Львівський національний університет імені Івана Франка
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука

УДК 53.01, 530.145

Магістерська робота на тему:

Релятивістська задача Кеплера в деформованому просторі з мінімальною довжиною

Виконала студентка II курсу групи ФЗФМ-21
спеціальності 104 Фізика та астрономія
Ковач К.-Д. В.
Керівник: доц. Самар М. І.
Рецензент: доц. Кошмак І. О.

м. Львів – 2022р.

Анотація

В даній роботі ми розглядаємо лоренц-коваріантну деформовану алгебру, що в нерелятивістській границі призводить до недеформованої, а в класичній границі – до появи деформованих лоренц-коваріантних дужок Пуассона. В рамках коваріантної гамільтонової механіки ми розглянули рух частинки в просторі з метрикою Шварцшильда і отримали вираз для кута прецесії орбіти у випадку загальної теорії відносності. Також досліджено цю ж задачу, але з деформованими дужками Пуассона та отримано кут прецесії орбіти з урахуванням деформації. Як виявилося, кут прецесії у випадку деформації залежить від маси, що порушує слабкий принцип еквівалентності. Вважаючи, що параметр деформації є залежним від маси, принцип еквівалентності вдається відновити. На основі порівняння наших теоретичних результатів з експериментальними даними для кута прецесії Меркурію отримано оцінку на параметр деформації та мінімальну довжину.

Ключові слова: мінімальна довжина, Лоренц-коваріантна деформована алгебра, деформовані дужки Пуассона, кут прецесії орбіти, задача Кеплера.

Abstract

We consider a Lorentz-covariant deformed algebra, which in nonrelativistic limit leads to undeformed one, and in case of the classical limit – contributes to the Lorentz-covariant deformed Poisson brackets. Within Covariant Hamiltonian Mechanics we consider the particle motion in Schwarzschild space-time and obtain expression for precession angle of an orbit in case of General Relativity. We also study this problem with deformed Poisson brackets and we obtain precession angle of an orbit taking into account the deformation. As it turned out the precession angle in deformed case depends on mass, which violates the weak equivalence principle. Assuming that deformation parameter depends on mass the equivalence principle can be recovered. Comparing our theoretical results with experimental data for Mercury’s precession angle we have estimated deformation parameter and minimal length.

Keywords: minimal length, Lorentz-covariant deformed algebra, deformed Poisson brackets, the precession angle, Kepler problem.

Зміст

Вступ

Останнім часом дуже активно вивчаються деформовані комутаційні співвідношення з мінімальною довжиною. В кінці минулого століття завдяки дослідженням з теорію струн та квантової гравітації, які передбачають існування мінімальної ненульової невизначеності координат, з'явився інтерес до мінімальної довжини [1, 2, 3].

В 1930 році Гайзенберг висунув ідею про некомутативність просторових координат, що в свою чергу, призводить до наявності мінімальної довжини. Тільки в 1947 році вперше опублікувалася робота Снайдера [4], де він розглядав деформовані канонічні комутаційні співвідношення. Ця проблема не була актуальною, тому довгий час публікувалося дуже мало робіт на тему мінімальної довжини. Кемпфом було показано [5], що мінімальна невизначеність координати може природно з'явитися у квантовій механіці шляхом незначної зміни канонічних комутаційних співвідношень.

В одновимірному випадку найпростішим деформованим комутаційним співвідношенням, що призводить до мінімальної невизначеності координати, є запропоноване Кемпфом співвідношення, що має наступний вигляд

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar\left(1 + \beta\hat{P}^2\right), \tag{1}$$

де β — деякий додатній параметр. Якщо у (1) покласти $\beta = 0$, то отримується канонічне недеформоване співвідношення Гайзенберга. Деформована алгебра (1) приводить до узагальненого співвідношення невизначеності Гайзенберга

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\Delta P} + \beta\Delta P\right), \tag{2}$$

