

Львівський національний університет імені Івана Франка
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука

УДК 530.145

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

на тему:

“Геометрична міра заплутаності гіперграфових квантових станів”

Виконав студент групи ФзФм-61
спеціальності 104 “Фізика та астрономія”
Хлопук І. О.

Керівник проф. Ткачук В. М.

Рецензент Держко О. В.

м. Львів – 2022 р.

Анотація

У даній роботі досліджуються квантові гіперграфові стани, побудовані на основі системи багатьох кубітів. Головний спосіб дослідження - обчислення геометричної міри заплутаності частинки зі спіном $1/2$ відносно решти системи за допомогою середнього значення цього спіну. Розглянуто декілька способів задання гіперграфового стану різного ступеня чутливості до параметрів гіперграфа.

Ключові слова: гіперграфові квантові стани, геометрична міра заплутаності.

Abstract

In this paper, we investigate quantum hypergraph states constructed on the basis of a system of many qubits in the same state. The main method of research - calculation the geometric measure of entanglement of a particle with spin $1/2$ relative to the rest of the system using the average value of this spin. There are several ways to specify the hypergraph state of varying degrees of sensitivity to hypergraph parameters.

Key words: graph state, geometric measure of entanglement.

Зміст

Вступ	4
Розділ 1	
Механізми опису гіперграфових станів	6
1.1 Гіперграфові стани	6
1.2 Геометрична міра заплутаності	7
Розділ 2	
Розрахунок геометричної міри заплутаності	9
Висновки	16
Список використаних джерел	17

Вступ

Квантова заплутаність є унікальною властивістю квантових систем, яка дозволяє описувати дві або більше частинки як єдиний квантовий стан, та проявляється як кореляція фізичних властивостей цих частинок. Значний вплив на розвиток розуміння квантової заплутаності та квантової механіки вцілому справила робота А. Айнштейна, Б. Подольського і Н. Розена [1], яка використовувала заплутаність як доказ неповноти квантової теорії. Хоча запропонований ними EPR-парадокс і був пізніше спростований, він стимулював дослідження заплутаних станів. Використання явища заплутаності для пришвидчення обчислень вперше було запропоноване Р. Фейнманом у його роботі [2] у 1982 році і уже через три роки, Д. Дойч описав універсальний квантовий комп'ютер [3]. Пізніше, явище квантової заплутаності стало одним з наріжних каменів теорії квантової інформації, та використовується для опису квантової телепортації [4], квантових обчислення на основі вимірювання [5] та у квантовій криптографії [6]. Тому квантова заплутаність беззаперечно є невід'ємною частиною реалізації майже усіх сучасних квантових алгоритмів.

Актуальність теми. Квантова теорія інформації - це галузь науки, яка виникла у кінці ХХ ст. як поєднання квантової механіки та теорії інформації, та досі розвивається. Зокрема, активно розвиваються теорії квантової комунікації [7], квантової корекції помилок [8], квантової криптографії [9] та квантових обчислень [10], причому майже усі вони так чи інакше стосуються квантової заплутаності.

У випадку двохчастинкової взаємодії заплутаність є досить добре дослідженою [11][12]. Проте зі збільшенням розмірів системи росте і її складність, тому існує декілька підходів для опису заплутаності таких систем [13]. Окрім цього, знаходження сильно заплутаних станів, які можуть передавати корисну інформацію теж є досить складною задачею [14].

Один з таких "корисних" станів - це квантовий графовий стан [15], який відповідає математичному графу, та представляє собою багаточастинкову систему з попарною взаємодією. Такі стани можуть мати досить складну заплутаність та водночас задаватись малою кількістю параметрів. Узагальненням математичних графів є гіперграфи, тому логічним узагальненням квантових графових станів є гіперграфові стани

[16]. Такі багаточастинкові системи, на відміну від графових станів, можуть містити не тільки двохчастинкову взаємодію, тому представляють особливий інтерес в контексті багаточастинкової заплутаності.

Об'єктом досліджень є квантові гіперграфові стани, побудовані на основі системи багатьох кубітів в однаковому стані.

Предметом досліджень є геометрична міра заплутаності таких станів.

Мета та завдання роботи

Метою магістерської роботи є дослідження геометричної міри заплутаності гіперграфових станів, та її залежність від параметрів, якими задається гіперграф. Завданням роботи було розрахувати геометричну міру заплутаності кубіта з рештою системи у різних конфігураціях цієї системи та проаналізувати залежність заплутаності від порядку та розміру гіперграфів.

Структура роботи

У **Розділі 1** представлений огляд сучасних досліджень гіперграфових станів. Зокрема, введено основні поняття теорії графів та проаналізовано аксіоматичний підхід відображення гіперграфів на гільбертів простір квантових станів. Також розглянуто геометричну міру заплутаності та її зв'язок з середнім значенням проекції спіну.

