

Львівський національний університет імені Івана Франка
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука

УДК 531.266.3

Магістерська робота на тему:

**Термодинаміка топологічної зарядженої
чорної діри в теорії Бранса-Діке**

Виконав студент II курсу групи ФЗФМ-21
спеціальності 104 Фізика та астрономія
Полканов В.В.

Керівник: доц. Стецко М.М.

Рецензент: с.н.с. Яремко Ю.Г.

м. Львів – 2022р.

Анотація

В даній роботі ми розглядаємо топологічну заряджену чорну діру в теорії Бранса-Діке з лагранжіаном Борна-Інфельда та її термодинаміку. Продемонстровано отримання розв'язків рівнянь Айнштейна в межах теорії Бранса-Діке в конформному просторі, отримано залежності термодинамічних параметрів, таких як температура, ентропія та теплоємність, на горизонті подій чорної діри від радіуса горизонту.

Ключові слова: топологічна чорна діра, теорія Бранса-Діке, модель Борна-Інфельда, термодинаміка чорних дір.

Abstract

We consider topological charged black hole with Born-Infeld lagrangian in Brans-Dicke theory and its thermodynamics. We obtain solutions of Einstein equations within the Brans-Dicke theory in conform space. The thermodynamic parameters such as temperature, entropy and heat capacity on the event horizon were obtained.

Key words: topological black hole, Brans-Dicke theory, Born-Infeld model, black hole thermodynamics.

Зміст

Вступ	4
Розділ 1. Рівняння поля	5
Розділ 2. Отримання розв'язків рівнянь поля	8
2.1. Рівняння електромагнітного поля	8
2.2. Рівняння Айнштейна	9
2.3. Рівняння скалярного поля	10
Розділ 3. Термодинаміка топологічної чорної діри	14
3.1. Температура	15
3.2. Теплоємність	19
Висновок	21
Список використаної літератури	22

Вступ

З часів Ньютона і до XIX століття не йшло й мови про границі застосовності закону всесвітнього тяжіння, допоки емпіричний досвід не почав вимагати від науковців пошуку нових підходів у розумінні гравітації. Скалярні — як їх тепер називають — модифікації закону всесвітнього тяжіння не давали бажаного результату. Але ситуація в математичному світі, як відомо, часто на багато років випереджає потреби фізичних теорій. Айнштайн першим застосував потужний математичний апарат, закладений ще Ріманом в 50-х роках XIX ст., у спробі описати гравітаційну взаємодію між тілами. Розгадка причини обертання перигелію Меркурію, гравітаційного красного зміщення, відхилення світла в полі тяжіння це невеликі придбання в порівнянні з можливістю переосмислити стан речей. Простір не є чимось постійним і абсолютним, як і час, який більше не стоїть від нього осторонь, а разом вони поєднані в одну модель простору-часу. Геометрія простору-часу визначається поміщеними в нього тілами, а рух тіл, в свою чергу, — геометрією простору-часу. Й дотепер тензорна теорія гравітації Айнштайна [1] вважається еталонною, але це не зупиняє теоретика від спроби вийти і за її межі.

Запропонована в 1961 році Брансом і Діке скалярно-тензорна теорія гравітації [2] була на свій час спробою узгодити метричну теорію Айнштайна з принципом Маха. Так, геометрія простору-часу в межах їх теорії змінюється не лише на пряму від наявності тіл в ньому, а й опосередковано: створюваним тілами полем. За роки свого існування теорія Бранса-Діке модернізувалася. Тепер часто крім самого скалярного поля вводиться поняття потенціалу від нього, а сама теорія застосовується в багатьох областях, таких як релятивістська астрофізика та космологія.

Метою цієї роботи є отримання розв'язків рівнянь Айнштайна та рівняння скалярного поля в межах теорії Бранса-Діке для топологічної зарядженої чорної діри з лагранжіаном електромагнітного поля Борна-Інфельда та отримання її термодинамічних параметрів. **Основним завданням** є отримання розв'язків рівнянь Айнштайна та термодинамічних параметрів чорної діри. **Об'єктом дослідження** є чорна діра в гіперболічному просторі. **Предметом дослідження** є метрика простору-часу та термодинамічні параметри чорної діри.

Розділ 1. Рівняння поля

Рівняння поля отримуємо за принципом найменшої дії. Відповідно до теорії Бранса-Діке, дія матиме вигляд

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} \Delta_\alpha \phi \Delta^\alpha \phi - L_{EM} - 2\Lambda \right), \quad (1)$$

де ϕ – скалярне поле,
 ω – параметр Бранса-Діке,
 L_{EM} – лагранжیان електромагнітного поля,
 Λ – космологічна стала.

В даній роботі будемо користуватись моделлю Борна-Інфельда [3]. Таким чином, лагранжیان

$$L_{EM} = 4\beta^2 \left(\sqrt{1 + \frac{F}{2\beta^2}} - 1 \right), \quad (2)$$

де β – константа.

