

Львівський національний університет імені Івана Франка
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

на тему:

"Дослідження Гейзенбергівських спінових систем на квантовому
комп'ютері"

Виконав студент ФзФм-61
спеціальності "Фізика та астрономія"
Тимик С. М.

Керівник
докт. ф.-м. н. Ткачук В. М.

Рецензент
докт. ф.-м. н. Держко О. В.

м. Львів - 2021 р.

Анотація

У роботі досліджено стани, породжені оператором еволюції з гамільтоніаном Гейзенберга. Знайдено вираз, який описує еволюцію системи з часом та отримано аналітичний вираз для геометричної міри запутаності. З використанням квантового комп'ютера IBM Q quito та програми, написаної на мові *Python*, здійснено кількісну оцінку геометричної міри запутаності. Отримані результати порівняні із теоретичними та побудовано відповідні графіки.

Abstract

In this paper, we analyzed the states generated by the evolution operator with the Heisenberg Hamiltonian. An expression is found that describes the evolution of the system with time, and an analytical expression for the geometric measure of entanglement of a spin with other spins is obtained. Geometric entanglement is quantified using an IBM Q quito quantum computer and a *Python* program. The obtained results are compared with theoretical ones and the corresponding graphs are built.

Зміст

1. Вступ	4
1.1. Квантова інформація та квантові комп'ютери	4
1.2. Квантові логічні елементи	5
2. Еволюція спінової системи	8
2.1. Гамільтоніан Гейзенберга та оператор еволюції	8
2.2. Визначення середніх значень матриць Паулі	10
2.3. Геометрична міра заплутаності спінової системи	12
2.3.1. $\theta = 0$	12
2.3.2. $\theta = \pi/2$	12
2.3.3. $\theta = \pi$	13
2.3.4. $\theta = 2\pi$	13
2.4. 3D візуалізація залежності заплутаності E від кутів θ та φ . . .	14
3. Кількісна оцінка геометричної міри заплутаності спінової системи на квантовому комп'ютері IBM	16
3.1. Реалізація оператора еволюції на квантовому комп'ютері з використанням квантових логічних елементів та проведення вимірів	16
3.2. Програма для автоматичного виміру середніх значень матриць Паулі та побудови графіка залежності	20
3.3. Результати вимірів	20
4. Висновки	23
Література	26
. Додаток А	27
. Додаток Б	29

1. Вступ

1.1. Квантова інформація та квантові комп'ютери

Ще у 80-х роках минулого століття з'явилась ідея створення таких обчислювальних приладів, а саме квантових комп'ютерів, які б працювали згідно з принципів квантової механіки.[1] [5] Важливим є той факт, що такі квантові комп'ютери повинні базуватись на квантових властивостях мікросхем. Адже закон Мура стверджує, що кількість електронних елементів в одиниці об'єму класичного комп'ютера з кожним роком стає вдвічі більшою, внаслідок чого досягається межа при якій квантові флуктуації вже стають суттєвими. Як результат, класичні електронні елементи починають працювати нестабільно.

Алгоритм дії квантового комп'ютера складається з наступних послідовних операцій: спочатку задається початковий стан; після чого відбуваються певні обчислення над цим початковим станом за допомогою унітарних операторів; і на кінець одержується результат, що являє собою певне вимірювання, яке здійснюється над кінцевим станом.

Квантовий аналог класичного біту - це квантовий біт або кубіт. Кубіт є базовою одиницею квантової інформації. Припустимо, що числам 0, 1 відповідають квантові стани $|0\rangle$, $|1\rangle$ - базисні вектори простору станів квантового біта. В протиставленні класичному біту, який може бути лише у стані 0 або у стані 1, кубіт може бути в станах $|0\rangle$ і $|1\rangle$ одночасно. Це є наслідком принципу суперпозиції.

Наведемо приклад перебування у суперпозиційному стані двох кубітів. Тут закодовано одночасно 4 двікові числа 00, 01, 10, 11 (тобто 0, 1, 2, 3 для десяткової системи):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)(|0\rangle_2 + |1\rangle_2) = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

Аналогічно, стан суперпозиції n кубітів, в якому закодовано 2^n числа:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2^{n/2}}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)\dots(|0\rangle_n + |1\rangle_n) = \\ &= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} |x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle \end{aligned}$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -вимірний вектор, в якому x_i набуває лише значення 0 і 1.

Наслідком принципу суперпозиції є квантовий паралелізм. Використовуючи унітарні перетворення, квантовий комп'ютер опрацьовує інформацію, записану в n кубітах та одночасно працює з $2^{n/2}$ всіма можливими двійковими числами, які записані в цих n кубітах. Така властивість робить квантовий комп'ютер набагато ефективнішим для розв'язку ряду задач.

1.2. Квантові логічні елементи

Для реалізації унітарних операторів використовують квантові логічні елементи.

Оператор Адамара

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|]$$

у матричному представленні

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Дія оператора Адамара на базисні вектори:

$$\hat{H} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad \hat{H} |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Оператор зсуву фази

$$\hat{P}(\phi) = |0\rangle\langle 0| + e^{i\phi} |1\rangle\langle 1|$$

у матричному представленні

$$\hat{P}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

Дія оператора зміни фази на базисні вектори:

$$\hat{P} |x\rangle = e^{i\phi x} |x\rangle, \quad x = 0, 1$$

Дія цього оператора на будь-який вектор стану одного кубіта:

$$\hat{P}(\phi) = (a|0\rangle + b|1\rangle) = a|0\rangle + be^{i\phi}|1\rangle$$

Оператор заперечення (NOT-оператор)

$$\hat{U}_{NOT} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$$

Матричний вигляд цього оператора

$$\hat{U}_{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x$$

Дія оператора заперечення на базисні вектори:

$$\hat{U}_{NOT}|0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{U}_{NOT}|1\rangle = |0\rangle$$

Контрольоване заперечення (XOR або CNOT)

$$\hat{U}_{XOR} = |0\rangle_1\langle 0|_2 + |1\rangle_1\langle 1|_2 \hat{U}_{NOT2}$$

У двоспіновому базисі $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ оператор XOR зображений наступною матрицею:

$$\hat{U}_{XOR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Оператор XOR заперечує стан другого кубіта, якщо перший кубіт знаходиться у стані $|1\rangle$; не змінює стан другого кубіта, якщо перший перебуває в стані $|0\rangle$.

Оператор контрольованого зсуву фази

$$\hat{B}(\phi) = |0\rangle_1\langle 0|_2 + |1\rangle_1\langle 1|_2 \hat{P}_2(\phi)$$

в даному випадку одиничний оператор \hat{I}_2 і $\hat{P}_2(\phi)$ діють на стан другого кубіта. Як і у випадку оператора XOR, тут дія оператора зсуву фази на стан другого кубіта котролюється станом першого кубіта.

Матричне представлення оператора контрольованого зсуву фази:

$$\hat{B}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

Оператор $\mathbf{RY}(\theta)$

Оператор $\mathbf{RY}(\theta)$ є одним із операторів повороту. Матричне представлення даного оператора: $\mathbf{RY}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$.

Оператор $\mathbf{RX}(\theta)$

Оператор $\mathbf{RX}(\theta)$ є одним із операторів повороту. Матричне представлення даного оператора: $\mathbf{RX}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$.

2. Еволюція спінової системи

Наше завдання полягає в тому, щоб знайти аналітичний вираз для геометричної міри заплутаності Гейзенберґівської спінової систем та порівняти результати із практичними вимірами на квантовому комп'ютері ІВМ. В праці [11] показано, що геометрична міра заплутаності спіну n із системою на пряму пов'язана із середнім значенням спіну. Ми можемо записати:

$$E(|\psi\rangle) = \frac{1}{2}(1 - |\langle\vec{\sigma}\rangle|), \quad (1)$$

де $|\langle\vec{\sigma}\rangle| = \sqrt{\langle\vec{\sigma}\rangle^2}$ та оператор $\vec{\sigma} = \mathbf{i}\sigma^x + \mathbf{j}\sigma^y + \mathbf{k}\sigma^z$. Отже, вимірюючи середнє значення спіну, можна знайти геометричну міру заплутаності.

Розпочнімо із знаходження виразу для стану системи, який описує її еволюцію з часом.