У **Розділі 2** представлено результати розрахунку геометричної міри заплутаності кубіта у різних конфігураціях гіперграфового стану та їхній аналіз.

Після **Розділу 2** представлено **Висновки** роботи та **Список використаних джерел**.

Практичне значення роботи полягає у поглибленні розуміння підходів до побудови гіперграфових станів та їхнього подальшого використання у квантових алгоритмах. За рахунок сильного порушення локального реалізму гіперграфові стани уже знайшли використання у квантовій метрології [17] та неадаптивних квантових обчислень на основі вимірюванні [18], що робить їх важливим об'єктом для дослідження.

Розділ 1

Механізми опису гіперграфових станів

1.1 Гіперграфові стани

Квантові гіперграфові стани відповідають такій математичній структурі, як гіперграф. Тому, для подальшого опису таких систем необхідно ввести основні поняття теорії графів. Ненапрямленим гіперграфом у математиці називають

$$G(V, E) \tag{1.1}$$

де $V = \{1, 2, \dots, n\}$ - множина елементів, або *вершин*, які належать гіперграфу, а $E = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ - множина *ребер* гіперграфу. Кожне ребро e_i - це підмножина вершин, які належать V та об'єднані цим ребром. Потужність множини V визначає *порядок* гіперграфу, а потужність множини E - *розмір* гіперграфу. Гіперграф, усі ребра якого мають однакову потужність k називаються *k-однорідними* гіперграфами. Звідси випливає, що звичайні математичні графи, є окремим випадком k -однорідних гіперграфів ($k = 2$). Вершини, які належать одному ребру називають *суміжними*, а кількість ребер, яким належить одна вершина визначає *ступінь* цього вузла.

У роботі [19] представлений аксіоматичний підхід до кодування гіперграфу на квантовий стан. Зокрема, показано, що для повного опису гіперграфового стану достатньо задати триплет параметрів:

$$(\mathcal{H}, |\psi\rangle, U_e) \tag{1.2}$$

де \mathcal{H} - гільбертів простір, який асоціюється з однією вершиною гіперграфу, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ - початковий стан вершини та U_e - оператор ініціювання ребра e гіперграфу G . Тоді гіперграфовий стан (1.1) можна задати:

$$|h\rangle = \prod_{e \in E} U_e |\psi\rangle^{\otimes |V|} \tag{1.3}$$

Найпростішим прикладом такого стану є графовий стан:

$$\mathcal{G} = (\mathbb{C}^2, |+\rangle, C(Z)) \tag{1.4}$$

де \mathbb{C}^2 - простір квантового стану одного кубіта, $|+\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ та $C(Z) = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$. Графовий стан є важливим прикладом кластених станів, широко застосовно в квантових обчисленнях [20].

Варіюючи \mathcal{H} та U_e можна утворити складніші квантові стани, такі як кудітові графові стани (qudit graph states) $(\mathbb{C}^d, |+\rangle^{\otimes d}, C(Z_d))$ [21] або квантові випадкові мережі [22].

Водночас, аксіоматичний підхід накладає певні обмеження на оператор ініціювання ребра U_e , зокрема:

1. Оператор U_e нетривіально діє лише на підпростір $H^{\otimes e}$ пов'язаний з вершинами ребра e :

$$U_e = U_{|e|} \otimes I^{(|V|-|e|)} \quad (1.5)$$

2. Існує $|V|$ нетривіальних операторів, якими можна задати будь-який гіперграф порядку $|V|$.

Так як порядок додавання ребер довільний, будь-яка пара операторів U_e комутує:

$$[U_{e_i}, U_{e_j}] = 0, \forall i, j \in 1 \dots |V| \quad (1.6)$$

Проте ця умова необов'язкова: оператори U_e можуть не комутувати, але в такому випадку обов'язковою попередньою умовою є узгодженість порядку дії операторів на початковий стан $|\psi\rangle^{\otimes |V|}$.

1.2 Геометрична міра заплутаності

Існує багато способів вимірювання заплутаності [23][24]. Для кількісної оцінки заплутаності чистого стану часто використовують геометричну міру заплутаності, запропоновану А. Шімоні [25]. Вона визначається як:

$$E(|\psi\rangle) = \min_{|\psi_s\rangle} (1 - |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2) = 1 - \max_{|\psi_s\rangle} |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2 \quad (1.7)$$

де $|\psi\rangle$ - заплутаний стан, $|\psi_s\rangle$ - набір факторизованих станів, а $1 - |\langle\psi|\psi_s\rangle|^2$ - квадрат відстані Фубіні-Стаді. Проте таке визначення не є достатньо зручним, тому що містить нетривіальну процедуру мінімізації по факторизованих станах.

У роботі [26] запропоновано аналітичний вираз для заплутаності спіна з довільною квантовою системою:

$$E(|\psi\rangle) = \frac{1}{2}(1 - |\langle\sigma\rangle|) \quad (1.8)$$

де σ_i - матриці Паулі, $|\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle| = \sqrt{\langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2}$ - середнє значення спіну.