Тут під позначенням F мається на увазі згортка тензора електромагнітного поля із самим собою

$$F = F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (3)$$

Беручи варіацію з дії за компонентами метричного тензора $g^{\mu\nu}$, скалярного поля ϕ та потенціла A^μ отримаємо рівняння гравітаційного та електромагнітного полів

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{\phi} (\Delta_\mu \Delta_\nu \phi - \square \phi) + \frac{\omega}{\phi^2} (\Delta_\mu \phi \Delta_\nu \phi - \frac{1}{2} \Delta_\alpha \phi \Delta^\alpha \phi g_{\mu\nu}) - \frac{\Lambda}{\phi} g_{\mu\nu} + \frac{1}{\phi} \frac{2F_{\alpha\mu} F^\alpha{}_\nu}{\sqrt{1 + \frac{F}{2\beta^2}}} - \frac{1}{2\phi} L_{EM} g_{\mu\nu},$$

$$\Delta_\alpha \Delta^\alpha \phi = \frac{2}{3 + 2\omega} \left(\frac{F}{\sqrt{1 + \frac{F}{2\beta^2}}} - L_{EM} \right) - \frac{4\Lambda}{3 + 2\omega},$$

$$\Delta_\alpha \left(\frac{F_\nu{}^\alpha}{\sqrt{1 + \frac{F}{2\beta^2}}} \right) = 0.$$

Перше рівняння, рівняння Айнштайна, містить справа в першому доданку другі похідні від скалярного поля, які з'являються через взяття варіації від добутку скалярної функції на скалярну кривину в дії. Наявність цих других похідних суттєво ускладнює процес розв'язку рівнянь. Є другий шлях, який полягає в переході в конформний простір з метричним тензором

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}.$$

Тоді дія запишеться у вигляді

$$\tilde{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} (\tilde{R} - 2\Delta_\beta \tilde{\phi} \Delta^\beta \tilde{\phi} - \tilde{L}_{EM} e^{-2\alpha\tilde{\phi}} - 2\Lambda e^{-2\alpha\tilde{\phi}}), \quad (4)$$

де

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{3 + 2\omega}},$$

а символом “ \sim ” зверху позначені величини в новому, конформному просторі.

Нова скалярна функція має наступний зв'язок зі старою

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\alpha} \ln \phi, \quad (5)$$

при цьому тензор електромагнітного поля залишився тим самим

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}.$$

Новий вигляд лагранжіана електромагнітного поля

$$\tilde{L}_{EM} = 4\beta^2 \left(\sqrt{1 + \frac{e^{2\alpha\tilde{\phi}} \tilde{F}}{2\beta^2}} - 1 \right).$$

Тепер після варіювання дії за новими $\tilde{g}_{\mu\nu}$, $\tilde{\phi}$ та \tilde{A}^μ отримаємо рівняння гравітаційного та електромагнітного полів у конформному просторі

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} = 2 \left(\Delta_\mu \tilde{\phi} \Delta_\nu \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \Delta_\alpha \tilde{\phi} \Delta^\alpha \tilde{\phi} \tilde{g}_{\mu\nu} \right) - \Lambda \tilde{g}_{\mu\nu} e^{-2\alpha\tilde{\phi}} + \frac{2\tilde{F}_{\alpha\mu} \tilde{F}^\alpha{}_\nu}{\sqrt{1 + \frac{e^{2\alpha\tilde{\phi}} \tilde{F}}{2\beta^2}}} \\ - \frac{1}{2} \tilde{L}_{EM} e^{-2\alpha\tilde{\phi}} \tilde{g}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\Delta_\alpha \Delta^\alpha \tilde{\phi} = \frac{\alpha}{2} \left(\tilde{L}_{EM} - \frac{\tilde{F}}{\sqrt{1 + \frac{e^{2\alpha\tilde{\phi}} \tilde{F}}{2\beta^2}}} \right) - \alpha \Lambda e^{-2\alpha\tilde{\phi}}, \quad (6.2)$$

$$\Delta_\alpha \left(\frac{\tilde{F}_\nu{}^\alpha}{\sqrt{1 + \frac{e^{2\alpha\tilde{\phi}} \tilde{F}}{2\beta^2}}} \right) = 0. \quad (6.3)$$

Бачимо, що рівняння Айнштайна більше не містить других похідних від скалярного поля.

Розділ 2. Отримання розв'язків рівнянь поля

Метрика, яку ми тут розглядаємо – є метрикою топологічної чорної діри, відповідний квадрат інтервала має вигляд

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(t)} + (rR(r))^2(d\theta^2 + \sinh^2\theta d\varphi^2).$$

Чотири-потенціал має лише часову компоненту

$$\tilde{A}^\mu = (A(r), \mathbf{0}).$$

Далі ми з виведених рівнянь отримаємо компоненти тензора електромагнітного поля, скалярну функцію $\tilde{\phi}$ та метричну функцію $f(r)$ з кутовою $R(r)$.

2.1. Рівняння електромагнітного поля

Перейдемо від коваріантної похідної в рівнянні електромагнітного поля (6.3) до звичайної

$$\Delta_\alpha \left(\frac{\tilde{F}_\nu{}^\alpha}{\sqrt{1 + \frac{e^{2\alpha\tilde{\phi}}\tilde{F}}{2\beta^2}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\alpha \left(\frac{\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{F}_\nu{}^\alpha}{\sqrt{1 + \frac{e^{2\alpha\tilde{\phi}}\tilde{F}}{2\beta^2}}} \right).$$

де з квадрата інтервалу бачимо, що

$$\sqrt{-\tilde{g}} = (rR(r))^2 \sinh^2\theta.$$

Легко отримуємо розв'язок для компоненти тензора електромагнітного поля

$$\tilde{F}^{01} = \frac{Q}{\sqrt{(rR)^4 + \frac{Q^2}{\beta^2} e^{2\alpha\tilde{\phi}}}} \quad (7)$$

де Q – стала інтегрування, пов'язана із зарядом.

