

Львівський національний університет імені Івана Франка
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука

УДК 530.145

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

на тему:

“Дослідження графових станів на квантовому комп’ютері”

Виконала студентка групи ФзФм-61
спеціальності 104 “Фізика та астрономія”
Сусуловська Н. А.

Керівник доц. Гнатенко Х. П.

Рецензент с. н. с. Верхоляк Т. М.

м. Львів – 2021 р.

Анотація

Досліджуються графові стани системи багатьох кубітів, утворені дією операторів контрольованого зсуву фази на факторизований квантовий стан системи, у якому всі кубіти перебувають у довільних однакових станах. Отримано аналітичний вираз для геометричної міри заплутаності кубіта з іншими кубітами у графовому стані. Запропоновано протоколи для реалізації двох часткових випадків графових станів, що дозволяють провести кількісну оцінку геометричної міри заплутаності кубітів у цих станах на квантовому комп'ютері компанії IBM *ibmq_athens*. Результати квантових обчислень добре узгоджуються з теоретичними результатами. Ми показали, що геометрична міра заплутаності кубіта з іншими кубітами у графовому стані залежить від ступеня вузла, що відповідає цьому кубіту в графі.

Ключові слова: графовий стан, геометрична міра заплутаності, квантовий комп'ютер.

Abstract

Graph states of a multiqubit system generated by the action of controlled phase shift operators on a separable quantum state of the system, in which all the qubits are in arbitrary identical states, are considered. An analytical expression for the geometric measure of entanglement of a qubit with other qubits in the graph state is obtained. Quantum protocols for preparation of two special cases of graph states are proposed, which allows us to quantify the geometric measure of entanglement of qubits in these states on IBM's quantum computer *ibmq_athens*. The results of quantum computations are in a good agreement with our theoretical predictions. We have demonstrated that the geometric measure of entanglement of a qubit with other qubits in the graph state depends on the degree of the vertex representing the qubit in the corresponding graph.

Key words: graph state, geometric measure of entanglement, quantum computer.

Зміст

Вступ	4
Розділ 1	
Огляд літератури	8
1.1 Графові стани	8
1.2 Геометрична міра заплутаності	11
Розділ 2	
Аналітичний розрахунок геометричної міри заплутаності графових станів	13
Розділ 3	
Кількісна оцінка геометричної міри заплутаності графових станів на квантовому комп'ютері IBM	19
3.1 Реалізація графових станів на квантовому комп'ютері	19
3.2 Протокол вимірювання середнього значення спіна на квантовому комп'ютері	20
3.3 Результати вимірювань	21
Висновки	34
Список використаних джерел	35

Вступ

Актуальність теми. Явище квантової заплутаності можна вважати однією з найбільш характерних рис квантової механіки, яка зумовлює відхилення від класичного наукового світогляду [1], [2]. Властивість складної квантової системи проявляти кореляції, що мають чисто квантову природу, передбачає існування стану, який неможливо факторизувати [3]. Впродовж десятиліть заплутаність становить особливий інтерес як одна з фундаментальних проблем квантової механіки. Більше того, в світлі численних досліджень це явище можна розглядати як потенційно корисний ресурс. Зокрема, поняття заплутаних станів має практичне значення в галузях квантових обчислень та квантових комунікацій. На ньому ґрунтуються передбачені можливості квантових комп'ютерів [4], схема квантової телепортації [5], а також квантові криптографічні схеми, застосовні в системах секретної передачі даних [6]. Отже, як з теоретичної, так і з практичної точок зору, основне завдання теорії квантової інформації полягає у встановленні факту заплутаності станів квантових систем, її кількісній характеристиці, а також пошуку шляхів реалізації квантових станів з великою мірою заплутаності.

Найбільш ґрунтовно заплутаність досліджена в системах двох частинок [7]-[10]. Сьогодні виникає необхідність поглиблювати уявлення про багаточастинкову заплутаність, яка є невід'ємним компонентом для реалізації нових квантових алгоритмів та створення приладів для квантового числення. Квантове числення почало активно розвиватися зі створенням алгоритму Шора [11]. Протягом останніх десятиліть було досягнуто суттєвого прогресу у методах фізичної реалізації квантових комп'ютерів. На сьогодні створено надпровідні квантові комп'ютери та квантові комп'ютери на захоплених іонах, утворені більш ніж 20 кубітами, а точність однокубітних та двокубітних операцій перевищує 99%, досягаючи порогу fault-tolerant quantum computing (квантових обчислень з допустимими помилками) [12]. Передбачається, що кількість кубітів у квантових процесорах суттєво зросте в наступні кілька років. Отже, актуальними залишаються дослідження квантової заплутаності та її властивостей в системах багатьох кубітів. У роботах [13], [14] було показано, що 16-кубітний та 20-кубітний квантові комп'ютери компанії ІВМ можуть бути повністю заплутаними. Під час відповідних досліджень було

реалізовано графові стани структури кільця та проведено квантову томографію для кожної пари кубітів, з'єднаної ребром відповідного графа. Використовуючи критерій Переса-Городецького (РТТ критерій) [8], [9], вчені дійшли до висновку, що стан складної системи неможливо факторизувати відносно жодної фіксованої пари кубітів.

У роботі [15] Р. Фейнман передбачив ефективність квантового комп'ютера як засобу для моделювання квантових систем багатьох тіл, що пізніше була підтверджена у працях [16], [17]. Завдяки цій особливості методи квантових обчислень знаходять широке застосування у різноманітних галузях фізичної науки, серед яких атомна фізика, фізика конденсованого стану та фізика високих енергій.

Проблема теоретичного опису заплутаності в системах багатьох частинок ускладнюється стрімким зростанням розмірності простору станів зі збільшенням кількості частинок. Значна увага приділяється пошуку станів, які б характеризувалися високою мірою та стійкістю заплутаності і водночас задавалися вузьким набором параметрів [18]. Такі вимоги задовольняють графові стани, що є узагальненням кластерних станів [19], і описуються за допомогою математичних графів. Ці стани широко використовуються в однобічних квантових обчисленнях [20] та квантових алгоритмах корекції помилок [21], що запобігають спотворенню інформації в квантових схемах під впливом декогеренції та інших квантових шумів. Актуальними є дослідження нових підкласів графових станів, на основі яких можна побудувати різноманітні квантові алгоритми.

Об'єктом досліджень є графові стани системи багатьох кубітів, утворені дією операторів контрольованого зсуву фази на факторизований стан, в якому всі кубіти перебувають у довільних однакових станах.

Предметом досліджень є геометрична міра заплутаності графових станів.

Мета роботи і завдання. Метою магістерської роботи є здійснення кількісної оцінки геометричної міри заплутаності кубіта з іншими кубітами багаточастинкової системи у графовому стані, а також дослідження її залежності від параметрів графового стану та від закономірностей взаємодії кубіта з рештою системи, що визначаються структурою відповідного графа.

Для досягнення мети дослідження було поставлено такі завдання: розширити клас добре досліджених графових станів шляхом узагальнення початкового стану багаточастинкової системи; отримати аналітичний вираз

для геометричної міри заплутаності кубіта з іншими кубітами багаточастинкової системи в графовому стані, що досліджується, проаналізувати її залежність від параметрів, якими визначається графовий стан; встановити зв'язок геометричної міри заплутаності зі ступенем вузла, що позначає кубіт у відповідному графі; скласти квантовий протокол для реалізації двох часткових випадків графових станів на квантовому комп'ютері з урахуванням його архітектури та калібрувальних параметрів; провести вимірювання геометричної міри заплутаності для кубітів, яким відповідають вузли різних ступенів, на квантовому комп'ютері; побудувати відповідні експериментальні залежності та порівняти результати квантових та аналітичних обчислень.

Методи досліджень: квантовомеханічні методи, методи квантового програмування.

Структура роботи

У **Розділі 1** представлено короткий огляд літератури. Зокрема, подається означення графових станів, проводиться аналіз їхніх властивостей та розглядаються найбільш поширені класи графових станів. Окрім цього, вводиться поняття геометричної міри заплутаності в системах багатьох кубітів та обґрунтовується доцільність використання цієї величини для кількісної характеристики заплутаності графових станів, приготованих на квантовому комп'ютері.

У **Розділі 2** подано послідовне виведення аналітичного виразу для геометричної міри заплутаності кубіта з іншими кубітами багаточастинкової квантової системи в графовому стані, а також встановлено її зв'язок з параметрами, що визначають графовий стан, та його структурою.

Розділ 3 присвячено побудові квантових протоколів для реалізації двох часткових випадків графових станів та розрахунку для них геометричної міри заплутаності кубіта з іншими кубітами на квантовому комп'ютері IBM з обговоренням отриманих результатів.

У **Розділі 2** та **Розділі 3** представлено оригінальні результати досліджень. Магістерська робота завершується **Висновками** та **Списком використаних джерел**.

Наукова новизна отриманих результатів. У роботі вперше досліджено геометричну міру заплутаності графових станів, утворених дією операторів контрольованого зсуву фази на факторизований квантовий стан, у якому всі квантові біти перебувають у довільних однакових станах, і

проведено її кількісну оцінку на квантовому комп'ютері IBM.

Практичне значення отриманих результатів. Вивчення графових станів відіграє ключову роль в оптимізації квантових обчислень. Результати, отримані в рамках виконання роботи, є важливими для подальшого дослідження запутаності в графових станах.

Розділ 1

Огляд літератури

1.1 Графові стани

Заплутані квантові стани неможливо утворити за допомогою локального фізичного апарату, тому особлива увага приділяється процедурі їхнього приготування. У задачах квантових обчислень важливим є пошук таких класів квантових станів багаточастинкових систем, які б характеризувалися великою мірою заплутаності й водночас були зручними для вирішення конкретних прикладних задач. Проблему у дослідженні багаточастинкової заплутаності спричиняє експоненційне зростання розмірності простору станів складної квантової системи зі збільшенням кількості її компонент [18]. У 2000-х роках починають активно розглядати можливості реалізації квантових станів, які б характеризувалися невеликим набором параметрів, зберігаючи необхідні властивості.

У роботі [22] було показано, що для системи трьох кубітів існує два нееквівалентні типи заплутаності, яким відповідають $|GHZ\rangle_3$ та $|W\rangle_3$ стани. В узагальненні на систему N -кубітів ці стани мають вигляд

$$|GHZ\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 \dots |0\rangle_N + |1\rangle_1 \dots |1\rangle_N) \quad (1.1)$$

$$|W\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{N}}(|1\rangle_1 |0\rangle_2 \dots |0\rangle_N + |0\rangle_1 |1\rangle_2 \dots |0\rangle_N + \dots + |0\rangle_1 |0\rangle_2 \dots |1\rangle_N). \quad (1.2)$$

Нееквівалентність заплутаних станів (1.1) та (1.2) при $N = 3$, означає що зі стану (1.1) неможливо отримати стан (1.2), і навпаки, лише за допомогою локальних операцій та класичного каналу комунікацій (ЛОСС). Хоча стан (1.1) можна вважати максимально заплутаним, з втратою одного кубіта результуючий двочастинковий стан виявляється факторизованим. Тобто заплутаність стану $|GHZ\rangle_3$ є нестійкою відносно втрати системою частинок. Натомість, якщо зі системи, що перебуває у стані $|W\rangle_3$ вилучити одну частинку, результуючий двочастинковий стан залишиться максимально заплутаним.

Невдовзі у роботі [19] вперше розглядаються кластерні стани системи N -кубітів із взаємодією Ізінга, що відрізняються від класів станів (1.1), (1.2). Показано, що кластерним станам відповідає вища міра заплутаності ніж

більшості раніше відомих багаточастинкових станів. Вводиться поняття стійкості заплутаності P_e стану системи N -кубітів, що визначається мінімальною кількістю локальних вимірювань, які потрібно здійснити, щоб повністю розплутати даний стан. Було показано, що для кластерного стану N -кубітів $P_e = N/2$, і він є значно стійкішим щодо локальних операцій ніж стан $|GHZ\rangle_N$. Така властивість кластерних станів виступає важливою перевагою в задачах квантового числення [13].