Тобто заплутаність такої системи повністю визначається середнім значенням спіну та коливається в межах від 0 (повністю факторизований стан) до 1/2 (максимально заплутаний стан).

Також для оцінки геометричної міри заплутаності двох різних квантових систем можна порівняти їх середні значення заплутаності за час T :

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt \quad (1.9)$$

Розділ 2

Розрахунок геометричної міри запутаності

Розглянемо гіперграфовий стан \mathcal{G} , означений як $\mathcal{G} = (\mathbb{C}^2, |+\rangle, U_e)$, де оператор ребра представлений оператором еволюції:

$$U_e = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \quad (2.1)$$

Найпростіший гамільтоніан трьох частинкової взаємодії має вигляд:

$$H = \hbar\omega\sigma_z^i\sigma_z^j\sigma_z^k \quad (2.2)$$

Даний гамільтоніан відповідає гіперграфу $G_1(\{v_1, v_2, v_3\}, \{e_1\})$.

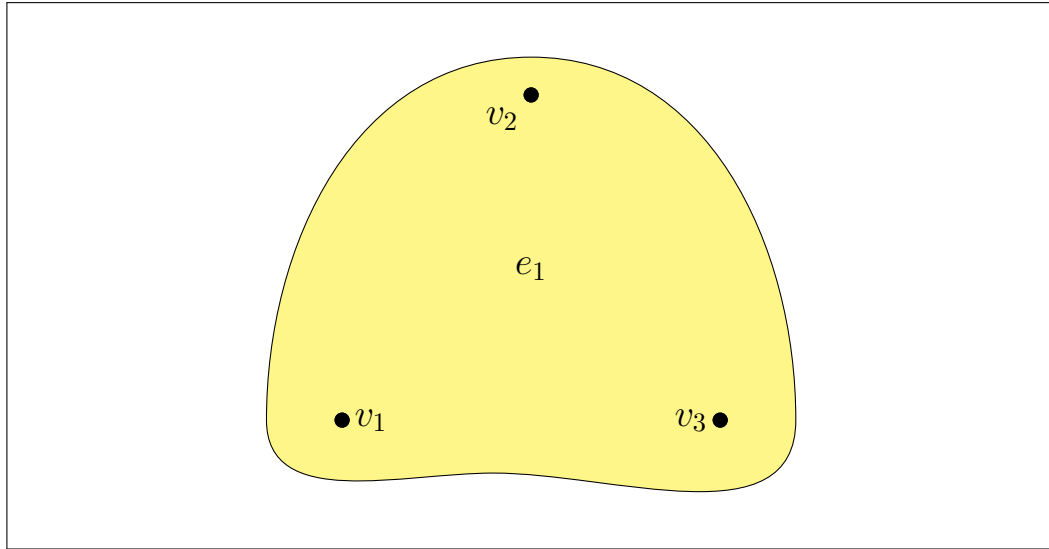


Рис.2.1 Гіперграф G_1

Згідно (1.3), гіперграфовий стан, який відповідає гіперграфу G_1 , матиме вигляд:

$$|G_1\rangle = e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3} |+++ \rangle = e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3} |\psi_0\rangle \quad (2.3)$$

тут і далі $\theta = \omega t$.

Згідно з формулою (1.8), для знаходження геометричної міри запутаності потрібно обчислити середні значення проєкцій спіну на осі x, y, z у гіперграфовому стані $|G_1\rangle$. Обчислимо запутаність вершини v_1 . Середнє значення проєкції спіну на вісь x дорівнює:

$$\langle\sigma_x^1\rangle = \langle\psi_0| e^{i\theta\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3} \sigma_x^1 e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3} |\psi_0\rangle \quad (2.4)$$

Користуючись комутаційними співвідношеннями для σ_i :

$$[\sigma_i^n; \sigma_j^m] = 2i\delta_{nm}\epsilon_{ijl}\sigma_l^j \quad (2.5)$$

$$\{\sigma_i^k; \sigma_j^k\} = 2\delta_{ij}I \quad (2.6)$$

де ϵ_{ijl} - символ Леві-Чевіті, легко показати що для антикомутуючих операторів виконується рівність:

$$\sigma_i^k e^{-i\sigma_j^k} = e^{i\sigma_j^k} \sigma_i^k \quad (2.7)$$

та якщо $i = j$ то:

$$\sigma_j^k e^{-i\sigma_j^k} = e^{-i\sigma_j^k} \sigma_j^k \quad (2.8)$$

Користуючись виразом (2.7) середнє значення (2.4) дорівнює:

$$\langle \sigma_x^1 \rangle = \langle \psi_0 | e^{2i\theta\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3}\sigma_x^1 | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | (\cos 2\theta + i \sin 2\theta\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3)\sigma_x^1 | \psi_0 \rangle$$