Враховуючи, що тензор електромагнітного поля має лише дві ненульові компоненти, «01» та «10», згортка (3)

$$\tilde{F} = -2(\tilde{F}^{01})^2.$$

Тоді корінь

$$\sqrt{1 + \frac{e^{2\alpha\tilde{\phi}}\tilde{F}}{2\beta^2}} = \frac{(rR)^4}{\sqrt{(rR)^4 + \frac{Q^2}{\beta^2}e^{2\alpha\tilde{\phi}}}},$$

чим буде зручно користуватись далі.

2.2 Рівняння Айнштейна

Записавши рівняння «00» та «11» (6.1) явно, та розділивши перше рівняння на \tilde{g}_{00} , а друге – на \tilde{g}_{11} , бачимо, що їх різниця

$$\frac{\tilde{R}_{11}}{\tilde{g}_{11}} - \frac{\tilde{R}_{00}}{\tilde{g}_{00}} = 2(\tilde{\phi}')^2.$$

Підставляючи компоненти тензора Річі та метричного тензора, отримаємо

$$\frac{(rR)''}{rR} = -2(\tilde{\phi}')^2. \quad (8)$$

Для наступних кроків необхідно припустити вигляд функції R. Візьмемо її в такому вигляді

$$R = e^{\alpha\tilde{\phi}},$$

і підставимо її в рівняння (8). Будемо мати

$$\tilde{\phi}'' + 2\frac{\tilde{\phi}'}{r} + \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}(\tilde{\phi}')^2 = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є

$$\tilde{\phi} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \ln \left(A + \frac{B}{r} \right),$$

де A, B – константи інтегрування.

Повернемося до зв'язку $\tilde{\phi}$ зі старим скалярним полем. Відповідно до (5)

$$\phi = e^{\alpha\tilde{\phi}} = \left(A + \frac{B}{r}\right)^{\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}}.$$

Очікуючи, що поле на безмежності зникає

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = 0,$$

маємо покласти

$$A = 0.$$

Отже, скалярне поле

$$\tilde{\phi} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \ln\left(\frac{B}{r}\right). \quad (9)$$

2.3. Рівняння скалярного поля

Даламберіан від скалярного поля в рівнянні (6.2) рівний

$$\Delta_\alpha \Delta^\alpha \tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_r (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\phi}' g^{11}) = \frac{1}{(rR)^2} \partial_r ((rR)^2 \tilde{\phi}' f).$$

Отже, рівняння (6.2) після усіх спрощень матиме вигляд

$$((rR)^2 \tilde{\phi}' f)' = \alpha \frac{Q^2 + 2\beta^2 e^{-2\alpha\tilde{\phi}} (rR)^4}{\sqrt{(rR)^4 + \frac{Q^2}{\beta^2} e^{2\alpha\tilde{\phi}}}} - \alpha(2\beta^2 + \Lambda) e^{-2\alpha\tilde{\phi}}. \quad (10)$$

Проінтегруємо його. Розглянемо перший доданок з Q^2 в знаменнику

$$\begin{aligned} \int dr \frac{1}{\sqrt{(rR)^4 + \frac{Q^2}{\beta^2} e^{2\alpha\tilde{\phi}}}} &= \int dr \frac{1}{(rR)^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{\beta^2} \frac{e^{2\alpha\tilde{\phi}}}{(rR)^4}}} \\ &= \int dr \frac{1}{\frac{2\alpha^2}{B\alpha^2+1} \frac{2}{r\alpha^2+1}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{\frac{2\alpha^2}{B\alpha^2+1} \frac{2\alpha^2+4}{r\alpha^2+1}}}}. \end{aligned}$$

Вважаючи, що вираз

$$\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{\frac{2\alpha^2}{B\alpha^2+1} \frac{2\alpha^2+4}{r\alpha^2+1}}$$

є малим, розкладемо дріб в ряд і отримаємо

$$\begin{aligned} B^{-\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}} \int dr r^{-\frac{2}{\alpha^2+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{1}{2}\right)_l \left(\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{\frac{2\alpha^2}{B\alpha^2+1} \frac{2\alpha^2+4}{r\alpha^2+1}}\right)^l \\ = B^{-\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{1}{2}\right)_l \left(\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{\frac{2\alpha^2}{B\alpha^2+1} \frac{2\alpha^2+4}{r\alpha^2+1}}\right)^l \frac{1}{r^{1+\alpha^2} - \frac{2\alpha^2+4}{\alpha^2+1} l - \frac{2}{\alpha^2+1} + 1} \\ + const. \end{aligned}$$

де $(a)_n$ – символ Похгаммера.

$$(a)_n = \prod_{l=0}^{n-1} (a+l),$$

для $n > 0$, та

$$(a)_0 = 1,$$

для $s = 0$.

Застосовуючи означення символу Похгаммера, можна показати, що

$$\frac{1}{-\frac{2\alpha^2+4}{\alpha^2+1} n - \frac{2}{\alpha^2+1} + 1} = -\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} \frac{\left(\frac{1-\alpha^2}{4+2\alpha^2}\right)_n}{\left(\frac{1-\alpha^2}{4+2\alpha^2} + 1\right)_n}.$$

Таким чином

$$\int dr \frac{1}{\sqrt{(rR)^4 + \frac{Q^2}{\beta^2} e^{2\alpha\tilde{\phi}}}} = -\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} \frac{1}{B\alpha^2+1r^{1+\alpha^2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{1}{2}\right)_l \left(\frac{1-\alpha^2}{4+2\alpha^2}\right)_l}{l! \left(\frac{1-\alpha^2}{4+2\alpha^2}+1\right)_l} \left(\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{B\alpha^2+1r} \frac{1}{\alpha^2+1}\right)^l$$

$$= -\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} \frac{1}{B\alpha^2+1r^{1+\alpha^2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1-\alpha^2}{4+2\alpha^2}; \frac{1-\alpha^2}{4+2\alpha^2}+1; -\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{B\alpha^2+1r} \frac{1}{\alpha^2+1}\right)$$

$$+ const,$$

де ${}_2F_1(a, b; c; z)$ – гіпергеометрична функція.

