Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

# З А В Д А Н Н Я
**з фізики для самостійної роботи студентів нефізичних спеціальностей і методичні вказівки щодо їхнього виконання**
(Додаток до робочої навчальної програми)

**Частина 1**

**Механіка**

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2007

Рекомендовано до друку
кафедрою загальної фізики
Протокол № 3 від 31.10.2006 р.

Укладачі: доц. Караван Юрій Володимирович
доц. Мельничук Борис Леонтійович
доц. Токар Юрій Семенович

Редактор Лоїк Ірина Миколаївна

**З А В Д А Н Н Я**
**з фізики для самостійної роботи студентів нефізичних спеціальностей і методичні вказівки щодо їхнього виконання**
(Додаток до робочої навчальної програми)

Частина 1. Механіка

Підп. до друку 33.04.2007 р. Формат 60x84/16. Папір друк. № 1
Друк на різогр. Умовн. друк. арк. Обл..-вид. арк. Тираж 200. Зам.400

Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка
79000 м. Львів, вул. Дорошенка, 41

## Пояснювальна записка

У частині 1 подано методичні вказівки для самостійної роботи студентів з теоретичної і практичної частини перелічених тем дисципліни:

1.1. Кінематика.

1.2. Динаміка.

1.3. Динаміка обертального руху твердого тіла.

1.4. Закони збереження в механіці.

1.5. Механіка рідин і газів.

1.6. Елементи спеціальної теорії відносності.

Кожна тема, зазвичай, охоплює три частини:

1) перелік теоретичного матеріалу, розглянутого на лекції, з його подальшим опрацюванням та осмисленням;

2) короткий виклад матеріалу з цих питань з методичними вказівками щодо його вивчення, приклади розв′язування задач;

3) перелік задач, які студентам необхідно розв′язати.

Терміни виконання завдань з кожної теми – до початку розгляду наступних тем на лекції, а завдання п. 3 – до розгляду теоретичного матеріалу наступного розділу.

Контроль за виконанням завдань для самостійної роботи студентів з теоретичної частини дисципліни відбувається у формі контрольного індивідуального чи фронтального опитування студентів на лекційних і практичних заняттях і перевірки робочих конспектів з теоретичних питань.

З кожного розділу дисципліни студенти виконують також комплексні індивідуальні завдання і захищають їх у формі письмової контрольної роботи. Мета кожного індивідуального завдання – систематизувати та поглибити знання студентів з матеріалу відповідного розділу.

На підставі оцінок індивідуальних завдань виводиться підсумкова модульна оцінка з кожного розділу, яку



враховують при виставленні оцінки підсумкового контролю за семестр.

***Механіка*** вивчає найпростішу форму руху тіл – механічну. *Механічним рухом тіла* (або його частини) називають зміну з часом його положення в просторі відносно інших тіл. Механічний рух завжди відносний.

*Основне завдання механіки* – визначити положення тіла в просторі у будь-який момент часу.

### Тема 1. Кінематика

***Опрацювати такі питання лекційного матеріалу:***

– основні поняття кінематики;

– прямолінійний рух;

– криволінійний рух.

***Базові поняття кінематики.*** Тіло, відносно якого вивчають положення рухомого тіла, називають *тілом відліку* (ТВ).

Опис механічного руху тіла часто замінюють описом руху точки (матеріальної точки або однієї з точок протяжного тіла). *Матеріальною точкою* називають будь-яке тіло, розмірами якого за певних умов можна знехтувати (наприклад, коли тіло мале порівняно з відстанню до інших тіл).

За *поступального руху* тіла достатньо також описати рух однієї з його точок, оскільки усі інші точки цього тіла рухаються однаково (будь-яка пряма, проведена в тілі, за такого руху переміщується паралельно до себе).

Щоб визначити положення рухомої матеріальної точки ***М*** щодо тіла відліку, з ним пов’язують початок *прямокутної (декартової) системи координат* (рис. 1.1, *а*). Тіло відліку, пов’язана з ним система координат і прилад для вимірювання часу (годинник) становлять *систему відліку*.

Положення точки ***M*** у просторі в певний момент часу визначають трьома координатами: *x* - *абсцисою*, *y* - *ординатою*, z – *аплікатою*.

Якщо точка ***M*** рухається в одній площині, достатньо вказати дві координати її положення в певний момент часу: ***M(****x*,*y*), як це наведено на рис. 1.1, *б*. Рух точки ***M*** уздовж прямої описують лише однією координатою *x* (рис. 1.1, *в*)
.

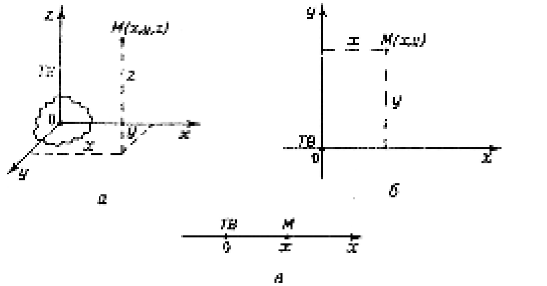

Рис. 1.1.

Лінію, яку описує матеріальна точка під час руху, називають *траєкторією* (рис. 1.2). За формою траєкторії механічного руху поділяють на *криволінійні* та *прямолінійні*. Простішими з криволінійних є рухи по колу, еліпсу, параболі, гіперболі, синусоїді.

Відстань, яку пройшла матеріальна точка вздовж траєкторії, називають *довжиною шляху*, або просто *шляхом* (рис. 1.2, *а*), і позначають переважно літерами ***l, b, s, h***.

Направлений відрізок прямої (на рис. 1.2 – *AB*), що сполучає початкове положення матеріальної точки з



наступним, називають *переміщенням* і позначають $\vec{s}$. Із рис. 1.2 бачимо, що $|\vec{s}| \neq l$. Під час криволінійного руху $|\vec{s}| < l$, під час прямолінійного – $|\vec{s}| = l$, і для цього випадку записують $|\vec{s}| = s$ (модуль вектора $\vec{s}$ дорівнює шляху). Під час

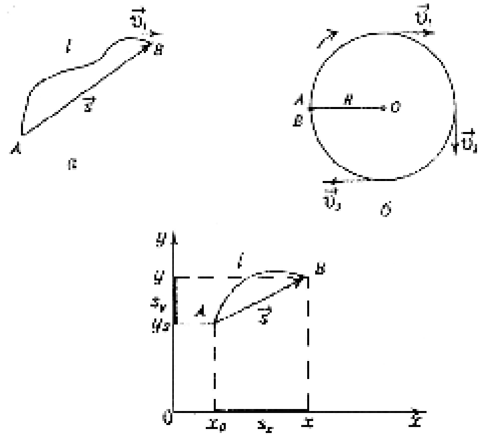

Рис. 1.2.

криволінійного руху, наприклад, по колу (рис. 1.2, *б*) за час одного оберту $|\vec{s}| = 0$, але $l = 2\pi R \neq 0$.

Зауважимо також, що навіть під час прямолінійного руху $|\vec{s}| \neq x$ (координаті). Як бачимо з рис. 1.2, *в*,

$$|\vec{s}| \neq s_x; \quad s_x = x - x_0; \quad s_y = y - y_0,$$

де $s_x$ і $s_y$ – проекції переміщення $\vec{s}$, відповідно, на вісь $0X$ і $0У$.

*Середньою швидкістю* довільного механічного руху називають векторну величину $\vec{u}_{ср}$, що дорівнює відношенню переміщення $\vec{s}$ тіла до проміжку часу *t*, протягом якого це переміщення тривало:

$$\vec{u}_{ср} = \vec{s}/t. \tag{1.1}$$

*Миттєвою швидкістю* довільного механічного руху називають швидкість тіла у будь-який момент часу або в будь-якій точці траєкторії. Миттєву швидкість визначають за формулою

$$\vec{u} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s}', \tag{1.2}$$

де $d\vec{s}$ і $dt$ – відповідно нескінченно малі переміщення та інтервал часу. Швидкість в системі СІ вимірюють у *м/с*.