та подіявши операторами Паулі на початковий стан отримаємо:

$$\langle \sigma_x^1 \rangle = \cos 2\theta$$

Середнє значення проєкції спіну на y дорівнює:

$$\langle \sigma_y^1 \rangle = \langle \psi_0 | (\cos 2\theta + i \sin 2\theta\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3)\sigma_y^1 | \psi_0 \rangle = 0$$

Користуючись (2.8), середнє значення проєкції спіну на z дорівнює:

$$\langle \sigma_z^1 \rangle = \langle \psi_0 | \sigma_z^1 | \psi_0 \rangle = 0$$

Тоді геометрична міра заплутаності буде рівна:

$$E = \frac{1}{2}(1 - |\cos 2\theta|) \quad (2.9)$$

Іншим заплутаним трьох частинковим станом є графовий стан $|G_2\rangle$ утворений згідно з (1.3) та гамільтоніаном взаємодії:

$$H = \theta(\sigma_z^i\sigma_z^j + \sigma_z^j\sigma_z^k + \sigma_z^k\sigma_z^i) \quad (2.10)$$

Середні значення проєкції спіну на осі x, y, z першої частинки у гіперграфовому стані $|G_2\rangle$ дорівнює:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^1 \rangle &= \langle \psi_0 | e^{2i\theta(\sigma_z^1\sigma_z^2 + \sigma_z^1\sigma_z^3)}\sigma_x^1 | \psi_0 \rangle = \\ &= \langle \psi_0 | (\cos 2\theta + i \sin 2\theta\sigma_z^1\sigma_z^2)(\cos 2\theta + i \sin 2\theta\sigma_z^1\sigma_z^3) | \psi_0 \rangle = \cos^2 2\theta \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\langle \sigma_y^1 \rangle = \langle \psi_0 | e^{2i\theta(\sigma_z^1 \sigma_z^2 + \sigma_z^1 \sigma_z^3)} \sigma_y^1 | \psi_0 \rangle = 0 \quad (2.12)$$

$$\langle \sigma_z^1 \rangle = \langle \psi_0 | \sigma_z^1 | \psi_0 \rangle = 0$$

Тоді геометрична міра заплутаності рівна:

$$E = \frac{1}{2}(1 - |\cos^2 2\theta|) \quad (2.13)$$

З виразів (2.11) та (2.12) видно, що доданки гамільтоніану, які відтворюють ребра, що не містять вершини, для якої обчислюємо заплутаність, не впливають на її значення, тобто геометрична міра заплутаності спіна у гіперграфовому стані залежить лише від суміжних вершин відповідного гіперграфа.

Порівняємо заплутаності гіперграфових станів, заданих гамільтоніанами (2.2) та (2.10). Для цього використаємо формулу (1.9), проінтегрувавши вирази (2.9) та (2.13) отримаємо відповідно:

$$\bar{E}_{|G_1\rangle} = \frac{1}{2T} \int_0^T (1 - |\cos 2\theta|) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \quad (2.14)$$

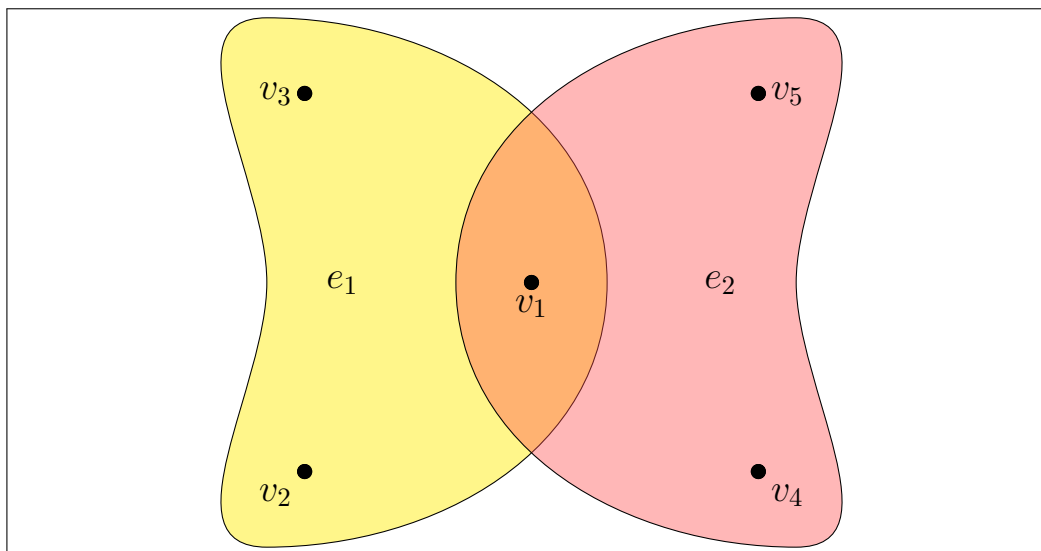
$$\bar{E}_{|G_2\rangle} = \frac{1}{2T} \int_0^T (1 - |\cos^2 2\theta|) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) \quad (2.15)$$