Узагальненням кластерних станів є графові стани – багаточастинкові заплутані стани, які можна описати за допомогою математичних графів [23]. Дамо основні визначення з теорії графів, які використовуються в нашій роботі [24].

Ненапрямленим скінченним графом формально називають пару

$$G(V, E), \quad (1.3)$$

де $V = \{i = 1, 2, \dots, N\}$ – скінченна множина, $E \subset [V]^2$ (кожен елемент E є підмножиною V і містить два елементи).

Елементи множини V називають *вузлами (вершинами)*, а елементи множини E – *ребрами (дугами)*. Якщо вузли i, j з'єднані ребром, їх називають *суміжними*, а відповідне ребро – *інцидентним* вузлам i, j . *Ступенем вузла i* називають кількість суміжних йому вузлів (або інцидентних йому ребер), і позначають n_i або $\deg(V_i)$. Якщо $n_i = 0$, вузол називають *ізолюваним*. Далі мова буде йти лише про *прості графи*, у яких відсутні петлі та кратні ребра.

$|V|$ -частинковий стан, якому у відповідність можна поставити ненапрямлений граф $G(V, E)$ називають графовим станом. Для прикладу, вузли графа можуть позначати спіни, а ребра – взаємодію між ними. Отже, графовий стан можна розглядати як результат взаємодії спінів, приготованих у певному початковому стані. Для кожного ребра $(i, j) \in E$ кубіти, що відповідають суміжним вузлам i, j , взаємодіють через унітарний двокубітний оператор

$$U_{ij} = e^{i\phi_{ij}H_{ij}}. \quad (1.4)$$

Тут H_{ij} – гамільтоніан взаємодії, ϕ_{ij} – ваговий коефіцієнт.

Для того, щоб результат такої взаємодії можна було повністю описати графом, оператор U_{ij} повинен задовольняти наступні умови.

1. Оскільки граф не задає впорядкування ребер

$$[U_{ij}, U_{jk}] = 0. \quad (1.5)$$

2. Оскільки ми маємо справу з ненапрямленим графом, оператор повинен бути симетричним

$$U_{ij} = U_{ji}. \quad (1.6)$$

Найчастіше розглядають випадок, коли $\phi_{ij} = \phi, \forall (i, j) \in E$, тобто взаємодія кожної пари кубітів, яким відповідають суміжні вузли, описується однаковим унітарним оператором. Графовий стан системи N -кубітів має структуру [18], [23]

$$|\psi_G\rangle = \prod_{(i,j) \in E} U_{ij} |+\rangle^{\otimes N}. \quad (1.7)$$

Тут

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (1.8)$$

власний стан оператора Паулі σ_x , що відповідає власному значенню 1;

$$|+\rangle^{\otimes N} = |+\rangle_1 |+\rangle_2 \dots |+\rangle_N. \quad (1.9)$$

Процедура побудови графового стану (1.7) виконується у два етапи: спочатку слід підготувати кожен кубіт системи в стані $|+\rangle$, після чого до кожної пари кубітів i, j , що відповідають суміжним вузлам графа, застосувати оператор U_{ij} , причому порядок дії операторів може бути довільним.

У ролі оператора U_{ij} , що утворює лінки графа, найчастіше використовують контрольований Z оператор CZ_{ij} . В представленні Дірака цей двокубітний оператор має вигляд

$$CZ_{ij} = |0\rangle_i \langle 0| \hat{I}_j + |1\rangle_i \langle 1| \hat{\sigma}_z^j, \quad (1.10)$$

де $\hat{\sigma}_z^j$ – оператор Паулі, що діє на просторі станів кубіта j ; $|0\rangle_i \langle 0| = |0\rangle_i \langle 0|$, $|1\rangle_i \langle 1| = |1\rangle_i \langle 1|$.

Як узагальнення контрольований Z оператор заміняють оператором контрольованого зсуву фази $CP_{ij}(\phi)$ ($CZ_{ij} = CP_{ij}(\pi)$)

$$CP_{ij}(\phi) = |0\rangle_i \langle 0| \hat{I}_j + |1\rangle_i \langle 1| \hat{\Phi}_j(\phi), \quad (1.11)$$

де $\hat{\Phi}_j(\phi)$ – однокубітний оператор зсуву фази, що діє на просторі станів кубіта j .

Очевидно, що оператори (1.10), (1.11) задовольняють умови (1.5), (1.6).

Графовий стан можна означити в еквівалентному формалізмі [13]. Графовий стан, що відповідає ненапрямленому графу $G(V, E)$, є єдиним спільним власним станом, що відповідає власному значенню 1, множини незалежних комутуючих операторів

$$K_i = \sigma_x^i \sigma_z^{N_i} = \sigma_x^i \prod_{j \in N_i} \sigma_z^j, \quad (1.12)$$

де власні значення операторів K_i рівні +1 для всіх $i \in V$; N_i позначає множину всіх вузлів суміжних до вузла i в графі $G(V, E)$.

1.2 Геометрична міра заплутаності

Геометрична міра заплутаності була запропонована А. Шімоні (А. Shimony) [25] і визначається як мінімум квадрата відстані Фубіні-Студі між заплутаним станом $|\psi\rangle$ та множиною чистих факторизованих станів $|\psi_s\rangle$

$$E(|\psi\rangle) = \min_{|\psi_s\rangle} (1 - |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2) = 1 - \max_{|\psi_s\rangle} |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2. \quad (1.13)$$

Тут $1 - |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2$ – квадрат відстані Фубіні-Студі.

У роботі [26] було показано, що геометричну міру заплутаності спіна $1/2$ з деякою квантовою системою в чистому стані можна визначити за допомогою вимірювання локальних властивостей утвореної квантової системи, а саме середнього значення досліджуваного спіна. Чистий стан спіна, що може бути заплутаним з деякою квантовою системою, яка теж перебуває у чистому стані, можна записати у вигляді

$$|\psi\rangle = a |0\rangle |\phi_1\rangle + b |1\rangle |\phi_2\rangle, \quad (1.14)$$

де $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ – довільні стани системи, заплутаної з кубітом, що задовольняють умову нормування $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_2\rangle = 1$; a, b – додатні дійсні числа. Варто зазначити, що в загальному випадку стани $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ не є ортогональними, тобто $\langle\phi_1|\phi_2\rangle \neq 0$.

Для довільного стану спіна, що взаємодіє з деякою квантовою системою, можна записати розклад Шмідта [27]

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1,2} \lambda_i |\alpha_i\rangle |\tilde{\phi}_i\rangle. \quad (1.15)$$

Тут $|\alpha_i\rangle$, $i = 1, 2$, – ортогональні стани спіна, $\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij}$,

$$|\alpha_1\rangle = \frac{|0\rangle + \alpha|1\rangle}{\sqrt{1 + |\alpha|^2}}, \quad |\alpha_2\rangle = \frac{\alpha^*|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{1 + |\alpha|^2}}, \quad (1.16)$$

$|\tilde{\phi}_i\rangle$, $i = 1, 2$, – ортогональні стани квантової системи, що заплутана зі спіном, $\langle\tilde{\phi}_i|\tilde{\phi}_j\rangle = \delta_{ij}$; коефіцієнти розкладу λ_i , $i = 1, 2$, – додатні дійсні числа, що задовольняють умову нормування $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$.

У роботах [28], [29] було встановлено зв'язок геометричної міри заплутаності (1.13) з максимальним значенням квадратів коефіцієнтів розкладу (1.15) і введено поняття узагальненої геометричної міри заплутаності

$$E(|\psi\rangle) = 1 - \max(\lambda_1^2, \lambda_2^2). \quad (1.17)$$

Легко показати, що λ_1^2 , λ_2^2 можна виразити через середнє значення спіна

$$|\langle\sigma\rangle| = |\langle\psi|\sigma|\psi\rangle| = \left(\langle\sigma_x\rangle^2 + \langle\sigma_y\rangle^2 + \langle\sigma_z\rangle^2\right)^{1/2}, \quad (1.18)$$

де $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - оператори Паулі, що задовольняють наступні комутаційні та антикомутаційні співвідношення

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (1.19)$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I. \quad (1.20)$$

Відповідні співвідношення матимуть вигляд

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(1 \pm |\langle\sigma\rangle|). \quad (1.21)$$

З урахуванням (1.17) в роботі [26] отримано такий остаточний вираз для геометричної міри заплутаності

$$E(|\psi\rangle) = \frac{1}{2}(1 - |\langle\sigma\rangle|). \quad (1.22)$$

Бачимо, що геометрична міра заплутаності спіна з деякою квантовою системою в чистому стані повністю визначається його середнім значенням. Оскільки будь-яка дворівнева квантова система описується операторами Паулі, отриманий вираз можна використати для визначення міри заплутаності довільної квантової системи, що утворена дворівневими підсистемами.

Варто зауважити, що стан спіна є факторизованим відносно стану іншої квантової системи за умови $|\langle\sigma\rangle| = 1$, коли $E = 0$. Геометрична міра заплутаності спіна з рештою системи набуває максимального значення $E = 1/2$ у випадку, коли $\langle\sigma\rangle^2 = 0$.

Розділ 2

Аналітичний розрахунок геометричної міри заплутаності графових станів

Клас графових станів (1.7), що найчастіше згадується у літературі, є доволі обмеженим. У випадку використання оператора зсуву фази (1.11) для формування зв'язків графа стан $|\psi_G\rangle$ задається єдиним параметром ϕ . Інтуїтивно зрозуміло, що розширити цей клас станів можна у два способи: а) замінити оператор зсуву фази іншим унітарним двокубітним оператором складнішої структури, який задовольняв би умови (1.5), (1.6) (наприклад у випадку моделювання реальної фізичної взаємодії [30]); б) узагальнити початковий стан досліджуваної багаточастинкової квантової системи.

У нашій роботі розглядаються графові стани вигляду

$$|\psi_G\rangle = \prod_{(i,j)\in E} CP_{i,j}(\phi) |\psi(\alpha, \theta)\rangle^{\otimes N} \quad (2.1)$$

$$|\psi(\alpha, \theta)\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\alpha} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (2.2)$$

Тут оператор контрольованого зсуву фази $CP_{i,j}(\phi)$ діє на спіни i та j ; N – кількість кубітів у системі (кількість вузлів графа).

Стан (2.1) задається набором трьох параметрів $|\psi_G\rangle = |\psi_G(\alpha, \theta, \phi)\rangle$, причому $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Легко бачити, що за умови $\alpha = 0$, $\theta = \pi/2$ виконується рівність $|\psi(\alpha, \theta)\rangle = |+\rangle$, і ми отримуємо добре досліджений графовий стан (1.7).

Розглянемо систему N -кубітів, що перебуває в стані

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes N}. \quad (2.3)$$

Щоб приготувати графовий стан (2.1), виконаємо наступні кроки.

1. Ініціалізуємо початковий стан системи $|\psi(\alpha, \theta)\rangle^{\otimes N}$. З точністю до загального фазового множника $e^{-i\alpha/2}$ виконується співвідношення

$$|\psi(\alpha, \theta)\rangle = e^{-\frac{i\alpha}{2}\sigma_z} e^{-\frac{i\theta}{2}\sigma_y} |0\rangle. \quad (2.4)$$

2. До кожної пари кубітів i, j , що відповідають суміжним вузлам графа, застосуємо оператор контрольованого зсуву фази $CP_{ij}(\phi)$.