2.1. Гамільтоніан Гейзенберґа та оператор еволюції

Для опису феромагнітних та антиферомагнітних упорядкувань використовують вираз енергії обмінної взаємодії спінів, який був запропонований Діраком та отримав назву гамільтоніан Гейзенберґа:

$$\hat{H} = J_{12}\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2, \quad (2)$$

де $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$ - матриці Паулі, J_{12} - обмінний інтеграл. Початковий стан системи представимо у вигляді:

$$|\psi_0\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\downarrow\rangle, \quad (3)$$

де стан $|\uparrow\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а стан $|\downarrow\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подіємо оператором еволюції

$\hat{S}(t) = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}$ на стан $|\psi_0\rangle$:

$$\begin{aligned}
|\psi_t\rangle &= \hat{S}(t) |\psi_0\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} |\psi_0\rangle = e^{-i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} |\psi_0\rangle = \\
&= e^{-i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\downarrow\rangle \right] = \\
&= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} |\uparrow\uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} |\uparrow\downarrow\rangle,
\end{aligned} \tag{4}$$

де $\varphi = \frac{J}{\hbar}t$. Розпишемо дію оператора $e^{-i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2}$ на стани $|\uparrow\uparrow\rangle$ та $|\uparrow\downarrow\rangle$. При цьому нагадаємо результати дії матриць Паулі:

$$\begin{aligned}
\sigma^x |\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle, \sigma^x |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \\
\sigma^y |\uparrow\rangle &= i |\downarrow\rangle, \sigma^y |\downarrow\rangle = -i |\uparrow\rangle \\
\sigma^z |\uparrow\rangle &= |\uparrow\rangle, \sigma^z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle
\end{aligned}$$

- $$e^{-i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} |\uparrow\uparrow\rangle = e^{-i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{-i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{-i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\uparrow\uparrow\rangle = [\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^x\sigma_2^x][\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^y\sigma_2^y][\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^z\sigma_2^z] |\uparrow\uparrow\rangle = e^{-i\varphi} |\uparrow\uparrow\rangle$$
 - $[\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^z\sigma_2^z] |\uparrow\uparrow\rangle = e^{-i\varphi} |\uparrow\uparrow\rangle$
 - $[\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^y\sigma_2^y] e^{-i\varphi} |\uparrow\uparrow\rangle = e^{-i\varphi} [\cos(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle + i \sin(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle]$
 - $[\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^x\sigma_2^x] e^{-i\varphi} [\cos(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle + i \sin(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle] = e^{-i\varphi} \times$
 $\times \cos(\varphi) [\cos(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle - i \sin(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle] + i \sin(\varphi) [\cos(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle - i \sin(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle] =$
 $= e^{-i\varphi} |\uparrow\uparrow\rangle$
 - $-\ [\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^x\sigma_2^x] |\uparrow\uparrow\rangle = \cos(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle - i \sin(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle$
 - $-\ [\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^x\sigma_2^x] |\downarrow\downarrow\rangle = \cos(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle - i \sin(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle$
- $$e^{-i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} |\uparrow\downarrow\rangle = e^{-i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{-i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{-i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\uparrow\downarrow\rangle = [\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^x\sigma_2^x][\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^y\sigma_2^y][\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^z\sigma_2^z] |\uparrow\downarrow\rangle = e^{i\varphi} [\cos(2\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(2\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle]$$
 - $[\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^z\sigma_2^z] |\uparrow\downarrow\rangle = e^{i\varphi} |\uparrow\downarrow\rangle$
 - $[\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^y\sigma_2^y] e^{i\varphi} |\uparrow\downarrow\rangle = e^{i\varphi} [\cos(\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle]$
 - $[\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^x\sigma_2^x] e^{i\varphi} [\cos(\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle] = e^{i\varphi} \times$
 $\times \cos(\varphi) [\cos(\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle] - i \sin(\varphi) [\cos(\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle - i \sin(\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle] =$
 $= e^{i\varphi} [\cos(2\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(2\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle]$
 - $-\ [\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^x\sigma_2^x] |\uparrow\downarrow\rangle = \cos(\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle$
 - $-\ [\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)\sigma_1^x\sigma_2^x] |\downarrow\uparrow\rangle = \cos(\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle - i \sin(\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle$

Підставимо отримані вирази у формулу (4):

$$\begin{aligned} |\psi_t\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} |\uparrow\uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} |\uparrow\downarrow\rangle = \\ &= e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(2\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(2\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle] \end{aligned} \quad (5)$$

Ми отримали стан системи, який описує її еволюцію з часом. Дану формулу (5) ми використаємо при подальшому знаходженні середніх значень матриць Паулі.

2.2. Визначення середніх значень матриць Паулі

Визначимо середні значення матриць Паулі. Для подальших розрахунків візьмемо спін з індексом $n = 1$:

$$\langle \psi_t | \sigma_1^x | \psi_t \rangle \quad (6)$$

$$\langle \psi_t | \sigma_1^y | \psi_t \rangle \quad (7)$$

$$\langle \psi_t | \sigma_1^z | \psi_t \rangle \quad (8)$$

, де $|\psi_t\rangle = e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(2\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(2\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle]$, $\langle \psi_t | = \langle \psi_0 | e^{i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} = \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z}$. Розглянемо детальніше обчислення кожної з компонент.

- $$\begin{aligned} 1. \langle \psi_t | \sigma_1^x | \psi_t \rangle &= \langle \psi_0 | e^{i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} \sigma_1^x e^{-i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | e^{i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} \sigma_1^x (e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + \\ &e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(2\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(2\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle]) = \\ &= \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} (e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(2\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle - \\ &- i \sin(2\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle]) = e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\downarrow\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \\ &\times \cos(2\varphi) \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\downarrow\downarrow\rangle - i e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \\ &\times \sin(2\varphi) \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\uparrow\uparrow\rangle = \sin(\theta) \sin^2(2\varphi) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 2. \langle \psi_t | \sigma_1^y | \psi_t \rangle &= \langle \psi_0 | e^{i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} \sigma_1^y e^{-i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | e^{i\varphi\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2} \sigma_1^y (e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + \\ &e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(2\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(2\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle]) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} (ie^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\uparrow\rangle + ie^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(2\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle + \\
&+ i \sin(2\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle]) = ie^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\downarrow\uparrow\rangle + ie^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \\
&\times \cos(2\varphi) \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\downarrow\downarrow\rangle - e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \\
&\times \sin(2\varphi) \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\uparrow\uparrow\rangle = -\sin(\theta) \sin(2\varphi) \cos(2\varphi)
\end{aligned}$$

$$a. e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\downarrow\uparrow\rangle = e^{-i\varphi} (\cos(2\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle + i \sin(2\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle)$$

- $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^z \sigma_2^z] |\downarrow\uparrow\rangle = e^{-i\varphi} |\downarrow\uparrow\rangle$
- $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^y \sigma_2^y] e^{-i\varphi} |\downarrow\uparrow\rangle = e^{-i\varphi} [\cos(\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle + i \sin(\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle]$
- $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^x \sigma_2^x] e^{-i\varphi} [\cos(\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle + i \sin(\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle] = e^{-i\varphi} (\cos(2\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle + i \sin(2\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle)$
 - $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^x \sigma_2^x] |\downarrow\uparrow\rangle = \cos(\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle + i \sin(\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle$
 - $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^x \sigma_2^x] |\uparrow\downarrow\rangle = \cos(\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle + i \sin(\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle$

$$b. e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\downarrow\downarrow\rangle = e^{i\varphi} |\downarrow\downarrow\rangle$$

- $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^z \sigma_2^z] |\downarrow\downarrow\rangle = e^{i\varphi} |\downarrow\downarrow\rangle$
- $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^y \sigma_2^y] e^{i\varphi} |\downarrow\downarrow\rangle = e^{i\varphi} [\cos(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle - i \sin(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle]$
- $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^x \sigma_2^x] e^{i\varphi} [\cos(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle - i \sin(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle] = e^{i\varphi} |\downarrow\downarrow\rangle$
 - $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^x \sigma_2^x] |\downarrow\downarrow\rangle = \cos(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle + i \sin(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle$
 - $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^x \sigma_2^x] |\uparrow\uparrow\rangle = \cos(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle + i \sin(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle$

$$c. e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\uparrow\uparrow\rangle = e^{i\varphi} |\uparrow\uparrow\rangle$$

