

Львівський національний університет імені Івана Франка
Фізичний факультет
Кафедра астрофізики

УДК 524.3

Магістерська робота на тему:

Побудова політропної моделі Сонця

Виконав студент II курсу групи ФЗФМ-61с
спеціальності 104 Фізика та астрономія
Охримович Д. Т.
Керівник: доц. Стельмах О. М.
Рецензент: проф. Новосядлий Б. С.

м. Львів – 2022 р.

Анотація

Метою магістерської роботи є таке узагальнення політропної теорії для нормальних зір, яке дозволяє одночасно задовольняти граничні умови у центрі зорі і на її поверхні. Така узагальнена модель з індексом $n=3$ запропонована для Сонця. Побудовано два варіанти розв'язку рівняння Емдена, один з яких використовує значення радіуса Сонця, а другий – густину у центрі ядра. Модельний розв'язок збігається з першим розв'язком всередині сонячного ядра, а з другим – за межами ядра. Одержаний розв'язок дає правильне значення густини речовини у центрі і правильну величину радіуса Сонця. Відхилення від "точних" числових розрахунків на основі 4-х рівнянь структури зорі не перевищує 5 %. Одержане значення центральної температури Сонця дорівнює $15.58 \cdot 10^6$ К.

Abstract

The objective of the master's thesis is to make such a generalization of the polytropic theory of normal stars, which would allow to satisfy the boundary conditions in the center of a star and on its surface simultaneously. Such a generalized model with the index $n=3$ is proposed for the Sun. Two variants of the solution of Emden's equation are constructed, one of which employs the value of the Sun's radius and the other employs the density in the center of the core. The model solution coincides with the first solution inside the Sun's core and with the second one outside the core. The obtained solution yields the correct value of the density of matter in the center and the correct value of the Sun's radius. The deviation from the "exact" numerical calculations based on 4 equations of stellar structure does not exceed 5%. The obtained value of the central temperature of the Sun is $15.58 \cdot 10^6$ K.

Зміст

Вступ	4
1 Політропна модель в теорії структури зір	6
2 Система рівнянь детальної будови Сонця	11
3 Узагальнена політропна модель Сонця	13
Висновки	16
Список використаних джерел	19

Вступ

Політропна теорія була першим етапом розвитку теорії внутрішньої будови зір. Вона побудована у роботах Лена [1], Емдена [2], Фаулера [3], Еддінгтона [4], Мілна [5], Чандрасекара [6], Джеймса [7] та інших дослідників в основному у першій половині 20 ст. У цій теорії досліджується структура газових зір типу Сонця як результат рівноваги між гравітаційним стиском та внутрішнім тиском речовини зорі. За відсутності даних про основні джерела енергії зір використовувалось рівняння політропних процесів для моделювання рівняння стану зоряної речовини. Тому ця теорія має модельний, наближений характер. Відкриття термоядерних джерел енергії зір дало можливість досліджувати внутрішню будову зір різних типів на основі системи рівнянь зоряної структури, які описують як механічну, так і енергетичну рівновагу. Однак політропна теорія не втратила значення і тепер, особливо при врахуванні різних факторів, що формують структуру зір, а саме осьового обертання, магнітних полів, міжчастинкових взаємодій. Фактично тепер політропну теорію можна розглядати як деякий експрес-метод, що дає можливість якісно і швидко досліджувати особливості будови зір взагалі, а також давати інтерпретацію спостережуваних даних для конкретних зір. Особливе значення політропна теорія становить для дослідження будови зір без суттєвих джерел енергії, зокрема вироджених карликів, нормальних зір зі швидким осьовим обертанням [8], [9], [10] тощо. У цих роботах знайдено розв'язки рівняння рівноваги для зорі α Ерідана (ВЗV), що має дуже високу кутову швидкість осьового обертання ($\omega \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$), використовуючи політропу з індексом $n = 1$. Проте точність розрахунків зір у політропних моделях на сьогоднішній день не вивчена, що робить результати таких робіт недостатньо обґрунтованими.

Оскільки деталі внутрішньої будови Сонця досліджені на основі системи рівнянь зоряної структури, то актуальною є задача розрахунку характеристик Сонця у політропному наближенні, що може дати оцінку точності політропної теорії для нормальних зір, а також розробити варіанти покращення політропних моделей.

Метою даної роботи є узагальнення стандартної політропної моделі і розрахунки характеристик Сонця.

Основні завдання роботи:

- 1) огляд стандартної політропної моделі в теорії нормальних зір;
- 2) узагальнення політропної моделі шляхом врахування граничних умов як на поверхні, так і в центрі зорі;
- 3) розрахунок розподілу густини і температури вздовж радіуса для моделі Сонця.