Визначимо геометричну міру заплутаності одного спіна з рештою спінів системи. Згідно з виразом (1.22), ця величина пов'язана із середнім значенням спіна. Оберемо в досліджуваній квантовій системі деякий спін з індексом l і розрахуємо для нього середні значення $\langle \sigma_x^l \rangle$, $\langle \sigma_y^l \rangle$, $\langle \sigma_z^l \rangle$ в стані (2.1). Для початку розглянемо величину

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^l \rangle &= \langle \psi_G | \sigma_x^l | \psi_G \rangle = \\ &= \langle \psi_0 | \prod_k e^{\frac{i\theta}{2}\sigma_y^k} e^{\frac{i\alpha}{2}\sigma_z^k} \prod_{(i,j) \in E} (CP_{ij}(\phi))^+ \sigma_x^l \prod_{(m,n) \in E} CP_{mn}(\phi) \prod_q e^{-\frac{i\alpha}{2}\sigma_z^q} e^{-\frac{i\theta}{2}\sigma_y^q} | \psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Покажемо, що оператор контрольованого зсуву фази (1.11) зводиться до експоненційної форми (1.4) з $H_{ij} = \frac{1}{4}(I_i - \sigma_z^i)(I_j - \sigma_z^j)$

$$CP_{i,j}(\phi) = e^{\frac{i\phi}{4}(I_i - \sigma_z^i)(I_j - \sigma_z^j)} = e^{\frac{i\phi}{4}(I_{ij} - \sigma_z^i - \sigma_z^j + \sigma_z^i \sigma_z^j)}. \quad (2.6)$$

Для цього розглянемо оператор $|1\rangle_i \langle 1|$, що пов'язаний з σ_z^i рівністю

$$|1\rangle_i \langle 1| = \frac{1}{2}(I_i - \sigma_z^i). \quad (2.7)$$

Бачимо, що (2.6) можна представити у вигляді

$$CP_{i,j}(\phi) = e^{i\phi |1\rangle_i \langle 1| |1\rangle_j \langle 1|}. \quad (2.8)$$

Скориставшись очевидною властивістю

$$(|1\rangle_i \langle 1| |1\rangle_j \langle 1|)^n = |1\rangle_i \langle 1| |1\rangle_j \langle 1|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.9)$$

після розкладу (2.8) в ряд отримуємо

$$\begin{aligned} CP_{i,j}(\phi) &= I_{ij} - (1 - e^{i\phi}) |1\rangle_i \langle 1| |1\rangle_j \langle 1| = \\ &= I_{ij} - |1\rangle_i \langle 1| (I_j - \Phi_j(\phi)) = \\ &= |0\rangle_i \langle 0| I_j + |1\rangle_i \langle 1| \Phi_j(\phi), \end{aligned} \quad (2.10)$$

що й потрібно було довести.

Розглянемо добуток операторів

$$\begin{aligned}
& \prod_{(i,j) \in E} (CP_{ij}(\phi))^+ \sigma_x^l \prod_{(m,n) \in E} CP_{mn}(\phi) = \\
& = \prod_{(i,j) \in E} e^{-\frac{i\phi}{4}(I_{ij} - \sigma_z^i - \sigma_z^j + \sigma_z^i \sigma_z^j)} \sigma_x^l \prod_{(m,n) \in E} e^{\frac{i\phi}{4}(I_{mn} - \sigma_z^m - \sigma_z^n + \sigma_z^m \sigma_z^n)} = \\
& = \prod_{E\{(i,l)\}} e^{-\frac{i\phi}{4}(I_{il} - \sigma_z^i - \sigma_z^l + \sigma_z^i \sigma_z^l)} \sigma_x^l \prod_{E\{(j,l)\}} e^{\frac{i\phi}{4}(I_{jl} - \sigma_z^j - \sigma_z^l + \sigma_z^j \sigma_z^l)} = \\
& = e^{\frac{i\phi}{4} n_l \sigma_z^l} e^{-\frac{i\phi}{4} \sum_{E\{(i,l)\}} \sigma_z^i \sigma_z^l} \sigma_x^l e^{-\frac{i\phi}{4} n_l \sigma_z^l} e^{\frac{i\phi}{4} \sum_{E\{(j,l)\}} \sigma_z^j \sigma_z^l}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Тут n_l – ступінь вузла, що відповідає спіну l ; $E\{(i,l)\} \subset E$ об'єднує всі ребра інцидентні вузлу l . Для спрощення виразу було використано комутаційні співвідношення (1.19).

Легко показати, що для довільних антикомутуючих операторів A, B виконується тотожність

$$Ae^{\alpha B} = e^{-\alpha B} A, \tag{2.12}$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$. Оскільки, згідно зі співвідношенням (1.20), $\{\sigma_y^l, \sigma_z^l\} = 0$, отримаємо

$$\prod_{(i,j) \in E} (CP_{ij}(\phi))^+ \sigma_x^l \prod_{(m,n) \in E} CP_{mn}(\phi) = e^{\frac{i\phi}{2} n_l \sigma_z^l} e^{-\frac{i\phi}{2} \sum_{E\{(j,l)\}} \sigma_z^j \sigma_z^l} \sigma_x^l. \tag{2.13}$$

Підставимо отриману рівність у вираз для середнього значення та виділимо з добутоків члени з індексом l

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_x^l \rangle & = \langle \psi_0 | \prod_{E\{(k,l)\}} (e^{\frac{i\theta}{2} \sigma_y^k} e^{\frac{i\alpha}{2} \sigma_z^k}) e^{\frac{i\theta}{2} \sigma_y^l} e^{\frac{i\alpha}{2} \sigma_z^l} e^{\frac{i\phi}{2} n_l \sigma_z^l} e^{-\frac{i\phi}{2} \sum_{E\{(j,l)\}} \sigma_z^j \sigma_z^l} \sigma_x^l \times \\
& \times \prod_{E\{(q,l)\}} (e^{-\frac{i\alpha}{2} \sigma_z^q} e^{-\frac{i\theta}{2} \sigma_y^q}) e^{-\frac{i\alpha}{2} \sigma_z^l} e^{-\frac{i\theta}{2} \sigma_y^l} | \psi_0 \rangle.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Враховуючи комутаційні співвідношення (1.19), виконаємо деякі перестановки операторів та згрупуємо їх. Розглянемо дію наступного ланцюжка операторів на одночастинковий стан $|0\rangle_l$

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{i\alpha}{2} \sigma_z^l} e^{\frac{i\phi}{2} n_l \sigma_z^l} \sigma_x^l e^{-\frac{i\alpha}{2} \sigma_z^l} e^{-\frac{i\theta}{2} \sigma_y^l} |0\rangle_l = e^{i(\alpha + \frac{\phi}{2} n_l) \sigma_z^l} e^{\frac{i\theta}{2} \sigma_y^l} |1\rangle_l = \\
& = \left(\cos \left(\alpha + \frac{\phi}{2} n_l \right) + i \sin \left(\alpha + \frac{\phi}{2} n_l \right) \sigma_z^l \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_y^l \right) |1\rangle_l \\
& = \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\alpha + \frac{\phi}{2} n_l) \sigma_z^l} |0\rangle_l + \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\alpha + \frac{\phi}{2} n_l) \sigma_z^l} |1\rangle_l.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

У розрахунках було використано тотожність (2.12) для антикомутуючих операторів σ_y^l , σ_z^l та σ_x^l , а також розклад експоненційних операторних виразів.

Спростимо добуток операторів

$$\prod_{E(\{k,l\})} e^{\frac{i\theta}{2}\sigma_y^k} e^{-\frac{i\phi}{2}\sum_{E(\{j,l\})}\sigma_z^j\sigma_z^l} \prod_{E(\{q,l\})} e^{-\frac{i\theta}{2}\sigma_y^q} = \prod_{E(\{k,l\})} \left(\cos \frac{\phi}{2} - ie^{i\theta\sigma_y^k} \sin \frac{\phi}{2} \sigma_z^k \sigma_z^l \right). \quad (2.16)$$

З урахуванням (2.15), (2.16) вираз для середнього значення набуває вигляду

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^l \rangle &= \langle \psi_0 | e^{\frac{i\theta}{2}\sigma_y^l} \prod_{E(\{k,l\})} \left(\cos \frac{\phi}{2} - ie^{i\theta\sigma_y^k} \sin \frac{\phi}{2} \sigma_z^k \sigma_z^l \right) \times \\ &\times \left(e^{i(\alpha+\frac{\phi}{2}n_l)} \sin \frac{\theta}{2} |0\rangle_l + e^{-i(\alpha+\frac{\phi}{2}n_l)} \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle_l \right) | \psi_0 \rangle_{N-1} = \\ &=_{N-1} \langle \psi_0 | \left({}_l \langle 0 | \cos \frac{\theta}{2} + {}_l \langle 1 | \sin \frac{\theta}{2} \right) \prod_{E(\{k,l\})} \left(\cos \frac{\phi}{2} - ie^{i\theta\sigma_y^k} \sin \frac{\phi}{2} \sigma_z^k \sigma_z^l \right) \times \\ &\times \left(e^{i(\alpha+\frac{\phi}{2}n_l)} \sin \frac{\theta}{2} |0\rangle_l + e^{-i(\alpha+\frac{\phi}{2}n_l)} \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle_l \right) | \psi_0 \rangle_{N-1} = \\ &= e^{i(\alpha+\frac{\phi}{2}n_l)} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} {}_{N-1} \langle \psi_0 | \prod_{E(\{k,l\})} \left(\cos \frac{\phi}{2} - ie^{i\theta\sigma_y^k} \sin \frac{\phi}{2} \sigma_z^k \right) | \psi_0 \rangle_{N-1} + \\ &+ e^{-i(\alpha+\frac{\phi}{2}n_l)} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} {}_{N-1} \langle \psi_0 | \prod_{E(\{k,l\})} \left(\cos \frac{\phi}{2} + ie^{i\theta\sigma_y^k} \sin \frac{\phi}{2} \sigma_z^k \right) | \psi_0 \rangle_{N-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Оскільки

$$e^{i\theta\sigma_y^k} \sigma_z^k |0\rangle_k = \cos \theta |0\rangle_k - \sin \theta |1\rangle_k, \quad (2.18)$$

остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^l \rangle &= \frac{1}{2} \sin \theta \left(e^{-i(\alpha+\frac{\phi}{2}n_l)} \left(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta \right)^{n_l} + \right. \\ &+ \left. e^{i(\alpha+\frac{\phi}{2}n_l)} \left(\cos \frac{\phi}{2} - i \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta \right)^{n_l} \right) = \\ &= \sin \theta \operatorname{Re} \left[e^{-i(\alpha+\frac{\phi}{2}n_l)} \left(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta \right)^{n_l} \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Аналогічно розраховуємо середнє значення $\langle \sigma_y^l \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_y^l \rangle &= \langle \psi_G | \sigma_y^l | \psi_G \rangle = & (2.20) \\
&= \langle \psi_0 | \prod_k e^{\frac{i\theta}{2} \sigma_y^k} e^{\frac{i\alpha}{2} \sigma_z^k} \prod_{(i,j) \in E} (CP_{ij}(\phi))^+ \sigma_y^l \prod_{(m,n) \in E} CP_{mn}(\phi) \prod_q e^{-\frac{i\alpha}{2} \sigma_z^q} e^{-\frac{i\theta}{2} \sigma_y^q} | \psi_0 \rangle = \\
&= \frac{i}{2} \sin \theta \left(e^{-i(\alpha + \frac{\phi}{2} n_l)} \left(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta \right)^{n_l} - \right. \\
&\quad \left. - e^{i(\alpha + \frac{\phi}{2} n_l)} \left(\cos \frac{\phi}{2} - i \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta \right)^{n_l} \right) = \\
&= -\sin \theta \operatorname{Im} \left[e^{-i(\alpha + \frac{\phi}{2} n_l)} \left(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta \right)^{n_l} \right].
\end{aligned}$$

Процедура розрахунку $\langle \sigma_z^l \rangle$ суттєво спрощується, оскільки

$$\prod_{(i,j) \in E} (CP_{ij}(\phi))^+ \sigma_z^l \prod_{(m,n) \in E} CP_{mn}(\phi) = \sigma_z^l, \quad (2.21)$$