Отже, хоча за $\theta = \frac{\pi}{4}$ геометрична міра заплутаності для обох станів може досягати максимального значення $1/2$, проте середня заплутаність гіперграфового стану $|G_1\rangle$ більша, ніж заплутаність графового стану $|G_2\rangle$. Тому для бієктивного відображення гіперграфів на квантові стани є закономірним припущенням залежності θ для кожного ребра від кількості вершин, які належать цьому ребру ($\theta_e = \theta(|e|)$).

Важливою властивістю гіперграфів є багатоступенева взаємодія ребер, яка виражається завдяки різній кількості спільних вершин у ребрах. Для того, щоб оцінити залежність заплутаності від ступеню взаємодії ребер, розглянемо два 3-однорідних гіперграфи $G_3(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{e_1, e_2\})$ та $G_4(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{e_1, e_2\})$.

Гіперграфовий стан $|G_3\rangle$ утворений згідно з (1.3) з гамільтоніаном взаємодії (2.2) має вигляд:

$$|G_3\rangle = e^{-i\theta(\sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3 + \sigma_z^1 \sigma_z^4 \sigma_z^5)} |+++++\rangle = e^{-i\theta \sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3} e^{-i\theta \sigma_z^1 \sigma_z^4 \sigma_z^5} | \psi_0 \rangle \quad (2.16)$$

Рис.2.2 Гіперграф G_3

Середні значення проєкції спіну на осі x, y, z для вершини v_1 у гіперграфовому стані $|G_3\rangle$ дорівнюють:

$$\langle \sigma_x^1 \rangle = \langle \psi_0 | e^{2i\theta(\sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3 + \sigma_z^1 \sigma_z^4 \sigma_z^5)} \sigma_x^1 | \psi_0 \rangle = \cos^2 2\theta$$

$$\langle \sigma_y^1 \rangle = \langle \psi_0 | e^{2i\theta(\sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3 + \sigma_z^1 \sigma_z^4 \sigma_z^5)} \sigma_y^1 | \psi_0 \rangle = 0$$

$$\langle \sigma_z^1 \rangle = \langle \psi_0 | \sigma_z^1 | \psi_0 \rangle = 0$$

та геометрична міра заплутаності очікувано дорівнює:

$$E = \frac{1}{2}(1 - |\cos^2 2\theta|) \quad (2.17)$$

Гіперграфовий стан $|G_4\rangle$ з гамільтоніаном взаємодії (2.2) має вигляд:

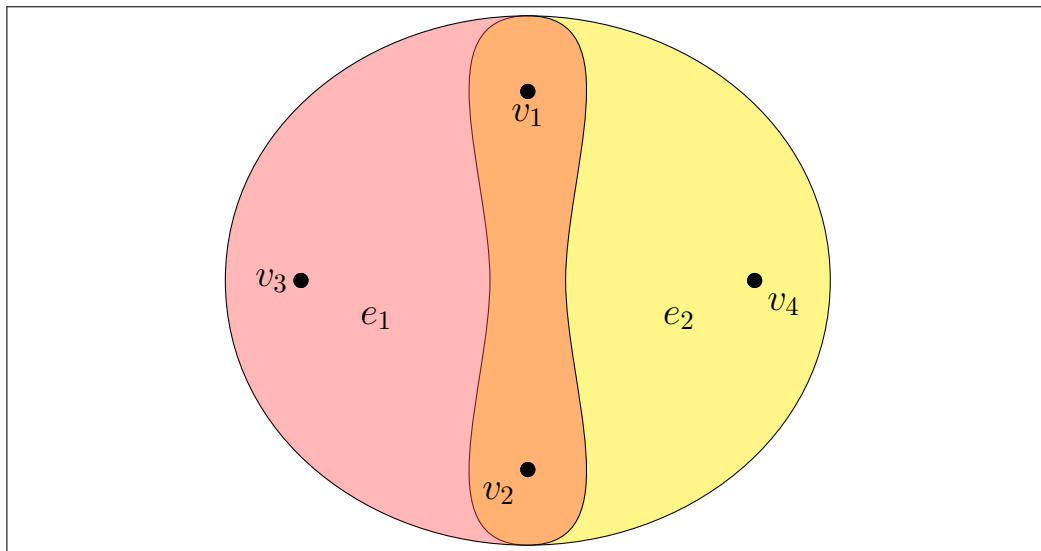
$$|G_4\rangle = e^{-i\theta(\sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3 + \sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^4)} |++++\rangle = e^{-i\theta \sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3} e^{-i\theta \sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^4} | \psi_0 \rangle \quad (2.18)$$