яке в свою чергу веде до мінімальної ненульової невизначеності координати (мінімальної довжини)

$$\Delta X = \hbar\sqrt{\beta}. \tag{3}$$

У випадку вищих розмірностей деформована алгебра (1) буде мати вигляд

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\left[\left(1 + \beta\hat{P}^2\right)\delta_{ij} + \beta'\hat{P}_i\hat{P}_j\right], \tag{4}$$
$$\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] = 0,$$
$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = i\hbar\frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta\hat{P}^2}{\left(1 + \beta\hat{P}^2\right)}\left(\hat{P}_i\hat{X}_j - \hat{P}_j\hat{X}_i\right),$$

де βта β'- деякі малі невід'ємні параметри.

Якщо припускати, що параметр деформації однаковий для елементарних частинок та макроскопічних тіл, то порушується слабкий принцип еквівалентності. У [6], [7] було запропоновано пов'язати параметр деформації з масою

$$\beta = \frac{\gamma}{m^2}, \tag{5}$$

де γ – константа для всіх частинок. Такий зв'язок призводить до відновлення слабкого принципу еквівалентності в деформованому просторі з мінімальною довжиною. Також ми отримуємо інші важливі результати як, наприклад збереження властивості адитивності кінетичної енергії складеної системи в деформованому просторі і незалежність кінетичної енергії від складу системи.

Мета роботи – дослідження Лоренц-коваріантної деформованої алгебри з мінімальною довжиною та вплив алгебри на зсув перигелію орбіти в загальній теорії відносності. **Основним завданням** є вивчення руху частинки в просторі-часі з метрикою Шварцшильда та лоренц-коваріантними деформованими дужками Пуассона. **Об'єктом дослідження** є частинка у деформованому просторі з мінімальною довжиною. **Предметом дослідження** є кут прецесії орбіти з урахуванням деформації.

У першому розділі ми розглядаємо лоренц-коваріантну деформовану алгебру, що в нерелятивістській границі призводить до недеформованої, а в класичній границі – до появи деформованих лоренц-коваріантних дужок Пуассона. В другому розділі розглядаємо релятивістську частинку у випадку недеформованих дужок Пуассона. Записуємо дію для вільної частинки, рівняння Гамільтона та знаходимо вираз для множника Лагранжа. У третьому розділі було розглянуто рух частинки в просторі-часі з метрикою Шварцшильда і отримано вираз для кута прецесії орбіти у випадку загальної теорії відносності. Четвертий розділ присвячено дослідженню цієї ж задачі, але з деформованими дужками Пуассона та було отримано кут прецесії орбіти з урахуванням деформації, також виявилося, що також цей кут залежить від маси, що порушує принцип слабкої еквівалентності у деформованому просторі з мінімальною довжиною. У п'ятому розділі надається оцінка мінімальної довжини. Щоб вирішити проблему порушення слабкого принципу еквівалентності, ми прискаємо, що параметр деформації β залежить від маси. Також порівнюємо оцінку отриману для мінімальної довжини зсуву перигелію Меркурія та оцінку для спектру атома водню.

Розділ 1. Лоренц-коваріантна деформована алгебра

Розглянемо лоренц-коваріантну деформовану алгебру, що утворена координатами $\hat{X}^{\mu}$ та імпульсами $\hat{P}^{\nu}$, шо задовольняють наступні комутативні співвідношення

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{X}^{\mu},\hat{P}^{\nu}\right]=-i\hbar\left[1-\beta\left(\hat{P}_{\rho}\hat{P}^{\rho}-m^{2}c^{2}\right)\right]\eta^{\mu\nu},\\
&\left[\hat{X}^{\mu},\hat{X}^{\nu}\right]=2i\hbar\beta\left(\hat{X}^{\nu}\hat{P}^{\mu}-\hat{X}^{\mu},\hat{P}^{\nu}\right),\\
&\left[\hat{P}^{\mu},\hat{P}^{\nu}\right]=0,
\end{aligned} \tag{6}$$

де $\mu,\nu=0,1,2,3,\ \eta^{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}=diag(1,-1,-1,-1)$ – метричний тензор, β – малий невід’ємний параметр, m – маса частинки, c – швидкість світла.