і ми отримуємо значно простіший вираз

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_z^l \rangle &= \langle \psi_G | \sigma_z^l | \psi_G \rangle = & (2.22) \\
&= \langle \psi_0 | \prod_k e^{\frac{i\theta}{2} \sigma_y^k} e^{\frac{i\alpha}{2} \sigma_z^k} \sigma_z^l \prod_q e^{-\frac{i\alpha}{2} \sigma_z^q} e^{-\frac{i\theta}{2} \sigma_y^q} | \psi_0 \rangle = \\
&= \langle \psi_0 | e^{\frac{i\theta}{2} \sigma_y^l} \sigma_z^l e^{-\frac{i\theta}{2} \sigma_y^l} | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | e^{i\theta \sigma_y^l} \sigma_z^l | \psi_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Взявши до уваги дію оператора (2.18) на одночастинковий стан, в силу ортонормованості базисних векторів отримуємо

$$\langle \sigma_z^l \rangle = \cos \theta. \quad (2.23)$$

Введемо позначення

$$z = e^{-i(\alpha + \frac{\phi}{2} n_l)} \left(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta \right)^{n_l}, \quad (2.24)$$

тоді (2.19), (2.20) запишуться як

$$\langle \sigma_x^l \rangle = \sin \theta \operatorname{Re}[z] \quad (2.25)$$

$$\langle \sigma_y^l \rangle = -\sin \theta \operatorname{Im}[z]. \quad (2.26)$$

Підставивши середні значення операторів Паулі у вираз (1.22), отримуємо аналітичний вираз для геометричної міри заплутаності спіна l з рештою спінів досліджуваної квантової системи

$$E_l = \frac{1}{2} \left(1 - (\sin^2 \theta |z|^2 + \cos^2 \theta)^{1/2} \right). \quad (2.27)$$

Оскільки

$$|z|^2 = z\bar{z} = \left(\cos^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2} \cos^2 \theta \right)^{n_l}, \quad (2.28)$$

в явному вигляді маємо

$$E_l = \frac{1}{2} \left(1 - \left[\sin^2 \theta \left(\cos^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2} \cos^2 \theta \right)^{n_l} + \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right). \quad (2.29)$$

Бачимо, що геометрична міра заплутаності спіна з рештою спінів системи в графовому стані (2.1) залежить від ступеня відповідного йому вузла (n_l). Для фіксованого значення параметра n_l вона є функцією двох змінних θ , ϕ . Відповідні залежності для випадків $n_l = 1, 2, 3, 4$ зображено на Рис. 1. Також зауважимо, що геометрична міра заплутаності не залежить від знака параметра ϕ , що визначає характер взаємодії між кубітами.

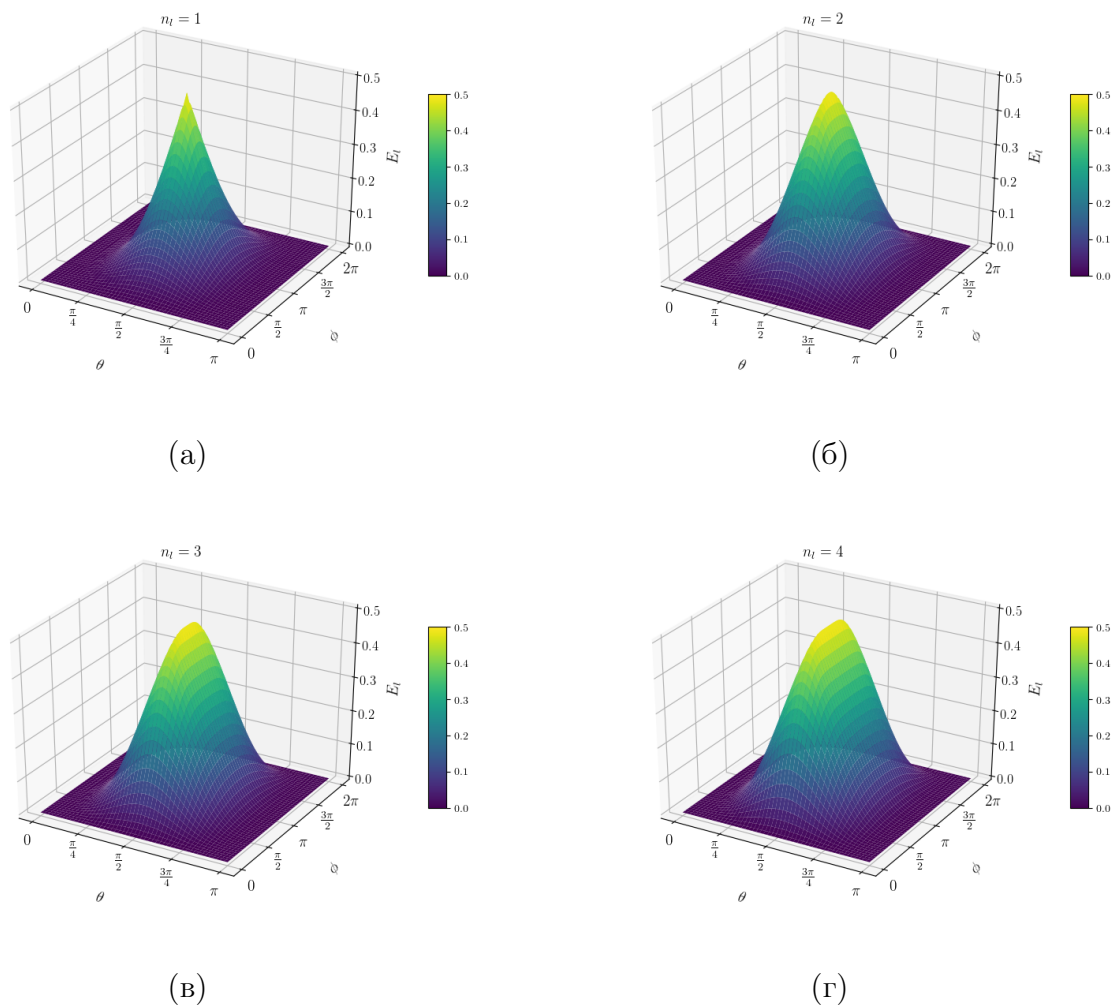


Рис. 1: Графіки залежності геометричної міри заплутаності кубіта l з іншими кубітами системи в графовому стані (2.1) від параметрів стану θ , ϕ у випадках, коли ступінь вузла $n_l = 1$ а), $n_l = 2$ б), $n_l = 3$ в), $n_l = 4$ г).

Розділ 3

Кількісна оцінка геометричної міри заплутаності графових станів на квантовому комп'ютері ІВМ

3.1 Реалізація графових станів на квантовому комп'ютері

Будь-який графовий стан $|\psi_G\rangle$ структури (2.1) визначається набором трьох параметрів α, θ, ϕ . Оскільки наше завдання полягає у вимірюванні середніх значень спінів, фазовий множник в стані $|\psi(\alpha, \theta)\rangle$ (2.2) не впливатиме на результат, і його можна вибрати довільним чином. Для зручності приймемо $\alpha = 0$. Щоб дослідити залежність геометричної міри заплутаності (2.29) від обох параметрів θ, ϕ , детально проаналізуємо два випадки.

- а) Зафіксуємо значення $\theta = \pi/2$, а $0 \leq \phi < 2\pi$ залишимо змінним параметром. У цьому випадку початковий стан кожного кубіта переходить в стан $|+\rangle$, і ми отримуємо графовий стан

$$|\psi_G\rangle = \prod_{(i,j) \in E} CP_{ij}(\phi) |+\rangle^{\otimes N}. \quad (3.1)$$

- б) Зафіксуємо значення $\phi = \pi$, а $0 \leq \theta \leq \pi$ залишимо змінним параметром. Це означає, що для формування зв'язків графа ми використовуємо контрольовані Z оператори, і відповідний стан матиме вигляд

$$|\psi_G\rangle = \prod_{(i,j) \in E} CZ_{ij} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right)^{\otimes N}. \quad (3.2)$$

Розглянемо квантовий комп'ютер, що складається з N кубітів і перебуває в стані (2.3). Для того, щоб приготувати на ньому графовий стан (3.1) спочатку на кожен кубіт $q[i]$, ($i = 1, \dots, N$) потрібно подіяти оператором Адамара H_i

$$H_i |0\rangle_i = |+\rangle. \quad (3.3)$$

Наступним кроком для кожної пари кубітів $q[i]$, $q[j]$, що з'єднані ребрами відповідного графа, реалізуємо дію двокубітного оператора контрольованого зсуву фази $CP_{ij}(\phi)$, який діє на кубіт $q[i]$ як на контролюючий, а на кубіт $q[j]$ як на контрольований. У випадку (3.2) ініціалізувати початковий стан системи $(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle)^{\otimes N}$, згідно зі співвідношенням (2.4), можна за допомогою N операторів повороту навколо осі y $RY_i(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y^i}$. Після цього генеруємо зв'язки між кубітами, використовуючи контрольований Z оператор CZ_{ij} , що діє на кубіт $q[i]$ як на контролюючий, а на кубіт $q[j]$ як на контрольований.

Відповідно до (2.29), геометрична міра запутаності кубіта l з іншими кубітами системи в станах (3.1), (3.2) запишеться у вигляді

$$E_l = \frac{1}{2} \left(1 - \left| \cos \frac{\phi}{2} \right|^{n_l} \right), \quad (3.4)$$

$$E_l = \frac{1}{2} \left(1 - [\sin^2 \theta (\cos \theta)^{2n_l} + \cos^2 \theta]^{1/2} \right). \quad (3.5)$$

Для фіксованого значення n_l у випадку (3.4) E_l є періодичною функцією змінної ϕ з періодом 2π , а у випадку (3.5) – періодичною функцією змінної θ з періодом π .

3.2 Протокол вимірювання середнього значення спіна на квантовому комп'ютері

У роботі [31] було запропоновано метод вимірювання запутаності чистого стану, реалізованого на квантовому комп'ютері, в основу якого покладено поняття геометричної міри запутаності. Як згадувалося у попередніх розділах, для N -кубітної системи геометрична міра запутаності деякого кубіта l з рештою кубітів цієї системи повністю визначається середнім значенням відповідного оператора Паулі у досліджуваному стані. Отже, задача кількісної оцінки запутаності кубітів зводиться до вимірювання середніх значень $\langle \sigma_x^l \rangle$, $\langle \sigma_y^l \rangle$, $\langle \sigma_z^l \rangle$. Оскільки вимірювання на квантовому комп'ютері виконуються у стандартному базисі $|0\rangle, |1\rangle$, середні значення спіна зручно виразити через величини, що можна безпосередньо виміряти в цьому базисі. Стани $|0\rangle, |1\rangle$ є власними станами оператора σ_z , що відповідають власним значенням $+1, -1$, відповідно. Розклад оператора σ_z у власному базисі матиме вигляд

$$\sigma_z^l = |0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|. \quad (3.6)$$

Такий запис дає змогу виразити середнє значення цього оператора через ймовірності, що визначають результат вимірювання проведеного над кубітом у базисі $|0\rangle, |1\rangle$

$$\langle\psi|\sigma_z^l|\psi\rangle = |\langle\psi|0\rangle|^2 - |\langle\psi|1\rangle|^2. \quad (3.7)$$

Для того, щоб виміряти середні значення $\langle\sigma_x^l\rangle, \langle\sigma_y^l\rangle$ у стандартному базисі, попередньо потрібно виконати поворот стану кубіта l на кут $\pi/2$ у довільному напрямку навколо осей y та x , відповідно. Зазначимо, що поворот стану кубіта на кут $\pi/2$ навколо осі y реалізується за допомогою оператора $RY_l(\pi/2)$, а навколо осі x – оператора $RX_l(\pi/2)$. Середні значення запишуться як

$$\langle\psi|\sigma_x^l|\psi\rangle = \langle\psi|e^{-\frac{i\pi}{4}\sigma_y^l}\sigma_z^le^{\frac{i\pi}{4}\sigma_y^l}|\psi\rangle = \langle\tilde{\psi}_y^l|\sigma_z^l|\tilde{\psi}_y^l\rangle = \left|\langle\tilde{\psi}_y^l|0\rangle\right|^2 - \left|\langle\tilde{\psi}_y^l|1\rangle\right|^2, \quad (3.8)$$

$$\langle\psi|\sigma_y^l|\psi\rangle = \langle\psi|e^{\frac{i\pi}{4}\sigma_x^l}\sigma_z^le^{-\frac{i\pi}{4}\sigma_x^l}|\psi\rangle = \langle\tilde{\psi}_x^l|\sigma_z^l|\tilde{\psi}_x^l\rangle = \left|\langle\tilde{\psi}_x^l|0\rangle\right|^2 - \left|\langle\tilde{\psi}_x^l|1\rangle\right|^2, \quad (3.9)$$

де $|\tilde{\psi}_y^l\rangle = e^{\frac{i\pi}{4}\sigma_y^l}|\psi\rangle$, $|\tilde{\psi}_x^l\rangle = e^{-\frac{i\pi}{4}\sigma_x^l}|\psi\rangle$. Іншими словами, замість того, щоб вимірювати середні значення операторів σ_x^l, σ_y^l у досліджуваному стані $|\psi\rangle$, ми можемо виміряти середні значення оператора σ_z^l у нових станах $|\tilde{\psi}_y^l\rangle, |\tilde{\psi}_x^l\rangle$, відповідно.