Напрям миттєвої швидкості завжди збігається з дотичною до траєкторії в цій точці (на рис. 1.2 це $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$).

Рух матеріальної точки називають *рівномірним*, якщо його швидкість не змінюється з часом; в іншому разі рух називають *нерівномірним.* Нерівномірність руху характеризують фізичною величиною – *прискоренням.*

*Середнім прискоренням* довільного механічного руху називають векторну величину $\vec{a}_{ср}$, що дорівнює відношенню зміни швидкості:

$$\vec{a}_{ср} = \Delta\vec{u}/\Delta t. \tag{1.3}$$

Середнє прискорення спрямоване так само, як приріст швидкості (1.3), тобто під кутом до траєкторії у бік її вгнутості (рис. 1.3).



*Миттєве прискорення* визначають за формулою

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{u}'. \tag{1.1.4}$$

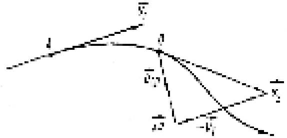

Рис. 1.3.

Отже, миттєве прискорення у довільній точці траєкторії – це вектор, скерований під кутом до траєкторії у бік її ввігнутості, а за модулем дорівнює границі середнього прискорення за умови, що проміжок часу прямує до нуля.

Вектор прискорення розкладають на дві складові, одна з яких спрямована по дотичній до траєкторії і має назву *дотичне* або *тангенціальне прискорення* $\vec{a}_\tau$, а друга – по нормалі до траєкторії і має назву *нормальне* або *доцентрове* прискорення $\vec{a}_n$ (рис. 1.4). Очевидно, що

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

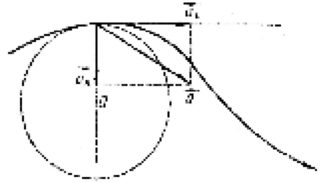

Рис. 1.4.

Тангенціальне прискорення змінює лише величину швидкості, а нормальне прискорення – лише її напрям. Отже, криволінійний рух завжди відбувається з прискоренням, оскільки у цьому випадку швидкість обов'язково змінюється (принаймні за напрямом). В системі СІ прискорення вимірюють у $м/с^2$.

***Прямолінійний рух.*** Під час прямолінійного руху доцентрова складова прискорення відсутня ($a_n = 0$). Отже, повне прискорення збігається зі своєю дотичною складовою $(\vec{a} = \vec{a}_\tau)$.

Рух, що відбувається зі сталим прискоренням, називають *рівнозмінним* (*рівноприскореним*, якщо $a > 0$, і *рівносповільненим*, якщо $a < 0$).

У цьому випадку миттєве прискорення дорівнює середньому прискоренню за будь-який проміжок часу. Тоді із (1.3) маємо:

$$a = a_{\text{ср}} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u - u_0}{t},$$

звідки

$$u = u_0 + at, \qquad (1.5)$$

де $u_0$ – початкова швидкість; $u$ – швидкість у момент часу $t$.

Середня швидкість на будь-якому відрізку шляху у цьому випадку дорівнює $(u_0 + u)/2$. Тоді, враховуючи (1.1), можна написати:

$$u_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s}{t} = \frac{u_0 + u}{2},$$

звідки

$$s = \frac{u_0 + u}{2} t.$$

Підставляючи вираз із (1.5), маємо

$$s = \frac{u_0 + u_0 + at}{2} t,$$

або



$$s = u_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (1.6)$$

Для рівномірного прямолінійного руху $u = u_0 = \text{const}$ і $a = 0$. У цьому випадку (1.6) набуває вигляду:

$$s = u \cdot t. \qquad (1.1.7)$$

***Криволінійний рух.*** *Криволінійним* називають рух тіла (точки), траєкторією якого є крива лінія (рис. 1.5).

Розрізняють *криволінійний рівномірний* ($\vec{u} \neq \text{const}, u = \text{const}$) і *криволінійний змінний* ($\vec{u} \neq \text{const}, u \neq \text{const}$) рухи.

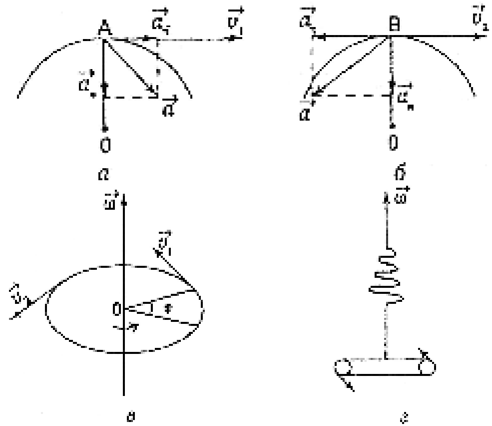


Рис. 1.5.

Під час рівномірного криволінійного руху зміну в часі напряму швидкості характеризує нормальне прискорення, скероване перпендикулярно до швидкості у кожній точці траєкторії вздовж радіуса до центра кривизни. Зміну в часі модуля швидкості характеризує тангенціальне прискорення, скероване вздовж $\vec{u}$ при зростанні швидкості (рис. 1.5, *а*) і в протилежний бік, якщо швидкість зменшується (рис. 1.5, *б*).

Розглянемо рух матеріальної точки по колу зі сталою за модулем швидкістю і визначимо доцентрове прискорення.

Нехай за малий проміжок часу $\Delta t$ точка пройшла шлях $\Delta s$, перемістившись із *A*, де вона мала швидкість $\vec{u}_1$, в *B*, де вона має швидкість $\vec{u}_2$, а радіус-вектор рухомої точки повернувся на малий кут $\Delta\varphi$ (рис. 1.6.). Побудуємо вектор зміни швидкості $\Delta\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ і визначимо його модуль; $\angle AOB = \angle BCD$ як кути із взаємно перпендикулярними сторонами; $u_1 = u_2 = u$, ос-кільки за числовим значенням швидкість стала. Отже, $\Delta AOB$ і $\Delta BCD$ подібні як рівнобедрені із однако-вими кутами при вершині. Отож

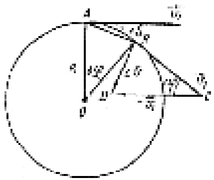

Рис. 1.6.

$$\frac{\Delta u}{u} = |AB| / R \quad \text{і} \quad \Delta u = u|AB| / R.$$

Тоді $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{u \cdot |AB|}{R\Delta t}$, або, враховуючи, що $u$ і $R$ сталі і $a = a_n$, отримуємо:



$$a_n = \frac{u}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|AB|}{\Delta t}.$$

Якщо $\Delta t$ прямує до нуля, то хорда *AB* прямує до дуги $\Delta s$. Отож запишемо:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|AB|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = u.$$

Отже,

$$a_n = \frac{u^2}{R}. \qquad (1.8)$$

Поряд з лінійною швидкістю $u$ рівномірний рух матеріальної точки по колу характеризують кутовою швидкістю $\omega$. *Кутова швидкість* – це фізична величина, що вимірюється відношенням кута $\Delta\varphi$ повертання (див. рис. 1.5, *в*), який описує рухомий радіус *R*, до інтервалу часу $\Delta t$ повертання:

$$\omega = \frac{\Delta j}{\Delta t}. \qquad (1.9)$$

Перемножуючи обидві частини останнього рівняння на $R$ і враховуючи, що $R \cdot \Delta j = \Delta s$, отримуємо співвідношення між лінійною та кутовою швидкістю:

$$u = \omega R. \qquad (1.10)$$

Для опису руху матеріальної точки по колу використовують ще дві характеристики: *період обертання* (час одного оберту точки по колу) і *частоту обертання* $\nu$ (кількість обертів точки за одиницю часу). Очевидно, що період і частота – величини взаємно обернені:

$$T = \frac{1}{\nu}. \qquad (1.11)$$

Оскільки за період $T$ радіус кола, пов’язаний з матеріальною точкою, повернеться на кут $2\pi$, то

$$\omega = 2p/T. \qquad (1.12)$$

З формул (1.10) – (1.12) маємо

$$u = {}^{2pR}\!\big/_{\mathrm{T}} = 2pR. \qquad (1.13)$$

Кутова швидкість є *осьовим (аксіальним) вектором*, який завжди спрямований уздовж осі обертання. Напрям вектора визначають за *правилом свердлика (правого гвинта)*: вістря свердлика, спрямоване вздовж осі обертання, покаже напрям $\vec{\omega}$, якщо його ручку повертати за рухом точки по колу (рис. 1.5, *в,г*).