- $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^z \sigma_2^z] |\uparrow\uparrow\rangle = e^{i\varphi} |\uparrow\uparrow\rangle$
- $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^y \sigma_2^y] e^{i\varphi} |\uparrow\uparrow\rangle = e^{i\varphi} [\cos(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle - i \sin(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle]$
- $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^x \sigma_2^x] e^{i\varphi} [\cos(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle - i \sin(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle] = e^{i\varphi} |\uparrow\uparrow\rangle$
 - $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^x \sigma_2^x] |\uparrow\uparrow\rangle = \cos(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle + i \sin(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle$
 - $[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \sigma_1^x \sigma_2^x] |\downarrow\downarrow\rangle = \cos(\varphi) |\downarrow\downarrow\rangle + i \sin(\varphi) |\uparrow\uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}
3. \langle \psi_t | \sigma_1^z | \psi_t \rangle &= \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\uparrow\uparrow\rangle = \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} (e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + \\
&e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(2\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(2\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle]) = \\
&= \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} (e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(2\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle + \\
&+ i \sin(2\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle]) = e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} |\uparrow\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \cos(2\varphi) \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} | \uparrow\downarrow \rangle + ie^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \\ & \times \sin(2\varphi) \langle \psi_0 | e^{i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z} | \downarrow\uparrow \rangle = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos^2(2\varphi) - \sin^2(2\varphi)] \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \langle \psi_t | \sigma_1^x | \psi_t \rangle &= \sin(\theta) \sin^2(2\varphi) \\ \langle \psi_t | \sigma_1^y | \psi_t \rangle &= -\sin(\theta) \sin(2\varphi) \cos(2\varphi) \\ \langle \psi_t | \sigma_1^z | \psi_t \rangle &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos^2(2\varphi) - \sin^2(2\varphi)] = \\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(4\varphi) \end{aligned} \quad (9)$$

2.3. Геометрична міра заплутаності спінової системи

Запишемо вираз для знаходження міри заплутаності системи, враховуючи отримані результати (9):

$$\begin{aligned} E(|\psi_t\rangle) &= \frac{1}{2}(1 - |\langle \vec{\sigma} \rangle|) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\langle \psi_t | \sigma_1^x | \psi_t \rangle^2 + \langle \psi_t | \sigma_1^y | \psi_t \rangle^2 + \langle \psi_t | \sigma_1^z | \psi_t \rangle^2}) = \\ &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\sin^2(\theta) \sin^2(2\varphi) + [\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(4\varphi)]^2}) \end{aligned} \quad (10)$$

Виберемо кути $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$ та побудуємо відповідні графіки.

2.3.1. $\theta = 0$

Маємо:

$$E(|\psi_t\rangle) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\sin^2(\theta) \sin^2(2\varphi) + [\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(4\varphi)]^2}) = 0 \quad (11)$$

2.3.2. $\theta = \pi/2$

Маємо:

$$\begin{aligned} E(|\psi_t\rangle) &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\sin^2(\theta) \sin^2(2\varphi) + [\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(4\varphi)]^2}) = \\ &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - [\cos(2\varphi) \sin(2\varphi)]^2}) \end{aligned} \quad (12)$$

2.3.3. $\theta = \pi$

Маємо:

$$\begin{aligned} E(|\psi_t\rangle) &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\sin^2(\theta) \sin^2(2\varphi) + [\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2}) \cos(4\varphi)]^2}) = \\ &= \frac{1}{2}(1 - |\cos(4\varphi)|) \end{aligned} \quad (13)$$

2.3.4. $\theta = 2\pi$

Маємо:

$$E(|\psi_t\rangle) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\sin^2(\theta) \sin^2(2\varphi) + [\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2}) \cos(4\varphi)]^2}) = 0 \quad (14)$$

Відповідні графіки зображені нижче.

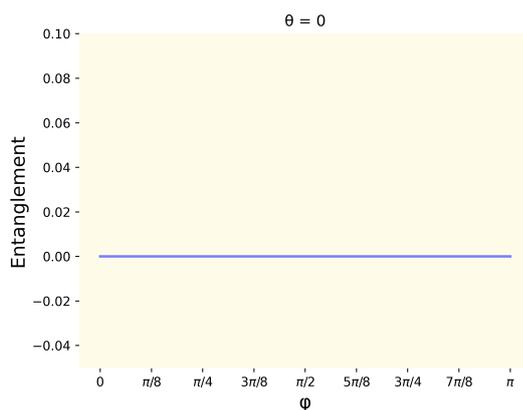


Рис. 1. Залежність запутаності E від кута φ при $\theta = 0$

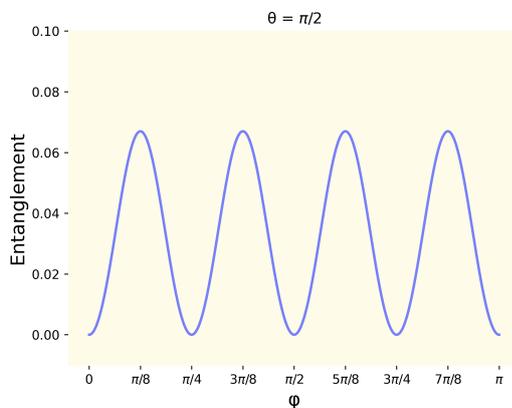


Рис. 2. Залежність запутаності E від кута φ при $\theta = \pi/2$

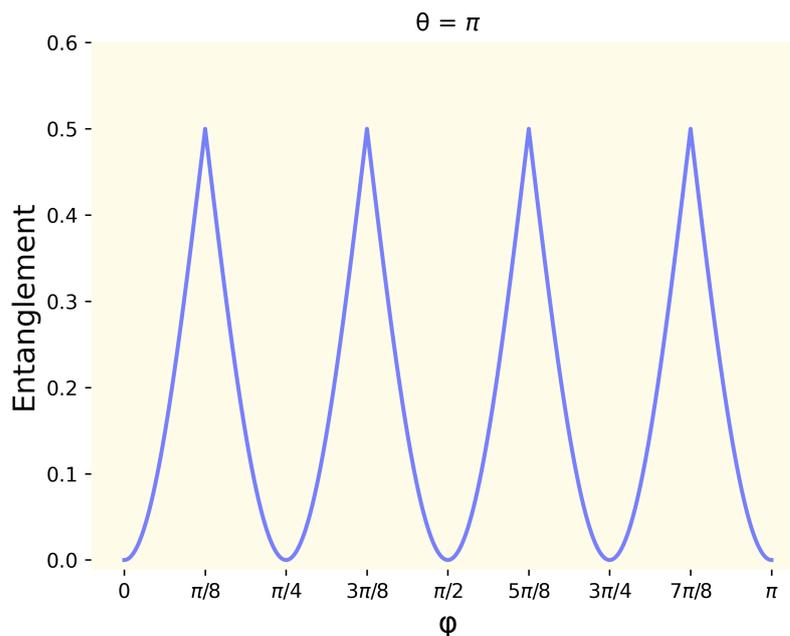


Рис. 3. Залежність заплутаності E від кута φ при $\theta = \pi$

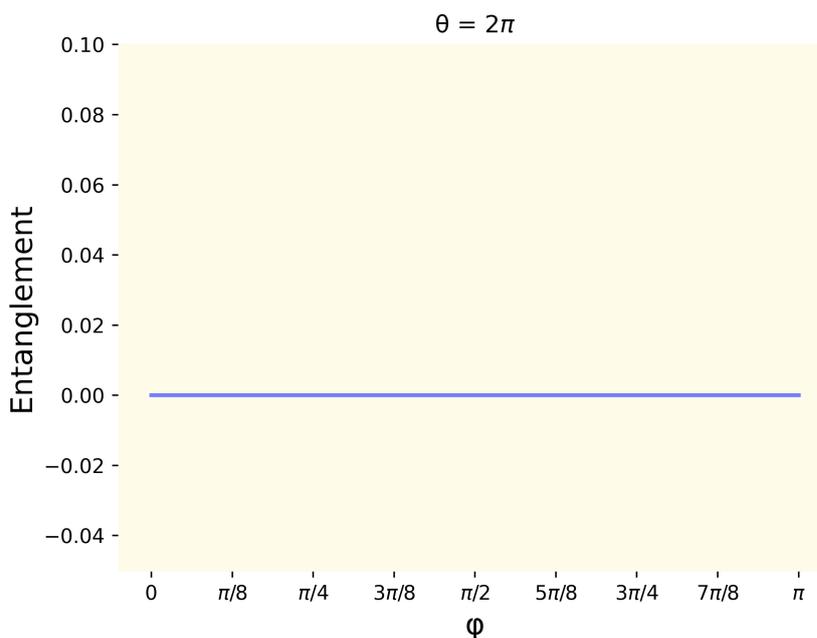


Рис. 4. Залежність заплутаності E від кута φ при $\theta = 2\pi$

2.4. 3D візуалізація залежності заплутаності E від кутів θ та φ

Побудуємо графік поверхні міри заплутаності. Нехай кут θ лежить в проміжку $[0, 2\pi]$, кут φ в проміжку $[0, \pi]$. Код для побудови поверхні показаний в додатку Б.

