Львівський національний університет імені Івана Франка
Фізичний факультет
Кафедра астрофізики

УДК 524.31.081

Магістерська робота на тему:

Білий карлик як фінальна стадія еволюції зорі Сіріуса А

Виконала студентка II курсу групи ФЗФМ-61
спеціальності 104 Фізика та астрономія
Остапчук Я. Ю.
Керівник: доц. Стельмах О. М.
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук Кулініч Ю. А.

м. Львів – 2022р.

Анотація

Метою магістерської роботи є дослідження ролі осьового обертання компонент подвійної зорі Сіріус. Описано історію досліджень цієї системи. На основі рівняння рівноваги розраховано внутрішню структуру та характеристики компоненти Сіріус А у рамках політропної моделі з індексом n=1. Встановлено, що малий вплив обертання зумовлений відносно великим значенням густини у центрі зорі, що характерно для зір класу A0-A5, на відміну від зір класу B. Виконано оцінку кутової швидкості обертання карлика, що утвориться в результаті еволюції Сіріуса А. Обгрунтовано ймовірно велику кутову швидкість осьового обертання Сіріуса В.

Abstract

The aim of the master's thesis is to study the role of axial rotation of the components of the double star Sirius. The history of researches of this system is described. Based on the equilibrium equation, the internal structure and characteristics of the Sirius A component are calculated within the framework of a polytropic model with index n = 1. It is established that the small effect of rotation is due to the relatively high value of density in the center of the star, which is characteristic of class A0-A5 stars, in contrast to class B stars. A. Probably the high angular velocity of axial rotation of Sirius B is substantiated.

Зміст

1 Вступ **4**

2 Орбітальні, астрофізичні та еволюційні характеристики системи Сіріус **6**

3 Розрахунок характеристик Сіріуса A як зорі з осьовим обертанням **8**

4 Яка швидкість обертання Сіріуса B? **15**

5 Який карлик утвориться із компоненти Сіріуса A? **16**

6 Висновки **17**

1 Вступ

Основною тенденцією в астрофізиці 20 століття було дослідження загальних характеристик зір та зв'язків між ними. Завдяки розвитку методів досліджень та удосконаленню астрономічних інструментів. Основна тенденція астрофізики у наш час полягає у детальному дослідженню окремих об'єктів – зір із швидким осьовим обертанням, вироджених карликів у подвійних системах та інших цікавих об'єктів. Як приклад можна навести статтю 14 авторів про подвійну систему Сіріус [1]; роботи [2,3,4] про вироджені карлики із швидким обертанням; роботи про зорю α Eridani – зорю головної послідовності класу B3V з кутовою швидкістю обертання $\omega \simeq 3 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ [5,6,7] та інші. При цьому використовуються високоточні методи спостережень, а також різні теоретичні підходи.

Система Сіріус давно привертала увагу астрономів, адже Сіріус A – основна її компонента є найяскравішою зорею неба. Її спостерігали ще давньоєгипетські астрономи, вона вважалась втіленням верховного бога Озіріса. Те, що ця зоря є подвійною, встановив Бессель у 1844 році [8]. Перші спостереження супутника – Сіріуса B виконав у 1862 році А. Кларк і його батько, а також Бонд [9]. Американський астроном Адамс за допомогою спектрального аналізу встановив у 1915 році, що ефективні температури компонент Сіріуса близькі до 8000 K, радіус супутника близький до 18800 км, а його світність має порядок $10^{-3} L_\odot$ [10]. Орбітальний період системи Сіріус (50 років) виміряв Аверс ще у 1864 році [11]. Протягом 20 століття було виконано багато спостережень системи Сіріуса, але на початку нашого століття з'явилося багато публікацій з результатами спостережень цієї системи. Виявилось, що система Сіріуса є молодою зоряною системою. Вироджений карлик Сіріус B є одним з найяскравіших, а Сіріус A швидко еволюціонує, має досить значну кутову швидкість обертання і обіцяє перетворитись у вироджений карлик із швидким обертанням, внаслідок цього утвориться система двох молодих вироджених карликів, подібних до описаних у роботах [2-4].

Попри великий обсяг спостережуваних даних, відсутні роботи з досліджeння внутрішньої структури компонент цієї системи.

Метою даної роботи є вивчення ролі осьового обертання компонент подвійної зорі Сіріус.

Основні завдання роботи:

1)Розрахувати вплив осьового обертання на внутрішню структуру Сіріуса A, величину маси, радіусу та гравтаційний потенціал за межами зорі;

2)Виконати оцінку кутової швидкості осьового обертання виродженого карлика, попередником якого є Сіріус A;

3)Обгрунтувати можливу високу кутову швидкість осьового обертання Сіріуса B.

