

Львівський національний університет імені Івана Франка
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики

УДК 538.945

Магістерська робота на тему:
Конкуренція надплинних фаз низьковимірних ферміонів

Виконала:
студенка II курсу групи ФЗФМ-21
спеціальності 104 Фізика та астрономія
Ніколаєва А.О
Науковий керівник:
доц.Пастухов В.С.
Рецензент: д.фіз.-мат.н.Дудка М.Л.

Анотація

В даній магістерській роботі досліджується конкуренція надплинних фаз низьковимірних ферміонів з двочастинковими короткодійчими взаємодіями різних типів, яка дозволяє спростити розрахунки завдяки можливості знехтувати радіусом дії потенціалу через низьку концентрацію частинок, тому, розглядається система при нульовій температурі для різних значень вимірності. Роблячи висновок, що для взаємодії s-типу хвильова функція зв'язаного стану для $D < 4$ і $D > 1$ може виглядати однаково. А для константи взаємодії для p-типу, робимо висновок, що зв'язані стани виникають тільки коли вона більше нуля. Починаючи з опису двочастинкової задачі для двох станів, аналізуємо поведінку систем при різних значеннях констант зв'язку. Розглядаємо тремодинамічну границю в якій використовуємо наближення середнього поля. Описуємо так звану симетричну фазу, яка дозволяє існування трьох видів конденсату.

Ключові слова: низьковимірні ферміони, надплинність, короткодійча взаємодія, конденсат Бозе-Айнштайна, теорія Бардіна — Купера — Шріффера.

Abstract

We consider the system of interacting fermions loaded in the D -dimensional box of size L^D with periodic boundary conditions. Our model also takes into account p-wave and s-wave type interaction between fermions, to simplify the calculations, we assume that the temperature of the system is zero degrees. Also that model allows us to explore BCS-BEC crossover, when chemical potential crosses zero. We analyze three possible phases of condensate in this system and find expressions for the concentration and chemical potential.

Зміст

Вступ	7
Розділ 1. Двочастинкова задача	9
Розділ 2. Термодинамічна границя	14
Розділ 3. Симетрична фаза	19
Графічні результати	23
Висновок	25
Список використаної літератури	26

Вступ

Дослідженню охолодження бозе та фермі-газів приділяється велика увага останні 25 років. Вивчення одновимірних одночастинкових [1] і багаточастинкових [2] систем користуються найбільшою популярністю через існування великої кількості нетривіальних фазофих діаграм.

Нехтування взаємодією значно полегшує опис двочастинкової взаємодії між бозонами або ферміонами з різними значеннями спіну. Розглядаючи систему ідентичних ферміонів міжчастинковий потенціал взаємодії замінюється на p -симетричний псевдопотенціал, який ще носить назву δ'' -псевдопотенціалу взаємодії, і наразі активно досліджується. Теоретико-польова регуляризація точкової взаємодії розглянуто в [3]. Точні універсальні співвідношення, які пов'язують термодинамічні функції з хвостом функції розподілу частинок при великих значеннях імпульсу, досліджені і точно записані в [4]. Кроссоверній поведінці між надплинним станом фермі-частинок з механізмом спарювання Бардіна-Купера-Шріфера та Бозе-Айнштайнівською конденсацією присвячена стаття [5]. Нормальний стан системи одновимірних ферміонів розглядається в [6]. Існування точної дуальності між поведінкою спінополяризованих ферміонів з двочастинковим p -симетричним псевдопотенціалом взаємодії і системою бозонів з δ -відштовхуванням розглянуто в [7-9]

Мета роботи - дослідження надплинних фаз низьковимірних ферміонів. **Основним завданням** роботи є вивчення взаємодії ферміонів при низьких температурах, дослідження характеру взаємодії частинок в залежності від фаз, та їх види спарювання. **Об'єктом дослідження** є взаємодіючі між собою ферміони. **Предметом дослідження** є термодинамічні параметри в різних надплинних фазах.

У першому розділі досліджується взаємодія s і p -типу, знаходимо хвильові функції і для s -типу узагальнюємо результат на вищі вимірності простору, знаходимо константи взаємодії. У другому розділі ми розглядаємо термодинамічну границю системи, формулюємо наближення середнього поля і означаємо параметри порядку. У третьому розділі розглядається симетрична фаза, яка представляє собою стан, в якому можуть існувати всі

три види конденсату. Знаходимо вирази для концентрації і хімічного потенціалу.

Розділ 1. Двочастинкова задача

Перед тим, як перейти до розгляду термодинамічної границі проаналізуємо двочастинкові зв'язані стани.

1. s-стани

Досліджуючи взаємодію s-типу, введемо константу зв'язку g_s , а для опису просторової частини хвильової функції системи почнемо з запису стаціонарного рівняння Шрьодінгера для відносного руху двох частинок:

$$E\Psi(\mathbf{r}) = -\left\{\frac{\hbar^2}{m}\nabla^2 + \Phi(\mathbf{r})\right\}\Psi(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

В якому енергію перепозначимо як $E = -|\epsilon_s| = -\frac{\hbar^2}{ma_s^2}$. Розглядаючи взаємодію в 1D вимірності, позначимо потенціальну енергію як:

$$\Phi(x) = -g_s\delta(x) \quad (2.2)$$

При $g_s > 0$

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - g_s\delta(x)\right\}\Psi(x) = -|\epsilon_s|\Psi(x) \quad (2.3)$$

Одна з граничних умов – вимога неперервності функції, а другу – отримаємо інтегруючи правий і лівий бік рівняння в околі нуля

$$-\frac{\hbar^2}{m}\int_{-\delta}^{\delta}\Psi''(x) - \delta_s\int_{-\delta}^{\delta}dx\delta(x)\Psi(x) = -|\epsilon_s|\int_{-\delta}^{\delta}dx\Psi(x)$$

Спрямовуючи значення $\delta \rightarrow 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{m}\{\Psi'(+0) - \Psi'(-0)\} = g_s\Psi(0) \quad (2.4)$$

$$\Psi(+0) = \Psi(-0) \quad (2.5)$$

Розв'язок

$$\Psi(x) \propto e^{\frac{-|x|}{a_s}} \quad (2.6)$$

як неважко переконатись

$$-\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2}{dx^2}e^{\frac{-|x|}{a_s}} = e^{\frac{-|x|}{a_s}} - g_s\delta(x)e^{\frac{-|x|}{a_s}} = -\frac{\hbar^2}{m}e^{\frac{-|x|}{a_s}}$$

$$-\frac{\hbar^2}{ma_s^2}e^{-\frac{|x|}{a_s}} + \frac{\hbar^2}{ma_s^2}2\delta(x)e^{-\frac{|x|}{a_s}} - g_s\delta(x)e^{-\frac{|x|}{a_s}} = -\frac{\hbar^2}{ma_s^2}e^{-\frac{|x|}{a_s}}$$