3.3 Результати вимірювань

У рамках наших досліджень реалізація графових станів (2.1) та вимірювання їхньої геометричної міри заплутаності, згідно з протоколом, описаним у підрозділі 3.2, здійснювалися на квантовому комп'ютері *ibmq_athens*, доступ до якого компанія ІВМ надає через онлайн-платформу ІВМ Q Experience [32]. Цей квантовий прилад складається з 5 надпровідних кубітів, які, взаємодіючи між собою, як показано на Рис. 2, утворюють архітектуру ланцюжка. Стрілками з'єднано пари кубітів, до яких можна прямо застосувати двокубітний оператор *CNOT*.



Рис. 2: Архітектура квантового комп'ютера *ibmq_athens*. Стрілками показано, між якими з кубітів можна прямо застосовувати оператор *CNOT*. Напрявленість стрілок в обидва боки означає, що кожен кубіт може виступати як керуючим, так і керованим.

Нами було реалізовано графові стани чотирьох різних типів для випадків (3.1), (3.2). Обираючи структуру відповідних графів, ми керувалися необхідністю продемонструвати залежність геометричної міри заплутаності кубіта з рештою системи від ступеня відповідного йому вузла. Окрім цього, під час підготовки досліджуваних станів було враховано калібрувальні параметри *ibmq_athens* на час проведення вимірювань. Найбільш значущими серед них є помилка читання, що виникає під час інтерпретації стану кубіта, помилка на гейті, що виникає в результаті застосування однокубітного гейта, який дещо змінює стан відповідного кубіта, та помилка *CNOT*, що є результатом взаємодії кубітів під час дії двокубітного гейта *CNOT* [33]. Очевидно, що похибка в результатах вимірювань накопичуватиметься зі збільшенням кількості операторів у реалізованій квантовій схемі. Варто зауважити, що калібрувальні параметри оновлюються щогодини. Калібрувальні параметри *ibmq_athens* 17 та 21 квітня 2021 року представлено у Табл. 1 та Табл. 2.

	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4
Gate Error (10^{-4})	2.57	3.28	2.36	2.88	2.58
Readout Error (10^{-2})	0.75	1.16	1.78	1.62	1.36
CNOT Error (10^{-3})	CX0_1	CX1_0	CX2_1	CX3_2	CX4_3
	8.92	8.92	8.36	9.60	7.92
		CX1_2	CX2_3	CX3_4	
		8.36	9.60	7.92	

Табл. 1: Калібрувальні параметри *ibmq_athens*, заархівовані 17.04.2021.

	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4
Gate Error (10^{-4})	2.47	3.20	2.76	2.34	2.27
Readout Error (10^{-2})	0.99	0.94	1.76	1.28	1.63
CNOT Error (10^{-2})	CX0_1	CX1_0	CX2_1	CX3_2	CX4_3
	1.03	1.03	0.78	0.94	0.64
		CX1_2	CX2_3	CX3_4	
		0.78	0.94	0.64	

Табл. 2: Калібрувальні параметри *ibmq_athens*, заархівовані 21.04.2021.

Для випадку (3.1) розглянемо стани

$$|\psi_{G_1}\rangle = CP_{34}(\phi)CP_{23}(\phi)CP_{12}(\phi)CP_{01}(\phi) \prod_{i=0}^4 H_i |00000\rangle, \quad (3.10)$$

$$|\psi_{G_2}\rangle = \prod_{i,j=0}^4 CP_{ij}(\phi) \prod_{k=0}^4 H_k |00000\rangle, \quad (3.11)$$

$$|\psi_{G_3}^i\rangle = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 CP_{ij}(\phi) \prod_{k=0}^3 H_k |0000\rangle, \quad (3.12)$$

$$|\psi_{G_4}^i\rangle = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 CP_{ij}(\phi) \prod_{i=0}^4 H_k |00000\rangle, \quad (3.13)$$

які можна зобразити графами (а), (б), (в), (г) з Рис. 3.

Оскільки стани $|\psi_{G_3}^i\rangle$, $|\psi_{G_4}^i\rangle$ були приготовані з метою вимірювання середніх значень спінів, яким відповідають вузли ступеня 3 та 4, відповідно, для нас не був принциповим їхній конкретний вигляд, а лише загальна структура. Отже, в нас була можливість модифікувати ці стани, виходячи з міркувань мінімізації похибки. В даному випадку найбільш оптимальним варіантом були стани з $i = 1$.

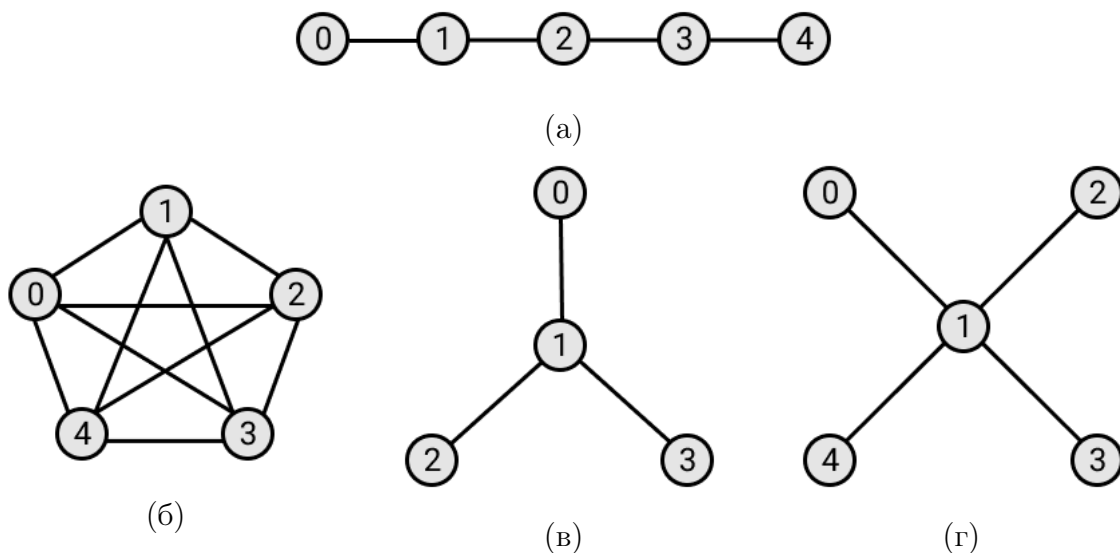


Рис. 3: Графи, що відповідають станам (3.10), (3.14) (а), (3.11), (3.15) (б) та станам (3.12) (в), (3.13) (г) у випадку $i = 1$.

Графові стани аналогічної структури було реалізовано для випадку (3.2).

$$|\psi_{G_1}^{\sim}\rangle = CZ_{34}CZ_{23}CZ_{12}CZ_{01} \prod_{i=0}^4 RY_i(\theta) |00000\rangle, \quad (3.14)$$

$$|\psi_{G_2}^{\sim}\rangle = \prod_{i,j=0}^4 CZ_{ij} \prod_{k=0}^4 RY_k(\theta) |00000\rangle, \quad (3.15)$$

$$|\psi_{G_3}^{\tilde{i}}\rangle = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 CZ_{ij} \prod_{k=0}^3 RY_k(\theta) |0000\rangle, \quad (3.16)$$

$$|\psi_{G_4}^{\tilde{i}}\rangle = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^4 CZ_{ij} \prod_{k=0}^4 RY_k(\theta) |00000\rangle. \quad (3.17)$$

Для проведення вимірювань ми обрали стани $|\psi_{G_3}^{\tilde{2}}\rangle$, $|\psi_{G_4}^{\tilde{2}}\rangle$, яким відповідають графи (а), (б), представлені на Рис. 4.

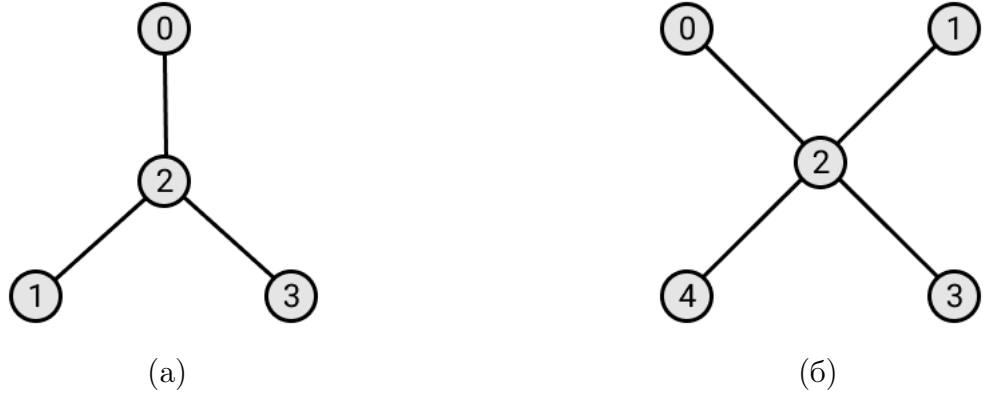


Рис. 4: Графи, що відповідають станам (3.16) (а), (3.17) (б) у випадку $i = 2$.

Проаналізуємо стани, що відповідають кожному типу графів.

1. Стани $|\psi_{G_1}\rangle$, $|\tilde{\psi}_{G_1}\rangle$ описуються графом, що відтворює архітектуру квантового комп'ютера (ланцюжок). У цьому випадку крайнім кубітам $q[0]$, $q[4]$ відповідають вузли, що мають лише по одному інцидентному ребру, тобто $\deg(V_0) = \deg(V_4) = 1$. Для решти кубітів $q[1]$, $q[2]$, $q[3]$ ступінь відповідних вузлів рівний 2 ($\deg(V_1) = \deg(V_2) = \deg(V_3) = 2$). Згідно з аналітичними виразами (3.4), (3.5), геометрична міра заплутаності кубіта $q[0]$ або $q[4]$ з усіма іншими кубітами системи рівна

$$E_0 = E_4 = \frac{1}{2} \left(1 - \left| \cos \frac{\phi}{2} \right| \right) \quad (3.18)$$

в стані $|\psi_{G_1}\rangle$ і

$$\tilde{E}_0 = \tilde{E}_4 = \frac{1}{2} (1 - [\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta]^{1/2}) \quad (3.19)$$

в стані $|\tilde{\psi}_{G_1}\rangle$. Для заплутаності кубіта $q[1]$, $q[2]$ або $q[3]$ з рештою системи, отримуємо

$$E_1 = E_2 = E_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \left| \cos \frac{\phi}{2} \right|^2 \right) \quad (3.20)$$

в стані $|\psi_{G_1}\rangle$,

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E}_2 = \tilde{E}_3 = \frac{1}{2} (1 - [\sin^2 \theta \cos^4 \theta + \cos^2 \theta]^{1/2}) \quad (3.21)$$

в стані $|\tilde{\psi}_{G_1}\rangle$.