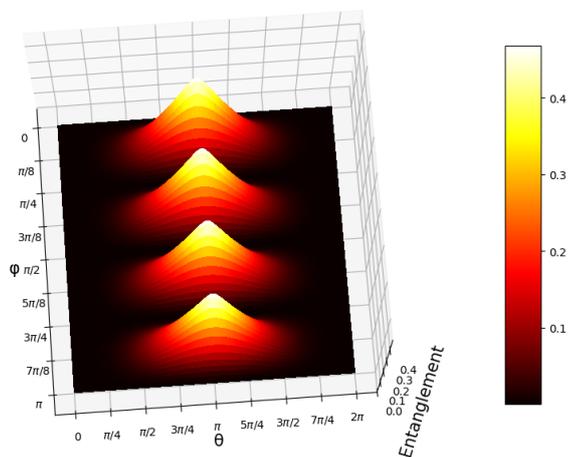
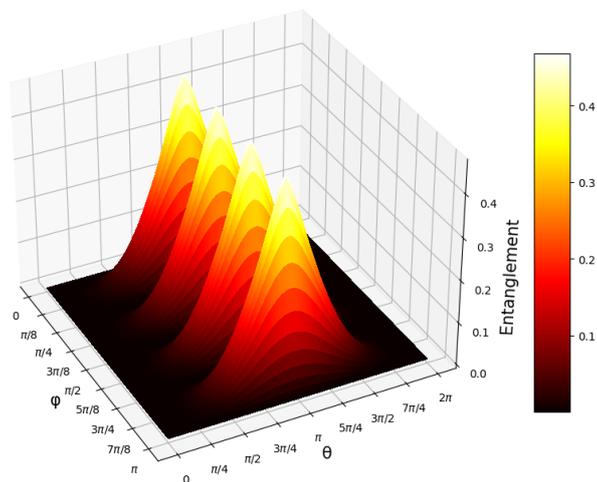
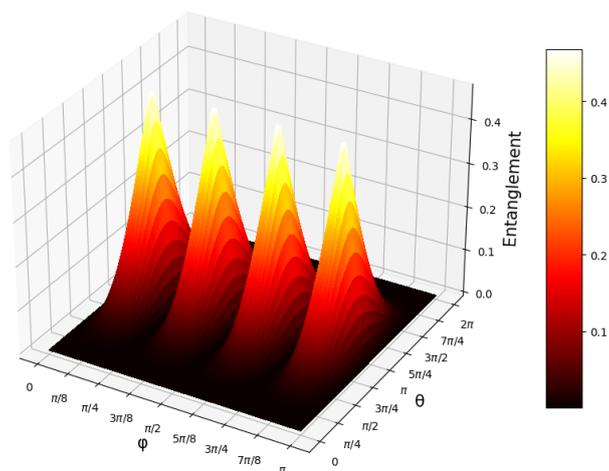


Рис. 5. Залежність заплутаності E від кута φ та θ

3. Кількісна оцінка геометричної міри запутаності спінової системи на квантовому комп'ютері ІВМ

Для кількісної оцінки геометричної міри запутаності [3] [4] [6] [7] необхідно підготувати початковий стан, реалізувати оператор еволюції та провести відповідні виміри середніх значень спінів. Початковий стан $|\psi_0\rangle$ реалізуємо за допомогою оператора $RY(\theta)$ (див. рис. 6).



Рис. 6. Схема для утворення початкового стану $|\psi_0\rangle$

3.1. Реалізація оператора еволюції на квантовому комп'ютері з використанням квантових логічних елементів та проведення вимірів

Для отримання стану (5) необхідно реалізувати дію оператора еволюції $\hat{S}(t) = e^{-i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x}$ на наш вихідний стан $|\psi_0\rangle$. Розіб'ємо оператор еволюції на три компоненти $\hat{S}(t) = e^{-i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} = e^{-i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x} e^{-i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y} e^{-i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z}$ та для кожної із компонент реалізуємо відповідну схему, користуючись квантовими логічними елементами.

1. $e^{-i\varphi\sigma_1^x\sigma_2^x}$

Даний оператор з точністю до фазового множника можна реалізувати у вигляді схеми $CX_{12}H_1P_1(2\varphi)H_1CX_{12}$. Тут CX_{12} - оператор $CNOT$, H_1 - оператор Адамара, $P_1(2\varphi)$ - фазовий оператор.

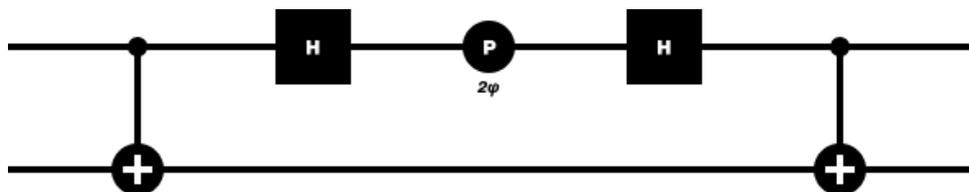


Рис. 7. Схема для x компоненти

2. $e^{-i\varphi\sigma_1^y\sigma_2^y}$

Даний оператор з точністю до фазового множника можна реалізувати у вигляді схеми $CX_{12}CZ_{12}H_1P_1(-2\varphi)H_1CZ_{12}CX_{12}$. Тут CX_{12} - оператор $CNOT$, CZ_{12} - оператор контрольованого Z , H_1 - оператор Адамара, $P_1(-2\varphi)$ - фазовий оператор.

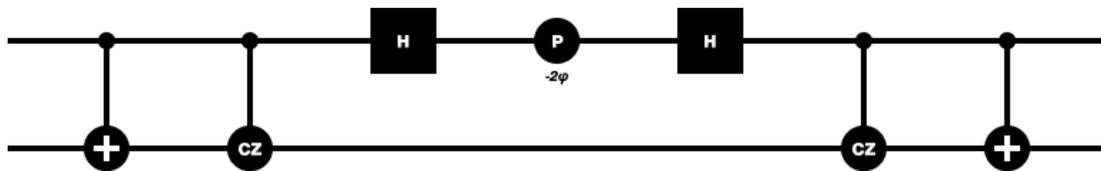


Рис. 8. Схема для y компоненти

3. $e^{-i\varphi\sigma_1^z\sigma_2^z}$

Даний оператор з точністю до фазового множника можна реалізувати у вигляді схеми $CP_{12}(-2\varphi)NOT_{12}CP_{12}(-2\varphi)NOT_{12}$. Тут $CP_{12}(-2\varphi)$ - оператор контрольованого зсуву фази, NOT_{12} - оператор заперечення.

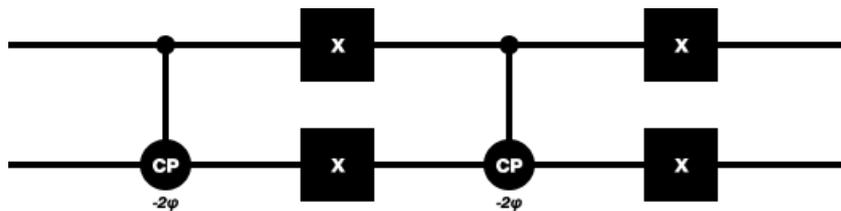


Рис. 9. Схема для z компоненти

Тоді загальну схему для оператора еволюції $\hat{S}(t)$ можна реалізувати у вигляді