задовольняє рівнянню, коли

$$g_s = \frac{2\hbar^2}{ma_s} \quad (2.7)$$

Знайдемо хвильову функцію зв'язаного s-стану в імпульсному представленні

$$\begin{aligned} \Psi_p &\propto \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx} e^{\frac{|x|}{a_s}} = \int_0^{\infty} dx e^{-ipx} e^{-\frac{x}{a_s}} + \int_{-\infty}^0 dx e^{-ipx} e^{\frac{|x|}{a_s}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{a_s} + ip} + \frac{1}{\frac{1}{a_s} - ip} = \frac{1}{\frac{1}{a_s^2} + p^2} \frac{2}{a_s} \\ \Psi_p &\propto \frac{1}{p^2 + \frac{1}{a_s^2}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тепер давайте спробуємо поширити цей результат на вищі вимірності простору. Виберемо там хвильову функцію в імпульсному просторі у формі лоренцівської кривої і дослідимо питання її квадратичної інтегровності

$$\int_0^{\infty} \frac{dp p^{D-1}}{p^4} < \infty \sim p^{D-4}|_{\infty}$$

Отже, коли $D < 4$ хвильова функція (2.8) може бути хвильовою функцією зв'язаного стану і для $D > 1$. Знайдемо форму потенціальної енергії

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{p}} \rightarrow \Psi(\mathbf{r}) &\sim \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \frac{1}{p^2 + \frac{1}{a_s^2}} \\ \left\{ -\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + \Phi(\mathbf{r}) \right\} \Psi(\mathbf{r}) &= -|\epsilon_s| \Psi(\mathbf{r}) \\ \left\{ -\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + |\epsilon_s| \right\} \Psi(\mathbf{r}) &\sim \frac{\hbar^2}{m} \left\{ -\nabla^2 + \frac{1}{a_s^2} \right\} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^D} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{p^2 + \frac{1}{a_s^2}} = \\ &= \frac{\hbar^2}{m} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^D} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \{p^2 + \frac{1}{a_s^2}\}}{p^2 + \frac{1}{a_s^2}} = \frac{\hbar^2}{m} \delta(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Константу g_s у потенціальній енергії $\Phi(\mathbf{r}) = -g_s\delta(\mathbf{r})$ визначаємо з умови $\Phi(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{m}\delta(\mathbf{r})$:

$$g_s \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + \frac{1}{a_s^2}} = \frac{\hbar^2}{m} \quad (2.10)$$

Запишемо інтеграл після переходу в гіперсферичні координати:

$$\frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dp p^{D-1} \frac{1}{p^2 + \frac{1}{a_s^2}}$$

Інтегрування за кутами дає Ω_D - повний тілесний кут. Для того, щоб знерозмірити інтеграл робимо заміну $p = \frac{q}{a_s}$.

$$\frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \frac{1}{a_s^{2-D}} \int_0^\infty \frac{dq q^{D-1}}{q^2 + 1} =$$

виконаємо заміну змінної $q^2 \rightarrow q$

$$\frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \frac{1}{a_s^{2-D}} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dq q^{\frac{D}{2}-1}}{q + 1} =$$

Робимо ще одну заміну $\frac{1}{q} = \eta$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_D}{2(2\pi)^D} \frac{1}{a_s^{2-D}} \int_1^\infty d\eta \eta^{-\frac{D}{2}} (1 - \eta)^{\frac{D}{2}-1} &= \frac{\Omega_D}{2(2\pi)^D} \frac{1}{a_s^{2-D}} B\left(1 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right) = \\ \frac{\Omega_D}{2(2\pi)^D} \frac{1}{a_s^{2-D}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) &= \frac{\Omega_D}{2(2\pi)^D} \frac{1}{a_s^{2-D}} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi D}{2}\right)} \end{aligned}$$

Враховуючи, що $\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})}$, знаходимо константу зв'язку для довільних D :

$$g_s = \frac{(4\pi)^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)} \frac{\hbar^2}{m a_s^{2-D}} \quad (2.11)$$

2. p -стани

Опис взаємодії двох ідентичних ферміонів вимагає непарної хвильової функції. Це можна реалізувати лише антисиметричною просторовою частиною хвильової функції. Напротіше узагальнення (2.8)

$$\bar{\Psi}_{\mathbf{p}} \propto \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{p})}{\frac{1}{b} + p^2} \quad (2.12)$$

де \mathbf{n} – одиничний вектор, а антисиметричність явна

$$\bar{\Psi}_{-p} = -\bar{\Psi}_p$$

Вимагаючи квадратичну інтегровність хвильової функції

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^D} \bar{\Psi}_p^2 = 1$$

отримуємо умову на вимірність простору $D < 2$. Спробуємо знайти потенціал $\bar{\Phi}(\mathbf{r})$ розв'язок рівняння Шрьодінгера для якого буде (2.12). Для цього запишемо гамільтоніан системи

$$H = -\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + \bar{\Phi}(\mathbf{r}) \quad (2.13)$$

і подіємо на стан $|\bar{\Psi}\rangle$ і спроектуємо на базис плоских хвиль $|\mathbf{p}\rangle$

$$\langle \mathbf{p} | -\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 | \bar{\Psi} \rangle + \langle \mathbf{p} | \bar{\Phi}(\mathbf{r}) \rangle = E \langle \mathbf{p} | \bar{\Psi} \rangle \quad (2.14)$$

Переносимо кінетичну енергію наліво, і використовуючи умову повноти $\sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| = 1$ у випадку періодичних граничних умов з об'ємом періодичності L^D , маємо

$$\frac{\hbar^2 p^2}{m} \langle \mathbf{p} | \bar{\Psi} \rangle + \sum_{\mathbf{k}} \langle \mathbf{p} | \bar{\Phi} | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | \bar{\Psi} \rangle = E \langle \mathbf{p} | \bar{\Psi} \rangle \quad (2.15)$$

Ототожнимо $\langle \mathbf{p} | \bar{\Psi} \rangle$ з $\bar{\Psi}_{\mathbf{p}}$, і позначимо E як

$$\epsilon_g = -\frac{\hbar^2}{mb^2}$$

маємо

$$\left\{ p^2 + \frac{1}{b^2} \right\} \bar{\Psi}_{\mathbf{p}} + \frac{m}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{k}} \langle \mathbf{p} | \bar{\Phi} | \mathbf{k} \rangle \bar{\Psi}_{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.16)$$