Під час нерівномірного руху матеріальної точки по колу змінюються як лінійна, так і кутова швидкість. Зміну кутової швидкості характеризують *кутовим прискоренням*, яке визначають як відношення зміни кутової швидкості до проміжку часу, за який ця зміна відбулась:

$$\beta_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (1.14)$$

*Миттєвим кутовим прискоренням* називають границю кутового прискорення при прямуванні проміжку часу до нуля:

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (1.15)$$

Якщо $R$ = const, то зміна $\Delta\omega$ зумовлена лише зміною $\Delta u$ . Отож (див. 1.10):

$$\Delta u = R \cdot \Delta\omega,$$

звідки

$$\Delta\omega = \frac{\Delta u}{R}.$$

Підставляючи останній вираз у (1.15), маємо:

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{R \cdot \Delta t} = \frac{1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{a}{R},$$

звідки

$$a = \beta R. \qquad (1.16)$$



Напрям кутового прискорення збігається із напрямом кутової швидкості, якщо кутова швидкість зростає, і протилежний до нього, якщо вона зменшується.

## Задачі

***Задача 1.1.*** Тіло пройшло першу половину шляху зі швидкістю $u_1$ = 40 м/с, другу – зі швидкістю 60 м/с. Визначити середню швидкість тіла на шляху *s*.

***Розв'язання.*** Середня швидкість тіла

$$\langle u \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s}{t_1 + t_2};$$

$$t_1 = \frac{\frac{1}{2}s}{u_1}, \quad t_2 = \frac{\frac{1}{2}s}{u_2}.$$

Отже,

$$\langle u \rangle = \frac{s}{\frac{s}{2u_1} + \frac{s}{2u_2}} = \frac{2u_1u_2}{u_1 + u_2} \Rightarrow \langle u \rangle = \frac{2 \cdot 40 \cdot 60}{40 + 60} = 48\,\text{м/с}.$$

***Задача 1.2.*** Тіло, що вільно падає, за час $t = 2\text{с}$ від початку спостереження пролетіло відстань $s = 80\text{м}$. Визначити, скільки часу падало тіло до початку спостереження.

***Розв'язання.*** Вісь координат *OX* зручно спрямувати вертикально вниз і за початок системи координат взяти точку, в якій було тіло в момент початку спостереження. Тоді рівняння координати:

$$x = u_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

де $u_0$ – швидкість, якої набуло тіло до початку спостереження. Якщо позначити через $t_x$ час руху тіла до початку спостереження, то $u_0 = gt_x$. Підставимо це значення $u_0$ в попереднє рівняння і врахуємо, що за умовою задачі, $x = s$:

$$s = gt_x t + \frac{gt^2}{2},$$

звідки

$$t_x = \frac{s}{gt} - \frac{1}{2}t \approx 3{,}1\text{с}.$$

***Задача 1.3.*** Поїзд проходить закруглення радіуса $R = 400\text{м}$, причому його тангенціальне прискорення $a_\tau = 0{,}2\,\text{м/с}^2$. Визначити нормальне і повне прискорення у момент, коли швидкість $u = 10\,\text{м/с}$.

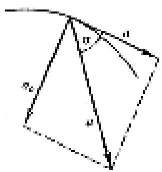

Рис. 1.7.

***Розв'язання.*** Щоб знайти $a_n$, застосуємо формулу (1.8):

$$a_n = \frac{u^2}{R} = \frac{1}{4}\,{}^{м}\!/\!{}_{c^2}.$$

Повне прискорення знаходимо за формулою

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 0{,}32\,\text{м/с}^2.$$

Напрям вектора повного прискорення характеризуємо кутом α між $a$ і $a_\tau$ (рис. 1.7):

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = 1{,}25; \qquad \alpha = 51^0 20'.$$

***Задача 1.4.*** Камінь кинуто з висоти $h$ = 2,1 м над поверхнею Землі під кутом α = 45° до горизонту, і він упав на



Землю на відстані $s$ = 42 м від місця кидання, рахуючи по горизонталі. З якою швидкістю кинуто камінь, скільки часу він летів і на якій найбільшій висоті перебував?

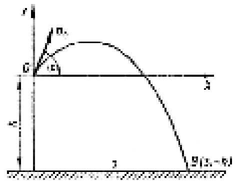

Рис. 1.8.

***Розв'язання.*** Вибираємо початок координат у точці кидання на висоті $h$ над поверхнею Землі, а осі координат спрямовуємо, як показано на рис. 1.1.8. Рух каменя вздовж осей $X$ і $Y$ відбувається незалежно, а величини відповідних переміщень такі:

$$x = u_0 \cos\alpha \cdot t; \quad y = u_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Щоб знайти рівняння траєкторії в явній формі, виключаємо з останніх рівнянь параметр $t$ і враховуємо, що точка падіння на Землю $B$ має відносно цієї системи відліку координати: $x = s$, $y = -h$:

$$-h = tg\alpha \cdot s - \frac{gs^2}{2u_0^2\cos^2\alpha}.$$

У цьому рівнянні всі величини, окрім $u_0$, відомі. Розв'язуючи його щодо $u_0$, знаходимо:

$$u_0 = \frac{s}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(h + s\cdot tg\alpha)}}; \qquad u_0 = 6{,}55\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Час руху:

$$t = \frac{s}{u_0\cos\alpha} = \sqrt{\frac{2(h + s\cdot tg\alpha)}{\text{g}}}; \qquad t \approx 3\text{с}.$$

Найбільша висота над поверхнею Землі $H$ є максимальна висота піднімання відносно осі $X$, збільшена на величину $h$:

$$H = h + \frac{u_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{\left(2h + s \cdot tg\alpha\right)^2}{4\left(h + s \cdot tg\alpha\right)}; \quad H \approx 3{,}19\text{м}.$$

## Тема 2. Динаміка

***Опрацювати такі питання лекційного матеріалу:***

– основні поняття динаміки;

– закони динаміки;

– неінерціальні системи відліку.

У динаміці вивчають різні види механічних рухів з урахуванням взаємодії тіл між собою. Основою динаміки є три закони Ньютона, які виконуються для макроскопічних тіл, що рухаються зі швидкостями, значно меншими від швидкості світла у вакуумі.

*Основна задача динаміки* – визначення положення (координат) тіла в будь-який момент часу, коли відоме його початкове положення, початкова швидкість і сили, що діють на тіло.

***Базові поняття динаміки.*** *Сила* – це векторна величина, що кількісно характеризує зовнішні дії на тіло (матеріальну точку) інших тіл або полів. Під дією сил тіло набуває прискорення і (або) деформується.