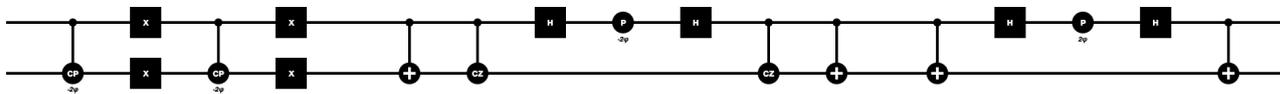


Рис. 10. Схема для оператора еволюції

Цю схему можна спростити

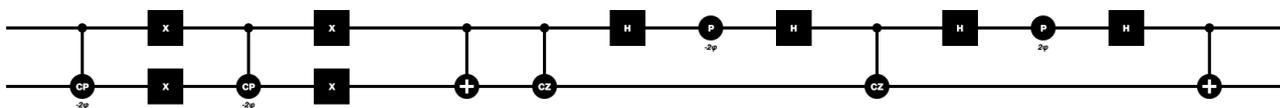


Рис. 11. Мінімізована схема для оператора еволюції

Протокол для вимірювання середніх значень матриць Паулі запропоновано у [17]. В цій роботі показано, що середні значення σ_1^x , σ_1^y , σ_1^z можуть бути представлені як ймовірності, які визначають результат виміру на базис $|0\rangle$, $|1\rangle$. А саме, ці середні значення можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}\langle \psi_t | \sigma_n^x | \psi_t \rangle &= \langle \tilde{\psi}_t^y | \sigma_n^z | \tilde{\psi}_t^y \rangle = |\langle \tilde{\psi}_t^y | 0 \rangle|^2 - |\langle \tilde{\psi}_t^y | 1 \rangle|^2, \\ \langle \psi_t | \sigma_n^y | \psi_t \rangle &= \langle \tilde{\psi}_t^x | \sigma_n^z | \tilde{\psi}_t^x \rangle = |\langle \tilde{\psi}_t^x | 0 \rangle|^2 - |\langle \tilde{\psi}_t^x | 1 \rangle|^2, \\ \langle \psi_t | \sigma_n^z | \psi_t \rangle &= \langle \psi_t | \sigma_n^z | \psi_t \rangle = |\langle \psi_t | 0 \rangle|^2 - |\langle \psi_t | 1 \rangle|^2,\end{aligned}\quad (15)$$

де $|\tilde{\psi}_t^x\rangle = e^{\frac{-i\pi\sigma_n^x}{4}} |\psi_t\rangle$, $|\tilde{\psi}_t^y\rangle = e^{\frac{-i\pi\sigma_n^y}{4}} |\psi_t\rangle$. Із цих співвідношень випливає, що перед виміром середнього значення $\langle \psi_t | \sigma_n^x | \psi_t \rangle$ необхідно повернути стан кубіту n навколо осі Y (тобто подіяти оператором $RY(\frac{\pi}{2})$), а перед виміром середнього значення $\langle \psi_t | \sigma_n^y | \psi_t \rangle$ необхідно повернути стан кубіту n навколо осі X (тобто подіяти оператором $RX(\frac{\pi}{2})$). Графічне представлення ($\mathbf{n=1}$) виміру середніх значень $\langle \psi_t | \sigma_n^x | \psi_t \rangle$, $\langle \psi_t | \sigma_n^y | \psi_t \rangle$, $\langle \psi_t | \sigma_n^z | \psi_t \rangle$ показано на рисунках нижче. U - оператор еволюції.

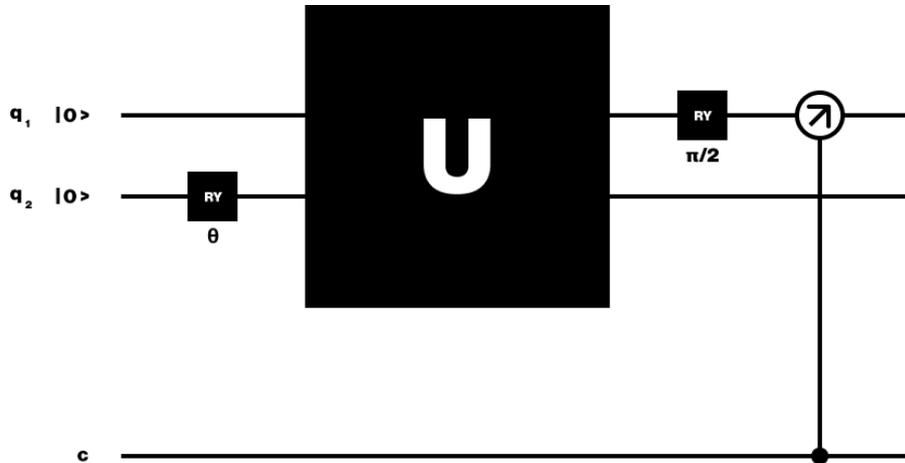


Рис. 12. Вимір $\langle \psi_t | \sigma_1^x | \psi_t \rangle$

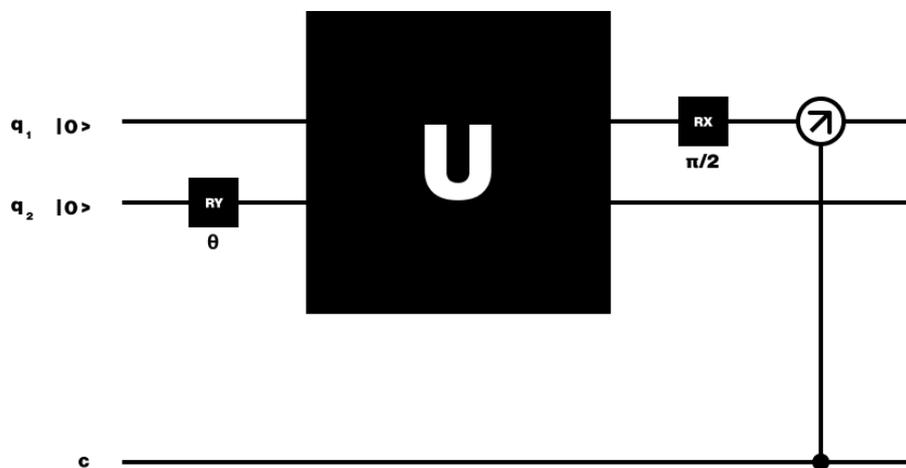


Рис. 13. Вимір $\langle \psi_t | \sigma_1^y | \psi_t \rangle$

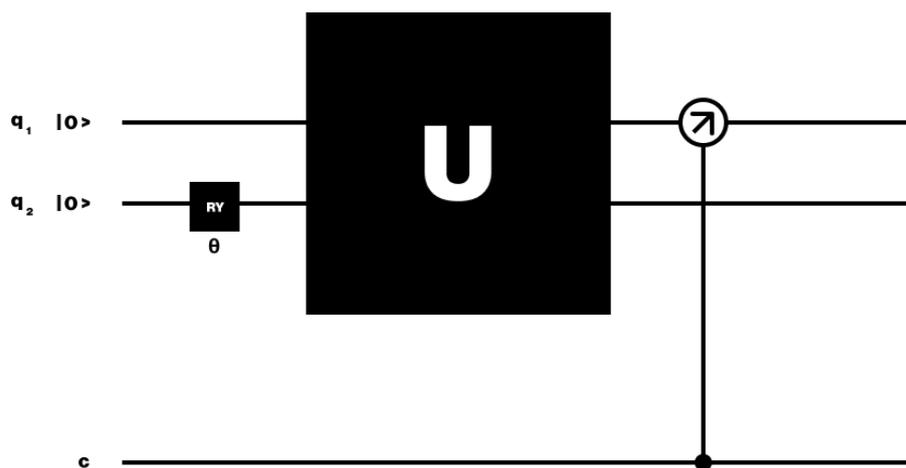


Рис. 14. Вимір $\langle \psi_t | \sigma_1^z | \psi_t \rangle$

3.2. Програма для автоматичного виміру середніх значень матриць Паулі та побудови графіка залежності

Для автоматичного виміру середніх значень матриць Паулі на квантовому комп'ютері IBM реалізовано програму на мові *Python* з використанням бібліотеки для квантового програмування *Qiskit* [12]. Задаючи початкове значення кута θ програма виконує автоматичні вимірювання середніх значень $\langle \psi_t | \sigma_1^x | \psi_t \rangle$, $\langle \psi_t | \sigma_1^y | \psi_t \rangle$, $\langle \psi_t | \sigma_1^z | \psi_t \rangle$ з кроком $\frac{\pi}{64}$ на проміжку $\varphi \in [0, \pi]$. Результатом програми є побудова та збереження графіка залежності заплутаності E від кута φ при фіксованому θ . Код програми доступний в додатку Б.

3.3. Результати вимірів

Усі виміри проведено на квантовому комп'ютері IBM Q quito. Структура IBM Q quito [13] показана на рис. 13. Калібрувальні параметри на момент виміру показані на рис. 16.