2 Орбітальні, астрофізичні та еволюційні характеристики системи Сіріус

У роботі Джонсона і Моргана [12] 1953 року встановлено, що Сіріус А належить до спектрального класу A1V з ефективною температурою 9800 K, а Сіріус В – до класу DA2. Сіріус А належить до типу гарячих зір. Видима зоряна величина Сіріуса А $m_A = -1.47$ [1]. Сіріус В має видиму зоряну величину $m_B = 8.44$ [1], так що $(2.512)^{m_B - m_A} \simeq 9200$.

Система Сіріуса є молодою: металічність головної компоненти $[Fe/H] \simeq 0.25$, що відповідає віку Сіріуса А близько $(237 \div 247) \cdot 10^6$ років[1].

Динамічна маса Сіріуса А дорівнює $(2.063 \pm 0.023)M_\odot$, а маса Сіріуса В $(1.018 \pm 0.011)M_\odot$, сумарна маса системи $3.081M_\odot$. Згідно з третім законом Кеплера, велика піввісь орбіти Сіріуса А складає близько 20 а. о. при орбітальному періоді 50 років. Відстань Сіріуса А від Сіріуса В дорівнює 8.1 а. о. в перицентрі і 31.5 а. о. в апоцентрі. Ексцентриситет відносної орбіти дорівнює e=0.59 [1].

Середній радіус Сіріуса А дорівнює $R_A = (1.7144 \pm 0.0092)R_\odot$, а радіус супутника $R_B = (0.008098 \pm 0.000046)R_\odot$.

Світності компонентів[1]:

$$L_A = (24.74 \pm 0.70)L_\odot, \tag{1}$$

$$L_B = (0.02448 \pm 0.00033)L_\odot,$$

а їхні ефективні температури[1]:

$$T^A_{eff} = (9845 \pm 64)K, \tag{2}$$

$$T^A_{eff} = (25369 \pm 46)K.$$

Вважається, що Сіріус В має карбон-оксигенове ядро та чисто водневу атмосферу, а відношення маси водню до повної маси карлика близьке до 10^{-4}. Прискорення вільного падіння на поверхні карлика є близьким до $g = 10^{(8.629 \pm 0.007)}$ см/с^2. Незважаючи на високу ефективну температуру, в спектрі Сіріуса B видно чіткі лінії водню, що зумовлено високою густиною атмосфери. Згідно із сучасними уявленнями, Сіріус B належить до карликів з проміжним значенням маси. Кутова швидкість осьового обертання Сіріуса A є типовою для зір A класу, $v \cdot sin(i) = 16.7$ км/с [13], де v – лінійна швидкість ($v = \omega \cdot R_A$), i – кут між напрямом спостереження і нормаллю до площини орбіти системи. Оскільки $sin(i) < 1$ є невідомим, то кутова швидкість може бути більшою за $\omega_A \simeq 1.3 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, що складає 0.43 кутової швидкості зорі α Eridani, яку вважають об'єктом з дуже швидким обертанням.

Враховуючи, що маса Сіріуса A дорівнює $2M_\odot$, а світність $L_A = 24.7L_\odot$, можна оцінити час життя цієї зорі на головній послідовності за рахунок термоядерних реакцій:

$$t_A = \frac{2}{24,7} \cdot \left(\frac{M_\odot \cdot 0.007 \cdot c^2}{L_\odot} \right) = \frac{2}{24,7} t_\odot, \tag{3}$$

де $t_\odot \simeq 9 \cdot 10^9$ років – час життя Сонця.

Тобто, $t_A \simeq 720 \cdot 10^6$ років. Як вище зазначено, вік Сіріуса A складає приблизно 250 млн. років, тому через (500 ± 550) млн. років Сіріус A перетвориться у вироджений карлик проміжної маси (порядку маси Сіріуса B) і система Сіріуса стане системою двох молодих карликів. Час охолодження карликів такої маси має порядок 10^9 років. Оскільки характерний радіус карликів має порядок $10^{-2}R_\odot$, то момент інерції утвореного карлика ($\tilde{I}_A \simeq M_\odot \cdot 10^{-4} R_\odot^2$) зменшиться у 10^4 разів порівняно із моментом інерції, який має Сіріус A зараз ($I_A \simeq 2M_\odot \cdot 4R_\odot^2$). Згідно із законом збереження моменту імпульсу, кутова швидкість утвореного карлика стане рівною приблизно $\tilde{\omega}_A = 1.7 \cdot 10^{-1}$ с$^{-1}$, що відповідає відкритим недовно карликам із швидким обертанням з періодом $P = 25$с, 29с, 39с ($\omega \simeq 0.25$с$^{-1}, 0.22$с$^{-1}, 0.16$с$^{-1}$) [2-4].

