p^a_i, p^b_j] = 0, \tag{2.17}$$

$$[a_i, p^a_j] = [b_i, p^b_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{2.18}$$

$$[a_i, p^b_j] = [b_i, p^a_j] = 0, \tag{2.19}$$

$$[a_i, X_j] = [a_i, P_j] = [p^b_i, X_j] = [p^b_i, P_j] = 0. \tag{2.20}$$

Важливо, що

$$[\theta_{ij}, X_k] = [\theta_{ij}, P_k] = [\eta_{ij}, X_k] = [\eta_{ij}, P_k] = 0, \tag{2.21}$$

$$[\gamma_{ij}, X_k] = [\gamma_{ij}, P_k] = 0. \tag{2.22}$$

Тому алгебра еквівалентна алгебрі канонічного типу.

При перетворенні інверсії часу напрямок плину часу змінюється як $t \to -t$. Координати та імпульси змінюються як

$$X_i \to X_i, \quad P_i \to -P_i, \tag{2.23}$$

$$p_i^a \to -p_i^a, \quad p_i^b \to -p_i^b, \tag{2.24}$$

При такому перетворенні знайдемо, що

$$[X_i, X_j] = -ic_\theta \sum_k \varepsilon_{ijk}(-p_k^a), \tag{2.25}$$

$$[-P_i, -P_j] = -ic_\eta \sum_k \varepsilon_{ijk}(-p_k^b), \tag{2.26}$$

$$[X_i, -P_j] = -i\hbar\left(\delta_{ij} + \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar^2}((-\mathbf{p}^a)\cdot(-\mathbf{p}^b))\delta_{ij} - \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar^2}(-p_j^a)(-p_i^b)\right), \tag{2.27}$$

що узгоджується зі співвідношеннями некомутативної алгебри.

Розділ 3

Мінімальна довжина у некомутативному фазовому просторі

3.1 Оператор квадрата довжини у координатному просторі

Оператор квадрата довжини має вигляд:

$$\mathbf{R}^2 = \sum_i X_i^2, \tag{3.1}$$

Ми вводили додаткові координати та імпульси, тому в сферично-симетричному некомутативному просторі для знаходження власних значень $\mathbf{R}^2$ ми повинні розглянути такий оператор [9-16]:

$$\tilde{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{R}^2 + H^a_{osc} + H^b_{osc} \tag{3.2}$$

Перепишемо його в іншому вигляді

$$\tilde{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{R}_0^2 + \Delta R^2 \tag{3.3}$$

Де $\mathbf{R}_0^2$ рівний:

$$\mathbf{R}_0^2 =< \mathbf{R}^2 >_{ab} + H^a_{osc} + H^b_{osc} \tag{3.4}$$

Тут $< ... >_{ab}$ позначає усереднення на хвильовими функціями гармонічних осциляторів у основних станах. Розрахуємо $< \mathbf{R}^2 >_{ab}$. Для цього ми скористаємось представленням некомутативних координат та некомутативних імпульсів через координати та імпульси x_i, p_i, які задовольняють звичайні комутаційні співвідношення [11]:

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \tag{3.5}$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{3.6}$$

Представлення відбувається наступним чином :

$$X_i = x_i - \sum_j \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j = x_i + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]_i, \tag{3.7}$$

де $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$,

$$\theta_{ij} = \frac{c_\theta}{\hbar}\sum_k \epsilon_{ijk}p_k^a, \theta_i = \sum_{jk}\frac{\varepsilon_{ijk}\theta_{jk}}{2} = \frac{c_\theta p_i^a}{\hbar} \tag{3.8}$$

Отже, використовуючи (18), ми можемо писати наступний вираз:

$$\mathbf{R}^2 = r^2 + \frac{(\theta[\mathbf{x} \times \mathbf{p}])}{2} + \frac{[\theta \times p]^2}{4} \tag{3.9}$$

3.2 Власні значення оператора квадрата довжини у координатному просторі. Мінімальна довжина

Для знаходження власних значень оператора квадрата довжини у координатному просторі обчислимо [2]:

$$< \mathbf{R}^2 >_{ab} = < \psi^a_{0,0,0} \mid \mathbf{R}^2 \mid \psi^a_{0,0,0} > \tag{3.10}$$

тут

$$\mid \psi^a_{0,0,0} > = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} l_P^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{2l_P^2}}. \tag{3.11}$$