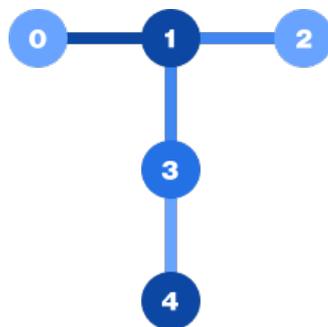


Рис. 15. Структура IBM Q quito

No Qubit	Readout Error	Frequency (GHz)	CNOT Error
Q0	8.960e-2	5.3	0_1:8.254e-3
Q1	2.180e-2	5.081	1_0:8.254e-3 1_2:1.074e-2 1_3:1.120e-2
Q2	2.250e-2	5.322	2_1:1.074e-2
Q3	2.100e-2	5.164	3_4:1.277e-2 3_1:1.120e-2
Q4	1.940e-2	5.053	4_3:1.277e-2

Рис. 16. Калібрувальні параметри

Відповідні графіки для кутів $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$ показані нижче.

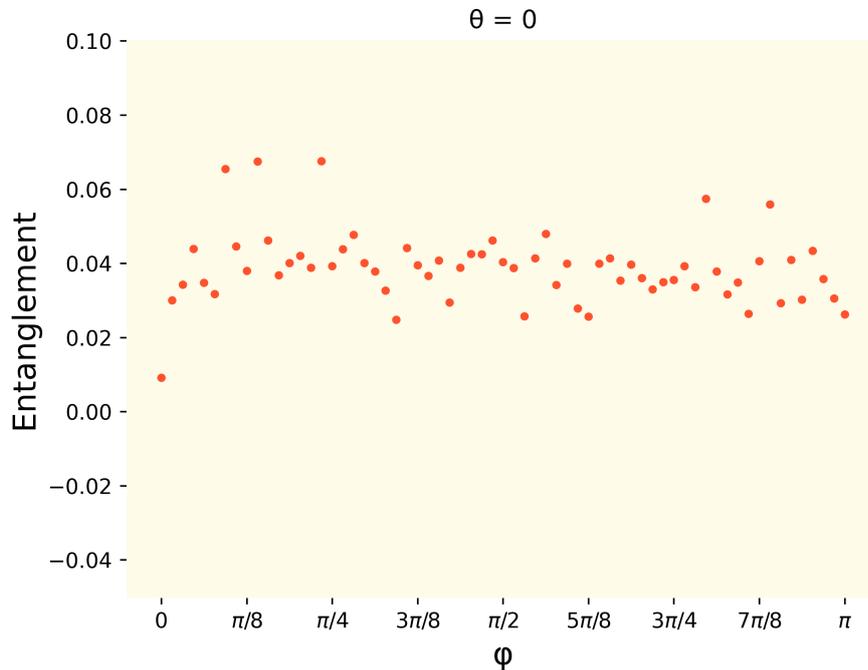


Рис. 17. Результат кількісного визначення геометричної міри запутаності при $\theta = 0$ на пристрої IBM Q qito

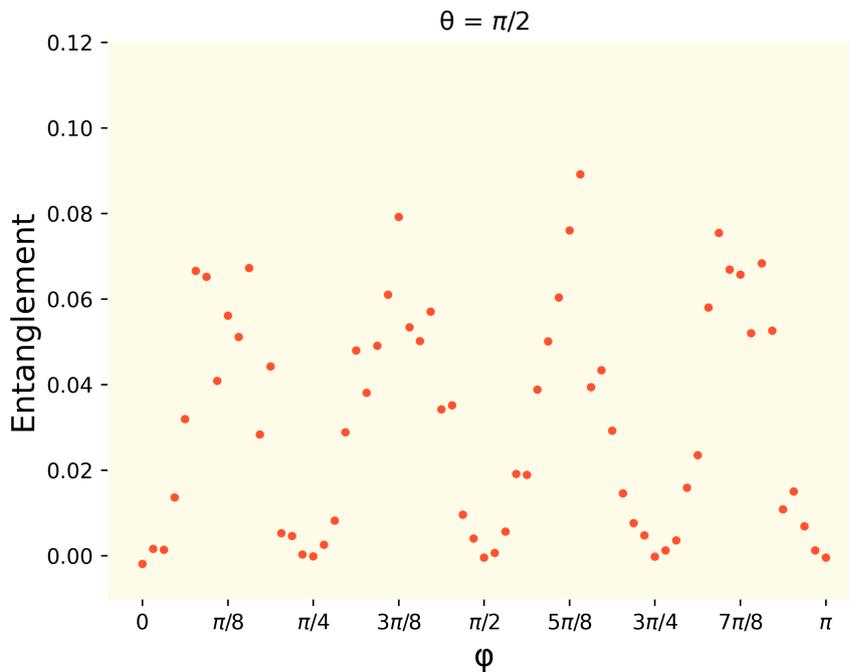


Рис. 18. Результат кількісного визначення геометричної міри запутаності при $\theta = \pi/2$ на пристрої IBM Q qito

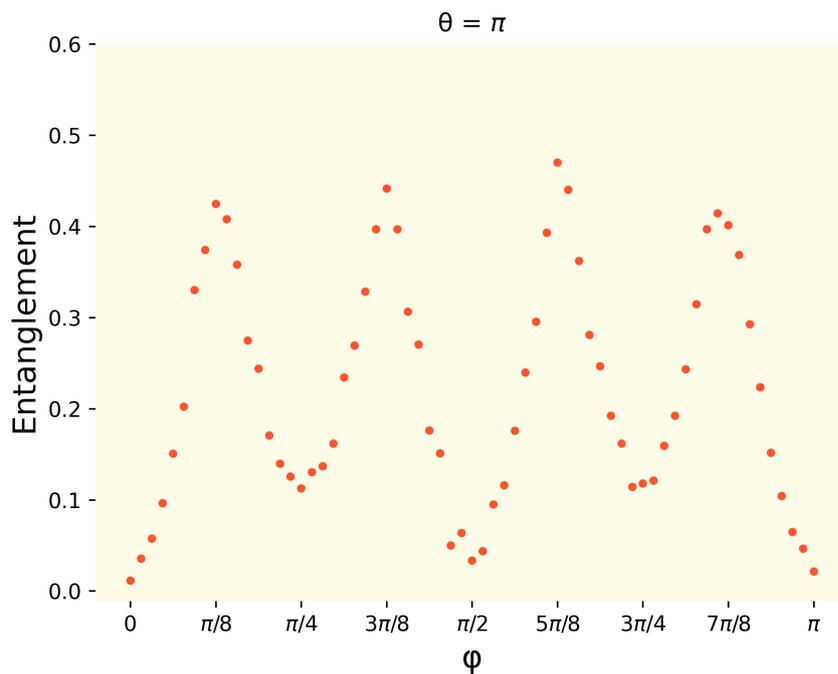


Рис. 19. Результат кількісного визначення геометричної міри заплутаності при $\theta = \pi$ на пристрої IBM Q quito

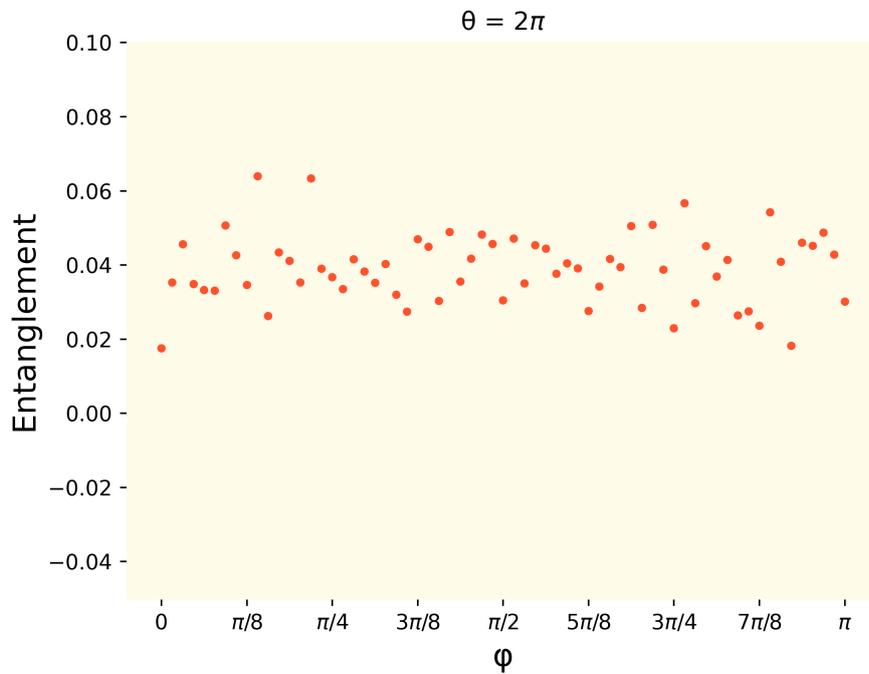


Рис. 20. Результат кількісного визначення геометричної міри заплутаності при $\theta = 2\pi$ на пристрої IBM Q quito