Як випливає з оцінок еволюції Сіріуса B, він утворився близько 126 млн. років тому. У той час, коли обидві зорі знаходились на головній послідовності, вони мали приблизно такі маси:

$$M_A = 2M_\odot; \;\; M_B = (5.0 \pm 5.6)M_\odot, \tag{4}$$

тобто сумарно маса була рівною $\sim (7.1 - 7.7)M_\odot$. Якщо припустити, що в той час кутова швидкість осьового обертання Сіріуса B була співмірна з кутовою швидкістю обертання Сіріуса A в теперішній час ($\sim 1.3 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$), то згідно із законом збереження моменту імпульсу теперішня кутова швидкість обертання Сіріуса B повинна мати порядок $\omega_B \simeq 0.2$ с$^{-1}$, тобто бути близькою до кутової швидкості осьового обертання найшвидших з відомих вироджених карликів.

З оцінок кутових швидкостей осьового обертання компонент системи Сіріуса випливає цікава і актуальна задача розрахунку їхньої внутрішньої структури при наявності обертання. Оскільки характеристики карликів з такими швидкостями обертання виконано у роботах [2-4], то метою магістерської роботи є розрахунок характеристик Сіріуса A при врахуванні осьового обертання за методикою робіт [14,15].

3 Розрахунок характеристик Сіріуса A як зорі з осьовим обертанням

Ми використаємо покращений підхід на основі моделі політропи з індексом $n = 1$, коли співвідношення між тиском і густиною визначається формулою

$$P(\vec{r}) = K\rho^2(\vec{r}), \tag{5}$$

де K – стала [7]. Рівняння рівноваги зорі з осьовим обертанням

$$\nabla P = -\rho(\vec{r})\{\nabla\Phi_{grav}(\vec{r}) + \nabla\Phi_c(\vec{r})\} \tag{6}$$

при підстановці виразу (5), набуває вигляду

$$2\kappa\nabla\rho(\vec{r}) = -\nabla\Phi_{grav}(\vec{r}) - \nabla\Phi_c(\vec{r}), \tag{7}$$

де

$$\Phi_{grav}(\vec{r}) = -G\int \frac{\rho(\vec{r_1})}{|\vec{r} - \vec{r_1}|}d\vec{r_1} \tag{8}$$

є гравітаційним потенціалом у точці $\vec{r}$, а

$$\Phi_c(\vec{r}) = -\frac{\omega^2}{2} \cdot r^2 \cdot sin^2(\theta) \tag{9}$$

є відцентровим потенціалом у змінних сферичної системи координат, вісь OZ якої збігається з віссю обертання, де ω – кутова швидкість обертання, яку будемо вважати сталою величиною(θ – полярний кут).

Беручи до уваги, що $\Phi_{grav}(\vec{r})$ задовільняє рівняння Пуассона

$$\Delta\Phi_{grav}(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}) \tag{10}$$

та розраховуючи

$$\Delta\Phi_c(\vec{r}) = -2\omega^2, \tag{11}$$

надаємо рівнянню (7) такого вигляду

$$2K\Delta\rho(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r}) + 2\omega^2. \tag{12}$$

Для зручності наступних розрахунків вводяться безрозмірні змінні:

$$\xi = \frac{r}{\lambda}, \;\; Y(\xi,\theta) = \frac{\rho(\vec{r})}{\rho_c}, \tag{13}$$

де λ – деякий масштаб довжини, а ρ_c – густина у центрі зорі ($\rho_c = \rho(0,\theta)$). Якщо λ визначити співвідношенням

$$\lambda = \left\{\frac{K}{2\pi G}\right\}^{1/2}, \tag{14}$$

і ввести безрозмірну частоту

$$\Omega = \omega(2\pi G\rho_c)^{1/2}, \tag{15}$$

то рівняння рівноваги набуває безрозмірної форми

$$\Delta_{\xi,\theta}Y(\xi,\theta) = \Omega^2 - Y(\xi,\theta). \tag{16}$$

У змінних (ξ,θ)

$$\Delta = \Delta_\xi + \frac{1}{\xi^2}\Delta_\theta; \quad \Delta_\xi = \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi}\right); \quad \Delta_\theta = \frac{\partial}{\partial t}(1-t^2)\frac{\partial}{\partial t}, \tag{17}$$

де $t = cos\theta$. Згідно з означенням (13) функція $Y(\xi,\theta)$ задовільняє граничну умову $Y(0,\theta) = 1$, а регулярний в нулі розв'язок рівняння (16) вимагає умови $\frac{\partial}{\partial\xi}Y(\xi,\theta) = 0$ при $\xi = 0$.