Для цього обчислимо таке середнє

$$\langle \theta^2 \rangle = \sum_i \langle \theta_i^2 \rangle = \sum_i \frac{c_\theta^2}{\hbar^2}\langle \psi^a_{0,0,0}|(p_i^a)^2|\psi^a_{0,0,0}\rangle = \frac{3c_\theta^2}{2l_P^2}, \tag{3.12}$$

Також маємо

$$\langle \theta_i \rangle = 0, \tag{3.13}$$

$$< \psi^b_{0,0,0} \mid \tilde{p}_i^b \tilde{p}_j^b \mid \psi^b_{0,0,0} > = \frac{c_\theta^2}{2l_P^2}\delta_{ij}. \tag{3.14}$$

Після того як ми усереднили, лінійний доданок за параметром некомутативності зникає, і ми отримуємо:

$$< \mathbf{R}^2 > = r^2 + \frac{< \theta^2 > p^2}{6} \tag{3.15}$$

Знайдемо ΔR^2

$$\Delta R^2 = r^2 + \frac{(\theta[\mathbf{x}\times\mathbf{p}])}{2} + \frac{[\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{p}]^2}{4} - r^2 - \frac{<\theta^2>p^2}{6} =$$

$$\frac{(\theta[\mathbf{x}\times\mathbf{p}])}{2} + \frac{[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2}{4} - \frac{<\theta^2>p^2}{6} \tag{3.16}$$

З точністю до другого порядку за ΔR^2 поправки до власних значень оператора R^2 дорівнюють нулю. Отже, з точністю до другого порядку за параметрами некомутативності, власні значення оператора квадрату довжини є власними значеннями $<\mathbf{R}^2>$. Координати та імпульси x_i, p_j у $<\mathbf{R}^2>$ задовольняють звичайні комутаційні співвідношення. Отже, власні значення мають вигляд:

$$R^2_{n_1,n_2,n_3} = \sqrt{\frac{2\hbar^2<\theta^2>}{3}}(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}) \tag{3.17}$$

з квантовими числами: $n_1 = 0,1,2,...,n_2 = 0,1,2,...,n_3 = 0,1,2,...,$
Квадрат мінімальної довжини визначається як

$$R^2_{0,0,0} = \sqrt{\frac{3\hbar^2<\theta^2>}{2}} \tag{3.18}$$

Мінімальна довжина у координатному просторі виражається через параметр координатної некомутативності

$$R_{min} = \sqrt[4]{\frac{3\hbar^2<\theta^2>}{2}} \tag{3.19}$$

3.3 Оператор квадрата довжини у імпульсному просторі

Розглянемо оператор квадрата довжини у імпульсному просторі

$$P^2 = \sum_i P_i^2 \tag{3.20}$$

Ми вводили додаткові координати та імпульси, тому розгляньмо також доданок, який відповідає гармонічному осцилятору

$$\tilde{P}^2 = P^2 + H^b_{osc} \tag{3.21}$$

Перепишемо $\tilde{P}^2$ у вигляді:

$$\tilde{P}^2 = P_0^2 + \Delta P^2 \tag{3.22}$$

Де P_0^2 визначається як

$$P_0^2 =< P^2 >_b + H_{osc}^b, \tag{3.23}$$

$$< P^2 >_b =< \psi_{0,0,0}^b \mid P^2 \mid \psi_{0,0,0}^b >, \tag{3.24}$$

$$\mid \psi_{0,0,0}^b >= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} l_P^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{b^2}{2l_P^2}}. \tag{3.25}$$

Використаємо представлення:

$$P_i = p_i + \sum_j \frac{1}{2}\eta_{ij} x_j = p_i + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}]i \tag{3.26}$$

де $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$\eta_{ij} = \frac{C_\eta}{\hbar} \sum_k \epsilon_{ijk} p_k^b, \tag{3.27}$$

$$\eta_i = \sum_{jk} \frac{\varepsilon_{ijk}\eta_{jk}}{2} = \frac{c_\eta p_i^b}{\hbar}. \tag{3.28}$$

Отже, можемо писати такий вираз:

$$P^2 = p^2 - (\boldsymbol{\eta}[\mathbf{x} \times \mathbf{p}]) + \frac{[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}]^2}{4} \tag{3.29}$$

.