Знайдемо середні значення проєкції спіну для вершини v_1 :

$$\langle \sigma_x^1 \rangle = \langle \psi_0 | e^{2i\theta(\sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3 + \sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^4)} \sigma_x^1 | \psi_0 \rangle = \cos^2 2\theta \quad (2.19)$$

$$\langle \sigma_y^1 \rangle = \langle \psi_0 | e^{2i\theta(\sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3 + \sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^4)} \sigma_y^1 | \psi_0 \rangle = 0 \quad (2.20)$$

$$\langle \sigma_z^1 \rangle = \langle \psi_0 | \sigma_z^1 | \psi_0 \rangle = 0 \quad (2.21)$$

Рис.2.3 Гіперграф G_4

Геометрична міра заплутаності вершини v_1 дорівнює:

$$E = \frac{1}{2}(1 - |\cos^2 2\theta|) \quad (2.22)$$

та є рівною (2.17). Очевидно, що заплутаність спіну у гіперграфових станах $|G_3\rangle$ та $|G_4\rangle$ не відображає різниці кількості спільних вершин та порядку гіперграфів. Так як гіперграфи G_3 та G_4 не є ізоморфними, то корисним було б представлення гіперграфових станів, яке зображувало б цю не ізоморфність у геометричній мірі заплутаності. Для цього можна розглянути модифікований гамільтоніан взаємодії, який встановлює сильніший зв'язок між вершинами ребра. Для 3-однорідного гіперграфу такий гамільтоніан можна задати як:

$$H = \theta(\sigma_z^i + \sigma_z^i \sigma_z^j + \sigma_z^i \sigma_z^k + \sigma_z^i \sigma_z^j \sigma_z^k) \quad (2.23)$$

Розглянемо гіперграфові стани $|G_5\rangle$ та $|G_6\rangle$ утворені зі гіперграфів G_3 та G_4 відповідно, але з використанням гамільтоніану взаємодії (2.23).

Гіперграфовий стан G_5 матиме вигляд:

$$|G_5\rangle = e^{-i\theta\sigma_z^1} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^2} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^3} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3} e^{-i\theta\sigma_z^1} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^4} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^5} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^4\sigma_z^5} |\psi_0\rangle \quad (2.24)$$

Середні проєкції спіну на осі x, y, z дорівнюють:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^1 \rangle &= \langle \psi_0 | e^{4i\theta\sigma_z^1} e^{2i\theta(\sigma_z^1\sigma_z^2 + \sigma_z^1\sigma_z^3 + \sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3)} e^{2i\theta(\sigma_z^1\sigma_z^4 + \sigma_z^1\sigma_z^5 + \sigma_z^1\sigma_z^4\sigma_z^5)} \sigma_x^1 | \psi_0 \rangle = \\ &= \cos 4\theta \cos^6 2\theta + \sin^2 4\theta \sin^2 2\theta \cos^2 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \sigma_y^1 \rangle &= \langle \psi_0 | e^{4i\theta\sigma_z^1} e^{2i\theta(\sigma_z^1\sigma_z^2 + \sigma_z^1\sigma_z^3 + \sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3)} e^{2i\theta(\sigma_z^1\sigma_z^4 + \sigma_z^1\sigma_z^5 + \sigma_z^1\sigma_z^4\sigma_z^5)} \sigma_y^1 | \psi_0 \rangle = \\ &= \sin 4\theta \cos^6 2\theta + \sin 4\theta \cos 4\theta \sin^2 2\theta \cos^2 2\theta\end{aligned}$$

$$\langle \sigma_z^1 \rangle = \langle \psi_0 | \sigma_z^1 | \psi_0 \rangle = 0$$

Геометрична міра заплутаності буде дорівнювати:

$$E = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{\cos^{12} 2\theta + 16 \cos^{10} 2\theta \sin^4 2\theta \cos 4\theta + 4 \sin^6 2\theta \cos^6 2\theta}) \quad (2.25)$$

Тоді гіперграфовий стан $|G_6\rangle$ матиме вигляд:

$$|G_6\rangle = e^{-i\theta\sigma_z^1} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^2} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^3} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3} e^{-i\theta\sigma_z^1} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^2} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^4} e^{-i\theta\sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^4} | \psi_0 \rangle \quad (2.26)$$