Деформовану алгебра (6) можна розглядати як узагальнений випадок деформованої алгебри (4) з β'=0 на релятивістський випадок. Тоді алгебра (6) володіє таким представленням

$$\begin{aligned}
&\hat{X}^{\mu}=\left[1-\beta\left(\hat{p}_{\rho}\hat{p}^{\rho}-m^{2}c^{2}\right)\right]\hat{x}^{\mu}+i\hbar\gamma\hat{p}^{\mu},\\
&\hat{P}^{\mu}=\hat{p}^{\mu},
\end{aligned} \tag{7}$$

де $\hat{x}^{\mu}$ та $\hat{p}^{\mu}$ задовольняють недеформовану алгебру Гайзенберга

$$\begin{aligned}
&[\hat{x}^{\mu},\hat{p}^{\mu}]=-i\hbar\eta^{\mu\nu},\\
&[\hat{x}^{\mu},\hat{x}^{\nu}]=0,\\
&[\hat{p}^{\mu},\hat{p}^{\nu}]=0,
\end{aligned} \tag{8}$$

тут γ – довільна дійсна константа, яка не впливає на комутаційні відношення (6).

Припустимо, що параметр деформації записується в такому вигляд

$$\beta=\frac{k}{c^{2}}, \tag{9}$$

де k – параметр, який не залежить від швидкості світла c. Тоді алгебра (6) в нерелятивістській границі ($c\to\infty$) призводить до недеформованої алгебри

$$\begin{aligned} &[\hat{x}^j, \hat{p}^k] = -i\hbar\eta^{jk}, \\ &[\hat{x}^j, \hat{x}^k] = 0, \\ &[\hat{p}^j, \hat{p}^k] = 0, \end{aligned} \qquad (10)$$

j та k – нумерують просторові виміри.

У класичній границі квантовий механічний комутатор переходить в дужки Пуассона

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] \Rightarrow \{A, B\}.$$

Деформовані дужки Пуассона, що відповідають деформованій алгебрі (6), матимуть вигляд

$$\{X^\mu, P^\nu\} = -[1 - \beta(P_\rho P^\rho - m^2c^2)]\eta^{\mu\nu}$$

$$\{P^\mu, P^\nu\} = 0,$$

$$\{X^\mu, X^\nu\} = 2(P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu). \qquad (11)$$

Дужки Пуассона повинні володіти такими властивостями: антисиметричність, білінійність , а також задовольняти правило Лейбніца та тотожність Якобі. Між дужками Пуассона, які складаються із трьох функцій існує співвідношення

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0,$$

яке називається тотожність Якобі.

Ці вимоги дозволяють записати загальну форму дужок Пуассона для будь-яких двох довільних функції координат й імпульсів Fта G:

$$\{F, G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial X^\mu}\frac{\partial G}{\partial P^\nu} - \frac{\partial F}{\partial P^\nu}\frac{\partial G}{\partial X^\mu}\right)\{X^\mu, P^\nu\} + \frac{\partial F}{\partial X^\mu}\frac{\partial G}{X^\nu}\{X^\mu, X^\nu\},$$

де повторювальні індекси сумуються.

Розділ 2. Лоренц-коваріантна гамільтонова механіка

Розглянемо релятивістську частинку у випадку недеформованих дужок Пуассона. Запишемо дію для вільної частинки

$$S = -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}, \tag{12}$$

щоб зберегти Лоренц-коваріантну форму, перепишемо дію у такій формі

$$S = \int d\tau \left(-mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} d\dot{x}^{\mu} d\dot{x}^{\nu}} \right), \tag{13}$$

$\dot{x}^{\mu}, \dot{x}^{\nu}$ – похідні по параметру еволюції τ.