Аналогічно інтегруємо другий доданок в дробі в (10).

Після інтегрування, остаточно отримаємо метричну функцію

$$f(r) = \frac{(1+\alpha^2)^2}{1-\alpha^2} \frac{Q^2}{B^{1+\alpha^2} r^{1+\alpha^2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1-\alpha^2}{4+2\alpha^2}; \frac{1-\alpha^2}{4+2\alpha^2}+1; -\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{B^{1+\alpha^2} r^{1+\alpha^2}}\right)$$

$$- \frac{2(1+\alpha^2)\beta^2 r^{\frac{2+4\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{3} \frac{2\alpha^2}{B^{1+\alpha^2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{3+3\alpha^2}{4+2\alpha^2}; 1 - \frac{3+3\alpha^2}{4+2\alpha^2}; -\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{B^{1+\alpha^2} r^{1+\alpha^2}}\right)$$

$$+ \frac{1+\alpha^2}{3} \frac{(2\beta^2 + \Lambda)r^{\frac{2+4\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{B^{1+\alpha^2}} - \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \frac{M}{r^{1+\alpha^2}}.$$

Підстановкою метричної функції $f(r)$ та $R(r)$ в рівняння «00» переконується в правильності отриманого розв'язку.

Цікаво розглянути границю, коли лагранжیان Борна-Інфельда стає Максвелівським, тобто коли $\beta \rightarrow \infty$. В цій границі метрична функція суттєво спрощується

$$f^{Max}(r) = \frac{(1+\alpha^2)^2}{1-\alpha^2} \frac{Q^2}{B^{1+\alpha^2} r^{1+\alpha^2}} + \frac{1+\alpha^2}{3} \frac{\Lambda r^{\frac{2+4\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{B^{1+\alpha^2}} - \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \frac{M}{r^{1+\alpha^2}}. \quad (9)$$

На рисунку (1) подано графічну залежність метричної функції $f(r)$ для різних значень параметра Бранса-Діке ω . Нуль функції з правої сторони демонструє наявність особливості метрики в цій точці, яка є радіусом горизонту подій. Далі

позначатимемо її $r = r_H$. Для великих r , поведінка метричної функції майже повністю визначається доданком з космологічною сталою

$$f_{\Lambda}(r) = \frac{1 + \alpha^2 \Lambda r^{\frac{2+4\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{3} \frac{2\alpha^2}{B^{1+\alpha^2}}.$$

На рисунку (2) подано цю ж залежність, але для різних значень параметра Борна-Інфельда β . Для великих r ця залежність майже однакова, що очікувано, адже доданки, які включають β , стають малими.

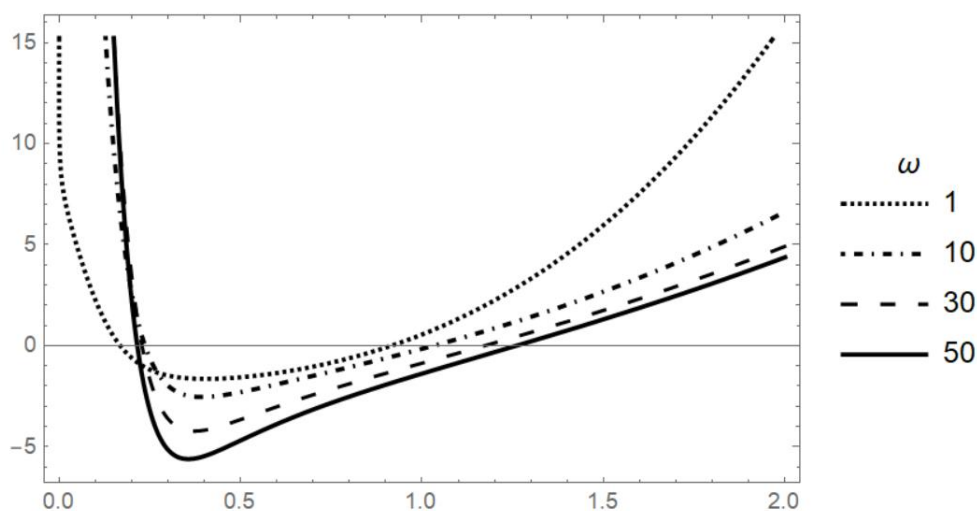


Рис. 1 – Метрична функція для різних значень параметра Бранса-Діке, r подано в одиницях B , $B = 2$, $Q = 6$, $\Lambda = 1$, $M = 1$, $\beta = 15$.