середні значення прецесії спіну на осі x, y, z та геометрична міра заплутаності матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_x^1 \rangle &= \langle \psi_0 | e^{4i\theta(\sigma_z^1 + \sigma_z^1\sigma_z^2)} e^{2i\theta(\sigma_z^1\sigma_z^3 + \sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3)} e^{2i\theta(\sigma_z^1\sigma_z^4 + \sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^4)} \sigma_x^1 | \psi_0 \rangle = \\ &= \cos^2 4\theta \cos^4 2\theta + 2 \sin^2 4\theta \sin^2 2\theta \cos^2 2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \sigma_y^1 \rangle &= \langle \psi_0 | e^{4i\theta(\sigma_z^1 + \sigma_z^1\sigma_z^2)} e^{2i\theta(\sigma_z^1\sigma_z^3 + \sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^3)} e^{2i\theta(\sigma_z^1\sigma_z^4 + \sigma_z^1\sigma_z^2\sigma_z^4)} \sigma_y^1 | \psi_0 \rangle = \\ &= \sin 4\theta \cos 4\theta \cos^4 2\theta + 2 \sin 4\theta \cos 4\theta \sin^2 2\theta \cos^2 2\theta\end{aligned}$$

$$\langle \sigma_z^1 \rangle = \langle \psi_0 | \sigma_z^1 | \psi_0 \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2} (1 - |\cos^3 2\theta| * \\ &\sqrt{(\cos^8 2\theta + 16 \sin^4 2\theta \cos^8 2\theta)(\cos^4 2\theta - 2 \cos^2 2\theta \sin^2 2\theta + \sin^4 2\theta) + 16 \sin^6 2\theta})\end{aligned} \quad (2.27)$$

Залежність заплутаності від часу для станів $|G_5\rangle$ (2.25) та $|G_6\rangle$ (2.27) є не досить підходящими для порівняння за допомогою формули (1.9). Проте, навіть візуальний аналіз залежності заплутаності від часу свідчить про те, що залежності відрізняються та для різних значень θ заплутаність обох станів може бути переважаючою.

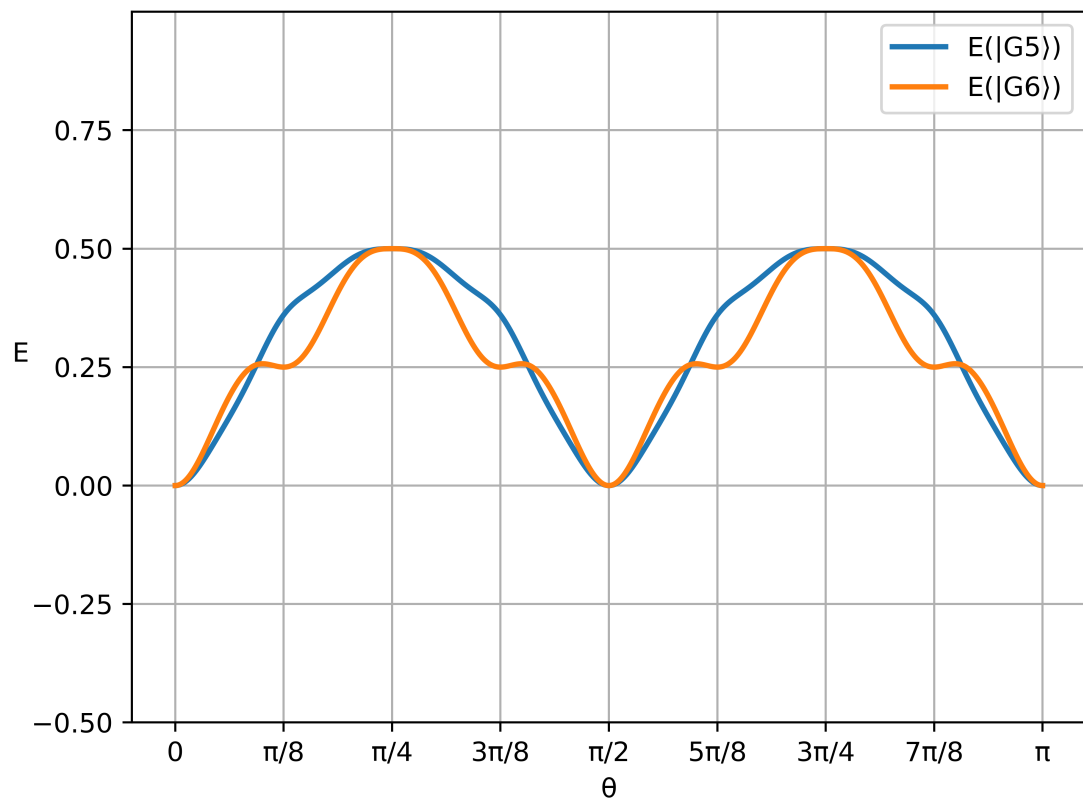


Рис.2.4 Залежність геометричної міри запутаності від часу

Висновки

Підчас дослідження було розглянуто гіперграфові стани та їхні базові властивості. Було запропоновано декілька підходів до побудови гіперграфових станів та оцінена їхня заплутаність за допомогою геометричної міри заплутаності. Також, встановлені деякі закономірності, характерні для гіперграфових станів: залежність геометричної міри заплутаності від кількості ребер, які містять досліджену спін, відсутність впливу на заплутаність спіну ребер, до яких цей спін не належить. Було запропоновано вигляд оператора ініціювання ребра, чутливого до кількості спільних вершин у ребрах.