і після підстановки явного вигляду (2.12)

$$(\mathbf{n}, \mathbf{p}) + \frac{m}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{k}} \langle \mathbf{p} | \bar{\Phi} | \mathbf{k} \rangle \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{k})}{k^2 + \frac{1}{b^2}} = 0 \quad (2.17)$$

В границі безмежного розміру системи можна перейти від підсумовування до інтегруванням за хвильовим вектором та ідентифікувати $\langle \mathbf{p} | \bar{\Phi} | \mathbf{k} \rangle / L^D = g_{p,\Lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$

$$(\mathbf{n}, \mathbf{p}) + \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^D} \int d\mathbf{k} g_{p,\Lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{k})}{k^2 + \frac{1}{b^2}} = 0 \quad (2.18)$$

Використовуючи рівність

$$\frac{1}{\Omega_D} \int d\Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{p})(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \frac{1}{D} k^2(\mathbf{n}, \mathbf{p}) \quad (2.19)$$

де інтегрування ведеться за напрямками \mathbf{k} , отримуємо рівняння, що пов'язує "голу" константу зв'язку $g_{p,\Lambda}$ з енергією зв'язаного стану

$$\frac{1}{g_{p,\Lambda}} + \frac{m}{\hbar^2 D} \int_{|\mathbf{k}| \leq \Lambda} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{k^2 + \frac{1}{b^2}} = 0 \quad (2.20)$$

де введено параметр Λ ультрафіолетового обрізання інтеграла. Означимо спостережувану константу взаємодії g_p

$$\frac{1}{g_{p,\Lambda}} + \frac{m}{\hbar^2 D} \int_{|\mathbf{k}| \leq \Lambda} = \frac{1}{g_p}$$

тоді рівняння на g_p

$$\frac{1}{g_p} + \frac{m}{\hbar^2 D} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{k^2}{k^2 + \frac{1}{b^2}} - 1 \right\} = 0 \quad (2.21)$$

Щоб знайти спостережувану константу взаємодії, обчислимо D -вимірний інтеграл:

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{k^2}{k^2 + \frac{1}{b^2}} - 1 \right\} = \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dk k^{D-1} \left\{ \frac{k^2}{k^2 + \frac{1}{b^2}} - 1 \right\}$$

Після знерозмірення $k = \frac{q}{b}$

$$-\frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \frac{1}{b^D} \int_0^\infty dq q^{D-1} \left\{ \frac{q^2}{q^2 + 1} - 1 \right\} = -\frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \frac{1}{b^D} \int_0^\infty \frac{dq q^{D-1}}{q^2 + 1}$$

заміни $q^2 \rightarrow q$

$$-\frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \frac{1}{b^D} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dq q^{\frac{D}{2}-1}}{q+1} = -\frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \frac{1}{b^D} \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dq}{q} q^{\frac{D}{2}-1} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{\frac{D}{2}-1}$$

Заміну $\frac{1}{q} = \eta$

$$-\frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \frac{1}{b^D} \frac{1}{2} \int_0^1 d\eta \eta^{-\frac{D}{2}} (1-\eta)^{\frac{D}{2}-1} = -\frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \frac{1}{b^D} \frac{1}{2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$$

Остаточно для g_p отримуємо

$$g_p = \frac{(4\pi)^{D/2} D}{\Gamma(1 - D/2)} \frac{\hbar^2 b^D}{m}. \quad (2.22)$$

Варто відзначити, що зв'язані стани виникають лише за умови $g_p > 0$.

Розділ 2. Термодинамічна границя

Ми розглядаємо взаємодіючі ферміони, які знаходяться в об'ємі L^D , з періодичними граничними умовами. Константа зв'язку g_s відповідає за взаємодію між двома частинками з різними проекціями спіну $\uparrow\downarrow$. Наша модель також враховує короткодіючу взаємодію p -типу g_p для двох ферміонів з $\uparrow\uparrow$ і $\downarrow\downarrow$ напрямками спінів. Для опису такої системи зручно буде розглядати її у великому канонічному ансамблі. Гамільтоніан такої системи:

$$H - \mu N = \sum_{\mathbf{p}} \{\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu\} \{f_{\uparrow\mathbf{p}}^+ f_{\uparrow\mathbf{p}} + f_{\downarrow\mathbf{p}}^+ f_{\downarrow\mathbf{p}}\} - \frac{1}{L^D} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} g_s f_{\uparrow\mathbf{p}_1}^+ f_{\downarrow\mathbf{p}_2}^+ f_{\downarrow\mathbf{p}'_2} f_{\uparrow\mathbf{p}'_1}$$

$$\delta_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2} + \frac{1}{2L^D} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} g_p \left(\frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{2}, \frac{\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2}{2} \right) \{f_{\uparrow\mathbf{p}_1}^+ f_{\uparrow\mathbf{p}_2}^+ f_{\uparrow\mathbf{p}'_2} f_{\uparrow\mathbf{p}'_1} +$$

$$f_{\downarrow\mathbf{p}_1}^+ f_{\downarrow\mathbf{p}_2}^+ f_{\uparrow\mathbf{p}'_2} f_{\uparrow\mathbf{p}'_1}\} \delta_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2}$$

де вводимо позначення хімічного потенціалу μ . Другий доданок в рівнянні відповідає за взаємодію s -типу і забезпечує зв'язаний стан частинок з різними проекціями спіну, а останній – зв'язані стани з p -симетричними хвильовими функціями.

Важливим параметром, який характеризує впорядковану фазу (наявність макроскопічного числа зв'язаних пар атомів) – є параметр порядку. За умови існування бозе-конденсату куперівських пар в s -стані з протилежними проекціями спінів він записується наступним чином:

$$\langle f_{\downarrow p} f_{\uparrow -p} \rangle = \Delta_p \neq 0, \quad (3.1)$$

де ламані дужки позначають статистичне усереднення. Оскільки, надалі ми будемо працювати при нульовій температурі, то це усереднення на хвильових функціях основного стану системи. Трансляційна інваріантність системи фіксує значення двох імпульсів $p, -p$ у рівнянні для Δ_p .

Розглядаючи p -фазу, параметр порядку:

$$\langle f_{\downarrow p} f_{\downarrow -p} \rangle = \eta_{\downarrow p} \neq 0 \quad (3.2)$$

$$\langle f_{\uparrow p} f_{\uparrow -p} \rangle = \eta_{\uparrow p} \neq 0 \quad (3.3)$$

Цей запис відповідає умові бозе-конденсації: спонтанному порушенні глобальної $U(1)$ -симетрії. Варто зазначити, що параметр порядку для пар в s -стані є симетричною функцією, а p -стан визначається антисиметричною.