1 Політропна модель в теорії структури зір

Основним співвідношенням політропної моделі зір без осьового обертання є рівняння механічної рівноваги

$$\nabla P(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r}), \quad (1)$$

де $\rho(\mathbf{r})$ означає густину речовини на сфері радіуса r ,

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2)$$

є гравітаційним потенціалом на цій сфері, а тиск моделюється політропною залежністю

$$P(\mathbf{r}) = \mathcal{K}\rho^\nu(\mathbf{r}) = \mathcal{K}\rho^{1+1/n}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

де \mathcal{K} і ν (або $n = [\nu - 1]^{-1}$) є сталими (параметри моделі).

Згідно зі співвідношенням (3) градієнт тиску дорівнює

$$\nabla P(\mathbf{r}) = \mathcal{K} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rho^{1/n}(\mathbf{r})\nabla\rho(\mathbf{r}), \quad (4)$$

а

$$\frac{1}{\rho(\mathbf{r})}\nabla P(\mathbf{r}) = \mathcal{K} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rho^{1/n-1}(\mathbf{r})\nabla\rho(\mathbf{r}) = \mathcal{K}(1+n)\nabla(\rho^{1/n}(\mathbf{r})). \quad (5)$$

Тому з рівняння (1) одержуємо співвідношення

$$\frac{1}{\rho}\nabla P(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}), \quad (6)$$

або

$$\mathcal{K}(1+n)\nabla(\rho^{1/n}(\mathbf{r})) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Діючи оператором ∇ на рівняння (7), знаходимо рівняння

$$\mathcal{K}(1+n)\nabla^2(\rho^{1/n}(\mathbf{r})) = -\nabla^2\Phi(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Як відомо з теорії гравітаційного потенціалу

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}), \quad (9)$$

що дає рівняння рівноваги у вигляді

$$\mathcal{K}(1+n)\Delta_r(\rho^{1/n}(\mathbf{r})) = -4\pi G\rho(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Тут

$$\Delta_r \equiv \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \quad (11)$$

є радіальною складовою оператора Лапласа. Наша модель зорі має сферичну симетрію, бо осьове обертання не береться до уваги. Рівняння (10) є рівнянням, що визначає залежність густини від радіальної координати ($0 \leq r \leq R$, де R – радіус зорі).

Для зручності розрахунків переходять до безрозмірних змінних підставкою

$$r = \xi\lambda, \quad \rho(r) = \rho_c y^n(\xi), \quad (12)$$

де ρ_c – густина у центрі зорі, λ – деякий масштаб довжини. У цих змінних рівняння (10) набуває вигляду

$$\rho_c^{1/n} \mathcal{K}(1+n) \frac{1}{\lambda^2} \Delta_\xi y(\xi) = -4\pi G \rho_c y^n(\xi). \quad (13)$$

Вибираючи λ з умови

$$\mathcal{K}(1+n) = \lambda^2 4\pi G \rho_c^{1-1/n}, \quad (14)$$

одержуємо безрозмірну форму рівняння рівноваги

$$\Delta_\xi y(\xi) = -y^n(\xi), \quad (15)$$

де

$$\Delta_\xi = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d}{d\xi} \right) \quad (16)$$

оператор Лапласа у змінних ξ . За означенням (12) маємо $y(0) = 1$. Оскільки фізичний зміст мають лише регулярні розв'язки рівняння (15), то шукають розв'язки, які задовольняють граничні умови

$$y(0) = 1, \quad \left. \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (17)$$

Такі розв'язки називаються розв'язками Емдена. Очевидно також, що $y(\xi) \geq 0$.

Для $n = 0, 1$ і 5 розв'язки відомі в аналітичній формі:

$$\begin{aligned} y_0(\xi) &= 1 - \frac{\xi^2}{6}; & \xi_1(0) &= \sqrt{6}; & (n = 0) \\ y_1(\xi) &= \frac{\sin \xi}{\xi}; & \xi_1(1) &= \pi; & (n = 1) \\ y_5(\xi) &= \left\{ 1 + \frac{\xi^2}{3} \right\}^{-1/2}; & \xi_1(5) &= \infty; & (n = 5), \end{aligned} \quad (18)$$

де $y_n(\xi) \equiv y(\xi)$ для заданого індекса n , а $\xi_1(n)$ є коренем рівняння $y_n(\xi) = 0$ і визначає безрозмірний радіус зорі у моделі з індексом n . Крім значення $\xi_1(n)$ важливими є також величини

$$\alpha_n = \xi_1^2(n) \left| \frac{dy_n(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1}; \quad \xi_1(n)[5 - n]. \quad (19)$$

При значеннях індекса $n \neq 0; 1; 5$ розв'язки рівняння (15) знаходяться чисельним інтегруванням (див. рис. 1). Величини $\xi_1(n)$, α_n , $\xi_1(n)[5 - n]$ при