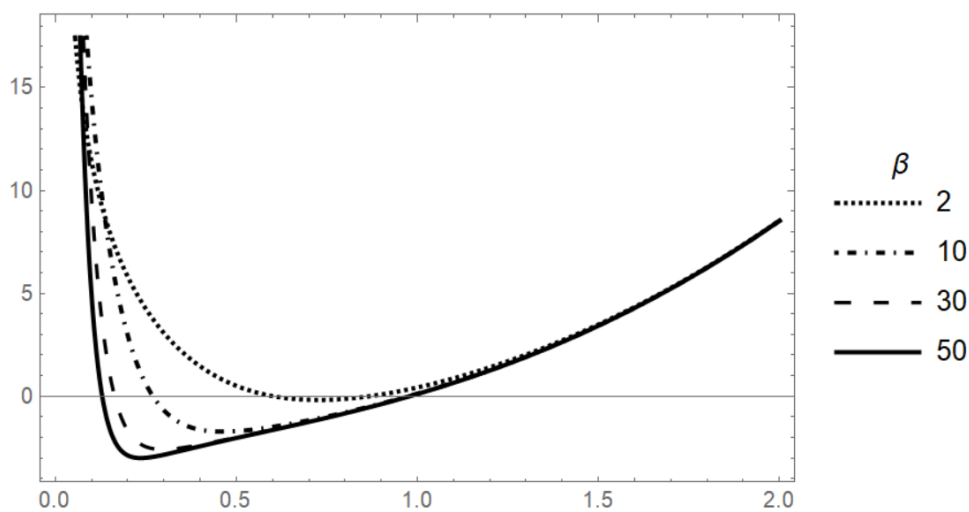


Рис. 2 – Метрична функція для різних значень параметра Борна-Інфельда, r подано в одиницях B , $B = 2$, $Q = 6$, $\Lambda = 1$, $M = 1$, $\omega = 5$.

Розділ 3. Термодинаміка топологічної чорної діри

Далі ми отримаємо деякі термодинамічні параметри топологічної чорної діри.

Температура визначається формулою

$$T = \frac{\kappa}{2\pi},$$

де κ – поверхнева гравітація.

Поверхневу гравітацію знаходимо за згорткою двох коваріантних похідних вектора Кілінга χ^μ

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} \nabla_\alpha \chi^\beta \nabla^\alpha \chi_\beta,$$

$$\chi^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що χ^μ – сталий вектор, його коваріанта похідна буде виражатися через одну лише зв'язність.

Для поверхневої гравітації будемо мати

$$\kappa^2 = \frac{(f'(r))^2}{4},$$

а отже, температура на горизонті

$$T = \frac{f'(r_H)}{4\pi}. \quad (11)$$

Ентропія S чорної діри визначається площею її горизонту A_H [4, 7]

$$S_H = \frac{A_H}{4}.$$

Елемент площі dA визначається кутовою частиною метрики

$$dA = (rR)^2 \sinh^2 \theta d\theta d\varphi,$$

Інтегруючи цей вираз, так як межі θ в гіперболічних координатах нескінченні, отримуємо нескінченну площу. Тому варто розглянути ентропію на одиницю аналога тілесного кута

$$\Omega = \int \sinh^2 \theta d\theta d\varphi,$$

яка буде

$$s_H = \frac{(r_H R(r_H))^2}{4} = \frac{B^{1+\alpha^2} r_H^{\frac{2}{1+\alpha^2}}}{4}. \quad (12)$$

Також нас цікавитиме поведінка теплоємності чорної діри на горизонті, яку ми можемо отримати за формулою

$$c_H = T_H \left(\frac{ds_H}{dT_H} \right)_Q = \frac{T_H}{\left(\frac{dT_H}{dr_H} \right)} \left(\frac{ds_H}{dr_H} \right). \quad (13)$$

3.1. Температура

Щоб отримати температуру чорної діри на горизонті, порахуємо похідну метричної функції. Через наявність в метричній функції (10) гіпергеометричних функцій, краще не брати похідну одразу з наявного виразу, а змінити його і скористатись наступною властивістю похідної гіпергеометричної функції

$$\frac{d}{dz} z^a {}_2F_1(a, b; c; z) = z^{a-1} {}_2F_1(a, b+1; c; z). \quad (14)$$

Щоб скористатися нею, перепишемо метричну функцію

$$\begin{aligned} f(r) = & \frac{(1+\alpha^2)^2}{1-\alpha^2} \frac{Q^2}{B^{1+\alpha^2} r^{1+\alpha^2}} \left(-\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{B^{1+\alpha^2}} \right)^{-b_1} z^{b_1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b_1; b_1+1; z\right) \\ & - \frac{2(1+\alpha^2)}{3} \frac{\beta^2}{B^{1+\alpha^2} r^{1+\alpha^2}} \left(-\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{B^{1+\alpha^2}} \right)^{-b_2} z^{b_2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b_2; b_2+1; z\right) \\ & + \frac{1+\alpha^2}{3} \frac{(2\beta^2 + \Lambda) r^{\frac{2+4\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{B^{1+\alpha^2}} - \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \frac{M}{r^{1+\alpha^2}}. \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$z = -\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{\frac{2\alpha^2}{B\alpha^2+1} r \frac{2\alpha^2+4}{\alpha^2+1}},$$

$$b_1 = \frac{1-\alpha^2}{4+2\alpha^2}, \quad b_2 = -\frac{3+3\alpha^2}{4+2\alpha^2}.$$