3.4 Мінімальна довжина у імпульсному просторі

Знайдемо власні значення оператора квадрату довжини у імпульсному просторі. Для цього обчислимо [25-30]:

$$< P^2 >=< \psi_{0,0,0}^b \mid P^2 \mid \psi_{0,0,0}^b >=$$

$$=< \psi_{0,0,0}^b \mid p^2 - (\boldsymbol{\eta}[\mathbf{x} \times \mathbf{p}]) + \frac{[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}]^2}{4} \mid \psi_{0,0,0}^b > \tag{3.30}$$

Розрахуємо:

$$\langle \eta_i \rangle = 0, \tag{3.31}$$

$$< \psi_{0,0,0}^b \mid \tilde{p}_i^b \tilde{p}_j^b \mid \psi_{0,0,0}^b >= \frac{c_\theta^2}{2l_P^2}\delta_{ij}, \tag{3.32}$$

$$\langle \eta^2 \rangle = \sum_i \langle \eta_i^2 \rangle = \sum_i \frac{c_\eta^2}{\hbar^2} \langle \psi_{0,0,0}^b | (p_i^b)^2 | \psi_{0,0,0}^b \rangle = \frac{3c_\eta^2}{2l_P^2}, \tag{3.33}$$

Після усереднення знайдемо:

$$< P^2 >= p^2 + \frac{< \eta^2 > x^2}{6} \tag{3.34}$$

Також можемо записати:

$$\Delta P^2 = p^2 - (\boldsymbol{\eta} \times [\mathbf{x} \times \mathbf{p}]) + \frac{[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}]^2}{4} - p^2 - \frac{< \eta^2 > x^2}{6} =$$

$$= -(\boldsymbol{\eta} \times [\mathbf{x} \times \mathbf{p}]) + \frac{[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}]^2}{4} - \frac{< \eta^2 > x^2}{6} \tag{3.35}$$

З точністю до другого порядку за параметрами некомутативності власні значення оператора квадрату довжини у імпульсному просторі мають вигляд:

$$P^2_{n_1,n_2,n_3} = \sqrt{\frac{2\hbar^2 < \eta^2 >}{3}}(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}) \tag{3.36}$$

$n_1 = 0, 1, 2, ..., n_2 = 0, 1, 2, ..., n_3 = 0, 1, 2, ...,$– квантові числа. Квадрат мінімальної довжини у імпульсному просторі

$$P^2_{0,0,0} = \sqrt{\frac{3\hbar^2 < \eta^2 >}{2}} \tag{3.37}$$

Мінімальна довжина у імпульсному просторі виражається через параметр імпульсної некомутативності

$$P_{min} = \sqrt[4]{\frac{3\hbar^2 < \eta^2 >}{2}} \tag{3.38}$$

Розділ 4

Висновок

Розглянуто квантований простір, описаний за допомогою алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, яка є сферично-симетрична та не зумовлює порушення симетрії відносно інверсії часу.

У сферично-симетричному некомутативному просторі розглянуто оператори квадрата довжини у координатному та імпульсному просторі. Знайдено власні значення цих операторів з точністю до другого порядку за параметрами некомутативності. Отримано вирази для мінімальної довжини у координатному та імпульсному просторах. Встановлено, що мінімальна довжина у координатному просторі визначається параметром координатної некомутативності. Мінімальна довжина у імпульсному просторі представляється через параметр імпульсної некомутативності.

Бібліографія

[1] Snyder, H.S. Quantized space-time / H.S.Snyder // Phys.Rev.1947.Vol.71,no.1.Pp.38-41.

[2] Гнатенко Х.П. Фізичні проблеми у некомутативному просторі. Львів: ЛНУ імені Івана Франка.

[3] І.О. Вакарчук. Квантова механіка (видання четверте, доповнене). Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2012. 812 стор.

[4] Gamboa J. Noncommutative quantum mechanics / J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas // Phys. Rev. D. 2001. Vol. 64, No.6 Art. 067901.3p.

[5] Гнатенко Х.П. Оцінка верхньої межі для параметра некомутативності на основі принципу еквівалентності / Х.П. Гнатенко // Журн. фіз. дослідж. 2013. Т. 17. Ст. 4001. 5 с.

[6] Steinack.erlecture-fuzzy-space. // Phys. Rev. 1947.

[7] Gnatenko Kh. P. Physical system in a space with noncommutativity of coordinates / Kh. P. Gnatenko // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. Vol. 670. Art. 012023. 9 p.

[8] Romero J. M. Note about the quantum of area in a noncommutative space / J. M. Romero, J. A. Santiago, J. D. Vergara // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 68. Art. 067503. 2 p.

[9] Гнатенко Х.П. Енергетичні рівні атома водню у сферично-симетричному просторі з некомутативністю координат / Х. П. Гнатенко // Різдвяні дискусії 2015. Львів, 12-13 січня, 2015. Журн. фіз. дослідж. 2015. Т. 19, №1/2. С. 1998-8.