Рівняння (16) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку в частинних похідних. Нашою метою є знаходження наближених розв'язків цього рівняння. При $\Omega = 0$ рівняння (16) відповідає теорії Лена-Емдена – політропній теорії зір без обертання. У зв'язку із сферичною симетрією цієї моделі, функція Емдена задовільняє рівняння

$$\Delta_\xi y(\xi) = -y(\xi), \tag{18}$$

а її розв'язок відомий: $y_1(\xi) = \frac{sin\xi}{xi}$. З умови $y_1(\xi) = 0$ знаходимо безрозмірний радіус зорі $\xi_1 = \pi$. Оскільки кутова швидкість Ω є невеликою, то $J_1(\xi)$ є нульвим наближенням розв'язку рівняння (16). Щоб оцінити величину Ω, скористаємось відомим співвідношенням політропної теорії Лена-Емдена

$$\bar{\rho} = \rho_c 3\alpha_1 \xi_1^{-3}, \tag{19}$$

де $\alpha_1 = \xi_1^2 |\frac{\partial y(\xi_1)}{\partial \xi_1}| = \pi$, а $\bar{\rho}$ – середня густина зорі, масою M і радіусом R

$$\bar{\rho} = M \left\{ \frac{4}{3}\pi R^3 \right\}^{-1}. \tag{20}$$

Для зорі Сіріус A маємо $\bar{\rho}_A \simeq 0.55$г/см^3, тому $\rho_e^A = 1.81$г/см^3.

Згідно з формулою (15) знаходимо, що безрозмірна частота для Сіріуса A при $\omega \geq 1.3 \cdot 10^{-5}$с$^{-1}$ дорівнює

$$\Omega \geq 1.5 \cdot 10^{-2} \tag{21}$$

і є малою величиною. Це дозволяє використати теорію збурень при розв'язуванні рівняння (16) і шукати його розв'язок у вигляді

$$Y(\xi, \theta) = y_1(\xi) + \Omega^2 \Psi(\xi, \theta), \tag{22}$$

що відповідає методиці Мілна-Чандрасекара, покладаючи

$$\Psi(\xi, \theta) = \Psi_0(\xi) + a_2 \Psi_2(\xi) P_2(t), \tag{23}$$

де $P_2(t)$ – поліном Лежандра другого порядку від змінної $t = cos\theta$; $\Psi_0(\xi)$, $\Psi_2(\xi)$ – невідомі функції, а a_2 – стала інтегрування.

У роботі [17] використано інший спосіб знаходження розв'язку рівняння (16). За допомогою підстановки

$$Y(\xi,\theta) = y_1(\xi) + \Omega^2\{\varphi(\xi,\theta) + \frac{\xi^2}{4}sin^2\theta\} \tag{24}$$

рівняння (16) зводиться до рівняння для функції $\varphi(\xi,\theta)$, яка від Ω не залежить:

$$\Delta_{\xi,\theta}\varphi(\xi,\theta) + \varphi(\xi,\theta) = -\frac{\xi^2}{4}sin^2\theta. \tag{25}$$

Розв'язки відповідного однорідного (без правої сторони) рівняння, у якому змінні розділяються, можна записати у вигляді

$$\varphi(\xi,\theta) = \sum_{l=1}^{\infty}\alpha_{2l}j_{2l}(\xi)P_{2l}(t), \tag{26}$$

де

$$j_{2l}(\xi) = \xi^{2l}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}(-\frac{\xi^2}{2})^s\{[4l+1+2s]!!\}^{-1} \tag{27}$$

є сферична функція Бесселя першого роду, $P_{2l}(t)$ – поліном Лежандра від $t = cos\theta$, α_{2l} – сталі інтегрування.