Притягальна взаємодія між двома фермі-частинками, які знаходяться в s -фазі, маючи при цьому різні напрямки спіну, призводить до утворення куперівських пар, які випадають в бозе-конденсат при розмірності $D > 1$. В іншому випадку наявність взаємодії p -типу між однаковими ферміонами може призвести до утворення Бозе-Ейнштейнівського конденсату (БЕК) двочастинкових пар з цією симетрією. В залежності від знаку константи взаємодії ми маємо різні види спарювання. При $g_p < 0$ для p -фази реалізується механізм Бардіна—Купера—Шріффера (БКШ). Коли константа взаємодії $g_p > 0$ – утворюється бозе-конденсат зв'язаних пар, які мають вакуумне походження. В D -вимірній системі спінополяризованих ферміонів, при перетині описаних вище двох станів, коли g_p^{-1} стає більшим за нуль, відбувається так званий БКШ-БЕК кроссовер: характер спарювання частинок змінюється без фазового переходу в системі.

Для того, щоб гамільтоніан відповідав нашому конкретному випадку з слабкою взаємодією пар між собою – перепишемо його в наближенні середнього поля $H \rightarrow H_{MF}$.

$$\begin{aligned}
H_{MF} - \mu N &= \sum_{\mathbf{p}} (\epsilon_p - \mu) \{ f_{\uparrow p}^+ f_{\uparrow p} + f_{\downarrow p}^+ f_{\downarrow p} \} + \frac{1}{L^D} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} g_s \{ f_{\uparrow p_1}^+ f_{\uparrow p_2}^+ \\
&< f_{\downarrow p'_2} f_{\uparrow p'_1} \rangle + \langle f_{\uparrow p_1}^+ f_{\uparrow p_2}^+ \rangle f_{\downarrow p'_2} f_{\uparrow p'_1} - \langle f_{\uparrow p_1}^+ f_{\downarrow p_2}^+ \rangle \langle f_{\downarrow p'_2} f_{\uparrow p'_1} \rangle + \\
&+ \frac{1}{2L^D} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} g_{p,\Lambda} \left(\frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{2}, \frac{\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2}{2} \right) \sum_{\sigma} \{ \langle f_{\sigma p_1}^+ f_{\sigma p_2}^+ \rangle f_{\sigma p'_2} f_{\sigma p'_1} + \\
&+ f_{\sigma p_1}^+ f_{\sigma p_2}^+ \langle f_{\sigma p'_2} f_{\sigma p'_1} \rangle - \langle f_{\sigma p_1}^+ f_{\sigma p_2}^+ \rangle \langle f_{\sigma p'_2} f_{\sigma p'_1} \rangle \} \delta_{p_1+p_2, p'_1+p'_2}.
\end{aligned}$$

Після підстановки відповідних середніх (перепозначимо $\epsilon_p - \mu = \xi_p$ і будемо використовувати це позначення надалі)

$$\begin{aligned}
H_{MF} - \mu N &= \sum_{\mathbf{p}} \xi_p \{ f_{n\uparrow p}^+ f_{\uparrow p} + f_{\downarrow p}^+ f_{\downarrow p} \} - \frac{1}{L^D} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} g_s \{ f_{\uparrow p}^+ f_{\uparrow -p}^+ \Delta_{p'} \\
&+ \Delta_p^* f_{\downarrow p'} f_{\downarrow -p'} - \Delta_p^* \Delta_{p'} \} + \frac{1}{2L^D} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} g_{p,\Lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \sum_{\sigma} \{ \eta_{\sigma p'}^* f_{\sigma \mathbf{p}} f_{\sigma -\mathbf{p}} + \\
&+ \eta_{\sigma p'} f_{\sigma -\mathbf{p}}^+ f_{\sigma \mathbf{p}}^+ - \eta_{\sigma p}^* \eta_{\sigma p'} \} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Легко бачити, що подвійні суми факторизуються, і ввівши позначення для комплексної сталої

$$\Delta = \frac{1}{L^D} \sum_p g_s \Delta_p \quad (3.5)$$

і сталих комплексних векторів $\boldsymbol{\eta}$

$$\boldsymbol{\eta}_\sigma = \frac{1}{L^D} \sum_p \frac{g_{p,\Lambda}}{2} \mathbf{p} \boldsymbol{\eta}_{\sigma\mathbf{p}} \quad (3.6)$$

Переконаємося, що гамільтоніан системи переписується так:

$$\begin{aligned} H_{MF} - \mu N &= \sum_p \xi_p \{f_{\uparrow\mathbf{p}}^+ f_{\uparrow\mathbf{p}} + f_{\downarrow\mathbf{p}}^+ f_{\downarrow\mathbf{p}}\} + \sum_p \{f_{\uparrow\mathbf{p}}^+ f_{\downarrow\mathbf{p}}^+ \Delta + \Delta^* f_{\downarrow\mathbf{p}} f_{\uparrow-\mathbf{p}}\} \\ &+ \sum_p \sum_\sigma \{(\boldsymbol{\eta}_\sigma^*, \mathbf{p}) f_{\sigma\mathbf{p}} f_{\sigma-\mathbf{p}} + (\boldsymbol{\eta}_\sigma, \mathbf{p}) f_{\sigma-\mathbf{p}}^+ f_{\sigma\mathbf{p}}^+\} + \frac{L^D}{g_s} |\Delta|^2 - \sum_\sigma \frac{2L^D}{g_{p,\Lambda}} (\boldsymbol{\eta}_\sigma^*, \boldsymbol{\eta}_\sigma) \quad (3.7) \end{aligned}$$

Перший доданок якого описує кінетичну енергію ферміонів зі спінами догори і донизу. Другий і третій – описують процеси з народженням (знищенням) пар частинок з відповідними проєкціями спінів. Будучи записаним в такій формі, гамільтоніан системи в наближенні середнього поля можна здіагоналізувати за допомогою унітарного перетворення. Для цього перепишемо операторну частину у матричній формі:

$$H_{MF} - \mu N = \frac{1}{2} \sum_p \widehat{f}_p^+ \widehat{M}_p \widehat{f}_p + \sum_p \xi_p - \frac{L^D}{g_s} |\Delta|^2 - \frac{L^D}{g_{p,\Lambda}} \sum_\sigma (\boldsymbol{\eta}_\sigma^*, \boldsymbol{\eta}_\sigma) \quad (3.8)$$