Сила повністю визначена, якщо задано *напрям* (який збігається з напрямом спричиненого прискорення), *числове значення* (модуль сили) і *точку прикладання*. Одиницею сили в СІ є *ньютон* (Н).

У механіці розглядають *гравітаційні сили* (тяжіння, взаємного притягання), *сили пружності* (виникають у тілах під час їхньої деформації) і *сили тертя* між тілами (перешкоджають рухові одних тіл по поверхні інших).



Силу можна розкласти на *складові*, коли відомі напрями розкладання. *Проекції сили* (і її складових) на визначені напрями – це *скаляри*.

Сили, які діють на одне тіло, *додають геометрично* за відомим правилом додавання векторів. Результатом додавання сил є *рівнодійна* (векторна сума всіх сил, які діють на тіло). Якщо рівнодійна дорівнює нулю, то говорять про *компенсацію (зрівноваження) сил* і при цьому тіло не набуває прискорення.

Явище збереження тілом стану спокою або рівномірного і прямолінійного руху, якщо на нього не діють сили або дія зовнішніх сил компенсується, називають *інерцією*, а властивість тіла зберігати цей стан – *інертністю*.

*Маса* – скалярна фізична величина, що є мірою інертності тіл, частинок і фізичних полів. Маса системи з'єднаних тіл дорівнює сумі мас окремих тіл, які належать до системи. Якщо швидкість руху тіл (частинок) значно менша від швидкості світла, то зміною їхньої маси можна знехтувати.

Маса характеризує також властивість тіл взаємно притягатися (відповідно до закону всесвітнього тяжіння). Тому говорять, що маса є також *мірою гравітації*, і її називають *гравітаційною масою*, на відміну від *інертної маси*. Однак сучасні експерименти з високою точністю довели, що для будь-якого тіла значення гравітаційної та інертної маси є однаковими, отож їх не розрізняють.

Систему відліку, відносно якої тіло в разі компенсації зовнішніх сил рухається рівномірно і прямолінійно, називають *інерціальною*. Усі системи відліку, які рухаються рівномірно і прямолінійно відносно неї, також є інерціальними. *Неінерціальною* називають систему відліку, яка рухається з прискоренням відносно інерціальної.

*Принцип відносності Галілея* (або *механічний принцип відносності*): ніякими механічними дослідами, виконаними всередині інерціальної системи відліку, неможливо виявити, чи ця система перебуває у спокої, чи рухається рівномірно і прямолінійно.

***Закони динаміки.*** Механіка Ньютона ґрунтується на таких принципах: взаємодія між тілами передається миттєво (*теорія далекодії*); простір є вмістилищем для предметів і не пов'язаний з часом, який сам по собі спливає рівномірно і безвідносно до будь-чого, тобто він є абсолютним, однаковим для всіх систем відліку.

Головні засади класичної механіки відображено у трьох законах Ньютона.

*Перший закон Ньютона (закон інерції)*: існують такі системи відліку, щодо яких тіло (матеріальна точка), що рухається рівномірно і прямолінійно або перебуває у стані спокою, зберігає свою швидкість сталою, якщо на нього не діють інші тіла або їхня дія компенсується.

Головне у першому законі Ньютона таке:

- існування інерціальних систем відліку – систем, у яких тіло перебуває у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху;
- стан спокою і рівномірного прямолінійного руху – це один стан;
- зміна стану відбувається внаслідок дії на тіло інших тіл.

*Другий закон Ньютона*: прискорення, що його набуває тіло під дією сили, прямо пропорційне силі, яка діє на тіло, обернено пропорційне масі тіла і за напрямом збігається з силою:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (2.1)$$



Якщо на якусь матеріальну точку діє кілька сил, то кожна з них надає точці прискорення, визначеного другим законом Ньютона так, ніби інших сил не існує. Векторну суму цих сил називають *рівнодійною силою*, і її треба розуміти в застосуванні лише до матеріальної точки.

Ньютон сформулював цей закон в узагальненому вигляді – швидкість зміни імпульсу тіла дорівнює рівнодійній усіх сил, що діють на тіло:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}. \qquad (2.2)$$

Останнє рівняння називають *рівнянням руху* тіла. З (2.2) отримуємо:

$$\vec{F}dt = d\vec{p}.$$

Вираз $\vec{F}dt$ називають *імпульсом сили*. Його зміст полягає в такому: якщо на якесь тіло короткочасно подіяла сила, то зміна імпульсу цього тіла дорівнює імпульсові сили.

*Третій закон Ньютона*: Будь-яка дія одного тіла на інше завжди взаємна, у природі нема односторонньої дії, отож третій закон Ньютона називають законом дії і протидії. Він стверджує, що сили, з якими взаємодіють два тіла, однакові за модулем і протилежні за напрямом:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}. \qquad (2.3)$$

Ці сили завжди діють парами, вони однієї природи і прикладені до різних тіл, отож ніколи не зрівноважуються.

Значення цього закону полягає в тому, що він пояснює, звідки береться сила, що є її джерелом. Вона сама собою не існує, а завжди пов'язана з взаємодією тіл. Тобто єдиним джерелом сили, що діє на якесь тіло, є інше тіло.

*Рух тіл змінної маси*. У багатьох явищах природи можна спостерігати такі види руху, коли маса тіла, яке рухається під дією сили, змінюється з часом. Знайдемо рівняння руху тіла змінної маси. Для спрощення задачі вважатимемо, що цим тілом є ракета, маса якої на час $t$ була $m$. За час $dt$ вона зменшилась на $dm$, а її швидкість за цей час збільшилась на $du$. Позначимо через $u$ швидкість вилітання продуктів згорання відносно ракети. Застосуємо до системи „ракета–продукти згорання” другий закон Ньютона в узагальненому вигляді (2.2), тобто

$$d\vec{p} = \vec{F}dt.$$

Унаслідок витікання з ракети продуктів згорання за час $dt$ імпульс ракети зміниться і становитиме $(m - dm)(u + du)$, а імпульс продуктів згорання – $dm(u - u)$. Зміна імпульсу всієї системи за час $dt$

$$d\vec{p} = (m - dm)(\vec{u} + d\vec{u}) + dm(\vec{u} - \vec{u}) - m\vec{u} = \vec{F}dt.$$

Перемножимо члени в дужках і знехтуємо нескінченно малим членом другого порядку $dmdu$. Тоді

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt}. \qquad (2.4)$$

Це рівняння руху тіла змінної маси називають *рівнянням Мещерського*. У його правій частині член $\vec{u}\frac{dm}{dt}$ – це *реактивна сила*, з якою на ракету діють гази, що вилітають з реактивного сопла.

Досліджуючи рух небесних тіл і падіння тіл в земних умовах, Ньютон встановив, що сила притягання між двома матеріальними точками прямо пропорційна добуткові мас точок, обернено пропорційна квадратові відстані між ними і спрямована по прямій, що сполучає ці точки (*закон всесвітнього тяжіння*):

$$\vec{F}_{гр} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (2.5)$$



де $G$ – *гравітаційна стала* – модуль сили притягання між двома тілами масою по 1 кг, що розташовані на відстані 1 м одне від одного.

Закон справедливий також для взаємодії тіл кульової форми. При цьому $r$ – відстань між їхніми центрами мас.

Земля також створює своє гравітаційне поле. Силу, яка діє на будь-яке тіло поблизу поверхні Землі, називають *силою тяжіння*. Під дією сили тяжіння всі тіла падають на Землю з однаковим прискоренням $\vec{g}$ (у вакуумі). Для сили тяжіння, згідно з другим законом Ньютона, у системі, пов’язаній з полюсами Землі, маємо таку формулу:

$$P = mg. \qquad (2.6)$$

З другого боку

$$P = G\frac{Mm}{R^2}, \qquad (2.7)$$

де $M$ – маса Землі; $R$ – радіус Землі; $m$ – маса тіла.