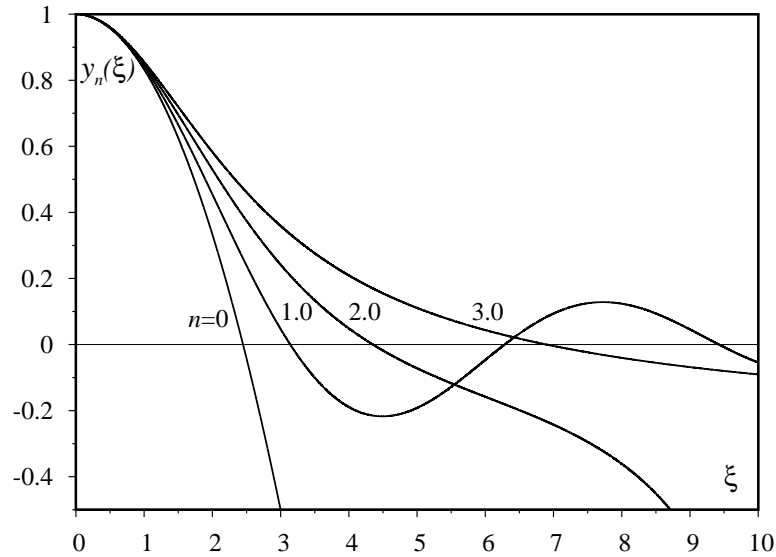


Рис. 1: Розв'язки рівняння рівноваги.

деяких n наведено у таблиці 1. Рисунок 1 і таблицю 1 взято з [11]. Розв'язки Емдена мають асимптотику [6] в околі $\xi \ll 1$ при довільних n :

$$y_n(\xi) = 1 - \frac{1}{3!}\xi^2 + \frac{n}{5!}\xi^4 - \frac{n(8n-5)}{3 \cdot 7!}\xi^6 + \dots \quad (20)$$

Табл. 1: Параметри політропних моделей зір

n	0	1	1.5	2	3	4	5
$\xi_1(n)$	$\sqrt{6}$	π	3.654	4.35	6.896	14.97	∞
$\alpha_n \equiv \xi_1^2(n) y'(\xi_1) $	$2\sqrt{6}$	π	2.714	2.41	2.018	1.80	$\sqrt{3}$
$(5-n)\xi_1(n)$	$5\sqrt{6}$	12.566	12.79	13.05	13.792	14.97	$32\sqrt{3}\pi^{-1}$

Розв'язками рівняння (15) визначається координатна залежність характеристик зорі-політропи

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_c y_n^n(r/\lambda), \quad P(\mathbf{r}) = \mathcal{K} \rho_c^{1+1/n} y_n^{n+1}(r/\lambda). \quad (21)$$

Використовуючи рівняння стану ідеального класичного газу

$$P = \frac{N}{V} k_B T = \rho k_B T [\mu_* m_u]^{-1}, \quad (22)$$

можна визначити координатну залежність температури

$$T(\mathbf{r}) = \frac{P(\mathbf{r})\mu_*}{\rho(\mathbf{r})R_*} = \mathcal{K} \frac{\mu_*}{R_*} \rho_c^{1/n} y_n(r/\lambda), \quad (23)$$

де μ_* – середня молекулярна маса (в одиницях m_u), k_B – стала Больцмана, m_u – атомна одиниця маси ($1.67 \cdot 10^{-24}$ г), $R_* = k_B/m_u$.

У моделі зорі, яку ми розглядаємо, фігурують параметри λ , \mathcal{K} , і ρ_c , які наперед є невідомими. Їх можна визначити, використовуючи наявні спостережувані дані. Для цього обчислимо масу зорі

$$\begin{aligned} M &= \int_V \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr = \\ &= 4\pi \lambda^3 \rho_c \int_0^{\xi_1(n)} \xi^2 y_n^n(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

Згідно з рівнянням (15) і означенням (16),

$$\xi^2 y_n^n(\xi) = -\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{dy_n}{d\xi} \right), \quad (25)$$

тому

$$\begin{aligned} M &= -4\pi\lambda^3\rho_c \int_0^{\xi_1(n)} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{dy_n}{d\xi} \right) d\xi = \\ &= -4\pi\lambda^3\rho_c \left(\xi^2 \frac{dy_n}{d\xi} \right) \Big|_{\xi_1(n)} = 4\pi\lambda^3\rho_c\alpha_n. \end{aligned} \quad (26)$$

З формул (12) маємо

$$R = \xi_1(n)\lambda. \quad (27)$$

Таким чином одержується система рівнянь

$$\mathcal{K}(1+n) = 4\pi\lambda^2 G \rho_c^{1-1/n}; \quad M = 4\pi\lambda^3 \rho_c \alpha_n, \quad R = \xi_1(n)\lambda. \quad (28)$$

1. Якщо зі спостережень відомі M і R , а індекс n зафіксовано, то λ , ρ_c , \mathcal{K} можна визначити із системи (28) і вони будуть залежати від вибору параметра n :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{R}{\xi_1(n)}, \quad \rho_c = \frac{M}{4\pi\alpha_n} \frac{\xi_1^3(n)}{R^3}; \\ \mathcal{K} &= (4\pi)^{1/n} \frac{G}{1+n} M^{1-1/n} \left(\frac{\xi_1(n)}{R} \right)^{1-3/n} \frac{1}{\alpha_n^{1-1/n}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Оскільки індексу n можна надати довільні значення в інтервалі $(1 \lesssim n \lesssim 3)$, то таку теорію називають однопараметричною.