де позначена як \widehat{M}_p матриця

$$\begin{pmatrix} \xi_p & -2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\uparrow) & 0 & \Delta \\ -2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\uparrow^*) & -\xi_p & -\Delta^* & 0 \\ 0 & -\Delta & \xi_p & -2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\downarrow) \\ \Delta^* & 0 & -2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\downarrow^*) & -\xi_p \end{pmatrix} = \widehat{M}_p \quad (3.9)$$

а вектор-стовбець, як \widehat{f}_p

$$\widehat{f}_p = \begin{pmatrix} f_{\uparrow p} \\ f_{\uparrow-p}^+ \\ f_{\downarrow p} \\ f_{\downarrow-p}^+ \end{pmatrix}$$

При $T = 0$ ненульове значення Δ або $\boldsymbol{\eta}_{\sigma\mathbf{p}}$ означає появу в системі надплинності. У випадку $D > 1$ ненульове значення $\Delta \neq 0$ свідчить про наявність s -фази, тобто $\uparrow\downarrow$ -пар в конденсаті Бозе-Ейнштейна, а $\eta_{\sigma,\mathbf{p}} \neq 0$ про існування бозе-конденсату $\uparrow\uparrow$ - та $\downarrow\downarrow$ -пар. В одновимірному випадку явище БЕК відсутнє, але система буде надплинною в основному стані.

Перейдемо від операторів $f_{\sigma p}$, що описують частинки до операторів знищення квазічастинок u_p, d_p . Після переходу, гамільтоніан в наближенні середнього поля буде виглядати як сума константи і діагоналізованого гамільтоніана

$$H_{MF} - \mu N = \Omega_{MF} + \sum_{\mathbf{p}} E_u(p) u_p^+ u_p + \sum_{\mathbf{p}} E_d(p) d_p^+ d_p. \quad (3.10)$$

Розглядаючи багаточастинкову взаємодіючу систему вже діагоналізованого гамільтоніану з новим станом оператори пороження і знищення квазічастинок u_p, d_p діючи на нього дають нуль:

$$u_p |GS\rangle = 0$$

$$d_p |GS\rangle = 0$$

Тобто, в основному стані не може існувати квазічастинок а усереднення $\langle \dots \rangle$ тепер позначає $\langle GS | \dots | GS \rangle$. Константа $\Omega_{MF} = E_{MF} - \mu N$ має значення омега-потенціалу в наближенні середнього поля.

$$\Omega_{MF} = E_{MF} - \mu N = \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \xi_p - \frac{1}{2} E_u(p) - \frac{1}{2} E_d(p) \right\} + L^D \frac{|\Delta|^2}{g_s} - L^D \sum_{\sigma} \frac{2(\boldsymbol{\eta}_{\sigma}^*, \boldsymbol{\eta}_{\sigma})}{g_{p,\Lambda}}. \quad (3.11)$$

Для знаходження $E_{u,d}$ треба розв'язати рівняння на власні значення матриці

$$\det\{\widehat{M}_p - E\} = 0 \Rightarrow E_{u,d}(p) \quad (3.12)$$

$$\begin{vmatrix} \xi_p - E & -2(\mathbf{p}, \boldsymbol{\eta}_{\uparrow}) & 0 & \Delta \\ -2(\mathbf{p}, \boldsymbol{\eta}_{\uparrow}^*) & -\xi_p - E & -\Delta^* & 0 \\ 0 & -\Delta & \xi_p - E & -2(\mathbf{p}, \boldsymbol{\eta}_{\downarrow}) \\ \Delta^* & 0 & -2(\mathbf{p}, \boldsymbol{\eta}_{\downarrow}^*) & -\xi_p - E \end{vmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

Після розкриття визначника, рівняння на власні значення матриці зводиться до біквadratного

$$E^4 - E^2(-b) + c = 0 \quad (3.14)$$

$$-b = 2\xi_p^2 + 4(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\downarrow)^2 + 4(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\uparrow)^2 + 2|\Delta|^2 \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} c = & (\xi_p^2 + 4(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\downarrow)^2)(\xi_p^2 + 4(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\uparrow)^2) + 2\Delta^2\xi_p^2 + \Delta^4 + 8\Delta^2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\downarrow)(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\uparrow) \\ & + 4\Delta^2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\downarrow)(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\uparrow) = \xi_p^4 - 4\xi_p^2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\downarrow)^2 - 4\xi_p^2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\uparrow)^2 - 2\Delta^2\xi_p^2 - (\Delta^2 + 4(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\downarrow)(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\uparrow))^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} b^2 - c = & (\xi_p^2 + 2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\downarrow)^2 + 2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\uparrow)^2 + \Delta^2)^2 - \xi_p^4 - 4\xi_p^2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\downarrow)^2 - 4\xi_p^2(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\uparrow)^2 - \\ & - 2\Delta^2\xi_p^2 - (\Delta^2 + 4(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\downarrow)(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_\uparrow))^2 = 4(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_-)^2[(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_+)^2 + \Delta^2] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Після розв'язування рівняння і підставляючи значення в формулу отримуємо рівняння для енергії, де вираз під коренем відповідає за дві вітки спектру.

$$E_{u,d}^2 = \xi_p^2 + \Delta^2 + (\boldsymbol{\eta}_+\mathbf{p})^2 + (\boldsymbol{\eta}_-\mathbf{p})^2 \pm 2\sqrt{(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_-)^2[\Delta^2 + (\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_+)^2]} \quad (3.18)$$

де для зручності перейдемо до $\boldsymbol{\eta}_\pm = \boldsymbol{\eta}_\uparrow - \boldsymbol{\eta}_\downarrow$ і перепишемо вираз для омега-потенціалу

$$E_{MF} - \mu = \Omega_{MF} = \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \xi_p - \frac{1}{2}E_u(p) - \frac{1}{2}E_d(p) \right\} + L^D \frac{\Delta^2}{g_s} - L^D \frac{\boldsymbol{\eta}_+^2 + \boldsymbol{\eta}_-^2}{g_{p,\Lambda}}. \quad (3.19)$$

Для того, щоб знайти параметри Δ , $\boldsymbol{\eta}_\sigma$ потрібно мінімізувати великий термодинамічний потенціал за ними. Маючи дві незалежні змінні $\boldsymbol{\eta}_\sigma$ і їх лінійні комбінації $\boldsymbol{\eta}_\pm$ одразу можемо мінімізувати за η_\pm

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega_{MF}}{\partial \Delta} = 0 \\ \frac{\partial \Omega_{MF}}{\partial \boldsymbol{\eta}_\pm} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Доповнюємо рівняння вище термодинамічною тотожністю:

$$N = -\frac{\partial \Omega_{MF}}{\partial \mu}, \quad (3.21)$$

яка зв'язує хімічний потенціал системи з загальною кількістю ферміонів.