2. Станам $|\psi_{G_2}\rangle$, $|\tilde{\psi}_{G_2}\rangle$ відповідає повний граф, в якому всі вузли суміжні між собою. Отже, довільному кубіту $q[i]$, $i = 0, \dots, 4$, відповідає вузол ступеня 4 ($\deg(V_i) = 4$), і його запутаність з рештою системи визначається виразом

$$E_i = \frac{1}{2} \left(1 - \left| \cos \frac{\phi}{2} \right|^4 \right) \quad (3.22)$$

в стані $|\psi_{G_2}\rangle$ і

$$\tilde{E}_i = \frac{1}{2} (1 - [\sin^2 \theta \cos^8 \theta + \cos^2 \theta]^{1/2}) \quad (3.23)$$

в стані $|\tilde{\psi}_{G_2}\rangle$.

3. У графах, що зображають стани системи 4 кубітів $|\psi_{G_3}^i\rangle$, $|\tilde{\psi}_{G_3}^i\rangle$ наявний один вузол ступеня 3, а решта вузлів суміжні лише з ним. У стані $|\psi_{G_3}^1\rangle$ цей вузол відповідає кубіту $q[1]$ ($\deg(V_1) = 3$, $\deg(V_0) = \deg(V_2) = \deg(V_3) = 1$), а в стані $|\tilde{\psi}_{G_3}^2\rangle$ – кубіту $q[2]$ ($\deg(V_2) = 3$, $\deg(V_0) = \deg(V_1) = \deg(V_3) = 1$). Відповідно, для геометричної міри запутаності отримуємо

$$E_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \left| \cos \frac{\phi}{2} \right|^3 \right), \quad (3.24)$$

$$E_0 = E_2 = E_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \left| \cos \frac{\phi}{2} \right| \right), \quad (3.25)$$

$$\tilde{E}_2 = \frac{1}{2} (1 - [\sin^2 \theta \cos^6 \theta + \cos^2 \theta]^{1/2}), \quad (3.26)$$

$$\tilde{E}_0 = \tilde{E}_1 = \tilde{E}_3 = \frac{1}{2} (1 - [\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta]^{1/2}). \quad (3.27)$$

4. Подібну ситуацію маємо для графів, що відповідають станам $|\psi_{G_4}^i\rangle$, $|\tilde{\psi}_{G_4}^i\rangle$: один з кубітів представлений вузлом ступеня 4, а решта кубітів зв'язані лише з ним. У стані $|\psi_{G_4}^1\rangle$ цей вузол відповідає кубіту $q[1]$ ($\deg(V_1) = 4$, $\deg(V_0) = \deg(V_2) = \deg(V_3) = \deg(V_4) = 1$), а в стані $|\tilde{\psi}_{G_4}^2\rangle$ – кубіту $q[2]$ ($\deg(V_2) = 4$, $\deg(V_0) = \deg(V_1) = \deg(V_3) =$

$= \deg(V_4) = 1$). Для геометричної міри заплутаності маємо

$$E_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \left| \cos \frac{\phi}{2} \right|^4 \right), \quad (3.28)$$

$$E_0 = E_2 = E_3 = E_4 = \frac{1}{2} \left(1 - \left| \cos \frac{\phi}{2} \right| \right), \quad (3.29)$$

$$\tilde{E}_2 = \frac{1}{2} (1 - [\sin^2 \theta \cos^8 \theta + \cos^2 \theta]^{1/2}), \quad (3.30)$$

$$\tilde{E}_0 = \tilde{E}_1 = \tilde{E}_3 = \tilde{E}_4 = \frac{1}{2} (1 - [\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta]^{1/2}). \quad (3.31)$$

Використовуючи квантові протоколи для приготування графових станів (3.10)-(3.13) та (3.14)-(3.17), представлені на Рис. 5 та Рис. 6, а також протокол вимірювання середніх значень операторів Паулі $\sigma_x^l, \sigma_y^l, \sigma_z^l$, описаний у попередньому підрозділі, ми здійснили кількісну оцінку геометричної міри заплутаності кубітів в цих станах на квантовому комп'ютері *ibmq_athens*. Для кожного стану вимірювання проводилися над кубітами, яким відповідають вузли графа різного ступеня. Серед кубітів, пов'язаних з вузлами однакового ступеня, ми обирали той, який характеризувався найменшою похибкою читання (див. Табл.1, Табл. 2). Таким чином було розраховано геометричну міру заплутаності кубітів $q[0]$, $q[1]$ в станах (3.10), (3.12), (3.13); кубіта $q[1]$ в стані (3.11); кубітів $q[0]$, $q[2]$ в станах (3.14), (3.16), (3.17) та кубіта $q[0]$ в стані (3.15) з рештою кубітів досліджуваної системи і побудовано відповідні залежності $E_l(\phi)$ (для станів (3.10)-(3.13)) та $E_l(\theta)$ (для станів (3.14)-(3.17)). Результати отримані на квантовому комп'ютері представлено на Рис. 7-10.

Геометрична міра заплутаності кубітів $q[0]$, $q[1]$ з іншими кубітами досліджуваної системи в стані (3.10), а також кубітів $q[0]$, $q[2]$ з іншими кубітами в стані (3.14), розрахована за допомогою квантового комп'ютера, дуже добре узгоджується з теоретичним результатом, отриманим у розділі 2. Це можна пояснити, взявши до уваги, що граф, пов'язаний з даними станами, повністю відтворює архітектуру квантового комп'ютера, зображену на Рис. 2. Іншими словами, для утворення лінків графа ми застосовуємо двокубітні оператори CZ_{ij} , CP_{ij} лише до тих пар кубітів, до яких будова комп'ютера дозволяє прямо застосувати оператор $CNOT$. Натомість для всіх інших станів спостерігається більш значне відхилення експериментальних результатів від теоретичної кривої, що зростає по мірі додавання до відповідних графів лінків, які не накладаються на архітектуру

комп'ютера. Таке відхилення пов'язане з накопиченням похибки на додаткових гейтах, що використовуються в перетвореній комп'ютером схемі для формування зв'язків за межами структури ланцюжка.

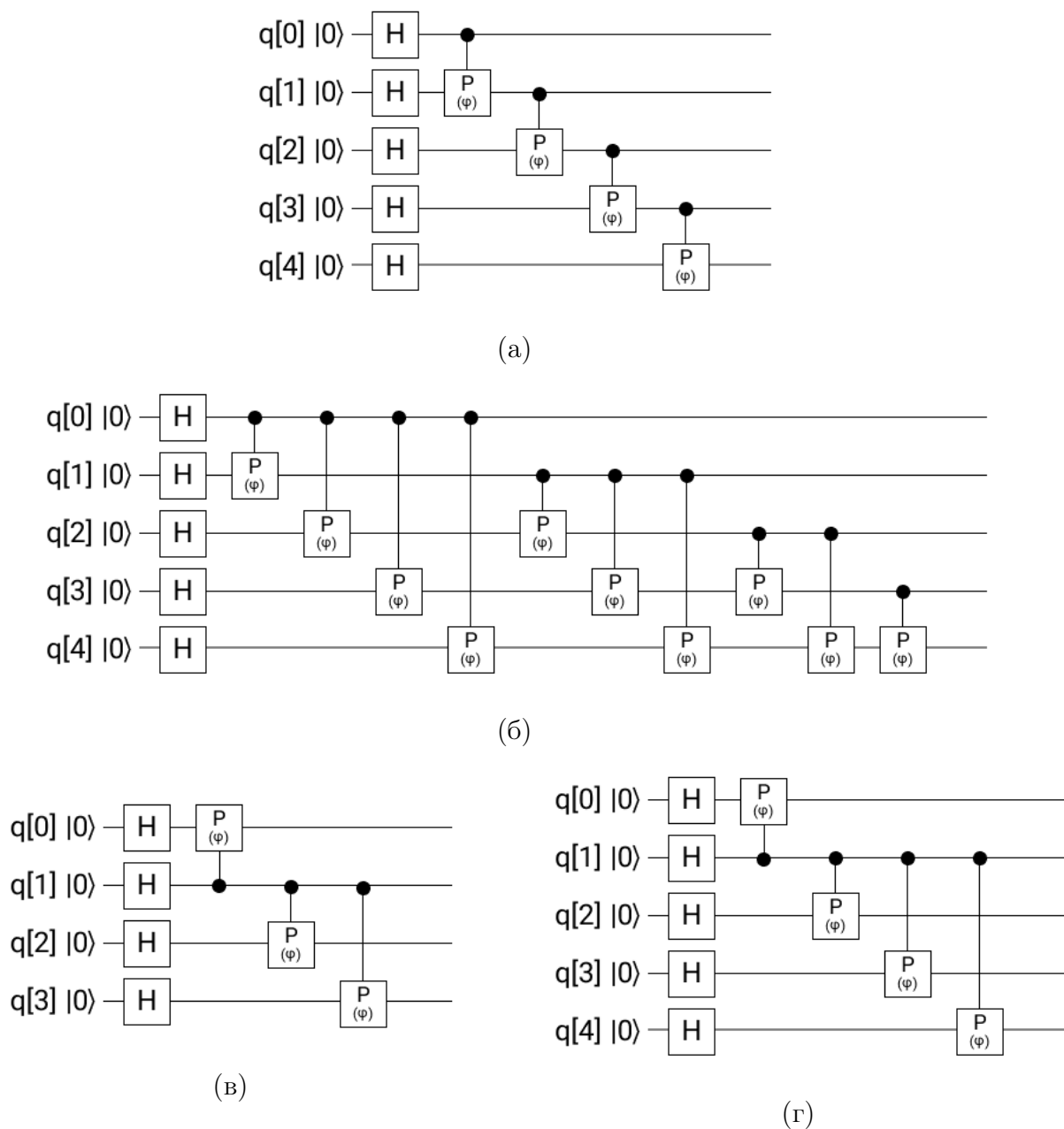


Рис. 5: Квантові протоколи для реалізації графових станів (3.10) (а), (3.11) (б) та графових станів (3.12) (в), (3.13) (г) у випадку $i = 1$.

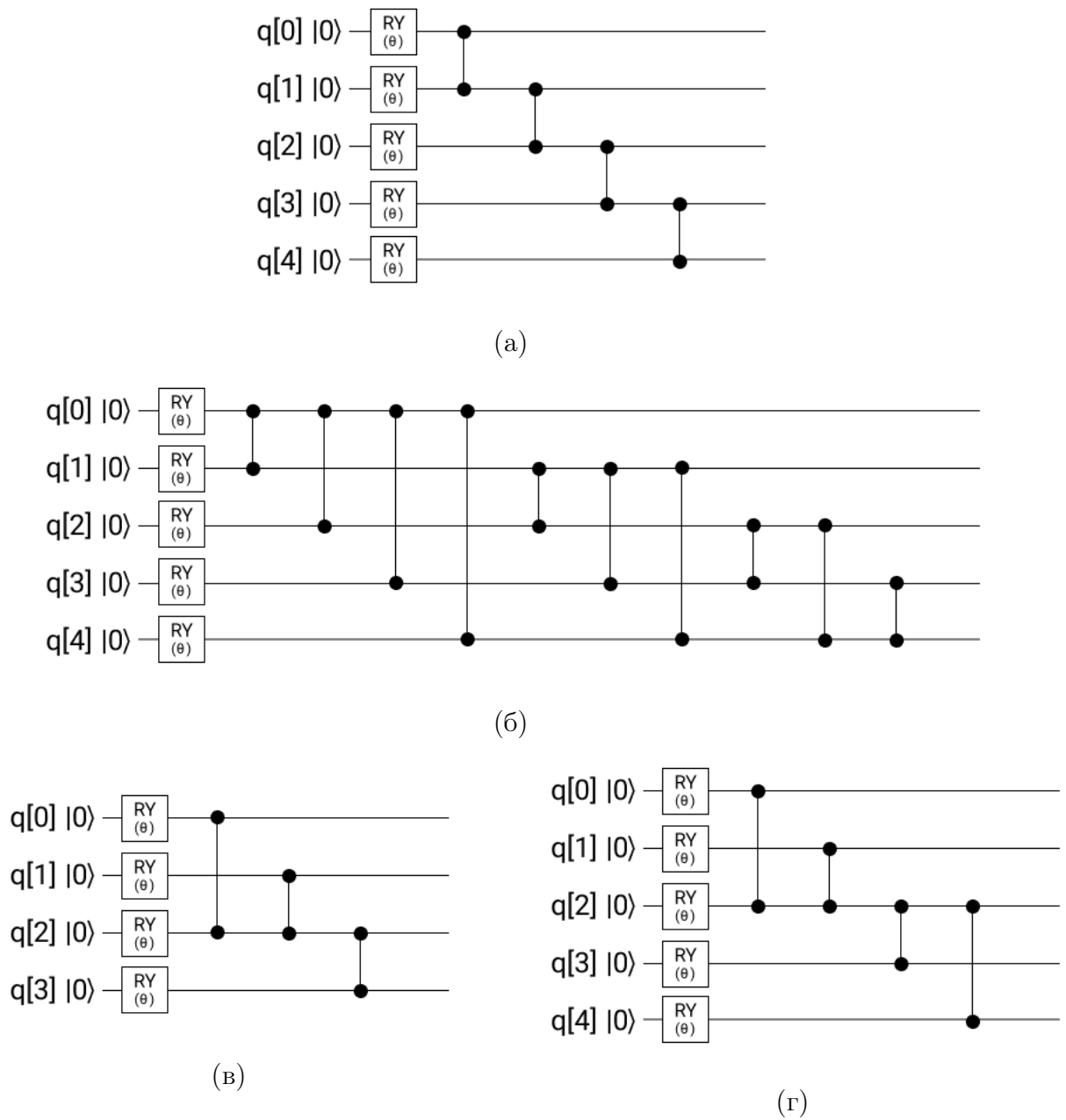


Рис. 6: Квантові протоколи для реалізації графових станів (3.14) (а), (3.15) (б) та графових станів (3.16) (в), (3.17) (г) у випадку $i = 2$.