2. Можливий інший вибір параметрів, коли відома маса M і густина у центрі $\tilde{\rho}_c$. Тоді із системи (28) одержуємо

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \left(\frac{M}{4\pi\alpha_n\tilde{\rho}_c} \right)^{1/3}; \quad \tilde{R} = \xi_1(n) \left(\frac{M}{4\pi\alpha_n\tilde{\rho}_c} \right)^{1/3}; \\ \tilde{\mathcal{K}} &= \frac{(4\pi)^{1/3} G M^{2/3}}{(1+n)\alpha_n^{2/3}} \tilde{\rho}_c^{1/3-1/n}, \end{aligned} \quad (30)$$

при цьому $\tilde{\rho}_c$ відрізняється від ρ_c , а \tilde{R} – від R . Якщо $\tilde{\rho}_c > \rho_c$, то $\tilde{R} < R$, як видно з формул (29), (30).

У випадку 1 залежність густини речовини від координати визначається формулою

$$\rho(r) = \rho_c y_n^n(\xi) = \rho_c y_n^n \left(\frac{r}{\lambda} \right) = \rho_c y_n^n \left(\frac{r}{R} \xi_1(n) \right), \quad (31)$$

а у випадку 2 маємо

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(r) &= \tilde{\rho}_c y_n^n(\xi) = \tilde{\rho}_c y_n^n\left(\frac{r}{\tilde{\lambda}}\right) = \\ &= \tilde{\rho}_c y_n^n\left(\frac{r}{\tilde{R}} \xi_1(n)\right) = \tilde{\rho}_c y_n^n\left(\frac{r}{R} \xi_1(n) \frac{R}{\tilde{R}}\right).\end{aligned}\quad (32)$$

Таким чином, два можливі способи знаходження параметрів політропи дають два різні розв'язки задачі. Щоб вияснити, як можна скористатися цими двома розв'язками, ми роглянемо розрахунок внутрішньої структури Сонця у рамках точнішого підходу.

2 Система рівнянь детальної будови Сонця

Система рівнянь внутрішньої структури зорі типу Сонця має вигляд (див. напр. [13])

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dr} &= 4\pi\rho r^2; & \frac{dP}{dr} &= -\frac{MG}{r^2}\rho; \\ \frac{dL}{dr} &= 4\pi\varepsilon\rho r^2; & \frac{dT}{dr} &= -\frac{3L\alpha\rho}{64\sigma\pi r^2 T^3}.\end{aligned}\quad (33)$$

Тут використано такі позначення: $P \equiv P(r)$ – тиск на сфері радіуса r , $M \equiv M(r)$ – маса зорі всередині сфери радіуса r , $L \equiv L(r)$ світність цієї сфери, $\rho \equiv \rho(r)$ – густина речовини на сфері радіуса r , $T \equiv T(r)$ – температура на сфері, $\alpha \equiv \alpha(r)$ – коефіцієнт поглинання фотонів, σ – стала Стефана-Больцмана, $\varepsilon = \varepsilon(r)$ – функція енерговиділення (швидкість генерації енергії в розрахунку на одиницю маси речовини). Системі (33) відповідають очевидні граничні умови

$$M = L = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \quad (34)$$

$M = M_\odot$, $L = L_\odot$ на поверхні Сонця для радіуса R_\odot і віку $4.5 \cdot 10^9$ років. При цьому величини $\alpha \equiv \alpha(r)$ і $\varepsilon \equiv \varepsilon(r)$ визначаються локальними значеннями густини $\rho(r)$ і температури $T(r)$, а також хімічним складом речовини. Останнє рівняння системи (33) відповідає променистому переносу енергії у

ядрі та проміжній області. Для конвективної зони використовують звичайно рівняння

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}, \quad (35)$$

що відповідає наближенню адіабатичних процесів,

$$P(r) = \Gamma T^{\gamma/(\gamma-1)}(r), \quad (36)$$

де $\gamma = C_p/C_V$ – відношення теплоємності при сталому тиску до теплоємності при сталому об'ємі. За межами конвективної області використовують рівняння стану ідеального газу

$$P(r) = \frac{k_B}{\mu(r)m_u} \rho(r)T(r), \quad (37)$$

де $m_u = 1.67 \cdot 10^{-24}$ г – атомна одиниця маси, $\mu(r)$ – безрозмірна молекулярна маса

$$\mu(r) = \left\{ 2X(r) + \frac{3}{4}Y(r) + \frac{1}{2}Z(r) \right\}^{-1}. \quad (38)$$

Тут $X = \rho_H/\rho$, $Y = \rho_{He}/\rho$ – масові долі водню і гелію, $Z = \rho_{\text{ін}}/\rho$ – масова доля (сумарна) всіх інших елементів.