Розділ 3. Симетрична фаза

Серед всього різноманіття фаз системи симетрична фаза ($\eta_{\uparrow} = \eta_{\downarrow}$) дозволяє існування трьох видів конденсату: ($\uparrow\uparrow + \downarrow\downarrow$), ($\downarrow\uparrow$) і ($\uparrow\uparrow + \downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow$). Припускаючи існування однакової кількості частинок, які знаходяться в одній фазі і мають різні напрямки спінів концентрація яких однакова можемо спростити вираз для двох віток спектра:

$$E_{u,d}^2(p) = \xi_p^2 + \Delta^2 + (\mathbf{p}, \boldsymbol{\eta}_+)^2 = E_p^2 \quad (4.1)$$

Вираз для концентрації:

$$n = \frac{1}{L^D} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ 1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right\} \quad (4.2)$$

Беручи похідну мінімізуємо омега-потенціал по параметру Δ

$$\frac{1}{L^D} \frac{\partial \Omega_{MF}}{\partial \Delta} = \frac{2\Delta}{g_s} - \frac{1}{L^D} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\Delta}{E_p} = 0 \quad (4.3)$$

Отримуємо наступні розв'язки рівняння: $\Delta = 0$, тобто конденсат з парами частинок які мають $\uparrow\downarrow$ спіни відсутній. Або

$$\frac{2}{g_s} = \frac{1}{L^D} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{E_p} \quad (4.4)$$

Беручи похідну аналогічно попередньому мінімізуємо омега-потенціал по параметру η_+

$$\frac{1}{L^D} \frac{\partial \Omega_{MF}}{\partial \eta_+} = -\frac{2\eta_+}{g_{p,\lambda}} - \frac{1}{L^D} \sum_{\mathbf{p}} \frac{(\boldsymbol{\eta}_+, \mathbf{p})}{E_p} = 0 \quad (4.5)$$

Отримуючи векторне рівняння для спрощення подальших розрахунків домножуємо зліва і справа скалярно на $\boldsymbol{\eta}_+$ і переходимо до спостережуваної константи зв'язку

$$\frac{2\eta_+^2}{g_p} + \frac{1}{L^D} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{(\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}_+)^2}{E_p} - \frac{\eta_+^2 p^2}{\epsilon_p D} \right\} = 0 \quad (4.6)$$

Знову, серед потенційних розв'язків є тривіальний $\boldsymbol{\eta}_+ = 0$, і нетривіальний, що відповідає фазі зі $\uparrow\uparrow + \downarrow\downarrow$ -парами.

Надалі, зосередимось виключно на одновимірному випадку. Більш того, будемо вважати, що досліджувана система знаходиться під поршнем, який забезпечує сталий тиск системи. Саме такі умови в реальних експериментах з холодними газами, де відкачування парів дозволяє тідтримувати температуру сталою. За таких умов, рівноважною буде фаза в якій хімічний потенціал системи приймає мінімальне значення.

У фазі зі всіма типами конденсатів, тобто, коли $\Delta \neq 0$, $\eta_+ \neq 0$ та

$$\frac{2}{g_p} + \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{p^2}{E_p} - \frac{2m}{\hbar^2} \right\} = 0,$$

$$\frac{1}{g_p} = \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_p}{E_p} \right\},$$

та комбінуючи з рівнянням для концентрації частинок, отримуємо

$$n = \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_p}{E_p} \right\} + \frac{\mu}{L} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{E_p} = \frac{\hbar^2}{mg_p} + \frac{2\mu}{g_s}.$$

Звідки знаходимо

$$\mu = \frac{g_s}{2} \left\{ n - \frac{\hbar^2}{mg_p} \right\}. \quad (4.7)$$

У фазі виключно з синглетним ($\uparrow\downarrow$) конденсатом $\Delta \neq 0$, $\eta_+ = 0$ потрібно розв'язати систему рівнянь

$$n = \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ 1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right\},$$

$$\frac{2}{g_s} = \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{E_p}.$$

Для того, щоб знайти вираз для повної кількості частинок теба перейти від суми до інтегралу:

$$n = \frac{1}{L} \sum_p \left\{ 1 - \frac{\epsilon_p}{E_p} \right\} + \frac{2\mu}{g_s} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_p + |\mu|}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (4.8)$$

де $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}$. Робимо заміну $p = k_0 k$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_p + |\mu|}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right\} &= \frac{k_0}{\hbar} \int_0^{\infty} dk \left\{ 1 - \frac{k^2 + 1}{\sqrt{(k^2 + 1)^2 + \frac{\Delta^2}{\mu^2}}} \right\} \\
&= \frac{k_0}{\hbar} \int_0^{\infty} dk \sum_{n \geq 1} \frac{(-x)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{n! \Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{(k^2 + 1)^{2n}} = \\
&\quad - \frac{k_0}{2\hbar} \sum_{n \geq 1} \frac{(-x)^n \Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(2n - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{n! \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2n)} = \\
&\quad \frac{k_0 x}{2\sqrt{2}\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n \Gamma(n + \frac{3}{4}) \Gamma(n + \frac{5}{4})}{n! \Gamma(n + 2)} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{4}) \Gamma(\frac{5}{4})} \frac{\Gamma(\frac{3}{4}) \Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(2)} = \\
&\hspace{25em} \frac{k_0 x}{8} {}_2F_1\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}; 2; -x\right)
\end{aligned}$$

Який можна звести до гіпергеометричної функції ($\mu < 0$). Тоді хімічний потенціал

$$\mu = \frac{g_s}{2} \left(n - \frac{1}{L} \sum_p \left\{ 1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right\} \right). \quad (4.9)$$

Тепер розглянемо фазу з триплетними $\uparrow\uparrow$ і $\downarrow\downarrow$ конденсатами ($\Delta = 0, \eta_+ \neq 0$)

$$\begin{aligned}
n &= \frac{\hbar^2}{mg_p} + \frac{\mu}{L} \sum_p \frac{1}{E_p} \\
\frac{2}{g_p} + \frac{1}{L} \sum_p \left\{ \frac{p^2}{E_p} - \frac{2m}{\hbar^2} \right\} &= 0
\end{aligned}$$

Переходячи від інтегралу до суми, маємо наступний вираз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \left\{ \frac{p^2}{E_p} - \frac{2m}{\hbar^2} \right\} = \frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \left\{ \frac{\epsilon_p}{E_p} - 1 \right\} = \quad (4.10)$$