Тепер з формули (13) візьмемо вираз в дужках і інтерпретуємо його як функцію Лагранжа

$$L = -mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} d\dot{x}^{\mu} d\dot{x}^{\nu}}. \tag{14}$$

Щоб отримати лоренц-коваріантний гамільтоновий формалізм введемо 4-імпульс [8]

$$p_{\mu} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \frac{mc\dot{x}_{\mu}}{\sqrt{\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu}}}. \tag{15}$$

Гамільтоніан системи буде рівний нулю

$$H = -p_{\mu}\dot{x}^{\mu} - L = 0, \tag{16}$$

а вектор 4-імпульсу задовольняє умові

$$p^{\mu} p_{\mu} = m^2 c^2. \tag{17}$$

Повний гамільтоніан буде мати вигляд

$$H_T = \lambda\left(p^{\mu} p_{\mu} - m^2 c^2\right), \tag{18}$$

де λ – невідомий множник Лагранжа.

Запишемо рівняння Гамільтона

$$\dot{x}^{\mu} = \{x^{\mu}, H_T\} = -2\lambda p^{\mu}, \tag{19}$$

$$\dot{p}^{\mu} = \{p^{\mu}, H_T\} = 0, \tag{20}$$

Отримуємо рух зі сталою швидкістю, як і повинно бути.

За допомогою формул (15) та (19) знайдемо множник Лагранжа

$$\lambda = -\frac{1}{2mc}\sqrt{\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu}} = -\frac{1}{2mc}\frac{ds}{d\tau}. \tag{21}$$

Розділ 3. Рух тіла у викривленому просторі-часі з метрикою Шварцшильда

Розглянемо рух вільної частинки у викривленому просторі-часі з метрикою Шварцшильда. Повний гамільтоніан системи запишемо у вигляді

$$H = \lambda\left(g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu - m^2c^2\right) = \lambda\left(\frac{1}{A}p_0^2 - Ap_r^2 - \frac{L^2}{r^2} - m^2c^2\right), \tag{22}$$

де λ – множник Лагранжа, A – метрична функція, яка має вигляд

$$A = 1 - \frac{r_s}{r}, \tag{23}$$

$r_s = \frac{2GM}{c^2}$ – радіус Шварцшильда.

Також запишемо вирази для $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2}$, $p^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(p^i\right)^2$, . Момент імпульсу має вигляд $L = [\vec{r}, \vec{p}]$. та вираз для $p_r^2 = p^2 - \frac{L^2}{r^2}$. Координата x^μ та імпульс p^μ задовольняють деформовані дужки Пуассона.

Перепишемо гамільтоніан (22) в зручніших координатах і підставивши формулу (23) для метричної функції A

$$H_0 = \lambda\left(\frac{r}{r - r_s}p_0^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)p^2 + \frac{L^2}{r^2}\frac{r_s}{r} - m^2c^2\right), \tag{24}$$

Ми розглядаємо релятивістські ефекти та деформацію як збурення Кеплерівських орбіт, що спричиняє прецесію перигелію еліптичної орбіти. Швидкість прецесії зручно обчислювати за допомогою вектору Гамільтона, швидкість прецесії якого співпадає зі швидкістю прецесії перигелію. Вектор Гамільтона має таку форму

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}}{m} - \frac{\alpha}{L^2}\frac{\left[\vec{L} \times \vec{r}\right]}{r}. \tag{25}$$

Запишемо швидкість прецесії вектору Гамільтона

$$\vec{\omega}_\tau = \frac{\left[\vec{u} \times \dot{\vec{u}}\right]}{u^2}, \tag{26}$$

де

$$\dot{\vec{u}} = \{\vec{u}, H_0\} = \frac{\dot{\vec{p}}}{m} - \frac{\alpha}{L^2}\left[\vec{L} \times \dot{\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)}\right]. \quad (27)$$

Порахуємо $\dot{\vec{p}}$ та $\dot{\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)}$ використовуючи формулу $L^2 = r^2p^2 - (\vec{r}, \vec{p})^2$.

$$\dot{\vec{p}} = \{p, H_0\} = \lambda \frac{r_s\vec{r}}{r}\left(\frac{1}{(r - r_s)^2}p_0^2 + \frac{3}{r^2}\left(p^2 - \frac{L^2}{r^2}\right)\right) - \frac{2\lambda r_s}{r^3}(\vec{r}, \vec{p})\vec{p}, \quad (28)$$