У випадку протон-протонного циклу функція енерговиділення

$$\varepsilon(r) \cong 2.5 \cdot 10^6 \rho(r) X^2(r) \left(\frac{10^6}{T(r)} \right)^{2/3} \exp \left\{ -33.8 \left(\frac{10^6}{T(r)} \right)^{1/3} \right\}. \quad (39)$$

Для коефіцієнта поглинання використовують наближені вирази типу формули Крамерса

$$\varkappa(r) = \varkappa_0 \rho(r) T^{-7/2}(r), \quad (40)$$

де \varkappa_0 залежить лише від хімічного складу. В роботі [12] були одержані розв'язки системи рівнянь для Сонця при середньому хімічному складі $X = 0.708$; $Y = 0.272$; $Z = 0.02$. При цьому прийнято, що $\rho_c = 158 \text{ г/см}^3$, $T_c = 1.57 \cdot 10^7 \text{ K}$ (густина і температура у центрі). Результати розрахунків представлено у таблиці 2. Тут наведено значення густини $\rho(r)$, температури $T(r)$, маси $M(r)$, світності $L(r)$, тиску $P(r)$ для $0.001 \leq \frac{r}{R_\odot} \leq 1$. На рис. 2 зображено залежність від змінної r/R_\odot для густини. Із таблиці 2 видно різку зміну ко-

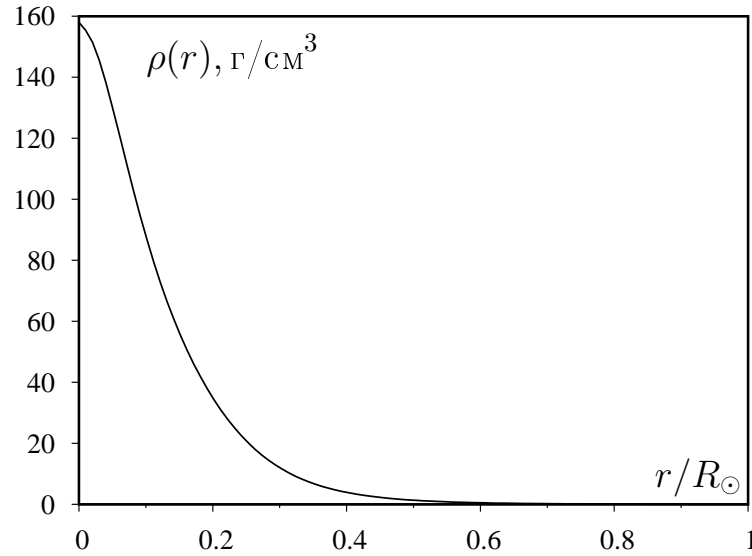


Рис. 2: Розподіл густини в моделі Сонця від координати з роботи [14].

ординатної залежності температури (аналогічна залежність є для тиску) в околі точки $\frac{r}{R_{\odot}} = 0.86$, що відповідає нижній границі конвективної області. В зоні $\frac{r}{R_{\odot}} > 0.86$ бачимо дуже швидке спадання температури і тиску. Дещо слабше виявляється зміна поведінки $\rho(r)$, $T(r)$, $P(r)$ в околі точки $\frac{r}{R_{\odot}} \approx 0.25$ (в області $\frac{r}{R_{\odot}} < 0.25$ похідні цих величин менші від похідних в області $\frac{r}{R_{\odot}} > 0.25$). Тобто координатна залежність $\rho(r)$, $T(r)$, $P(r)$ відображає існування трьох областей з різним станом термодинамічних параметрів – ядро, проміжна область, і конвективна зона.

3 Узагальнена політропна модель Сонця

На рис. 3 зображено залежність густини речовини Сонця. Крива 1 відповідає розрахунку за формулою (31), а крива 2 – за формулою (32) у політропному наближенні при $n = 3$. При цьому крива 1 відповідає $\rho_c = 80$ г/см³ (розрахована за формулою (29)), а кривій 2 відповідає центральна густина $\tilde{\rho}_c = 158$ г/см³, як і в роботі [14].

Така поведінка кривих 1 і 2 дозволяє побудувати модельний розподіл густини у Сонці, зображаючи її в області ядра кривою 2 (тобто $\tilde{\rho}(r)$), а за

межами цієї області – кривою 1 (тобто $\rho(r)$). У точці $r_0/R_\odot \approx 0.285$ ці дві криві "зшиваються" ($\rho(r_0) = \tilde{\rho}(r_0)$), хоча їхні похідні у цій точці і відхиляються на дуже малу величину. Тобто модельна густина речовини зображається