Розглядаючи випадок з $\Delta = 0, \eta_+ \neq 0$ значення енергії $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \eta_+^2 p^2}$. Роблячи аналогічне попередньому інтегралу перепозначення $p = k_0 k$ можемо записати:

$$\begin{aligned}
& -\frac{2mk_0}{\hbar} \int_0^\infty \frac{dp}{\pi} \left\{ 1 - \frac{p^2}{\sqrt{(p^2+1)^2 + \frac{\eta_+^2 k_0^2}{\mu} p^2}} \right\} = -\frac{2mk_0}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{dp}{\pi} \left\{ 1 - \frac{p^2}{p^2+1} \right. \\
& \left. \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{n \Gamma(\frac{1}{2})} \frac{(4yp^2)^n}{(p^2+1)^{2n}} \right\} = -\frac{mk_0}{\hbar^2} - \frac{mk_0}{\pi \hbar^2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-4y)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{n! \Gamma(\frac{1}{2})} \\
& \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{3}{2})}{\Gamma(2n + \frac{1}{2})} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{n \geq 0} \frac{(-y)^n \sqrt{\pi} \Gamma(n - \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{3}{2})}{n! \Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(-\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{2 \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(1)} \\
& {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1; -y\right)
\end{aligned}$$

Значення хімічного потенціалу в цьому випадку:

$$\mu = \frac{L}{\sum_p \frac{1}{E_p}} \left\{ n - \frac{\hbar^2}{mg_p} \right\} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\xi_p^2 + \eta_+^2 p^2}} = \{p = k_0 p\} = \frac{k_0}{\mu} \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(p^2+1)^2 + \frac{\eta_+^2 k_0^2}{\mu} p^2}} = \\
& \frac{2m}{\hbar^2 k_0} \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{p^2+1} + \frac{2m}{\hbar^2 k_0} \int_0^\infty \frac{dp}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(-4y)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{n! \Gamma(\frac{1}{2})} \frac{p^{2(n+1)}}{(p^2+1)^{2n+1}} = \frac{m}{\hbar^2 k_0} + \\
& + \frac{m}{\hbar^2 k_0 \pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(-4y)^n (n + \frac{1}{2}) \Gamma^3(n - \frac{1}{2})}{n! \sqrt{\pi} \Gamma(2n+1)} = \frac{m}{\hbar^2 k_0} + \frac{m}{\hbar^2 k_0 \pi} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, x\right) \\
& (4.12)
\end{aligned}$$

Графічні результати

Результати чисельного розрахунку хімічних потенціалів у фазах окремо з синглетним і триплетними конденсатами наведені на рисунках. Введемо p_f – граничний хвильовий вектор Фермі частинок з однаковою проекцією спіна. В синглетній фазі зміна знаку хімічного потенціалу, а отже і механізму спарювання відбувається при $ap_f = \frac{\pi}{4}$. Цікаво, що й зміна знаку μ у фазі зі співіснуванням триплетних конденсатів відбувається при тому ж значенні $bp_f = \frac{\pi}{4}$. Використовуючи отримані в роботі формули, ми намалювали, порівнянням значень хімічних потенціалів, схематичну фазову діаграму системи. Зокрема, на ній є потрійна точка з координатами $(ap_f, bp_f) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, де одночасно співіснують три фази системи. Наявність такої точки не суперечить правилу фаз Гіббса, яке при $T = 0$ є таким: $f = n + 1 - k$, тут $f = 0$ – кількість ступенів вільності $n = 2$ – кількість компонент, а $k = 3$ – кількість фаз, які одночасно можуть співіснувати.

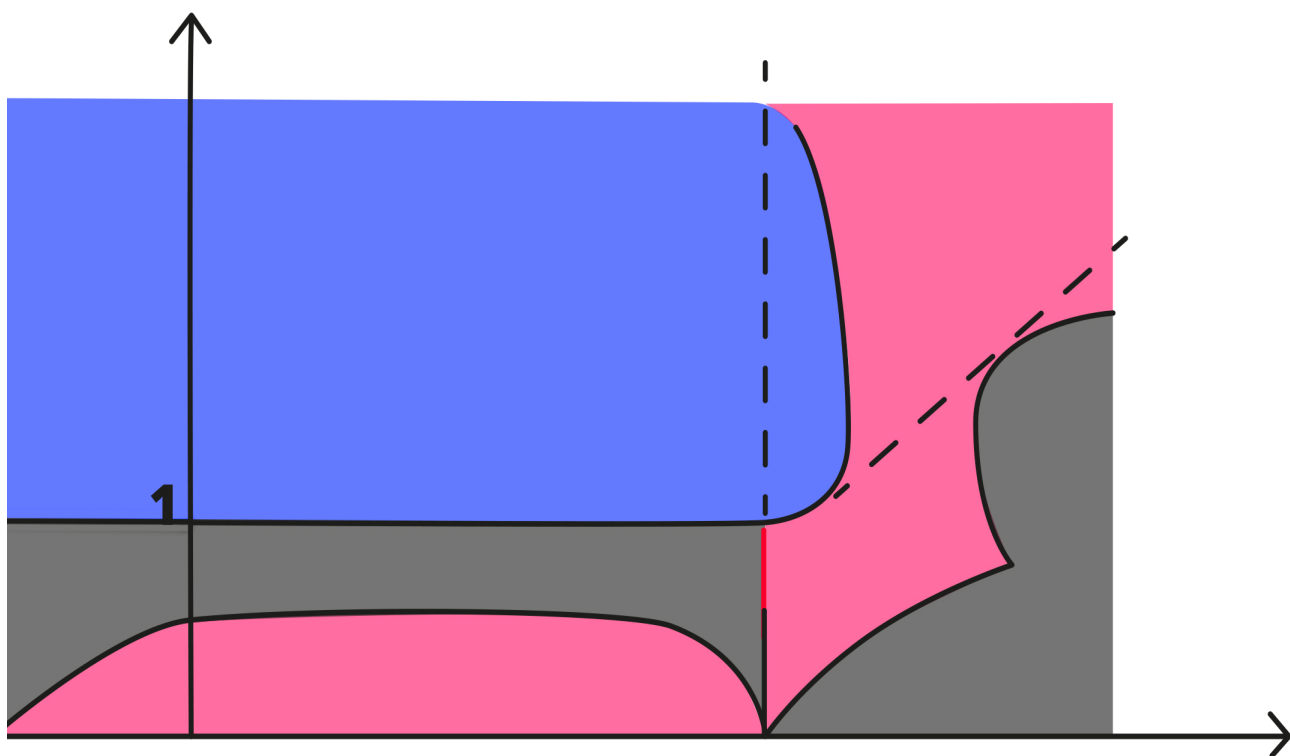


Рис. 1. Якісна фазова діаграма системи. Синім кольором позначено фазу зі синглетним конденсатом, чорним — з триплетним, і червоним — змішану фазу зі всіма типами впорядкування. По осі абсцис $1/(bp_f)$, ординат — $1/(ap_f)$.