Із формул (2.6) і (2.7) випливає, що:

$$g = G\frac{M}{R^2} = \text{const}, \qquad (2.8)$$

оскільки $G$, $M$ і $R$ – сталі величини.

Загалом сила тяжіння на поверхні Землі не дорівнює гравітаційній, оскільки Земля обертається і система координат, пов’язана з Землею, неінерціальна. Окрім того, Земля сплюснута на полюсах. З огляду на це сила тяжіння найбільша на полюсах і найменша на екваторі, тобто прискорення вільного падіння залежить від географічної широти. Прискорення вільного падіння залежить також від висоти тіла над поверхнею Землі. Цим можна знехтувати, бо гравітаційна сила не дуже відрізняється від сили тяжіння, передусім на полюсах Землі.

Формула (2.8) справджується і для будь-якої іншої планети, коли тіло перебуває на її поверхні або поблизу від неї.

*Вага тіла* – це сила, з якою тіло діє на опору або розтягує підвіс унаслідок притягання до Землі. Якщо тілу дати змогу вільно падати, забравши опору, то тіло рухатиметься лише під дією сили тяжіння, тобто перебуватиме у стані невагомості. Отже, *невагомість тіла* настає тоді, коли тіло рухається лише під дією сили тяжіння з прискоренням $\vec{g}$, тобто вільно падає, а також тоді, коли на нього не діють жодні зовнішні сили.

*Деформації. Сила пружності.* Зміну форми, розмірів або об'єму тіла під дією зовнішніх сил називають *деформацією*. Коли тіло після припинення дії зовнішніх тіл повністю відновлює свої розміри і форму, то таку деформацію називають *пружною*. Якщо ж після припинення дії зовнішніх сил початкові розміри і форма тіла відновлюються частково то деформацію називають *пластичною (залишковою)*.

Розрізняють деформації розтягу, стиску, згину, зсуву та кручення. Зовнішні сили деформують тіло – зміщують його частинки одні щодо інших. При цьому (у відповідності до третього закону Ньютона) всередині деформованого тіла виникає протидіюча сила, рівна за модулем деформувальній силі, яку називають *силою пружності*. Сили пружності обумовлені взаємодією між частинками (молекулами та атомами) тіла і, зрештою, мають електричну природу. У теорії пружності доведено, що всі види деформацій можна звести до деформації розтягу і зсуву.

Експериментально з'ясовано, що сила, яка виникає під час пружної деформації, прямо пропорційна до значення цієї деформації (*зміщення*) $\Delta x$ і скерована у бік її зменшення (*закон Гука*):



$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x}, \qquad (2.9)$$

де $k$ – коефіцієнт пропорційності. Знак „мінус" вказує на протилежні напрями сили пружності і зміщення.

Розглянемо деформацію розтягу на прикладі однорідного стрижня, один кінець якого закріплено, а до іншого прикладемо розтягувальну силу $\vec{F}_n$ (рис. 2.1). Позначимо площу поперечного перерізу стрижня літерою $S$, а його початкову довжину – $l$. Під дією прикладеної сили стрижень видовжиться на $\Delta l$ (*абсолютне видовження*); у ньому виникне пружна сила, яка протидіє деформувальній силі. Деформацію характеризують не абсолютним видовженням, а *відносним*:

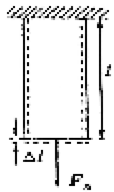

Рис. 2.1.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

і не силою пружності, а механічним напруженням:

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S}.$$

Тоді закон Гука набуває такого вигляду:

$$\sigma_n = E\frac{\Delta l}{l} = E\varepsilon,$$

де *E* – *модуль Юнга*, фізична величина, яка чисельно дорівнює механічному напруженню, яке спричинило б відносне видовження тіла, що дорівнює одиниці. Закон Гука для пружної деформації розтягу сформулюємо так: під час пружної деформації нормальне

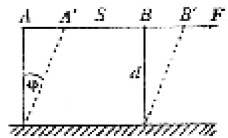

Рис. 2.2.

механічне напруження прямо пропорційне до відносного видовження тіла.

Якщо у прямокутному бруску заввишки $d$ закріпити нижню грань, а до верхньої прикласти дотичну силу $\vec{F}_n$, то брусок зазнає деформації зсуву (рис. 2.2). Ця деформація полягає у тому, що всі шари бруска зміститься на кут φ, тангенс якого називають *відносним зсувом*. За малого кута φ

$$tg\varphi = \frac{AA'}{d} = \varphi,$$

де $AA'$ – абсолютний зсув. Закон Гука для пружної деформації зсуву сформулюємо так: тангенціальне механічне напруження під час пружної деформації зсуву прямо пропорційне до відносного зсуву. Запишемо це формулою:

$$\sigma_\tau = G\varphi.$$

У нашому випадку:

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S},$$

де $\sigma_\tau$ – тангенціальне напруження; $S$ – площа поверхні, до якої прикладено дотичну силу; $G$ – *модуль зсуву* - величина, значення якої дорівнює тангенціальному напруженню, яке спричинило б відносний зсув, що дорівнює одиниці. Для більшості однорідних та ізотропних тіл $G \approx 0{,}4E$.

*Тертя. Сили тертя.* Розрізняють зовнішнє і внутрішнє тертя. *Зовнішнє тертя* – це взаємодія між твердими тілами, зумовлена нерівностями поверхонь, які стикаються, а також силами зчеплення молекул стикових поверхом. Зовнішнє тертя поділяють на *тертя спокою (статичне тертя)* і *кінематичне тертя (тертя ковзання і тертя кочення)*.

*Внутрішнє тертя (в'язкість)* – це взаємодія між шарами рідини (або газу) при їхньому взаємному переміщенні.



*Сила тертя* – це сила, що виникає між тертьовими поверхнями, прикладена до них і спрямована у протилежний бік до зовнішньої дії.

Модуль сили тертя спокою $F_1 = \mu_1 N_1$.

Модуль сили тертя ковзання $F_2 = \mu_2 N_2$.

Модуль сили тертя кочення $F_3 = k_3 N_3 / R$.

У наведених формулах $N$ – модуль сили нормального тиску (*реакції опори*); $R$ – радіус поверхні тіла, що котиться; $\mu_1$ – коефіцієнт тертя спокою; $\mu_2$ – коефіцієнт тертя ковзання; $k_3$ – коефіцієнт тертя кочення. Коефіцієнти $\mu_1$, $\mu_2$ і $k_3$ залежать від матеріалу і чистоти стикових поверхонь. Коефіцієнти $\mu_1$ і $\mu_2$ – величини безрозмірні, а $k_3$ має розмірність довжини.

Для будь-яких двох матеріалів, з яких виготовлено тіла, що труться, справедливими є такі співвідношення: $F_3 < F_2 < F_1$ і $\mu_1 \approx 3\mu_2$.

*Неінерціальні системи відліку*. Закони Ньютона та інші розглянуті закони динаміки виконуються лише в інерціальних системах. В неінерціальних системах ці закони, в загальному випадку, вже несправедливі. Щоб другий закон Ньютона можна було застосовувати в неінерціальних системах, зберігаючи і форму його запису, вводять поняття *сил інерції*. З силами інерції другий закон Ньютона записують так:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ін}},$$

де $\vec{F}$ – сила, яка діє на масу $m$ з погляду спостерігача в інерціальній системі відліку; $\vec{F}_{\text{ін}} = -m\vec{a}_0$ – сила інерції, яку визначають як добуток маси тіла на прискорення неінерціальної системи відліку, взяте зі знаком мінус; $\vec{a}'$ – прискорення, яке має тіло в неінерціальній системі відліку.