Тоді похідна

$$\begin{aligned} f'(r) = & -(1+\alpha^2) \frac{Q^2}{\frac{4\alpha^2}{B1+\alpha^2} \frac{3-\alpha^2}{r1+\alpha^2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b_1; b_1+1; z\right) \\ & + \frac{(1+\alpha^2)^2}{1-\alpha^2} \frac{Q^2}{\frac{4\alpha^2}{B1+\alpha^2} \frac{1-\alpha^2}{r1+\alpha^2}} \left(-\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{\frac{2\alpha^2}{B1+\alpha^2}}\right)^{-b_1} \frac{dz}{dr} \frac{d}{dz} z^{b_1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b_1; b_1+1; z\right) \\ & - \frac{2(1-\alpha^2)}{3} \frac{\beta^2 r^{\frac{1+3\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{\frac{2\alpha^2}{B1+\alpha^2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b_2; b_2+1; z\right) \\ & - \frac{2(1+\alpha^2)}{3} \frac{\beta^2}{\frac{2\alpha^2}{B1+\alpha^2} \frac{1-\alpha^2}{r1+\alpha^2}} \left(-\frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{\frac{2\alpha^2}{B1+\alpha^2}}\right)^{-b_2} \frac{dz}{dr} \frac{d}{dz} z^{b_2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b_2; b_2+1; z\right) \\ & + \frac{2+4\alpha^2}{3} \frac{(2\beta^2+\Lambda)r^{\frac{1+3\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{\frac{2\alpha^2}{B1+\alpha^2}} + \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \frac{M}{r^{\frac{2}{1+\alpha^2}}}. \end{aligned}$$

Так як нам необхідна похідна на горизонті, а метрична функція на горизонті рівна нулю, можемо легко виразити константу M , яка пов'язана з масою чорної діри, через радіус горизонту

$$\begin{aligned} M(r_H) = & \alpha \left(\frac{(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2} \frac{Q^2}{\frac{4\alpha^2}{B1+\alpha^2} \frac{2-2\alpha^2}{r_H 1+\alpha^2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b_1; b_1+1; z_H\right) - \frac{2\beta^2 r_H^{\frac{2+4\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{\frac{2\alpha^2}{B1+\alpha^2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, b_2; b_2+1; z_H\right) \right. \\ & \left. + \frac{1+\alpha^2}{3} \frac{(2\beta^2+\Lambda)r_H^{\frac{2+4\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{\frac{2\alpha^2}{B1+\alpha^2}} \right). \end{aligned}$$

Тепер, підставивши «масу» в вираз похідної метричної функції на горизонті, скориставшись властивістю (13), після усіх спрощень отримаємо вираз для температури на горизонті

$$T_H = \frac{(1 + \alpha^2)(2\beta^2 + \Lambda) r_H^{\frac{1+3\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{4\pi \frac{2\alpha^2}{B1+\alpha^2}} - \frac{1}{4\pi} \frac{2\beta^2 r_H^{\frac{1+3\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{\frac{2\alpha^2}{B1+\alpha^2}} \left(1 + \frac{Q^2}{2\beta^2} \frac{1}{\frac{4\alpha^2}{B1+\alpha^2} r_H^{\frac{3-\alpha^2}{1+\alpha^2}}} \right) \frac{(1 + \alpha^2)}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{\frac{2\alpha^2}{B1+\alpha^2} r^{\frac{4+2\alpha^2}{1+\alpha^2}}}}} \quad (15)$$

Причому в Максвелівській границі

$$T_H^{Max} = \frac{(1 + \alpha^2)}{4\pi} \left(\Lambda \frac{r_H^{\frac{1+3\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{\frac{2\alpha^2}{B1+\alpha^2}} - \frac{Q^2}{\frac{4\alpha^2}{B1+\alpha^2} r_H^{\frac{3-\alpha^2}{1+\alpha^2}}} \right).$$

На рисунках (3), (4) подано графіки залежності температури на горизонті подій від радіуса горизонту r_H для різних значень параметрів Бранса-Діке та Борна-Інфельда відповідно.

Як видно на обох рисунках, існує нефізична область, в якій температура від'ємна, вона виникає по наступній причині: коли ми отримували температуру, масовий параметр був виражений через радіус горизонту, таким чином, змінюючи радіус горизонту, ми змінюємо масу. Але за певних значень Q та M функція $f(r)$ може не мати нулів, а отже, і горизонту не буде.

В області ж коректних значень температури, вона зростає монотонно зі збільшенням радіуса горизонту і для великих r_H

$$r_H \gg \left(\frac{Q}{\beta} \right)^{\frac{2-2\alpha^2}{3-\alpha^2}} \frac{1}{\frac{4\alpha^2}{B3-\alpha^2}},$$