З наведених нижче графіків видно, що хімічний потенціал зменшується зі збільшенням константи. Тобто абсолютне значення зі

збільшенням константи росте.

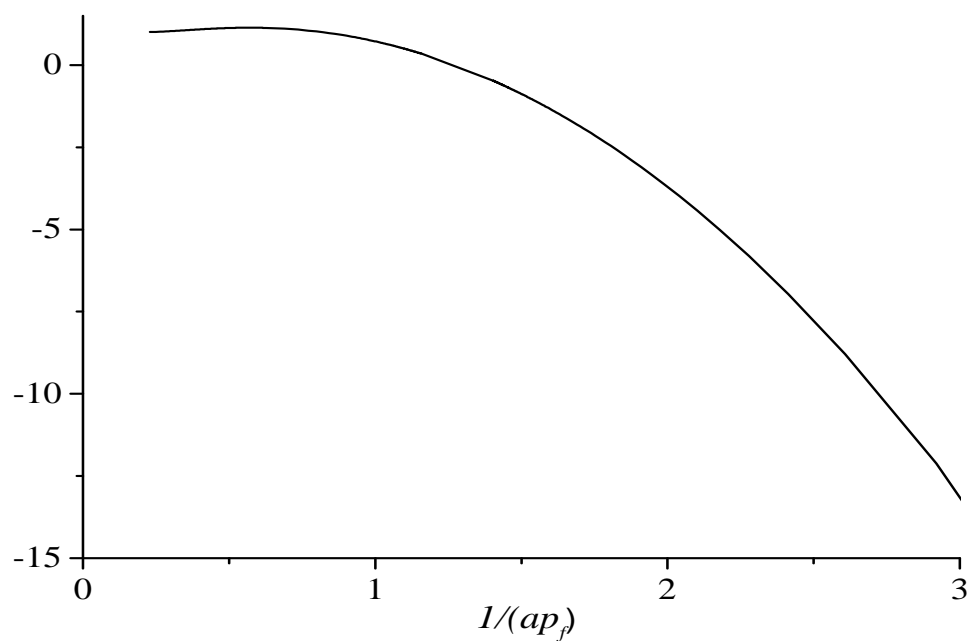


Рис. 2. графік залежності хімічного μ_s в синглетній фазі від константи $\frac{1}{ap_f}$.

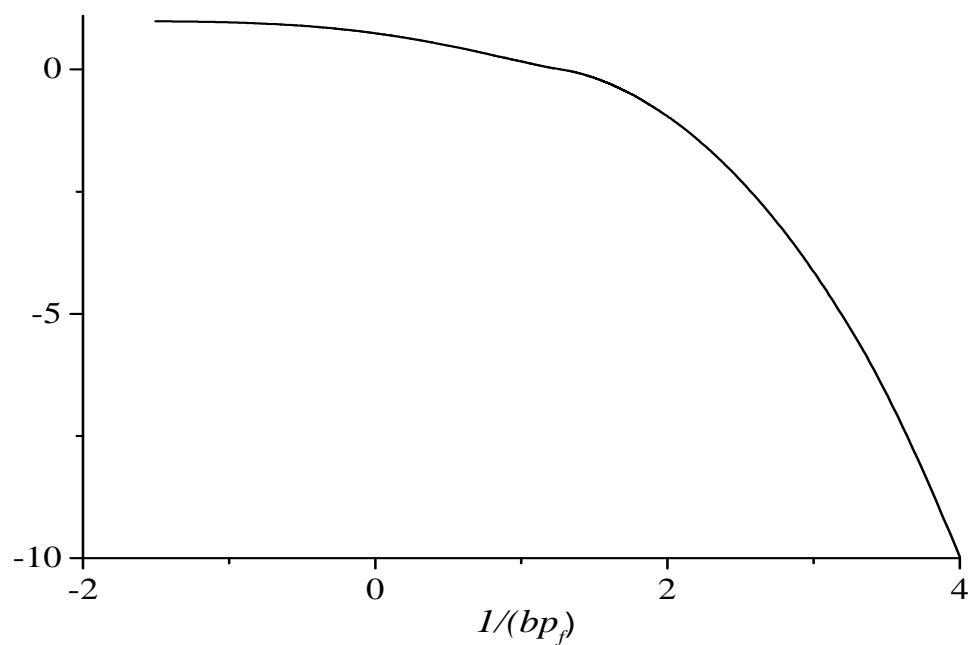


Рис. 3. графік залежності хімічного μ_p в триплетній фазі від константи $\frac{1}{bp_f}$.

Висновок

При написанні роботи було розглянуто систему взаємодіючих ферміонів, проаналізовані двочастинкові зв'язані стани s і p -типу в різних вимірностях, знайдені відповідні константи зв'язку. Досліджено взаємодію ферміонів при нульовій температурі в об'ємі L^D , знайдено параметри порядку для куперівських пар в s і p -стані. Також в цих умовах було досліджено вплив характеру взаємодії між двома фермі-частинками на їх вид спарювання. Використовуючи наближення середнього поля було отримано гамільтоніан такої системи.

Нами була розглянута симетрична фаза, завдяки якій вдалось спростити вираз для двох віток спектра. Розглядаючи одновимірний випадок було знайдено вирази для хімічного потенціалу і концентрації в різних типах конденсту.

Завдяки одержаним чисельним результатам було побудовано графіки залежностей хімічних потенціалів в різних фазах відповідно до константи. Також було намальовано схематичну фазову діаграму системи.

Список використаної літератури

- [1] T. Sowiski and M. A. Garcia-March, Rep. Prog. Phys. **82**, 104401 (2019).
- [2] A. Imambekov, T. L. Schmidt, and L. I. Glazman Rev. Mod. Phys. **84**, 1253 (2012).
- [3] X. Cui Phys. Rev. A **94**, 043636 (2016)
- [4] Y. Sekino, S. Tan, and Y. Nishida, Phys. Rev. A **97**, 013621 (2018).
- [5] V. Pastukhov, Phys. Rev. A **102**, 013307 (2020)
- [6] J. Maki, Phys. Rev. A **104**, 063314 (2021).
- [7] M. Valiente, Phys. Rev. A **102**, 053304 (2020); Phys. Rev. A **103**, L021302 (2021).
- [8] Y. Sekino and Y. Nishida Phys. Rev. A **103**, 043307 (2021).
- [9] E. Granet, B. Bertini, and F. H.L. Essler Phys. Rev. Lett. **128**, 021604 (2022).