Частковий розв'язок рівняння (27) представляється у вигляді

$$\varphi_{partial}(\xi,\theta) = \sum_{l=2}^{\infty}b_{2l}[\xi sin\theta]^{2l}. \tag{28}$$

Підставляючи розклад (28) у рівняння (25) і використовуючи рівність (яку кожен може перевірити)

$$\Delta_{\xi,\theta}\{\xi sin(\theta)\}^{2l} = (2l)^2\{\xi sin(\theta)\}^{2l-2} \tag{29}$$

знаходимо коефіцієнти

$$b_{2l} = (-1)^{l-1}2^{-2l}(l!)^{-2}. \tag{30}$$

Через це

$$\frac{1}{4}\xi^2 sin^2(\theta) + \varphi_{partial}(\xi,\theta) = 1 - J_0(\xi sin(\theta)), \tag{31}$$

де

$$J_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \left(\frac{z^2}{4}\right)^i (i!)^{-2} \tag{32}$$

є функцією Бесселя цілого (в даному випадку – нульового) порядку [18].

Згідно з формулами (24) – (32) розв'язок рівняння (16) набуває вигляду

$$Y(\xi,\theta) = j_0(\xi) + \Omega^2 \left\{1 - J_0(\xi\sin\theta) + \sum_{l=1}^{\infty}\alpha_{2l} j_{2l}(\xi) P_{2l}(t)\right\}. \tag{33}$$

Це точний розв'язок рівняння (16), але у ньому фігурують сталі інтегрування α_{2l}, які поки-що є невідомими. При цьому $j_0(\xi) = \sin\xi/\xi = y_1(\xi)$ є сферична функція Бесселя нульового порядку.

Функція $J_0(\xi,\theta)$ має такий розклад за поліномами Лежандра

$$J_0(\xi\sin\theta) \equiv J_0(\xi[1-t^2]^{1/2}) = \sum_{l=0}^{\infty} D_{2l} j_{2l}(\xi) P_{2l}(t), \tag{34}$$

де $D_{2l} = (4l+1)(2l)!2^{-2l}(l!)^{-2}$. Це дозволяє записати $Y(\xi,\theta)$ ще й у такому вигляді:

$$\tilde{Y}(\xi,\theta) = j_0(\xi) + \Omega^2 \left\{1 - j_0(\xi) + \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l} j_{2l}(\xi) P_{2l}(t)\right\}, \tag{35}$$

вводячи нові сталі інтегрування $a_{2l} = \alpha_{2l} - D_{2l}$. Представлення (33) і (35) є цілком еквівалентними. У роботах [14, 15] сталі інтегрування a_{2l} знаходяться шляхом підстановки розв'язку (35) в інтегральну форму рівняння рівноваги, що зводиться до розв'язування лінійної неоднорідної системи алгебраїчних рівнянь для сталих a_{2l}. В цих роботах використано наближення $a_2 \neq 0$, $a_4 \neq 0$, а всі інші сталі $a_{2l} = 0$ при $l \geq 3$.

Розв'язок (35) методом розділення змінних у рівнянні (16) одержано раніше у роботі [7] у наближенні $a_{2l} = 0$ при $l \geq 5$. При цьому сталі інтегрування визначались цілком іншим способом.

Для малих значень кутових швидкостей досить обмежитись розкладом з точністю $j_2(\xi)P_2(t)$,

$$Y(\xi,\theta) = j_0(\xi) + \Omega^2\{1 - j_0(\xi) + a_2 P_2(t) j_2(\xi)\}, \tag{36}$$

де

$$a_2 = -\frac{5}{6}\pi^2; \quad j_0(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi}; \tag{37}$$
$$j_2(\xi) = \sin\xi\left\{\frac{3}{\xi^3} - \frac{1}{\xi}\right\} - \frac{\cos\xi}{\xi}; \quad P_2(t) = \frac{1}{2}\{3t^2 - 1\}.$$

Корінь рівняння

$$Y(\xi, \theta) = 0 \tag{38}$$

визначає поверхню зорі

$$\xi_0(t) \cong \pi\left\{1 + \Omega^2\left[1 - \frac{5}{2}P_2(t)\right]\right\}, \tag{39}$$

що є поверхнею еліпсоїда обертання

$$\xi_0(t) = \frac{\xi_e}{(1 + t^2e^2/(1-e^2))^{1/2}}, \tag{40}$$

де $\xi_e \cong \pi\{1 + \frac{9}{4}\Omega^2\}$; $\xi_p \cong \pi(1 - \frac{3}{2}\Omega^2)$; а $e \cong (1 - \xi_p^2/\xi_e^2)^{1/2}$ – ексцентриситет еліпсоїда. Різниця безрозмірних екваторіального і полярного радіусів дорівнює

$$\xi_e - \xi_p = \frac{15}{4}\pi\Omega^2, \tag{41}$$

а сплюснутість зорі рівна

$$\sigma = (\xi_e - \xi_p)\xi_e^{-1} \cong \frac{15}{4}\pi\Omega_A^2, \tag{42}$$

що складає 0.1 %. Масу зорі можна записати у вигляді

$$M = \int\limits_V \rho(\vec{r})d\vec{r} = \rho_c 2\pi\lambda^3 \int\limits_{-1}^{1} dt \int\limits_0^{\xi_0(t)} d\xi\xi^2 Y(\xi, \theta), \tag{43}$$