Третім законом Ньютона в неінерціальні системі відліку користуватись не можна.

## Задачі

***Задача 2.1.*** Якої ваги баласт треба скинути з аеростата, що рівномірно опускається, щоб він почав рівномірно підніматись із тією ж швидкістю? Вага аеростата з баластом 16 000 Н, піднімальна сила аеростата 12 000 Н. Силу опору повітря вважати однаковою під час підйому та спуску.

***Розв'язання.*** На аеростат, що опускається, діють сили: піднімальна сила $\vec{F}_1$ (вгору), сила опору повітря $\vec{F}_2$ (вгору) і вага аеростата $\vec{F}_3$ (вниз). Оскільки аеростат рухається рівномірно, то згідно з другим законом Ньютона, рівнодійна сила дорівнює нулю, тобто:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3.$$

Коли баласт скинутий і аеростат почне підійматись, рівняння сил набуде вигляду:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 + \left(\vec{F}_3 - \vec{F}_x\right).$$

Розв'язуючи систему цих двох рівнянь, отримаємо:

$$\vec{F}_x = 2\left(\vec{F}_3 - \vec{F}_1\right); \quad F_x = 8\ 000 \text{ Н}.$$

***Задача 2.2.*** Тіло масою 0,5 кг рухається прямолінійно. Залежність пройденого тілом шляху від часу задано рівнянням $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, де $C$ = 5 м/с$^2$ і $D$ = 1 м/с$^3$. Знайти величину сили, яка діє на тіло в кінці першої секунди руху.

***Розв'язання.*** Згідно з другим законом Ньютона $F = ma$. Прискорення тіла знаходимо як другу похідну від шляху по часу:

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = 2C - 6Dt.$$



Отже:

$$F = m(2C - 6Dt); \quad F = 2 \text{ Н}.$$

***Задача 2.3.*** Ковзаняр рухався рівномірно зі швидкістю υ, а потім почав рухатися рівноуповільнено і, пройшовши шлях $s$ = 50 м за час $t$ = 20 с, зупинився. Маса ковзаняра 55 кг. Знайти швидкість υ і коефіцієнт тертя μ.

***Розв'язання.*** На відрізку рівноуповільненого руху ковзаняр рухався під дією однієї лише сили тертя $F_{\text{Т}} = \mu mg$. За другим законом Ньютона

$$F_{\text{Т}} = ma = mg\mu.$$

Окрім того, має місце і кінематична формула:

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

З останніх двох рівнянь можна виключити $a$ і знайти μ:

$$\mu = \frac{2s}{gt^2}; \quad \mu = 0{,}025.$$

Застосовуючи іншу кінематичну формулу рівнозмінного руху, $u = at$, можна знайти υ:

$$u = \frac{2s}{t}; \quad \upsilon = 5 \text{ м/с}.$$

## Тема 1.3. Динаміка обертального руху твердого тіла

***Опрацювати такі питання лекційного матеріалу:***

– основний закон динаміки обертання;

– моменти інерції деяких тіл.

***Основний закон динаміки обертання.*** Розглянемо тверде тіло довільної форми, що обертається під дією сили $\vec{F}^*$ навколо нерухомої осі $OO'$ (рис. 3.1). Тоді всі його точки описують кола з центрами на цій осі. Зрозуміло, що всі точки тіла в даний момент часі мають однакову кутову швидкість і однакове кутове прискорення. Розкладемо діючу силу $\vec{F}^*$ на три взаємно перпендикулярні складові: $\vec{F}'$ (паралельну до осі), $\vec{F}''$ (перпендикулярну до осі) і $\vec{F}$ (перпендикулярну до $\vec{F}'$ і $\vec{F}''$). Зрозуміло, що обертання тіла викликає лише складова $\vec{F}$, дотична до кола, яке описує точка прикладення сили. Складові $\vec{F}'$ і $\vec{F}''$ не викликають обертання тіла. $\vec{F}$ називають *обертальною силою*. Дія сили $\vec{F}$ залежить не лише від її величини, але й від відстані точки прикладення $A$ до осі обертання, тобто залежить від моменту сили.

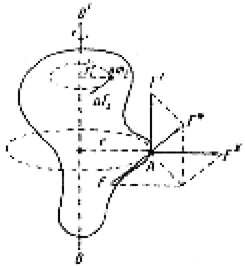

Рис. 3.1.

*Моментом М обертальної сили (обертальним моментом)* називають добуток обертальної сили на радіус кола, який описує точка прикладення сили:

$$M = Fr. \qquad (4.1)$$

Розіб'ємо тіло на малі частинки – елементарні маси. Незважаючи на те, що сила $\vec{F}$ прикладена лише до точки $A$ тіла, її обертальна дія передається всім частинкам: до кожної елементарної маси $\Delta m_i$ прикладена елементарна обертальна сила $\Delta\vec{F}_i$. Відповідності до другого закону Ньютона,

$$\Delta F_i = \Delta m_i a_i,$$

де $a_i$ – лінійне прискорення елементарної маси. Перемножуємо обидві частини останнього рівняння на радіус



$r_i$ кола, яке описує елементарна маса, і замінивши лінійне прискорення на кутове, отримаємо:

$$\Delta F_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \beta.$$

Враховуючи, що $\Delta F_i r_i = \Delta M_i$ – обертальний момент, прикладений до елементарної маси, позначимо

$$\Delta m_i r_i^2 = \Delta J_i.$$

Отримуємо

$$\Delta M_i = \Delta J_i \beta,$$

де $\Delta J_i$ – *момент інерції* елементарної маси (матеріальної точки). Отже, моментом інерції матеріальної точки щодо деякої осі обертання називають добуток маси матеріальної точки на квадрат її відстані до цієї осі.

Додавши обертальні моменти, які прикладені до всіх елементарних мас, з яких складається тіло, отримуємо:

$$\sum \Delta M_i = \beta \sum \Delta J_i,$$

де $\sum \Delta M_i = M$ – обертальний момент, прикладений до тіла, тобто момент обертальної сили $\vec{F}$; $\sum \Delta J_i = J$ – *момент інерції тіла*.

Отже, моментом інерції тіла називають суму моментів інерції всіх матеріальних точок, з яких складається тіло.

*Основний закон динаміки обертального руху*: момент обертальної сили, прикладеної до тіла, дорівнює добутку моменту інерції тіла на кутове прискорення:

$$M = J\beta. \qquad (4.2)$$

Момент обертальної сили є векторною величиною. Він спрямований вздовж осі обертання відповідно до правила свердлика.

***Моменти інерції деяких тіл.*** Для неоднорідних тіл неправильної форми момент інерції визначають експериментально, а для однорідних тіл геометрично правильної форми – шляхом інтегрування. Приведемо, без доведення, формули для розрахунку моменту інерції деяких однорідних тіл геометрично правильної форми масою $m$:

*обруча* і *тонкостінного циліндра* з радіусом $R$, для яких вісь обертання збігається з поздовжньою віссю і проходить через центр мас:

$$J = mR^2;$$

*диска* і *суцільного циліндра* з радіусом $R$, для яких вісь обертання збігається з поздовжньою віссю і проходить через центр мас:

$$J = \frac{mR^2}{2};$$

*суцільної кулі* з радіусом $R$, якщо вісь обертання проходить через її центр мас:

$$J = \frac{2mR^2}{5};$$

*прямолінійного тонкого стрижня* довжиною $l$, якщо вісь обертання проходить через його центр мас перпендикулярно до поздовжньої осі стрижня:

$$J = \frac{ml^2}{12}.$$

Момент інерції тіла довільної форми щодо деякої осі обертання можна визначити за *теоремою Штайнера*: момент інерції тіла $J$ щодо довільної осі $O'$ дорівнює сумі моменту інерції тіла $J_0$ відносно паралельної осі $O$, що проходить через центр маси тіла, і добутку маси тіла на квадрат відстані $d$ між осями:

$$J = J_0 + md^2.$$

Рівняння обертального руху можна отримати з рівнянь поступального руху, користуючись аналогією між фізичними величинами, які описано в таблиці:



| Поступальний рух | | Обертальний рух | |
|---|---|---|---|
| Час | $t$ | Час | $t$ |
| Лінійний шлях | $s$ | Кутовий шлях | $\varphi$ |
| Лінійна швидкість | $u$ | Кутова швидкість | $\omega$ |
| Лінійне прискорення | $a$ | Кутове прискорення | $\beta$ |
| Сила | $F$ | Момент сили | $M$ |
| Маса | $M$ | Момент інерції | $J$ |
| Імпульс сили | $Ft$ | Імпульс моменту сили | $Mt$ |
| Імпульс тіла | $mu$ | Момент імпульсу тіла | $J\omega$ |

Наприклад, рівняння (1.6) для обертального руху записується:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}.$$

## Задачі

***Задача 3.1.*** На барабані радіусом $R$ = 0,5 м намотано мотузку, до кінця якої прив'язане тіло масою $m$ = 10 кг. Знайдіть момент інерції барабана, якщо відомо, що тіло опускається з прискоренням $a$ = 2,04 $\text{м/с}^2$.

***Розв'язання.*** Запишемо рівняння руху тіла. На нього діє сила тяжіння $mg$, спрямована вниз, і натяг мотузки $T$, спрямований угору:

$$ma = mg - T; \quad T = m(g-a).$$

Сила натягу $T$, що діє на барабан, створює момент сили $M = RT$. Застосуємо основний закон динаміки обертального руху:

$$J\beta = M = RT = m(g-a)R.$$

Кутове прискорення $\beta$ пов'язане з лінійним $a$: $\beta = a/R$. Отже, для моменту інерції барабана отримуємо формулу:

$$J = \frac{m(g-a)R^2}{a}; \quad J = 9{,}52 \text{ кг·м}^2.$$

***Задача 3.2.*** Диск масою 2 кг котиться без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю 4 м/с. Знайти кінетичну енергію диска.

***Розв'язання.*** Кінетична енергія диска складається з кінетичної енергії поступального руху та кінетичної енергії обертання, тобто:

$$K = \frac{mu^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Оскільки $J = \frac{mR^2}{2}$ і $\omega = \frac{u}{R}$, де $m$ – маса диска, $R$ – радіус диска, то

$$K = \frac{3mu^2}{4};\quad K = 24 \text{ Дж}.$$

## Тема 1.4. Закони збереження в механіці

***Опрацювати такі питання лекційного матеріалу:***

– закон збереження імпульсу;

– закон збереження моменту імпульсу;

– закон збереження енергії.

У фізиці є величини, які для замкнених систем за будь-яких процесів, що відбуваються в них, завжди незмінні. У механіці закони збереження стосуються імпульсу, моменту імпульсу й енергії.

Систему називають *замкненою (ізольованою)*, якщо тіла системи взаємодіють між собою, але не взаємодіють з іншими тілами.

***Закон збереження імпульсу:*** геометрична сума імпульсів тіл, що утворюють замкнену систему, залишається сталою під час будь-яких рухів і взаємодій тіл замкнутої системи:



$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + m_3\vec{u}_3 + \cdots + m_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{u}_i = \text{const}. \quad (4.1)$$

Цей закон справедливий для будь-якого проміжку часу.

Якщо ж система незамкнута, то дія сторонньої сили $\vec{F}$ надає тілу стале прискорення $\vec{a}$, внаслідок чого його швидкість змінюється від $\vec{u}_0$ до $\vec{u}$. Тоді, відповідно до другого закону Ньютона,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\vec{u} - \vec{u}_0}{t},$$

або

$$\vec{F}t = m\vec{u} - m\vec{u}_0. \quad (4.2)$$

Остання формула є математичним записом *закону зміни імпульсу:* імпульс сили, що діє на тіло, дорівнює зміні імпульсу тіла.

***Закон збереження моменту імпульсу:*** у замкненій системі тіл векторна сума моментів імпульсів усіх тіл щодо деякої точки є сталою:

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 + \cdots + J_n\omega_n = \text{const}. \quad (4.3)$$

***Закон збереження енергії.*** *Енергія* – фізична величина, яка характеризує здатність тіла або системи тіл здійснювати роботу; вона оцінюється максимальною роботою, яку за певних (заданих) умов може здійснити ця система.

Головна властивість енергії така: енергія ніколи не зникає безслідно і не з'являється з нічого, вона лише може перетворюватися з однієї форми в іншу.

*Робота* – величина скалярна, її визначають як добуток сили, що діє на тіло у напрямі руху, на переміщення:

$$dA = \vec{F}d\vec{s} = Fds\cos\alpha, \quad (4.4)$$

де $\alpha$ – кут між напрямом переміщення і напрямом дії сили; $d\vec{s}$ – переміщення. Вся робота, виконана змінною силою під час переміщення тіла на шляху *s*, дорівнює інтегралові, який треба брати по кривій лінії шляху *s*:

$$A = \int_s F ds \cos\alpha = \int_s F_s ds .$$

Одиницею роботи є джоуль (Дж).

Величину, яка характеризує швидкість виконання роботи, називають *потужністю*. Вона чисельно дорівнює роботі, виконаній за одиницю часу:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{F ds \cos\alpha}{dt} = F u \cos\alpha .$$

Одиницею потужності є ват (Вт).

З іншого боку, робота, яку здійснює система при переході із одного стану в інший, дорівнює різниці енергій, які притаманні системі в цих станах:

$$A = W_0 - W_k , \tag{4.5}$$

де $W_0$ і $W_k$ – енергії системи у початковому та кінцевому станах.

*Кінетична енергія* – це енергія механічного руху тіла. Вона чисельно дорівнює роботі, яку необхідно виконати, щоб спричинити цей рух і визначається так:

$$\mathrm{K} = \frac{m u^2}{2} . \tag{4.6}$$

Оскільки імпульс тіла $\vec{p} = m\vec{u}$, то кінетичну енергію можна виразити ще так:

$$\mathrm{K} = \frac{p^2}{2m} .$$

Кінетична енергія – величина відносна, у різних рухомих системах відліку вона різна. Значення має лише зміна кінетичної енергії, яка завжди дорівнює роботі у будь-якій системі відліку.



Кінетичну енергію тіла, що обертається навколо нерухомої осі описують формулою:

$$\mathrm{K} = \frac{J\omega^2}{2} . \tag{1.4.7}$$

Серед різноманітних сил природи є клас сил, який має специфічну властивість: робота цих сил не залежить від форми шляху, по якому вони діють, а лише від положення точок початку і кінця руху. Ці сили називають *консервативними* (*потенціальними*), а поле таких сил – консервативним. Робота консервативних сил по замкненому шляху дорівнює нулю.

Із визначення консервативних сил випливає, що робота таких сил є однозначною функцією положення точок прикладання цих сил. Оскільки робота – це зміна енергії тіла, то кожній точці простору, де діють консервативні сили, можна поставити у відповідність таку скалярну функцію координат $\Pi(x, y, z)$, що має розмірність роботи, зменшення якої дорівнюватиме роботі, виконаній консервативними силами. Функцію $\Pi(x, y, z)$ називають потенціальною енергією тіла у полі консервативних сил.