$$T_H \sim r_H^{\frac{1+3\alpha^2}{1+\alpha^2}}.$$

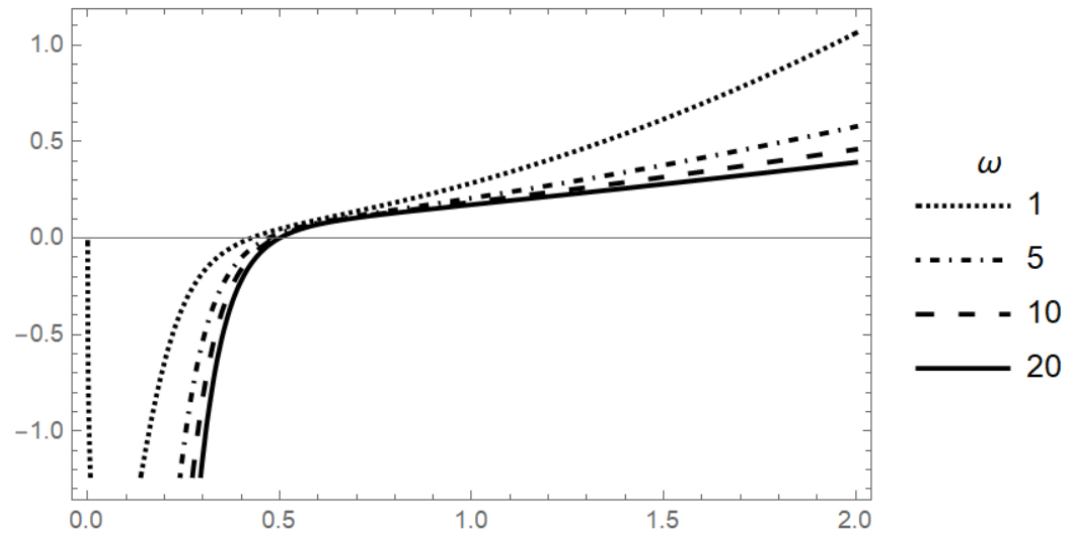


Рис. 3 – Температура на горизонті подій для в залежності від його радіуса r_H для різних значень параметра Бранса-Діке, r подано в одиницях V ,
 $V = 2, Q = 6, \Lambda = 1, \beta = 15$.

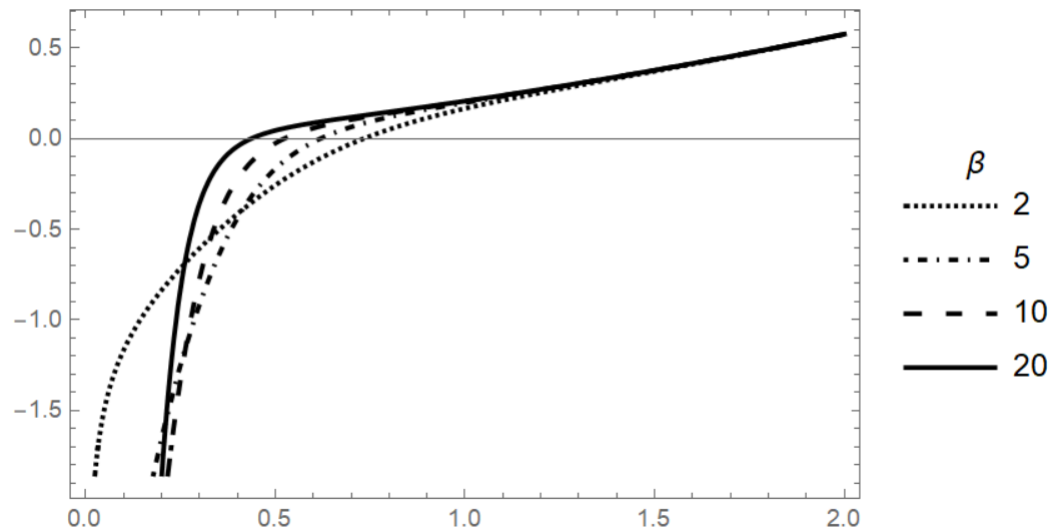


Рис. 4 – Температура на горизонті подій для в залежності від його радіуса r_H для різних значень параметра Борна-Інфельда, r подано в одиницях V ,
 $V = 2, Q = 6, \Lambda = 1, \omega = 5$.

3.2. Теплоємність

Відповідно до отриманої вище формули (13), візьмемо похідні від температури

$$\frac{dT_H}{dr_H} = \frac{(1 + 3\alpha^2)(2\beta^2 + \Lambda) r_H^{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{4\pi \frac{2\alpha^2}{B^{1+\alpha^2}}} + \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(3 - \alpha^2)Q^2 \left(1 + \frac{1 + 2\alpha^2}{3 - \alpha^2} \frac{Q^2}{2\beta^2} \frac{1}{B^{1+\alpha^2} r_H^{\frac{4\alpha^2}{1+\alpha^2} + 2\alpha^2}}\right)}{\frac{4\alpha^2}{B^{1+\alpha^2} r_H^{\frac{4}{1+\alpha^2}}}} \left(1 + \frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{B^{1+\alpha^2} r^{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} + 2\alpha^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \right. \\ \left. - \frac{2(1 + 3\alpha^2)\beta^2 r_H^{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}} \left(1 + \frac{1 + \alpha^2}{1 + 3\alpha^2} \frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{B^{1+\alpha^2} r_H^{\frac{4\alpha^2}{1+\alpha^2} + 2\alpha^2}}\right)}{\frac{2\alpha^2}{B^{1+\alpha^2}} \left(1 + \frac{Q^2}{\beta^2} \frac{1}{B^{1+\alpha^2} r^{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} + 2\alpha^2}}\right)^{\frac{3}{2}}} \right],$$

та етропії

$$\frac{ds_H}{dr_H} = \frac{B^{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}} r_H^{\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}}}{2(1 + \alpha^2)}.$$

Підставляючи отримані вирази у формулу (13), отримаємо теплоємність. Через громізdkість кінцевого виразу, наведемо тут лише Максвелівську границю для теплоємності

$$c_H = \frac{\Lambda}{2(1 + 3\alpha^2)} \frac{1 - \frac{Q^2}{\frac{4\alpha^2}{B^{1+\alpha^2} r_H^{\frac{4+2\alpha^2}{1+\alpha^2}}}}{1 + \frac{(3 - \alpha^2) Q^2}{(1 + 3\alpha^2) \frac{4\alpha^2}{B^{1+\alpha^2} r_H^{\frac{4+2\alpha^2}{1+\alpha^2}}}}} B^{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}} r_H^{\frac{2}{1+\alpha^2}}.$$

На рисунках (5), (6) подано графіки залежності теплоємності на горизонті подій від радіуса горизонту r_H для різних значень параметрів Бранса-Діке та Берна-Інфельда відповідно. Як і у випадку з температурою, маємо нефізичну область, в якій теплоємність від'ємна.