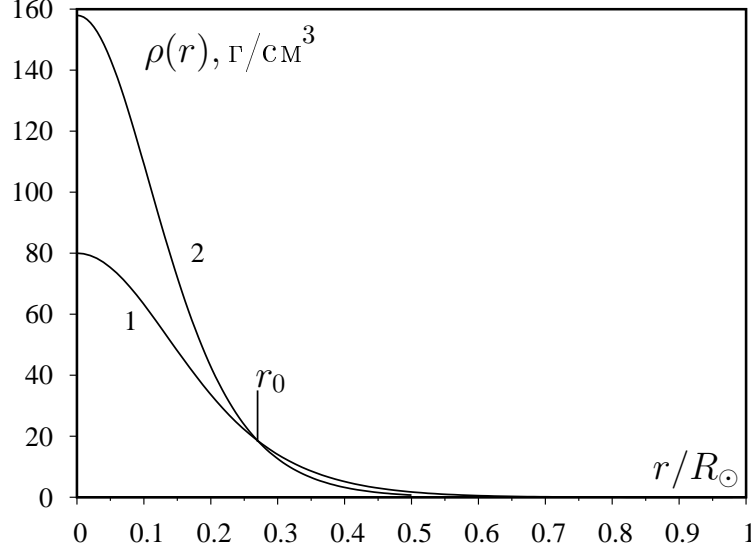


Рис. 3: Розподіл густини Сонця вздовж радіуса. Крива 1 відповідає $\rho(r)$, крива 2 – $\tilde{\rho}(r)$.

таким співвідношенням:

$$\rho(r) = \begin{cases} \tilde{\rho}_c \tilde{y}^3 \left(\frac{r}{R_\odot} \xi_1(3) \frac{R_\odot}{R} \right) & \text{при } r \leq r_0; \\ \rho_c y^3 \left(\frac{r}{R_\odot} \xi_1(3) \right) & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (41)$$

Величина r_0 дуже близька до загальноприйнятого радіуса сонячного ядра. Як видно з рисунка, відхилення модельного розподілу від кривої 1 не перевищує 5 %. Це відхилення можна зменшити, використовуючи дещо менше значення центральної густини. Перевіркою величини інтегральної похибки може бути відхилення маси Сонця, розрахованої за формулою

$$M(r) = 4\pi \left\{ \int_0^{r_0} dr \cdot r^2 \tilde{\rho}(r) + \int_{r_0}^{R_\odot} dr \cdot r^2 \rho(r) \right\} \quad (42)$$

з використанням виразів (31) і (32).

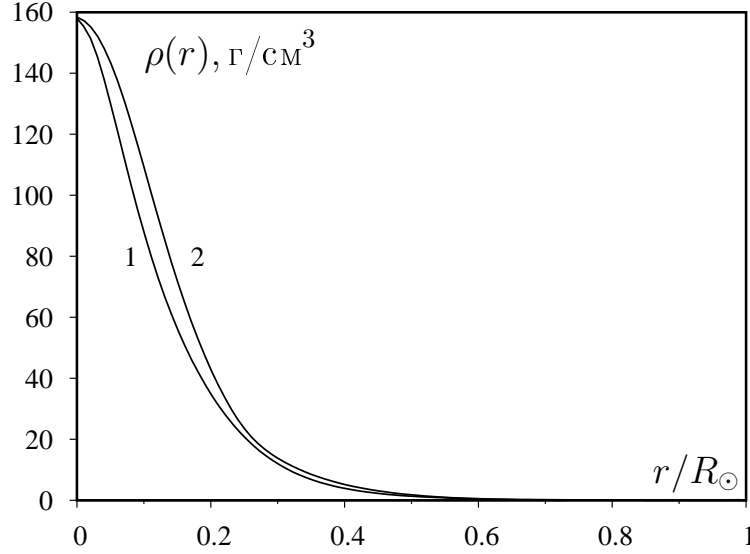


Рис. 4: Розподіл густини Сонця вздовж радіуса. Крива 1 відповідає роботі [14], крива 2 – наші розрахунки.

На рис. 4 зображено розподіл густини Сонця вздовж радіуса. Щоб переконатись, що невелике відхилення модельного розподілу густини від "точного" з роботи [14] не є випадковістю, ми розраховували також координатну залежність температури Сонця. На рис. 5 крива 1 зображає розподіл температури, одержаний у роботі [14], а крива 2 відповідає модельному розподілу:

$$T(r) = \mathcal{K} \frac{\mu_*}{\mathcal{R}_*} \begin{cases} \tilde{\rho}_c^{1/3} \tilde{y} \left(\frac{r}{R_\odot} \xi_1(3) \frac{R_\odot}{R} \right) & \text{при } r \leq r_0; \\ \rho_c^{1/3} y \left(\frac{r}{R_\odot} \xi_1(3) \right) & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (43)$$

Тут враховано, що при $n = 3$

$$\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{K}} = \frac{(4\pi)^{1/3} GM^{2/3}}{4\alpha_3^{2/3}}.$$

Відхилення кривої 2 від "точної" кривої 1 має таку ж поведінку, як і у випадку розподілу густини.