[10] Djemai. A. E. F. Noncommutative classical mechanics / A. E. F. Djemai // Int. J. Theor. Phys. 2004. Vol. 43, No. 2. P.299-314.

[11] Gnatenko. Kh P. Noncommutative of coordinates and the equivalenve principle / Kh. P. Gnatenko // V Young Scientists Conference "Problem of Theoretical Physics". Kyiv, Ukraine, December 24-27, 2013: Program and Proceeding. P.28.

[12] Muthukumar B. Noncommutative oscillators and the noncommutative limit / B. Muthukumar, P. Mitra // Phys. Rev. D. 2002. Vol. 66. Art. 027701. 3 p.

[13] Jackiv R. Observations on noncommuting coordinates and on fields depending on them / R. Jackiv // Ann. Henri Poincarre. 2003. Vol. 4, No. 2. P. 913-919.

[14] Villalpando C., Modak S.K. Minimal length effect on the broadening of free wave packets and its physical implication // Phys. Rev. D. 2019. Vol. 100, no. 2. Art. 024054. 17p.

[15] Stetsko M. M., Orbital magnetic moment of the electron in the hydrogen atom in a deformed space with minimal lenght / M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk // Phys. 2008. Vol. 372. pp. 5126-5130

[16] Doplicher S. Spacetime quantization induced by classical gravity / S. Doplickher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts // Phys. Lett. B. 1994. Vol. 331, No. 1. P. 39-44.

[17] Nair. V. P. Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere / V. P. Nair, A. P. Polychronakos // Phys. Lett. B. 2001. Vol. 505, No. 1-4. P. 267-274.

[18] Bolonek K. On uncertainty relations in noncommutative quantum mechanics / K. Bolonek, P. Kosinski // Phys. Lett. B. 2002. Vol. 547. No. 1-2. P. 51-54.

[19] Hatzinikitas A. The noncommutative harmonic oscilator in more than one dimension / A. Hatzinikitas, I. Smyrnakis // J. Math. Phys. 2002. Vol. 43, No.1. P.113-125.

[20] Gnatenko K. P. Classical and quantum mechanics in a space with cannonical deformed Heisenberg algebra / K. P. Gnatenko // International Conference "Quantum Groups and Quantum Integrable System". Kiev, Ukraine, June 18 - 21, 2013: Program and Abstracts. P. 22.

[21] Galikova V. Coulomb problem in non-commutative quantum mechanics / V. Galikova, P. Presnajder // J. Math. Phys. 2013. Vol. 54. Art. 052102. 20 p.

[22] Kovacik S. The velocity operator in quantum mechanics in noncommutative space / S. Kovacik, P. Presnajder // J. Math. Phys. 2013. Vol. 54. Art. 102103. 12 p.

[23] R. Amorim. Tensor coordinates in noncommutative mechanics / Amorim R. // J. Math. Phys. 2009. Vol. 50. Art. 052103. 7 p.

[24.]Mirza B. Noncommutative geometry and classical orbits of particles in a central force potential / B. Mirza, M. Dehghani // Commun. Theor. Phys. 2004. Vol. 42, No. 2. P. 183-184.

[25] Tkachuk V. M. Deformed Heisenberg algebra with minimal lenght and the equivalence principle / V. M. Tkachuk // Phys. Rev. A. 2012. Vol. 86, No. 6. Art. 062112. 4 p.

[26] Brau F. Minimal lenght uncertainly relation and the hydrogen atom / F. Brau

// J. Phys. A: Math. Gen. 1999. Vol. 32, No. 44, P. 7691-7696.
[27] Polchinski J.M theory: Uncertainly and unification / J Polchinski // Fundamental Physics Heisenberg and Beyond. 2003. P. 157-166.
[28] Гнатенко Х. Макроскопічне тіло в некомутативному просторі / Х. Гнатенко, Ю. Криницький, Ткачук В. // Різдвяні дискусії 2014. Львів, 9-10 січня, 2014. Журн. фіз. дослідж. 2014. Т. 18, №1. С. 1998-5.
[29] Chargui Y. On the Duffin-Kemmer-Petiau equation with linear potential in the presistence of a minimal length // Phys. Lett. A. 2018. Vol. 382, no. 14. P. 949-953.
[30] Quantum theories on noncommutative spaces with nontrivial topology: Ahronov-Bohm and Casimir effects / M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder [et al.] // Nuc. Phys. B. 2001. Vol. 611, No. 1-3. P. 383-402.