4. Висновки

В процесі роботи ми досліджували Гейзенбергівську спінову систему. А саме, отримали вираз який описує еволюцію цієї системи з часом:

$$|\psi_t\rangle = e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(2\varphi) |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin(2\varphi) |\downarrow\uparrow\rangle] \quad (16)$$

Отримали аналітичний вираз для геометричної міри заплутаності спіна із системою та побудували відповідні графіки залежності заплутаності E від кута φ для фіксованих кутів $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$ попередньо знайшовши вирази для середніх значень спіну:

$$\begin{aligned} \langle\psi_t|\sigma_1^x|\psi_t\rangle &= \sin(\theta) \sin^2(2\varphi) \\ \langle\psi_t|\sigma_1^y|\psi_t\rangle &= -\sin(\theta) \sin(2\varphi) \cos(2\varphi) \\ \langle\psi_t|\sigma_1^z|\psi_t\rangle &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(4\varphi) \end{aligned} \quad (17)$$

$$E(|\psi_t\rangle) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\sin^2(\theta) \sin^2(2\varphi) + [\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(4\varphi)]^2}\right) \quad (18)$$

Здійснили кількісну оцінку геометричної міри заплутаності, реалізувавши схему оператора еволюції $\hat{S}(t)$, використовуючи квантові логічні елементи та провівши виміри середніх значень спіну на квантовому комп'ютері IBM Q quito за допомогою програми, яка представлена в додатку Б, отримали результати, які наведені на рисунках нижче. Результати для кутів $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$, отримані на квантовому комп'ютері, добре корелюють з теоретичними.

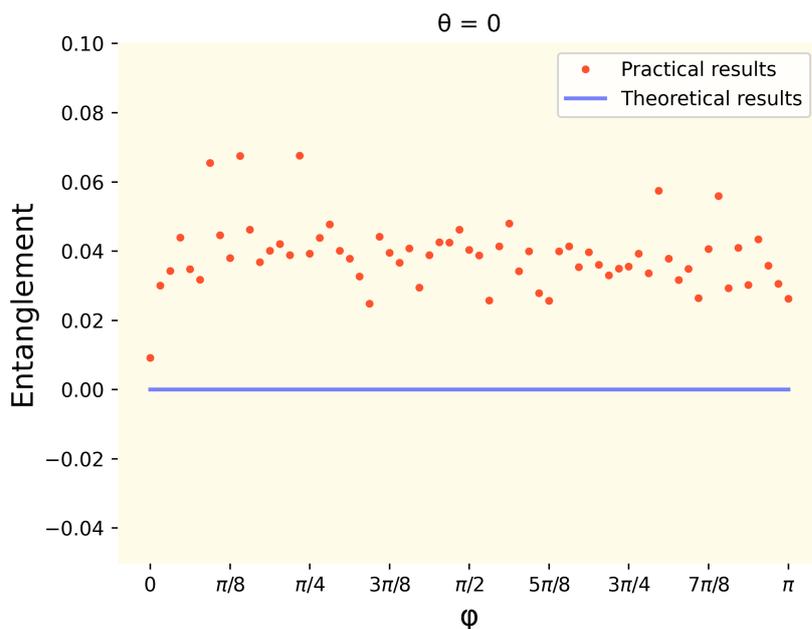


Рис. 21. Результат кількісного визначення геометричної міри запутаності при $\theta = 0$ на пристрої IBM Q quito (позначено крапочкою) та аналітичні результати (лінія) для спіна 1 в стані $|\psi_t\rangle$

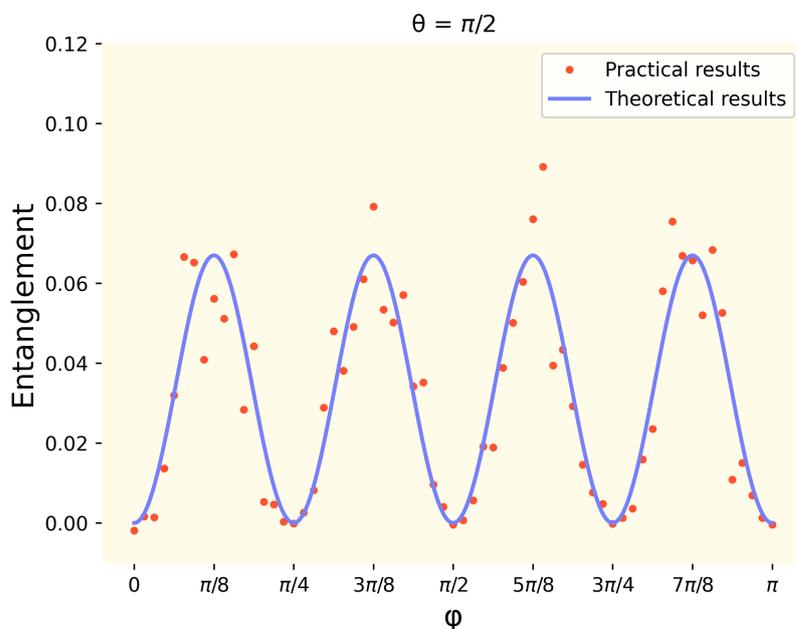


Рис. 22. Результат кількісного визначення геометричної міри запутаності при $\theta = \pi/2$ на пристрої IBM Q quito (позначено крапочкою) та аналітичні результати (лінія) для спіна 1 в стані $|\psi_t\rangle$

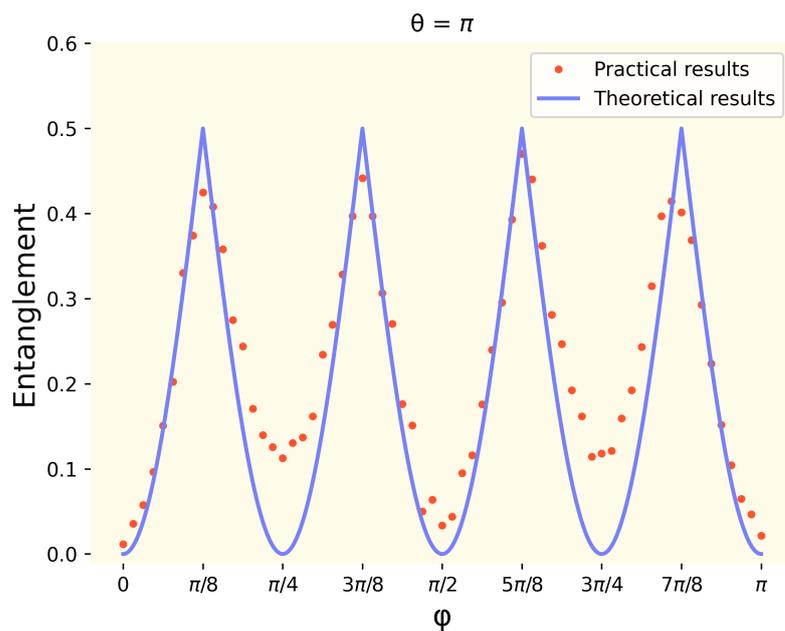


Рис. 23. Результат кількісного визначення геометричної міри запутаності при $\theta = \pi$ на пристрої IBM Q quito (позначено крапочною) та аналітичні результати (лінія) для спіна 1 в стані $|\psi_t\rangle$