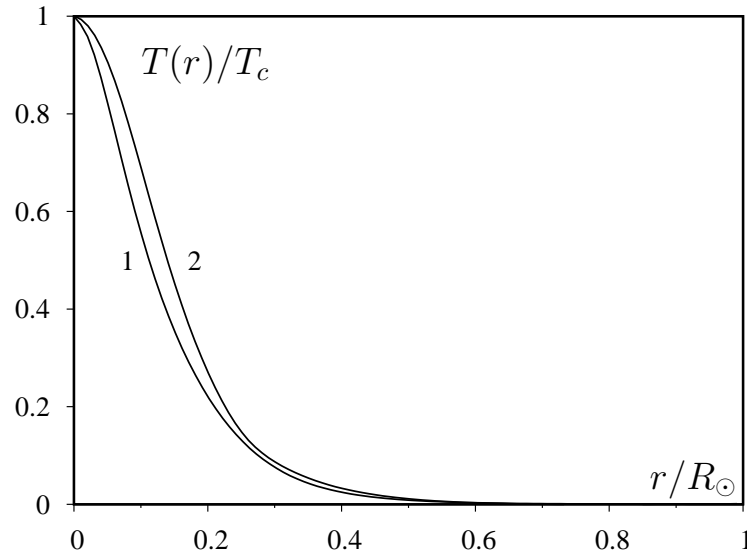


Рис. 5: Розподіл температури Сонця вздовж радіуса. Крива 1 відповідає роботі [14], крива 2 – наші розрахунки. $T_c = 15.58 \cdot 10^6$ К.

Висновки

1. У традиційному політропному підході координатна залежність маси, густини і температури визначається єдиною функцією Емдена при заданому індексі політропи n . Параметр політропи \mathcal{K} визначається індексом n та спостережуваними значеннями маси і радіуса зорі.
2. Щоб забезпечити невеликі відхилення характеристик внутрішньої структури зорі від чисельних розв'язків системи рівнянь зоряної структури, необхідно врахувати граничні умови для розв'язку політропного рівняння рівноваги як на поверхні, так і в центрі зорі. Так виникають два варіанти розв'язку політропного рівняння рівноваги, що побудовані на функції Емдена з різними аргументами.
3. Для Сонця одержані розв'язки "зшиваються" в околі $r = 0.285R_\odot$, що близько до радіуса сонячного ядра.
4. Відхилення одержаного розв'язку від "точних" розрахунків (на основі системи рівнянь сонячної структури) не перевищує 5%.

5. У такому варіанті політропний підхід дійсно є експрес-методом для швидкого розрахунку характеристик зір за відомими значеннями маси і радіуса, а також відомою (чи наближено відомою) густиною у центрі зорі, або з додатковою граничною умовою

$$L_{\odot} = 4\pi \int_0^{R_{\odot}} r^2 \rho(r) \varepsilon(r) dr.$$

Табл. 2: Результати розрахунків для моделі Сонця з роботи [14].