та

$$\dot{\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)} = \left\{\frac{\vec{r}}{r}, H_0\right\} = -\frac{2\lambda}{r}\left(\vec{p} - \frac{\vec{r}}{r^2}(\vec{r}, \vec{p})\right). \quad (29)$$

Підставимо формули (28) та (29) в (27) та використаємо формули $\left[\vec{L} \times \vec{r}\right] = \vec{p}r^2 - \vec{r}(\vec{r}, \vec{p})$ та $\left[\vec{L} \times \vec{p}\right] = -\vec{r}p^2 + \vec{p}(\vec{r}, \vec{p})$ і отримаємо

$$\dot{\vec{u}} = \frac{\lambda}{m}\frac{r_s\vec{r}}{r}\left(\frac{1}{(r - r_s)^2}p_0^2 + \frac{3}{r^2}\left(p^2 - \frac{L^2}{r^2}\right)\right) - \frac{2\lambda r_s}{mr^3}(\vec{r}, \vec{p})\vec{p} - \frac{2\lambda\alpha\vec{r}}{r^3}. \quad (30)$$

Далі підставивши (25) та (30) в формулу для швидкості прецесії (26) і взявши її модуль будемо мати

$$\begin{aligned}\omega_\tau = {} & \frac{\lambda\alpha r_s}{mLu^2}\left(1 - \frac{R_0}{r}\right)\left(\frac{1}{(r - r_s)^2}p_0^2 + \frac{3}{r^2}\left(p^2 - \frac{L^2}{r^2}\right)\right) \\ & + \frac{2\lambda\alpha^2}{Lu^2r^2}\left(1 - \frac{R_0}{r}\right) - \frac{2\lambda\alpha r_s}{mLu^2r^4}(\vec{r}, \vec{p})^2,\end{aligned} \quad (31)$$

де $u = \frac{\alpha e}{L}, R_0 = \frac{L^2}{m\alpha}$ – половина фокального параметру незбуреної еліптичної орбіти.

Тепер можемо обчислити кут прецесії

$$\Delta\theta = \int \omega_\tau \, d\tau,$$

де τ змінюється в межах одного оберту. Перейдемо в інтегралі від параметра еволюції τ до часу в системі відліку спостереження t, а після до полярного кута φ і отримаємо такий вираз

$$\Delta\theta = \int_0^T \omega_\tau \frac{d\tau}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \omega_\tau \frac{d\tau}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^{-1} d\varphi, \tag{32}$$

де

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{2\lambda m},$$

та

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}.$$

Інтегруючи (32) використаємо вирази, які дійсні для незбурених орбіт

$$\frac{R_0}{r} = 1 + ecos\varphi$$

та

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{2a}.$$

де $a = \frac{R_0}{1-e^2}$ – велика піввісь.

В кінцевому результаті отримаємо кут прецесії

$$\Delta\theta_0 = \frac{6\pi GM}{R_0 c^2}. \tag{34}$$

Отриманий результат є добре відомим виразом для кута прецесії орбіти у випадку загальної теорії відносності.

Розділ 4. Задача Кеплера в загальній теорії відносності з деформованими дужками Пуассона

Розглянемо задачу про рух планети у викривленому просторі-часі з метрикою Шварцшильда враховуючи деформовані дужки Пуассона. Оскільки ми обчислюватимемо кут прецесії орбіти у лінійному наближенні по малих параметрах $\frac{1}{m^2c^2}$ та β, то можемо використовувати алгебру (11) записана, яка записана для плоского простору. Цього цілком достатньо, бо врахування кривини простору в цій алгебрі дає поправки порядку $\frac{\beta}{m^2c^2}$, якими ми нехтуємо.