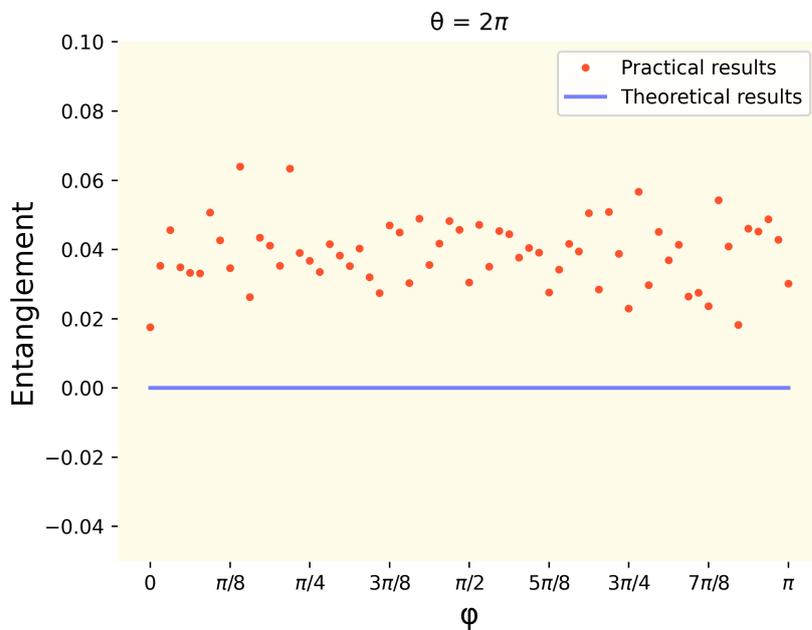


Рис. 24. Результат кількісного визначення геометричної міри запутаності при $\theta = 2\pi$ на пристрої IBM Q quito (позначено крапочною) та аналітичні результати (лінія) для спіна 1 в стані $|\psi_t\rangle$

Література

- [1] Ткачук В. М. Фундаментальні проблеми квантової механіки. — Л. : ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. — 144 с.
- [2] Juan Yin, Yu-Huai Li, Sheng-Kai Liao et al, Nature 582, 501 (2020).
- [3] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A 384, 126579 (2020).
- [4] D. Markham, B. C. Sanders, Phys. Rev. A 78, 042309 (2008).
- [5] R. P. Feynman, Int. J. Theor. Phys. 21, 467 (1982).
- [6] A. M. Frydryszak, M. I. Samar, V. M. Tkachuk, Eur. Phys. J. D 71, 233 (2017).
- [7] A. Karlsson, M. Bourennane, Phys. Rev. A 58, 4394 (1998).
- [8] I. Buluta, F. Nori, Science 326, 108 (2009).
- [9] G. J. Mooney, Ch. D. Hill, L. C. L. Hollenberg, Sci. Rep. 9, 13465 (2019).
- [10] A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett., 67, 661 (1991).
- [11] A. R. Kuzmak, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A 384, 126579 (2020).
- [12] Qiskit 0.26.0 documentation <https://qiskit.org/documentation/>
- [13] IBM Q Experience. <https://quantumcomputing.ibm.com>.
- [14] A. R. Kuzmak, V. M. Tkachuk, Condens. Matter Phys. 23, 43001 (2020).
- [15] M. Hein, J. Eisert, H. J. Briegel, Phys. Rev. A 69, 062311 (2004).
- [16] T. Jennewein, Ch. Simon, G. Weihs et al, Phys. Rev. Lett. 84, 4729 (2000).
- [17] T. Monz, et al., Phys. Rev. Lett. 106, 130506 (2011)


```
np.cos(4 * Phi)) ** 2)) / 2
surf = ax.plot_surface(Phi, Theta, Entanglement,
                      cmap=plt.get_cmap('hot'),
                      rstride=1, cstride=1,
                      linewidth=0, antialiased=False)

img = img + 0.00315
plt.title('Time ' + str(img) + " s", fontsize=10)
fig.savefig("matrix.{:04d}.png".format(i),
           dpi=480, facecolor='white')
fig.colorbar(surf, shrink=0.7, aspect=10)
plt.show()
graph()
```

. Додаток Б

```

from qiskit import *
from qiskit.tools.monitor import job_monitor
import math
import numpy as np
import os
import matplotlib.pyplot as plt

path_of_folder = r'C:\Users\User\Desktop'
qr = QuantumRegister(2)
cr = ClassicalRegister(1)
circuit = QuantumCircuit(qr, cr)
Ent = []
step = math.pi / 64
Theta = { '0': 0,
          'pi_div_2': math.pi / 2,
          'pi': math.pi,
          '3pi_div_2': 3 * math.pi / 2,
          '2pi': 2 * math.pi}
Phi = np.arange(0, math.pi + step, step)
Theta_current = Theta['3pi_div_2']
measure_names = ['x', 'y', 'z']
res = []
buf = []
sigma = {}
step = 1000
P = np.arange(0, np.pi + np.pi / step, np.pi / step)
T = np.pi
E = (1 - np.sqrt((np.sin(T) * np.sin(2 * P)) ** 2
                + (np.cos(T / 2) ** 2 +
                (np.sin(T / 2) ** 2) * np.cos(4 * P)) ** 2)) / 2

def load_account():
    IBMQ.save_account('*****')

```

```

IBMQ.load_account()
provider = IBMQ.get_provider('ibm-q')
qcomp = provider.get_backend('ibmq_quito')
job = execute(circuit, backend=qcomp)
job_monitor(job)
result = job.result()
return result

```

```

def building_scheme(Theta, Phi):
    circuit.data.clear()
    circuit.ry(Theta, qr[1])
    circuit.cp(-2 * Phi, qr[0], qr[1])
    circuit.x(qr)
    circuit.cp(-2 * Phi, qr[0], qr[1])
    circuit.x(qr)
    circuit.cx(qr[0], qr[1])
    circuit.cz(qr[0], qr[1])
    circuit.h(qr[0])
    circuit.p(-2 * Phi, qr[0])
    circuit.h(qr[0])
    circuit.cz(qr[0], qr[1])
    circuit.h(qr[0])
    circuit.p(2 * Phi, qr[0])
    circuit.h(qr[0])
    circuit.cx(qr[0], qr[1])

```

```

def measure(sigma_component):
    if sigma_component == 'x':
        circuit.ry(math.pi / 2, qr[0])
    if sigma_component == 'y':
        circuit.rx(math.pi / 2, qr[0])
    if sigma_component == 'z':
        circuit.data.pop(len(circuit.data) - 1)
        circuit.cx(qr[0], qr[1])

```

```

circuit.measure(qr[0], cr)

def results_of_measurement(component, Th):
    for angle in Phi:
        building_scheme(Th, angle)
        measure(component)
        result = load_account()
        res.append(result.get_counts(circuit))
    # print(res)
    for elem in res:
        if len(elem.keys()) == 2:
            value = ((elem['0'] - elem['1'])
                    / 1024) ** 2
            buf.append(value)
        else:
            value = ((elem[list(elem.keys())[0]]
                    / 1024) ** 2)
            buf.append(value)
    sigma[component] = buf
    np.savetxt("sigma_" + component + ".txt",
              sigma[component], fmt="%s ")
    res.clear()
    buf.clear()

for name in measure_names:
    results_of_measurement(name, Theta_current)

def entanglement(val):
    def get_key(val):
        for key, value in Theta.items():
            if val == value:
                return key
        return "key doesn't exist"

```

```

sigma_x = np.loadtxt("sigma_" + measure_names[0]
                    + ".txt")
sigma_y = np.loadtxt("sigma_" + measure_names[1]
                    + ".txt")
sigma_z = np.loadtxt("sigma_" + measure_names[2]
                    + ".txt")
Entanglement = [(1 - math.sqrt(a + b + c)) / 2
                 for a, b, c in zip(sigma_x,
                                     sigma_y, sigma_z)]
np.savetxt("Entanglement_" + get_key(val) +
          ".txt", Entanglement, fmt="%s")
print(Entanglement)
for i in measure_names:
    os.remove(path_of_folder +
              "\quantum_computing\sigma_" + i + ".txt")
fig, ax = plt.subplots()
for spine in ax.spines.values():
    spine.set_edgecolor('#ffbbe9')
ax.tick_params(color='black', labelcolor='black')
ax.set_facecolor("#ffbbe9")
labels_x = [r"0", r"$\pi/8$", r"$\pi/4$", '3'
            + r"$\pi/8$",
            r"$\pi/2$", '5' + r"$\pi/8$", '3'
            + r"$\pi/4$",
            '7' + r"$\pi/8$", r"$\pi$"]
plt.xticks(np.arange(0, np.pi + np.pi / 8,
                    step=np.pi / 8), labels_x)
plt.xlabel(' ', fontsize=15)
plt.ylabel('Entanglement', fontsize=15)
plt.plot(Phi, Entanglement, color='#fe522d',
         linewidth=0, marker=".")
fig.savefig('saved_figure-100dpi.png', dpi=100,
          facecolor='white')

plt.show()
entanglement(Theta_current)

```