об'єм зорі

$$V = \int\limits_V d\vec{r} = 2\pi\lambda^3 \int\limits_{-1}^{1} dt \int\limits_0^{\xi_0(t)} d\xi\xi^2 = \frac{2\pi\lambda^3}{3}\int\limits_{-1}^{1} dt\xi_0^3(t), \tag{44}$$

Важливою характеристикою є потенціал гравітаційного поля зорі з обертанням. У зв'язку із сплющенням зорі потенціал не має сферичної симетрії. Згідно з формулою (8) за межами зорі потенціал дорівнює

$$\Phi_{grav}(\vec{r}) = -G\int \frac{\rho(\vec{r}_1)d\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} = -G\rho_c\lambda^2 \int \frac{d\vec{\xi}_1 Y(\xi_1,\theta_1)}{|\vec{\xi}-\vec{\xi}_1|} = \tag{45}$$

$$= -G\rho_c\lambda^2 \frac{1}{\xi}\sum_{l\geq 0}\int d\vec{\xi}_1 Y(\xi_1,\theta_1)\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^{2l} P_{2l}(t)P_{2l}(t_1).$$

Обмежуючись виразом (36) для малих швидкостей обертання знаходимо, що

$$\Phi_{grav}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r} - \frac{4}{5}\frac{G\lambda^5}{r^3}\rho_c P_2(t)a_2\Omega^2 I_2 + \dots\,, \tag{46}$$

де

$$I_2 = \int\limits_0^{\xi_1} \xi^4 j_2(\xi)d\xi = 15\pi - \pi^3. \tag{47}$$

Оскільки

$$\overline{\rho} = \rho_c \frac{3}{\pi^2}, \tag{48}$$

то звідси визначаємо

$$\rho_c = \frac{\pi^2}{3}\overline{\rho} = \frac{\pi}{4}\frac{M}{R^3} \tag{49}$$

і розклад (46) можна записати у вигляді

$$\Phi_{grav}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r} - \frac{GMR^2}{r^3}P_2(t)J_2 + \dots\,, \tag{50}$$

$$J_2 = \frac{a_2\Omega^2}{\pi^2} \approx 2\cdot 10^{-4} \quad \text{при} \quad \Omega = 1.5\cdot 10^{-2}.$$

Для пояснення невеликих збурень орбіти Сіріуса B відносно Сіріуса A дослідники намагались використати гіпотезу про якесь невелике третє тіло у системі Сіріуса. Як випливає з оцінок (див. [1]) маса такого тіла може знаходитись у межах $(5-10)M_{Jup}$, де M_{Jup} – маса Юпітера.

Через сплюснутість Сіріуса A можуть виникати збурення орбіти Сіріуса B в околі периастру, якщо вісь обертання Сіріуса A не є перпендикулярною до площини відносної орбіти. Таке пояснення є більш природнім, ніж припущення про третє тіло.

Оскільки зі спостережень відомо лише $v \sin i$, то кутова швидкість ω може бути і вдвічі більшою, ніж мінімальна $\omega_A \cong 1.3 \cdot 10^{-5}$с$^{-1}$. Так що J_2 може сягати значень порядку 10^{-3}, а Ω може приймати значення, близькі до $3{\cdot}10^{-2}$. В такому випадку сплюснутість може приймати значення порядку 0.5 %.

На завершення визначимо ще параметр K, який фігурує у рівнянні стану (1). Використовуючи формулу (10) і співвідношення $\lambda = R_e/\xi_1 \cong R/\pi$, знаходимо, що $K = 2\pi G R_e^2 \pi^{-2} \simeq 6.16 \cdot 10^{14}$ см ^{2} г$^{-1}$ с$^{-2}$.

Такі значення характерні для зір спектральних класів (A0 – A5), як показано у роботах [14, 15].

4 Яка швидкість обертання Сіріуса B?