Повний гамільтоніан системи матиме вигляд

$$H = \lambda\left(g^{\mu\nu}P_\mu P_\nu - m^2c^2\right) = \lambda\left(\frac{1}{A}P_0^2 - AP_r^2 - \frac{L'^2}{R^2} - m^2c^2\right), \tag{35}$$

де λ – множник Лагранжа, A – метрична функція, яка має вигляд

$$A = 1 - \frac{r_s}{R}, \tag{36}$$

$r_s = \frac{2GM}{c^2}$ – радіус Шварцшильда.

Також запишемо вирази для $R = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(X^i)^2}$, $P^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(P^i\right)^2$. Момент імпульсу має вигляд $L'^2 = \left[\vec{R},\vec{P}\right]^2$ та вираз для $P_r^2 = P^2 - \frac{L'^2}{R^2}$. Координати X^μ та компоненти імпульсу P^μ задовольняють деформовані дужки Пуассона (11).

Запишемо представлення для алгебри (7)

$$\begin{cases} X^\mu = x^\mu\left[1 - \beta\left(p_\rho p^\rho - m^2c^2\right)\right], \\ P^\mu = p^\mu, \end{cases} \tag{37}$$

x^μ, p^μ – задовольняють канонічні дужки Пуассона

$$\{x^\mu, p^\mu\} = -g^{\mu\nu}. \tag{38}$$

Отже, запишемо

$$R = \left[1 - \beta\left(p_\rho p^\rho - m^2c^2\right)\right]r, \tag{39}$$

$$P^2 = p^2. \tag{40}$$

$$L'^2 = \left(1 - \beta\left(p_\rho p^\rho - m^2c^2\right)\right)[\vec{r}, \vec{p}]^2. \tag{41}$$

Повний гамільтоніан (22) запишемо у такому вигляді

$$H = H_0 + H_\beta, \tag{42}$$

де H_0 – гамільтоніан без врахування деформації, а H_β – поправка до гамільтоніану зумовлена деформацією дужок Пуассона.

В лінійному наближенні за параметром деформації β запишемо

$$H_\beta \approx \lambda\left(p_\rho p^\rho - m^2c^2\right)\frac{r_s}{r}m^2c^2. \tag{43}$$

Знайдемо $\dot{\vec{p}}$ та $\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r}\right)$ зумовленими деформацією

$$\dot{\vec{p}} = \left\{p, H_\beta\right\} = -2m\lambda\alpha\beta r_s m^2c^2\frac{\vec{r}}{r^4}, \tag{44}$$

та

$$\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r}\right) = \left\{\frac{\vec{r}}{r}, H_0\right\} = -2\lambda\beta r_s m^2c^2\frac{1}{r^2}\left(\vec{p} - \frac{\vec{r}}{r^2}(\vec{r}, \vec{p})\right). \tag{45}$$

Тепер порахуємо $\dot{\vec{u}}$ зумовлену деформацією дужок Пуассона.

Використовуючи формули для вектору Гамільтона (25) та (27) запишемо

$$\dot{\vec{u}} = -4\lambda\alpha\beta r_s m^2c^2\frac{\vec{r}}{r^4}. \tag{46}$$

Підставимо (25) та (46) в формулу для швидкості прецесії (26), візьмемо її модуль і отримаємо

$$\omega_\tau = \frac{4\lambda\alpha\beta r_s L m^2c^2}{r^4}\left(\frac{1}{m} - \frac{\alpha r}{L^2}\right). \tag{47}$$

Нарешті, кут прецесії зумовлений деформацією

$$\Delta\theta_\beta = -\frac{4\pi\alpha\beta m}{R_0}. \tag{48}$$

Цікаво, що отриманий вираз співпадає з відповідним виразом для кута прецесії зумовленого деформацією в спеціальній теорії відносності [9].

Остаточно, кут прецесії в загальній теорії відносності з деформованими дужками Пуассона запишеться

$$\Delta\theta = \frac{\pi GM}{R_0 c^2}(6 - 4\beta m^2 c^2).$$

Як бачимо, кут прецесії залежить від маси, що порушує слабкий принцип еквівалентності. Вирішення цієї проблеми розглянемо в наступному розділі.