Результати даної роботи можуть бути використані для подальшого дослідження та розуміння гіперграфових станів. Зокрема, узагальнення отриманих результатів на випадок k -однорічних гіперграфів, встановлення залежності міри заплутаності від повного набору характеристик гіперграфа та дослідження нових способів задання оператора ініціювання ребра можуть мати місце в майбутніх дослідженнях.

Список використаних джерел

- [1] Albert Einstein, Boris Podolsky та Nathan Rosen. “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” В: *Physical review* 47.10 (1935), с. 777.
- [2] Richard P Feynman. “Simulating physics with computers”. В: *Feynman and computation*. CRC Press, 2018, с. 133–153.
- [3] David Deutsch. “Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer”. В: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 400.1818 (1985), с. 97–117.
- [4] Charles H Bennett та ін. “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”. В: *Physical review letters* 70.13 (1993), с. 1895.
- [5] Robert Raussendorf та Hans J Briegel. “A one-way quantum computer”. В: *Physical Review Letters* 86.22 (2001), с. 5188.
- [6] Andrew Steane. “Quantum computing”. В: *Reports on Progress in Physics* 61.2 (1998), с. 117.
- [7] Ilan Kremer. *Quantum communication*. Citeseer, 1995.
- [8] John Chiaverini та ін. “Realization of quantum error correction”. В: *Nature* 432.7017 (2004), с. 602–605.
- [9] Artur K Ekert. “Quantum Cryptography and Bell’s Theorem”. В: *Quantum Measurements in Optics*. Springer, 1992, с. 413–418.
- [10] John Preskill. “Quantum computing in the NISQ era and beyond”. В: *Quantum* 2 (2018), с. 79.
- [11] Scott Hill та William K Wootters. “Entanglement of a pair of quantum bits”. В: *Physical review letters* 78.26 (1997), с. 5022.
- [12] Michał Horodecki, Paweł Horodecki та Ryszard Horodecki. “Separability of n-particle mixed states: necessary and sufficient conditions in terms of linear maps”. В: *Physics Letters A* 283.1-2 (2001), с. 1–7.
- [13] Michael Walter, David Gross та Jens Eisert. “Multipartite entanglement”. В: *Quantum Information: From Foundations to Quantum Technology Applications* (2016), с. 293–330.

- [14] Tomoyuki Morimae. “Finding resource states of measurement-based quantum computing is harder than quantum computing”. B: *Physical Review A* 96.5 (2017), c. 052308.
- [15] Marc Hein та ін. “Entanglement in graph states and its applications”. B: *arXiv preprint quant-ph/0602096* (2006).
- [16] Matteo Rossi та ін. “Quantum hypergraph states”. B: *New Journal of Physics* 15.11 (2013), c. 113022.
- [17] Mariami Gachechiladze, Costantino Budroni та Otfried Gühne. “Extreme violation of local realism in quantum hypergraph states”. B: *Physical review letters* 116.7 (2016), c. 070401.
- [18] Matty J Hoban та ін. “Non-adaptive measurement-based quantum computation and multi-party Bell inequalities”. B: *New Journal of Physics* 13.2 (2011), c. 023014.
- [19] Ri Qu та ін. “Encoding hypergraphs into quantum states”. B: *Physical Review A* 87.2 (2013), c. 022311.
- [20] Robert Raussendorf, Daniel E Browne та Hans J Briegel. “Measurement-based quantum computation on cluster states”. B: *Physical review A* 68.2 (2003), c. 022312.
- [21] Radu Ionicioiu та Tim P Spiller. “Encoding graphs into quantum states: an axiomatic approach”. B: *Physical Review A* 85.6 (2012), c. 062313.
- [22] Sébastien Perseguers та ін. “Quantum random networks”. B: *Nature Physics* 6.7 (2010), c. 539–543.
- [23] Dagmar Bruß. “Characterizing entanglement”. B: *Journal of Mathematical Physics* 43.9 (2002), c. 4237–4251.
- [24] Martin B Plenio та Shashank S Virmani. “An introduction to entanglement theory”. B: *Quantum information and coherence*. Springer, 2014, c. 173–209.
- [25] Abner Shimony. “Degree of Entanglement”. B: *Annals of the New York Academy of Sciences* 755.1 (1995), c. 675–679. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1995.tb39008.x>. eprint: <https://nyaspubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1749-6632.1995.tb39008.x>. URL: <https://nyaspubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1749-6632.1995.tb39008.x>.

- [26] Andrzej M Frydryszak, Mykola I Samar ta Volodymyr M Tkachuk. “Quantifying geometric measure of entanglement by mean value of spin and spin correlations with application to physical systems”. B: *The European Physical Journal D* 71.9 (2017), c. 1–8.