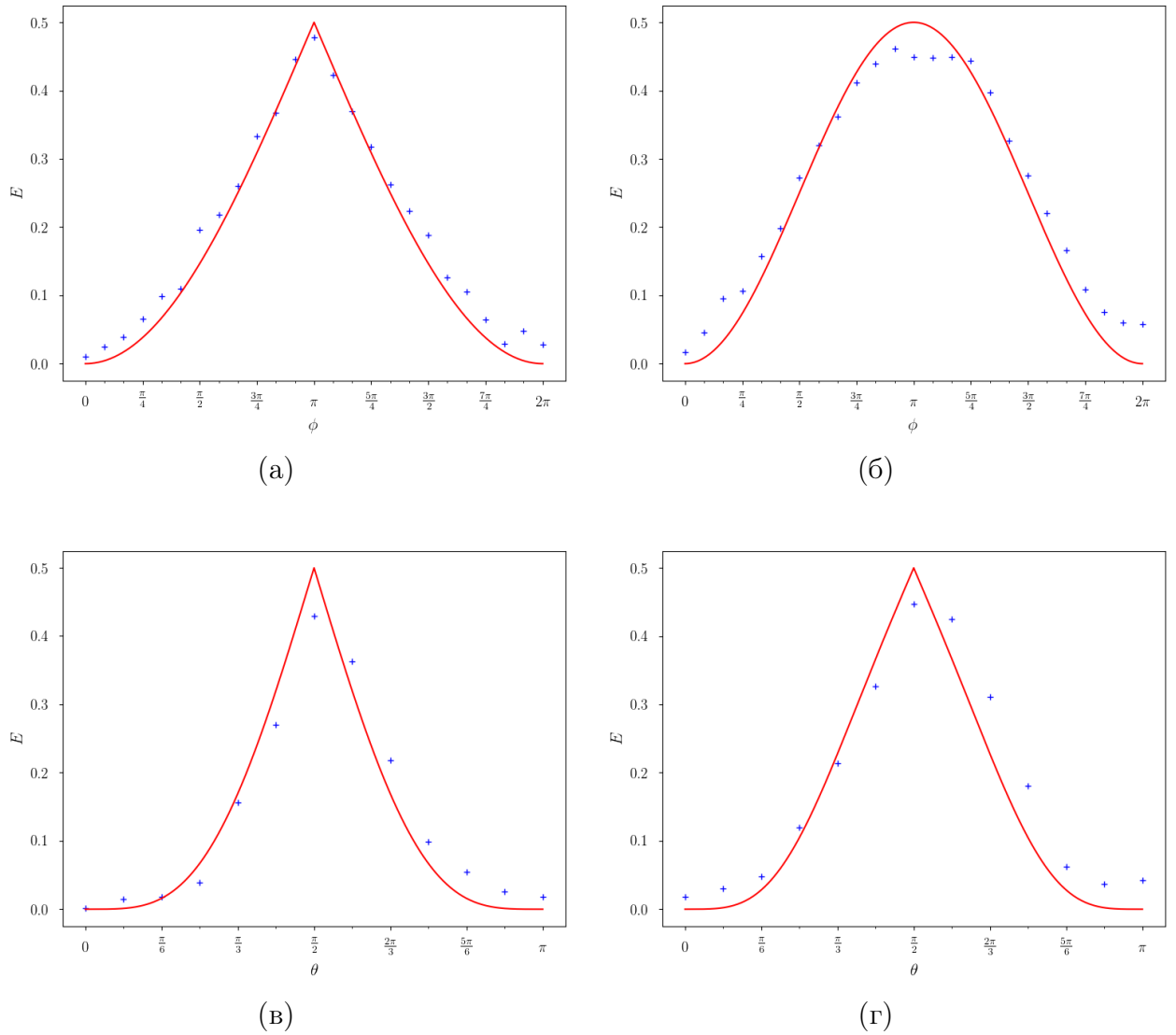


Рис. 7: Результати кількісної оцінки геометричної міри запутаності на квантовому комп'ютері *ibmq_athens* (позначені хрестиками) та відповідні аналітичні результати (відображені суцільною кривою) для кубітів $q[0]$ (а), $q[1]$ (б) з іншими кубітами в стані (3.10) і для кубітів $q[0]$ (в), $q[2]$ (г) з іншими кубітами в стані (3.14).

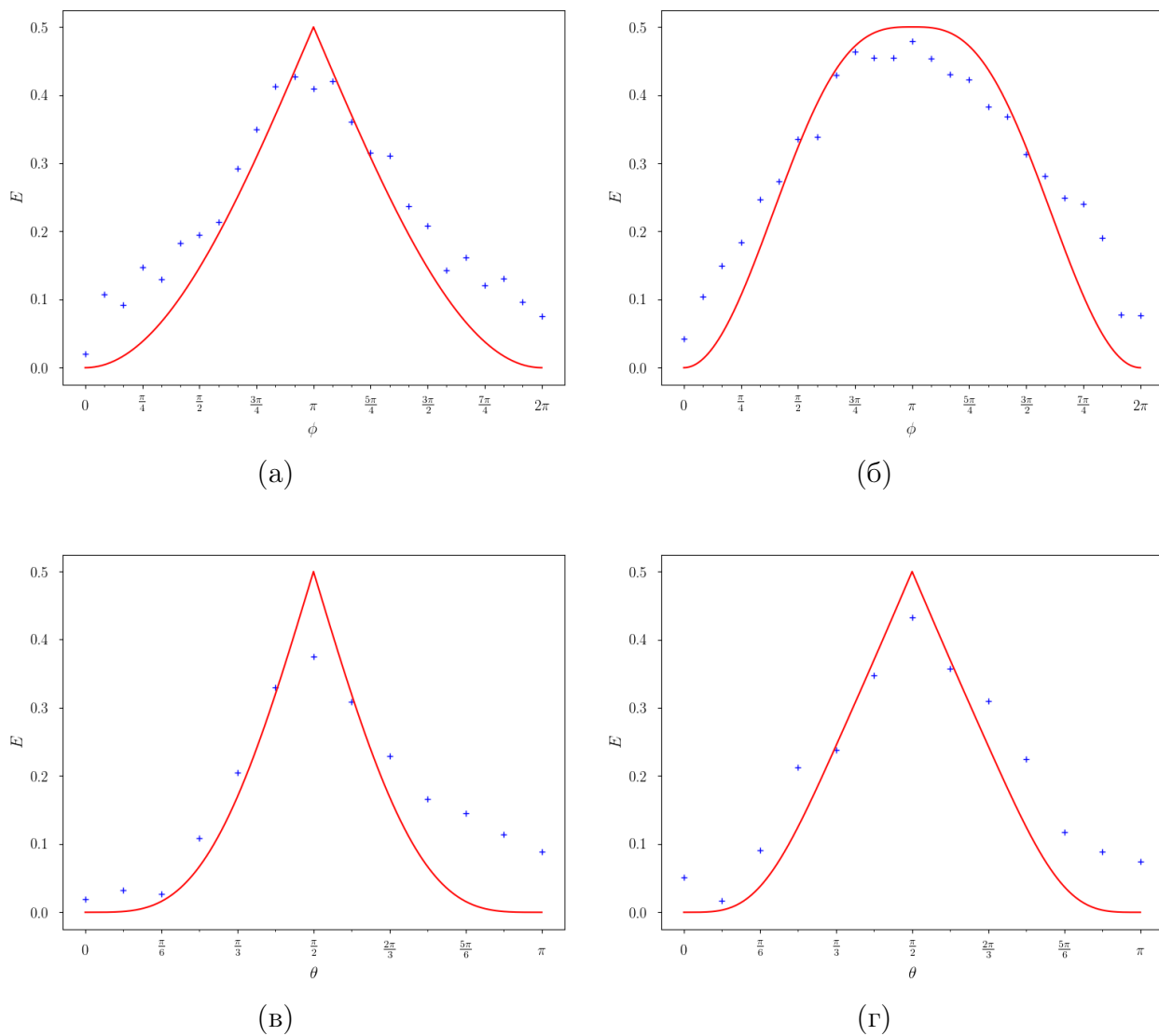


Рис. 8: Результати кількісної оцінки геометричної міри запутаності на квантовому комп'ютері *ibmq_athens* (позначені хрестиками) та відповідні аналітичні результати (відображені суцільною кривою) для кубітів $q[0]$ (а), $q[1]$ (б) з іншими кубітами в стані (3.12) і для кубітів $q[0]$ (в), $q[2]$ (г) з іншими кубітами в стані (3.16).