Недавно відкриті вироджені карлики зі швидким осьовим обертанням V1460 Her, LAMOST-J024048.5, CTCV-J2056-3014 мають кутову швидкість 0.16 с$^{-1}$, 0.25 с$^{-1}$ і 0.21 с$^{-1}$, відповідно [2-4]. Для карлика V1460 Her відомо також приблизне значення маси ($0.869 M_\odot$). Всі ці карлики належать до подвійних систем. Для двох інших карликів крім кутової швидкості нічого більше не відомо. У роботі [15] у рамках оберненої задачі визначено полярний і екваторіальний радіуси та інші характеристики карлика V1460 Her. Зокрема $R_p = 6.66 \cdot 10^3$ км, $R_e = 6.96 \cdot 10^3$ км.

Для двох інших карликів виконано оцінки їхніх мас, радіусів, моментів інерції. Їхні маси дещо менші за масу Сонця, а радіуси дещо більші за радіуси V1460 Her. В цілому всі ці три карлики за своїми масами і радіусами подібні до карлика Сіріуса B. Цікаво порівняти максимально можливі кутові швидкості цих карликів і карлика Сіріуса B. За означенням

$$\omega_{max} = \left\{ \frac{GM}{R_e^3} \right\}^{1/2}, \tag{51}$$

при такій кутовій швидкості обертання порушується стійкість зорі і починається витікання речовини з області екватора. Для карлика V1460 Her

$\omega_{max} = 0.58$ с$^{-1}$, а для Сіріуса B вона дорівнює 0.9 с$^{-1}$. Спостережувана кутова швидкість V1460 Her складає $\eta = \omega/\omega_{max} \cong 0.279$. Виходячи з подібності характеристик карликів V1460 Her і Сіріуса B, можна сподіватись, що кутова швидкість обертання Сіріуса B має порядок $(0.2 \div 0.3)\omega_{max} \approx (0.18 \div 0.25)$с$^{-1}$. Через те вимірювання кутової швидкості осьового обертання Сіріуса B зі спостережень є дуже актуальною задачю, що могло б завершити сторічну історію досліджень цієї винятково важливої зоряної системи.

5 Який карлик утвориться із компоненти Сіріуса A?

Оскільки маса головного компонента, Сіріуса A, дорівнює $2M_{\odot}$, то кінцевим результатом його еволюції буде вироджений карлик проміжної маси ($\approx 1M_{\odot}$). Момент інерції Сіріуса A відносно осі обертання можна записати у вигляді

$$J_A = \int\limits_V d\vec{r}\rho(\vec{r})(r\sin\theta)^2 = \tag{52}$$

$$= 2\pi\rho_c\lambda^5 \int\limits_{-1}^{1} dt(1-t^2) \int\limits_{0}^{\xi_0(t)} d\xi\xi^4 Y(\xi,\theta).$$

Враховуючи, що функція $Y(\xi,\theta)$ слабо залежить від Ω, то замінюючи $Y(\xi,\theta)$ на $y_1(\xi)$, $\xi_0(t)$ на $\xi_1 = \pi$ і беручи до уваги, що $\rho_c = \pi^2\overline{\rho}/3$, одержуємо наближену формулу:

$$J_A \cong 2\pi\lambda^5 \frac{4\pi^2}{9}\frac{M}{4\pi R^3/3} \int\limits_0^{\pi} d\xi\xi^3 \sin\xi = \tag{53}$$

$$= \frac{2}{3}\pi^2\lambda^5\frac{M}{R^3}4\pi = \frac{8}{3\pi^2}MR^2 \approx \frac{4}{15}MR^2.$$

Якщо утвориться карлик з масою $M_{\odot}$, то його момент інерції буде мати порядок $J_A^{'} \approx \frac{2}{15}MR^2 \cdot 10^{-4}$. Згідно із законом збереження моменту імпульсу кутова швидкість утвореного карлика буде рівною $\omega_A^{'} = 2 \cdot 10^4\omega_A =$

$2 \cdot 10^4 \cdot 1.3 \cdot 10^{-5} \approx 2.6 \cdot 10^{-1} \approx 0.26\text{с}^{-1}$. Тобто цей карлик буде мати кутову швидкість такого порядку, як найшвидші з тепер відомих.

6 Висновки

1. Система подвійної зорі Сіріуса інтенсивно досліджувалась впродовж всього 20-го століття. Її орбітальні характеристики, радіуси компонент та їхні спектри детально досліджені. Досліджено також імовірну еволюцію цієї системи шляхом розрахунків. Однак до цього часу не вивчені характеристики, зумовлені осьовим обертанням компонент. Мета цієї магістерської роботи полягала в оцінці впливу осьового обертання компонент цієї подвійної зорі.

2. У магістерській роботі виконано оцінку перебування Сіріуса А на головній послідовності (ще ~ 500 млн. років).