Розділ 5. Оцінка мінімальної довжини

В цьому розділі ми розглянемо обмеження, які накладаються на мінімальну довжину та зробимо оцінку мінімальної довжини, яка залежить від маси.

Якщо порівняти теоретичне передбачення кута прецесії перигелію Меркурія з експериментом, то можна накласти певні обмеження на параметр деформації. Запишемо спостережуваний зсув перигелію Меркурія [10]

$$\Delta\theta_{obs} = 2\pi(7.98693 \pm 0.00017) \times 10^{-8} \text{радіан/оберт.} \tag{49}$$

Цей зсув можна пояснити за допомогою загальної теорії відносності, яка передбачає наступне

$$\Delta\theta_{GR} = 2\pi\frac{3m\alpha}{m^2c^2R_0} = 2\pi(7.98744 \times 10^{-8}) \text{ радіан/оберт.} \tag{50}$$

Знайдемо різницю між спостережуваним значенням та значенням, яке дає ЗТВ

$$\Delta\theta_{obs} - \Delta\theta_{GR} = 2\pi(-0.00051 \pm 0.00017) \times 10^{-8} \text{радіан/оберт.} \tag{51}$$

Цю різницю можна пояснити за допомогою мінімальної довжини. Розглянемо кут прецесії перигелію з урахуванням деформації

$$\Delta\theta_{def} = -\frac{4\pi\alpha m}{R_0\hbar^2}\left(\hbar\sqrt{\beta}\right)^2. \tag{52}$$

З рівняння (51) отримаємо нижню межу для $\Delta\theta_{def}$, яка при 3σ дає такий результат

$$-2\pi(1.02 \times 10^{-11})\text{радіан/оберт} < \Delta\theta_{def} = -2\pi\frac{2\alpha m}{R_0\hbar^2}\left(\hbar\sqrt{\beta}\right)^2. \tag{53}$$

Таким чином отримаємо обмеження на мінімальну довжину

$$\hbar\sqrt{\beta} < 1.5 \times 10^{-68}\text{м.} \tag{54}$$

Отриманий результат показує, як Меркурій відчуває деформацію. Цей результат є дуже малий, і щось подібне було отримане в нерелятивістському випадку [11]. Однак, наш результат суттєво відрізняється від результату отриманого для мінімальної довжини на основі дослідження спектру релятивістського атому водню в деформованому просторі [12]. Отриманий результат для верхньої межі мінімальної довжини був по порядку 10^{-19}м.

З формули для кута прецесії у деформованому випадку (48) бачимо, що кут прецесії залежить від маси частинки, отже, траєкторії частинки у гравітаційному полі також залежить від маси. Це означає що, слабкий принцип еквівалентності порушується в деформованому просторі з мінімальною довжиною.

Щоб вирішити цю проблему ми припустимо, що параметр деформації залежить від маси. За допомогою формули (10) запишемо цей параметр і він буде мати такий вигляд

$$\beta = \frac{\delta}{m^2c^2},$$

де δ параметр, який не залежить від маси та швидкості світла, і є однаковим для різних частинок. Як бачимо, оцінка мінімальної довжини, отримана за рахунок досліджень руху планет узгоджується з оцінкою, отриманою для спектру атома водню, якщо врахувати припущення про залежність параметра деформації від маси частинки. Тобто Меркурій та електрон по різному відчувають деформовані комутаційні співвідношення. Тепер з формули (51) знайдемо безрозмірний параметр $\delta < 2 \cdot 10^{-4}$ і можемо отримати обмеження на мінімальну довжину для електрона

$$\hbar\sqrt{\beta} < 5.4 \times 10^{-15}\text{м}.$$

Даний результат дещо відрізняється від результату отриманого в [12] через високу точність вимірювань спектру атома водню. Отримана верхня межа є значно більша за (54) і близька до верхньої межі для електрона. Отже, оцінки мінімальної довжини, які надаються з різних вимірювань для спектру атома водню та руху планет, узгоджуються.