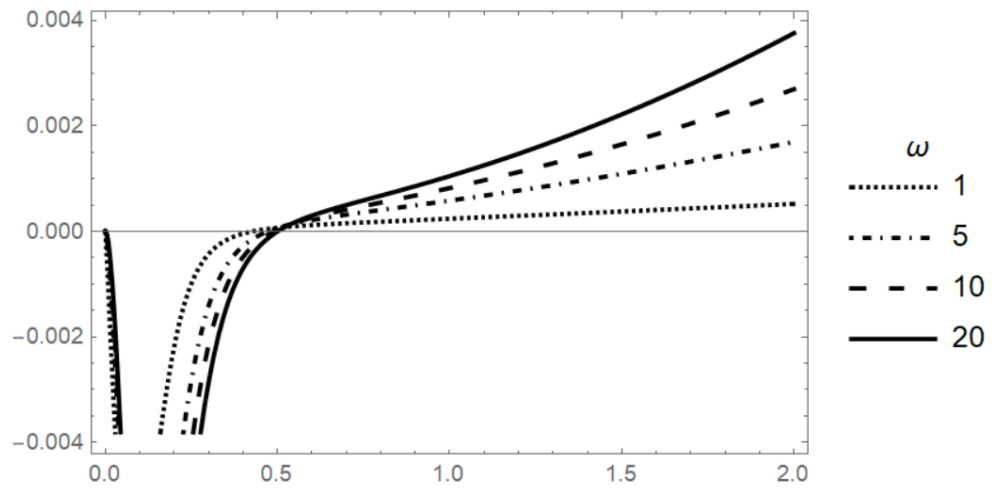


Рис. 5 – Теплоємність на горизонті подій для в залежності від його радіуса r_H для різних значень параметра Бранса-Діке, r подано в одиницях V ,
 $V = 2$, $Q = 6$, $\Lambda = 1$, $\beta = 15$.

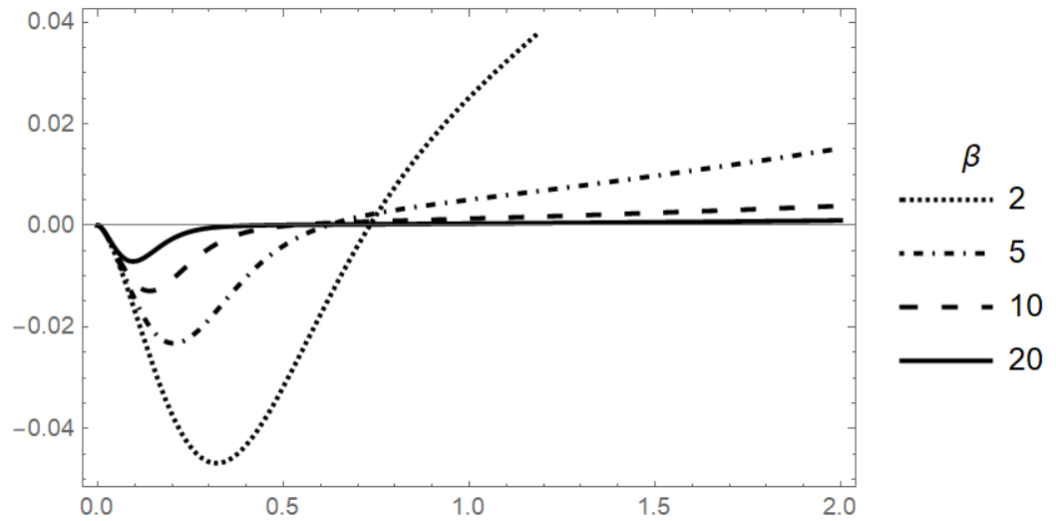


Рис. 6 – Теплоємність на горизонті подій для в залежності від його радіуса r_H для різних значень параметра Борна-Інфельда, r подано в одиницях V ,
 $V = 2$, $Q = 6$, $\Lambda = 1$, $\omega = 5$.

Висновок

Під час виконання даної роботи було отримано розв'язки рівнянь Айнштейна в межах теорії Бранса-Діке для топологічної зарядженої чорної діри з лагранжіаном Борна-Інфельда для електромагнітного поля. Для спрощення розв'язку рівнянь було застосоване конформне перетворення, яке виключає з рівнянь Айнштейна другу похідну від скалярного поля. Отримані розв'язки були проаналізовані, показано наявність виродження метрики, тобто горизонту подій.

Крім того, за наявною метрикою були отримані термодинамічні параметри досліджуваної чорної діри в залежності від горизонту подій. Серед них: температура, ентропія та теплоємність. Ентропія та теплоємність були розглянуті як взяті на одиницю величини, яка є аналогом тілесного кута, бо визначаються площею горизонту, яка в нашому випадку є нескінченною.

Список використаної літератури

1. Albert Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.: 1915, 25 жовтня. С. 844—847.
2. Mach Principle and a Relativistic Theory of Gravity // C. Brans, R. H. Dicke.: 1961, Physical Review, Vol. 124, Num. 3.
3. Foundations of the New Field Theory // M. Born, L. Infeld.: 1934, P Roy Soc A-Math Phy, 425, 27
4. Jacob D. Bekenstein. Black Holes and Entropy // J. Bekenstein.: 1973, Physical Review, Vol. 7, Num. 8.