3. Розраховано внутрішню структуру Сіріуса А у рамках політропної моделі з індексом політропи $n = 1$. Розраховано розподіл густини з врахуванням осьового обертання. Встановлено, що хоч кутова швидкість обертання ($\omega_A \approx 1.3 \cdot 10^{-5}$ с) не є дуже малою, але вплив обертання на характеристики зорі є малим. Причина полягає у відносно великій центральній густині речовини (≈ 1.81 г/см^3), що характерно для зір класів A0V – A5V, на відміну зір класу B. Сплющеність зорі $(R_e - R_p)/R_e$ не більша за 0.5 %.

4. Розраховано гравітаційний потенціал за межами Сіріуса А у вигляді

$$\phi_{grav}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{GMR^2}{r^3} P_2(t) J_2,$$

   де $P_2(t)$ – поліном Лежандра другого порядку, а момент інерції $J_2 \sim (2 \cdot 10^{-4} \div 10^{-3})$. Такий характер потенціалу може призводити до збурення відносної орбіти.

5. Виконано оцінку кутової швидкості карлика, який утвориться на кінцевій стадії еволюції Сіріуса А. Ця швидкість буде приблизно такою, яу у недавно відкритих карликів (V1460 Her та ін.), тобто порядку 0.2 c^{-1}.

6. Обгрунтовано досить велику кутову швидкість обертання карлика Сіріуса В на основі подібності його характеристик до характеристик V1460 Her (≈ 0.2 c^{-1}) та інших карликів з швидким обертанням.

Список використаних джерел

[1] Bond H.E., Schaefer G.H. The Sirius System and Its Astrophysical Puzzles: Hubble Space Telescope and Ground-based Astrometry. The Astrophysical Journal. **840** (2), 70 (2017).

[2] Pelisoli I., Marsh T.R. Found: a rapidly spinning white dwarf in LAMOST J024048.51+195226.9. Monthly Nptices of the Royal Astronomical Siciety: Letters. **509** (1), 1.31-1.36 (2022).

[3] Lopes de Oliveira R., Bruch A. CTCV J2056-3014:An X-Rayfaint Intermediate Polar Harboring an Extremely Fast-spinning White Dwarf. The Astrophysical Journal Letters. **898** (2), L40 (2020).

[4] Ashley R.P., Marsh T.R. V1460 Her: a fast spinning white dwarf accretting from an evolved donor star. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. **499** (1), 149 (2020).

[5] Kong D., Zhang K. Schubert G. An exact solution for arbirarily rotating gasseous polytropes with index unity. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. **448** (1), 456 (2015).

[6] Vavrukh, M.V. Dzikovskyi, D. Exact solution for the rotating polytropes with index unity, its approximations and some applications. Contrib. Astron. Skalnate Pleso. **50** (4), 748 (2020).

[7] Williams P. S. Analytical Solutions for the Rotating Polytrope N=1. Astrophysics and Space Science **143**, 349-358 (1988).

[8] Bessel F. W. On the variations of the proper motions of Procyon and Sirius. MNRAS, **6**, 136 (1844).

[9] Bond G. P. On the Companion of Sirius, by Prof. G. Bond, Director of the Observatory of Harvard College. Astronomische Nachrichten, **57**, 131 (1862).

[10] Adams W.S. The Spectrum of the Companion of Sirius. Publications of the Astronomical Society of the Pacific. **27** (161), 236 (1915).

[11] Auwers A. Orbit of Sirius. MNRAS, **25**, 38 (1864).

[12] Johnson H. L., Morgan W. W. Fundamental stellar photometry for standards of spectral type on the Revised System of the Yerkes Spectral Atlas. Astrophysical Journal, **117**, 313 (1953).

[13] Gray D. F. Precise Rotation Rates for Five Slowly Rotating A Stars. The Astronomical Journal **147**, 81 (2014).

[14] Vavrukh M. V., Dzikovskyi D. V., Smerechynskyi S. V. Inverse problem of white dwarfs theory with rapid axial rotation. Contrib. Astron. Skalnate Pleso. (in progress) (2022).

[15] Vavrukh M. V., Dzikovskyi D. V., Smerechynskyi S. V. White dwarfs with rapid rotation. Mathematical Modeling and Computing **9**, 2, 278 (2022).

[16] Чандрасекар С . Введение в учение о строении звезд (Наука, Москва, 1950)

[17] Ваврух М., Дзіковський Д. Внутрішня будова зір з осьовим обертанням. Вісник Львівського університету. Серія фізична **57** 65 (2020).

[18] Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (Government Printing Office Washington, 1972).