Висновок.

Під час виконання даної роботи було розглянуто лоренц-коваріантну деформовану алгебру з мінімальною довжиною, яка в нерелятивістській границі призводить до недеформованої.

Ми розглянули релятивістську частинку у викривленому просторі-часі з метрикою Шварцшильда зі звичайною алгеброю Пуассона лоренц-коваріантному формалізмі. Релятивістські ефекти призводять до збурення кеплерівських орбіт, і це спричиняє прецесію перигелію еліптичної орбіти. Прецесію перигелію зручніше описати, спостерігаючи за прецесією вектора Гамільтона. Нами було використано цей підхід, та пораховано модуль швидкості прецесії (31) та отримано добре відомий вираз для кута прецесії орбіти (34) у випадку загальної теорії відносності $\Delta\theta_0$.

Ми також розглянули релятивістську частинку викривленому просторі-часі з метрикою Шварцшильда у випадку деформованих дужок Пуассона. Цього разу релятивістські ефекти разом із деформацією призводять до збурення кеплерівських орбіт, що в свою чергу спричиняє прецесію перигелію еліптичної орбіти. Аналогічно до недеформованого випадку ми отримали вираз для кута прецесії орбіти на основі спостереження за прецесією вектора Гамільтона. Цікаво, що вираз для кута прецесії в загальній теорії відносності співпадає з відповідним виразом зумовленим деформацією в спеціальній теорії відносності.

Як виявилося, кут прецесії орбіти залежить від маси, що порушує слабкий принцип еквівалентності у деформованому просторі з мінімальною довжиною. Однак, цю проблему легко вирішити, припустити, що параметр деформації β залежить від маси.

На основі порівняння наших теоретичних результатів з експериментальними даними для кута прецесії Меркурію отримано оцінку на мінімальну довжину, яка узгоджується з іншими оцінками мінімальної довжини.

Список використаної літератури:

[1] D. J. Gross and P. F. Mende, String theory beyond the Planck scale // Nucl. Phys. B–1988. – Vol. 303, No.3 – P. 407– 454.

[2] M. Maggiore, The algebraic structure of the generalized uncertainty principle// Phys.Lett.–1993 B – No 1-3.–P. 83-86.

[3] E. Witten, Reflections on the Fate of Spacetime//Phys. Today –1996.–No. 4.–P. 24–30.

[4] Snyder H. S. Quantized Space-Time / H.S. Snyder // Phys. Rev. –1947. – Vol. 71, No. 1.– P. 38–41.

[5] A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann, Hilbert Space Representation of the Minimal Length Uncertainty Relation// Phys.Rev.D – Vol.52, No.1108 – 1995.

[6] Quesne, C., Tkachuk, V.M.: Composite system in deformed space with minimal length. Phys. Rev. A 81, 012106 (2010)

[7] Tkachuk, V.M.: Deformed Heisenberg algebra with minimal length and the equivalence principle. Phys. Rev. A 86, 062112 (2012)

[8] Girelli, F., Konopka, T., Kowalski-Glikman, J., Livine, E.R.: Free particle in deformed special relativity. Phys. Rev. D 73, 045009 (2006)

[9] M. I. Samar, V. M. Tkachuk: Kepler Problem in Space with Deformed Lorentz-Covariant Poisson Brackets. Foundations of Physics volume 50, pages 942–959 (2020)

[10] Park, R.S., Folkner, W.M., Konopliv, A.S., Williams, J.G., Smith, D.E., Zuber, M.: Precession of Mercury’s perihelion from ranging to the MESSENGER spacecraft. Astron. J. 153(3), 121 (2017)

[11] Benczik, S., Chang, L.N., Minic, D., Okamura, N., Rayyan, S., Takeuchi, T.: Short distance versus long distance physics: the classical limit of the minimal length uncertainty relation. Phys. Rev. D 66,026003 (2002)

[12] Samar, M.I.: Modified perturbation theory for hydrogen atom in space with Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length. J. Phys. Stud. 15, 1007 (2011)