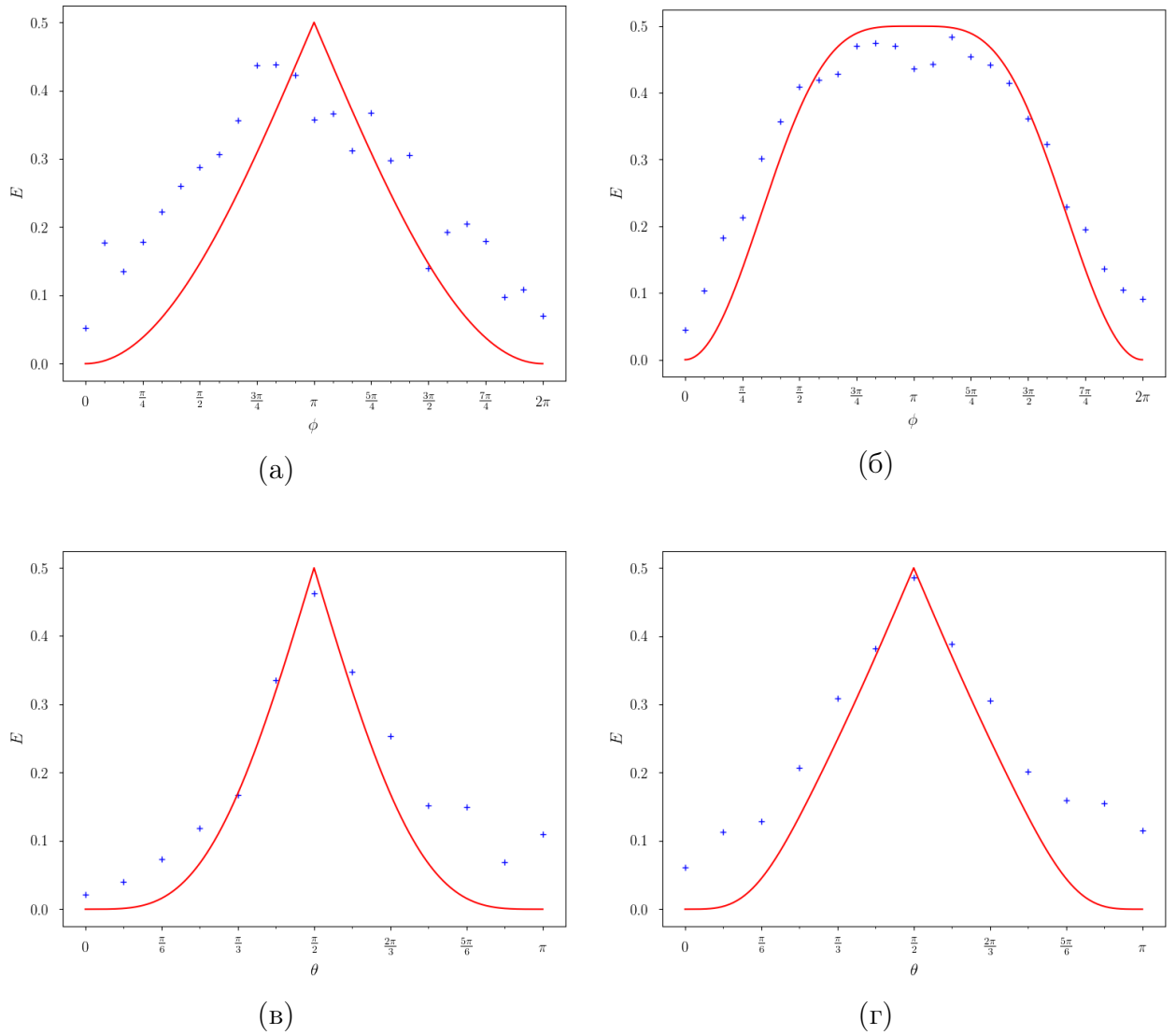


Рис. 9: Результати кількісної оцінки геометричної міри запутаності на квантовому комп'ютері *ibmq_athens* (позначені хрестиками) та відповідні аналітичні результати (відображені суцільною кривою) для кубітів $q[0]$ (а), $q[1]$ (б) з іншими кубітами в стані (3.13) і для кубітів $q[0]$ (в), $q[2]$ (г) з іншими кубітами в стані (3.17).

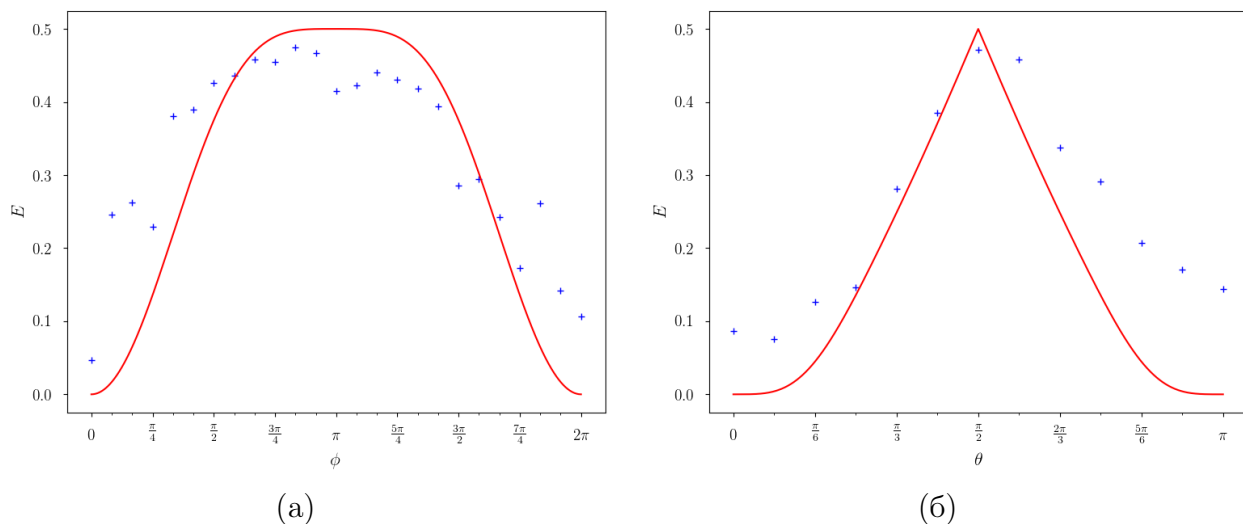


Рис. 10: Результати кількісної оцінки геометричної міри запутаності на квантовому комп'ютері *ibmq_athens* (позначені хрестиками) та відповідні аналітичні результати (відображені суцільною кривою) для кубіта $q[1]$ (а) з іншими кубітами в стані (3.11) і для кубіта $q[0]$ з іншими кубітами в стані (3.15).

Висновки

У рамках наших досліджень було детально розглянуто заплутані графові стани системи багатьох кубітів, що генеруються операторами контрольованого зсуву фази для початкового факторизованого стану системи, в якому всі кубіти перебувають у довільних однакових станах. З метою здійснення кількісної оцінки заплутаності кубітів в цих станах ми спиралися на поняття геометричної міри заплутаності. Вперше було отримано відповідний аналітичний вираз для геометричної міри заплутаності деякого кубіта з рештою системи. Ми проаналізували залежність цієї величини від параметрів графового стану θ , ϕ та закономірностей взаємодії кубіта з іншими кубітами досліджуваної багаточастинкової системи, що визначаються будовою відповідного графа. Ми дійшли до висновку, що геометрична міра заплутаності кубіта з рештою системи залежить від ступеня відповідного йому вузла графа, тобто від кількості кубітів, з якими він вступає у взаємодію. Також ми зауважили, що ця величина не змінюється зі зміною знака параметра ϕ , який визначає характер взаємодії між кубітами.

Було запропоновано квантові протоколи для приготування двох підкласів досліджуваних графових станів на квантовому комп'ютері: а) $\theta = \pi/2$, $0 \leq \phi < 2\pi$, б) $\phi = \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Для кожного випадку розглядалися чотири конкретні стани, що описуються графами різної структури. Серед них – граф, що повністю відтворює архітектуру квантового процесора компанії IBM *ibmq_athens*, та повний граф. Відповідно до стандартного протоколу, ми розраховували геометричну міру заплутаності кубітів, яким відповідають вузли графа різного ступеня (1, 2, 3, 4), з іншими кубітами у цих станах на квантовому комп'ютері. Отримані результати квантових обчислень досить добре узгоджуються з теоретичними результатами. На графіках залежності геометричної міри заплутаності від параметрів графового стану можна простежити зростання відхилення експериментальних даних від аналітичної кривої з додаванням в граф, що зображає досліджуваний стан, ребер, які не накладаються на архітектуру квантового комп'ютера. Таке відхилення можна пояснити накопиченням похибки на додаткових операторах, що використовуються для реалізації відповідних квантових схем.

Список використаних джерел

1. Schrödinger E. Discussion of Probability Relations between Separated Systems // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1935. Vol. 31, No. 4. P. 555-563.
2. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // Phys. Rev. 1935. Vol. 47. P. 777-780.
3. Horodecki R., Horodecki P., Horodecki M., Horodecki K. Quantum Entanglement // Rev. Mod. Phys. 2009. Vol. 81, No. 2. P. 865-942.
4. DiVincenzo D. P. Quantum Computation // Science. 1995. Vol. 270, No. 5234. P. 255–261.
5. Bennett, C. H., Brassard, G., Crepeau, C., Jozsa, R., Peres, A., Wootters, W. K. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70, No. 13. P. 1895-1899.
6. Ekert, A. K. Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 67, No. 6. P. 661-663.
7. Hill S., Wootters W. K., Entanglement of a Pair of Quantum Bits // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, No. 26. P. 5022-5025.
8. Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Conditions // Phys. Lett. A. 1996. Vol. 223, No. 1-2. P. 1-8.
9. Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 97, No. 8. P. 1413-1415.
10. Wootters W. K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 80, No. 10. P. 2245-2248.
11. Shor P. W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer // SIAM J. Comput. 1997. Vol. 26, No. 5. P. 1484–1509.

12. Barends R., Kelly J., Megrant A. et al. Superconducting Quantum Circuits at the Surface Code Threshold for Fault Tolerance // *Nature*. 2014. Vol. 508. P. 500–503.
13. Wang, Y., Li, Y., Yin, Zq. et al. 16-qubit IBM Universal Quantum Computer can be Fully Entangled // *npj Quantum Inf.* 2018. Vol. 4. Art. 46. 6 p.
14. Mooney G. J., Hill C. D., Hollenberg L. C. L. Entanglement in a 20-Qubit Superconducting Quantum Computer // *Sci. Rep.* 2019. Vol. 9. Art. 13465. 8 p.
15. Feynman R. P. Simulating Physics with Computers // *Int. J. Theor. Phys.* 1982. Vol. 21, No. 6-7. P. 467–488.
16. Lloyd S. Universal Quantum Simulators // *Science*. 1996. Vol. 273, No. 5278. P. 1073-1078.
17. Buluta I., Nori F. Quantum Simulators // *Science*. 2009. Vol. 326, No. 5949. P. 108-111.
18. Hein M., Dür W., Eisert J., Raussendorf R., Nest M., Briegel H. J. Entanglement in Graph States and its Applications. // *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*. 2006. Vol. 162. P. 115-218.
19. Briegel H. J., Raussendorf R. Persistent Entanglement in Arrays of Interacting Particles. // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, No. 910. P. 910-913.
20. Raussendorf R., Briegel H. J. A One-Way Quantum Computer // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, No. 22. P. 5188-5191.
21. Raussendorf R., Harrington J. Fault-Tolerant Quantum Computation with High Threshold in Two Dimensions // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 98, No. 19. Art. 190504. 4 p.
22. Dür W., Vidal G., Cirac J. Three Qubits can be Entangled in Two Inequivalent Ways // *Phys. Rev. A*. 2000. Vol. 62, No. 6. 12 p.
23. Hein M., Eisert J., Briegel H. J. Multi-party Entanglement in Graph States. // *Phys. Rev. A*. 2004. Vol. 69, No. 062311. 20 p.

24. West D. B. Introduction to Graph Theory. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001. 610 p.
25. Shimony A. Degree of Entanglement // Ann. N.Y. Acad. Sci. 1995. Vol. 755, No. 1. P. 675-679.
26. Frydryszak A.M., Samar M.I., Tkachuk V.M. Quantifying Geometric Measure of Entanglement by Mean Value of Spin and Spin Correlations with Application to Physical Systems. // Eur. Phys. J. 2017. Vol. 71. Art. 233. 8 p.
27. Ткачук В. М. Фундаментальні проблеми квантової механіки : навчальний посібник. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. 144 с.
28. Sen(De) A., Sen U. Bound Genuine Multisite Entanglement: Detector of Gapless-Gapped Quantum Transitions in Frustrated Systems. // arXiv preprint quant-ph/1002.1253. 5 p.
29. Sen(De) A., Sen U. Channel Capacities versus Entanglement Measures in Multiparty Quantum States // Phys. Rev. A. 2010. Vol. 81, No. 1, Art. 012308. 6 p.
30. Gnatenko Kh.P., Tkachuk V.M. Entanglement of Graph States of Spin System with Ising Interaction and its Quantifying on IBM's Quantum Computer // Phys. Lett A. 2021. Vol. 396. Art. 127248. 10 p.
31. Kuzmak A.R., Tkachuk V.M. Detecting Entanglement by the Mean Value of Spin on a Quantum Computer // Phys. Lett. A. 2020. Vol. 384, No. 24. Art. 126579. 6 p.
32. IBM Quantum. <https://quantum-computing.ibm.com/>, 2021.
33. Wilson E., Singh S., Muelle F. Just-in-time Quantum Circuit Transpilation Reduces Noise // 2020 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE), October 12-16, 2020, Denver, CO, USA. 11 p.