r/R_{\odot}	M_r/M_{\odot}	L_r/L_{\odot}	$\log T, K$	$\log P,$	$\log \rho,$	μ	ε	dT/dr
0.0011	0.0000	0.0000	7.1990	17.3770	2.194	0.862	17.9100	0.3320
0.0181	0.0007	0.0058	7.1950	17.3670	2.183	0.852	17.3860	0.3330
0.0459	0.0098	0.0791	7.1790	17.3170	2.126	0.808	14.9070	0.3310
0.0709	0.0322	0.2290	7.1540	17.2430	2.049	0.758	11.8290	0.3270
0.0904	0.0601	0.3790	7.1310	17.1720	1.98	0.723	9.3670	0.3230
0.1096	0.0959	0.5291	7.1060	17.0930	1.908	0.693	7.1240	0.3170
0.1311	0.1448	0.6792	7.0750	16.9960	1.825	0.668	4.9550	0.3070
0.1590	0.2183	0.8239	7.0340	16.8580	1.714	0.646	2.8780	0.2910
0.1874	0.3001	0.9140	6.9920	16.7080	1.597	0.633	1.5190	0.2720
0.2141	0.3795	0.9598	6.9520	16.5570	1.481	0.626	0.7920	0.2540
0.2398	0.4541	0.9823	6.9150	16.4070	1.366	0.623	0.4160	0.2390
0.2647	0.5228	0.9933	6.8800	16.2560	1.249	0.622	0.2190	0.2270
0.2893	0.5851	0.9979	6.8470	16.1060	1.132	0.621	0.0770	0.2170
0.3137	0.6410	0.9992	6.8150	15.9550	1.013	0.62	0.0300	0.2090
0.3382	0.6907	0.9997	6.7840	15.8050	0.893	0.62	0.0150	0.2030
0.3628	0.7346	0.9999	6.7540	15.6550	0.773	0.619	0.0080	0.1990
0.3878	0.7732	1.0000	6.7240	15.5050	0.652	0.619	0.0040	0.1950
0.4131	0.8070	1.0001	6.6950	15.3540	0.531	0.619	0.0020	0.1930
0.4390	0.8365	1.0001	6.6660	15.2040	0.409	0.618	0.0010	0.1920
0.4653	0.8620	1.0001	6.6370	15.0540	0.287	0.618	0.0010	0.1910
0.4922	0.8842	1.0001	6.6090	14.9040	0.165	0.618	0.0000	0.1910
0.5197	0.9032	1.0000	6.5800	14.7530	0.044	0.617	0.0000	0.1930
0.5478	0.9196	1.0000	6.5510	14.6030	-0.077	0.617	0.0000	0.1960
0.5764	0.9337	1.0000	6.5210	14.4530	-0.198	0.617	0.0000	0.2020
0.6055	0.9456	1.0000	6.4900	14.3030	-0.317	0.617	0.0000	0.2120
0.6349	0.9558	1.0000	6.4560	14.1520	-0.435	0.616	0.0000	0.2310
0.6645	0.9644	1.0000	6.4190	14.0020	-0.549	0.615	0.0000	0.2690
0.6939	0.9715	1.0000	6.3760	13.8520	-0.658	0.611	0.0000	0.3200
0.7221	0.9775	1.0000	6.3210	13.7030	-0.755	0.607	0.0000	0.3960
0.7490	0.9824	1.0000	6.2620	13.5530	-0.845	0.607	0.0000	0.3960
0.7739	0.9863	1.0000	6.2020	13.4030	-0.935	0.608	0.0000	0.3960
0.7970	0.9895	1.0000	6.1430	13.2530	-1.026	0.609	0.0000	0.3960
0.8181	0.9920	1.0000	6.0830	13.1030	-1.116	0.609	0.0000	0.3960
0.8550	0.9955	1.0000	5.9640	12.8030	-1.296	0.611	0.0000	0.3960
0.8851	0.9975	1.0000	5.8460	12.5020	-1.476	0.613	0.0000	0.3950
0.9094	0.9986	1.0000	5.7270	12.2020	-1.656	0.615	0.0000	0.3940
0.9284	0.9993	1.0000	5.6110	11.9080	-1.833	0.618	0.0000	0.3920
0.9436	0.9996	1.0000	5.4940	11.6080	-2.013	0.622	0.0000	0.3890
0.9605	0.9999	1.0000	5.3210	11.1580	-2.284	0.63	0.0000	0.3810
0.9813	1.0000	1.0000	4.9640	10.1580	-2.904	0.664	0.0000	0.3420
0.9904	1.0000	1.0000	4.6370	9.1580	-3.542	0.72	0.0000	0.2760
0.9972	1.0000	1.0000	4.2580	7.1580	-5.054	0.924	0.0000	0.1360
0.9998	1.0000	1.0000	3.9150	5.1580	-6.581	1.247	0.0000	0.5780
1.0000	1.0000	1.0000	3.7050	4.4830	-7.041	1.259	0.0000	0.0440

Список використаних джерел

- [1] Lane H. On the Theoretical Temperature of the Sun under the Hypothesis of a gaseous mass Maintining Its Volume by Its Internal Heat and Depending on the Law of Gases Known to Terrestrial Experiment. The American J. of Science and Arts **50**, 57-74 (1870).
- [2] Emden R. Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme (Leipzig, Berlin, 1907).
- [3] Fowler R. H. Emden's equation: The solutions of Emden's and similar differential equations. MNRAS **91**, 63-91 (1930).
- [4] Eddington A. S. The Internal Constitution of the Stars (Cambridge University Press, 1926).
- [5] Milne E. A. The equilibrium of a rotating star. MNRAS **83**, 118-147 (1923).
- [6] Chandrasekhar S. The Equilibrium of Distorted Polytropes. I. The Rotational Problem. MNRAS **93**, 390-406 (1933).
- [7] James R. A. The Structure and Stability of Rotating Gas Masses. ApJ. **140**, 552-582 (1964).
- [8] Kong D., Zhang K., Schubert G. An exact solution for arbitrarily rotating gaseous polytropes with index unity. MNRAS **448**, 456-463 (2015).
- [9] Knopik J., Mach P., Odrzywółek A. The shape of a rapidly rotating polytrope with index unity. MNRAS **467**, 4965-4969 (2017).
- [10] Vavrukh M. V., Dzikovskyi D. V. Exact solution for the rotating polytropes with index unity, its approximations and some applications. Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso **50**, 748-771, (2020).
- [11] Ваврух М.В., Смеречинський С.В., Тишко Н.Л. Нові моделі в теорії структури вироджених карликів. Монографія – Львів: Растр-7, 2018. - 267 с.

- [12] Chandrasekhar S. An Introduction to the Study of Stellar Structure (University of Chicago Press, Chicago, 1939).
- [13] Gibson E. The quiet Sun (Washington, 1973).
- [14] Henny J.G.L.M. Lamers and Emily M. Levesque. Understanding Stellar Evolution (IOP Publishing, Bristol, UK, 2017).