*Потенціальна енергія* – це енергія взаємодії системи тіл, яка залежить від розташування тіл або частин одного тіла. Вона завжди пов'язана з існуванням силових потенціальних полів, тобто тіло має потенціальну енергію лише у полі потенціальних сил, створеному іншим тілом чи системою тіл. Потенціальна енергія – величина відносна, її визначають з точністю до константи, важливою є лише зміна потенціальної енергії, а не сама енергія.

Потенціальну енергію деформованого тіла визначають за формулою:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}. \tag{4.8}$$

Потенціальна енергія тіла в гравітаційному полі Землі $\Pi = mgh$, де $h$ – висота тіла над земною поверхнею.

Вище зазначалось, що кожній точці потенціального поля можна поставити у відповідність силу, яка діє на тіло, розташоване у цій точці, і потенціальну енергію. Це означає, що між силою і потенціальною енергією існує зв'язок, тобто:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\Pi. \tag{4.9}$$

Отже, сила, яка діє на тіло в полі консервативних сил, дорівнює градієнту потенціальної енергії тіла, взятому з оберненим знаком.

Повна механічна енергія системи дорівнює сумі потенціальної та кінетичної енергії:

$$W = \Pi + \mathrm{K}. \tag{4.10}$$

У замкненій системі тіл, між якими діють лише консервативні сили, сума кінетичної і потенціальної енергії є сталою (*закон збереження механічної енергії*). Якщо між тілами замкненої системи, крім консервативних, діють ще *дисипативні* (не консервативні) сили, то зміна повної механічної енергії системи дорівнює роботі дисипативних сил. Це означає, що частина механічної енергії системи перетворюється у внутрішню енергію тіл (нагрівання тіл і середовища, у якому перебувають тіла, збудження атомів, утворення хімічних зв'язків між атомами у молекулах тощо).

Зміна енергії неізольованої системи дорівнює роботі, яку здійснює система (*закон збереження і перетворення енергії*).

## Задачі

***Задача 4.1.*** Між двома кулями, що летять назустріч одна одній, відбувається непружний удар. Кінетична енергія однієї кулі в $n$ раз більша, ніж другої. За яких умов кулі рухаються



після удару в бік кулі з меншою енергією? Маси куль $m_1$ і $m_2$, причому $m_1$ відповідає кулі з меншою енергією.

***Розв'язання.*** Вважатимемо додатним напрямом руху кулі $m_1$. Тоді спільна швидкість куль після зіткнення визначатиметься з закону збереження імпульсу:

$$(m_1 + m_2)u = m_1 u_1 - m_2 u_2 \Rightarrow u = \frac{m_1 u_1 - m_2 u_2}{m_1 + m_2}.$$

$u_2$ беремо зі знаком „-", оскільки швидкість другої кулі є протилежною до $u_1$.

За умовою задачі напрями $u$ і $u_1$ повинні збігатися, тобто $u > 0$. Ця умова еквівалентна таким нерівностям:

$$m_1 u_1 > m_2 u_2, \qquad \frac{m_1}{m_2} > \frac{u_2}{u_1}.$$

З умови задачі відомо, що $K_2 = nK_1$, або

$$\frac{m_2 u_2^2}{2} = n\frac{m_1 u_1^2}{2},$$

звідки знаходимо:

$$\frac{u_2}{u_1} = \sqrt{n\frac{m_1}{m_2}}.$$

Зіставляючи останній вираз з отриманими раніше нерівностями, одержимо таку нерівність:

$$\frac{m_1}{m_2} > n,$$

яка є відповіддю на питання задачі.

***Задача 4.2.*** На легкому столику, який вільно обертається, стоїть людина і тримає на витягнутих руках на відстані $l_1$ = 1,5 м одна від одної дві однакові гирі масою $m$ = 2,5 кг кожна. Потім людина зближує гирі до відстані

$l_2$ = 40 см; у цьому випадку кутова швидкість обертання столика зростає від $\omega_1$ = 6 с$^{-1}$ до $\omega_2$ = 12 с$^{-1}$. Вважаючи момент інерції людини відносно осі обертання столика сталим, знайти роботу, яку вона виконує.

***Розв'язання.*** В результаті зміни моменту інерції гир щодо осі столика і кутової швидкості його обертання змінюється кінетична енергія системи на величину:

$$\Delta K = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}.$$

Ця зміна може відбутися лише за рахунок роботи, що її виконує людина, переміщуючи гирі, отож шукана робота чисельно дорівнює зміні кінетичної енергії системи $\Delta K$. Щоб визначити її, треба знайти моменти інерції системи у початковому і кінцевому положеннях гир. Кожен з цих моментів складається з моменту інерції людини $J_0$ і гир $J_1'$ і $J_2'$:

$$J_1 = J_0 + J_1'; \quad J_2 = J_0 + J_2'.$$

Розглядаючи гирі наближено як точкові тіла, маємо:

$$J_1' = 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2; \quad J_2' = 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2.$$

Щоб визначити $J_0$, використаємо той факт, що за вільного обертання тіла зберігається момент його кількості руху:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2.$$

Обчислюємо $J_0$:

$$J_0 = \frac{J_2'\omega_2 - J_1'\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{m\left(l_2^2\omega_2 - l_1^2\omega_1\right)}{2(\omega_1 - \omega_2)}.$$

Підставляючи отримані значення у формулу для зміни кінетичної енергії, одержуємо:



$$A = \frac{m\omega_1\omega_2\left(l_1^2 - l_2^2\right)}{4}; \quad A = 94 \text{ Дж}.$$

## Тема 5. Механіка рідин

***Опрацювати такі питання лекційного матеріалу:***

– закони гідростатики;

– течія рідин;

– рівняння гідродинаміки.

Чимало механічних явищ у рідинах і газах відбуваються однаково. З огляду на це їх можна розглядати як суцільне, неперервне середовище, яке називатимемо рідиною, й об'єднати вивчення законів їхнього руху та рівноваги у спільному розділі – гідростатиці і гідродинаміці. Головне завдання механіки рідин полягає у тому, щоб визначити розподіл тисків і швидкостей всередині рідини.

***Закони гідростатики.*** *Гідростатика* вивчає умови й закономірності рівноваги рідин під дією прикладених до неї сил, а також умови рівноваги тіл, що містяться в рідинах.

*Тиск p* – скалярна фізична величина, що дорівнює відношенню модуля сили ***F***, яка діє нормально на поверхню, до площі ***S*** цієї поверхні:

$$p = \frac{F}{S}. \tag{5.1}$$

Одиниця тиску в системі СІ – паскаль (Па).

Під час стискання рідини зовнішній тиск передається у кожну її точку однаково (*закон Паскаля)*.

На будь-яке занурене в рідину тіло діє виштовхувальна сила, спрямована вертикально вгору, яка дорівнює вазі витісненої тілом рідини і прикладена до центра тяжіння об'єму рідини (*закон Архімеда)*. Виштовхувальна архімедівська сила виникає завдяки різниці сил тиску, що діють на верхню і нижню частини тіла, які перебувають на різній глибині занурення. Сили тиску, які діють на бічні поверхні зануреного тіла, зрівноважуються. На законі Архімеда ґрунтуються умови плавання тіл. Якщо вага тіла дорівнює вазі витісненої ним рідини, то тіло плаває.

***Течія рідин.*** Сукупність частинок рухомої рідини називають *потоком*, а їхній рух – *течією*. Течія рідини *стаціонарна*, якщо в будь-якій точці середовища швидкість частинок залишається незмінною. При цьому в різних точках середовища швидкості частинок можуть бути неоднаковими.

*Ламінарний рух* – це рух, за якого шари рідини, що стикаються, не змішуються. Якщо під час руху ці шари змішуються то рух рідини називають *турбулентним*.

Ламінарний рух може бути стаціонарним та нестаціонарним, а турбулентний – завжди нестаціонарний.

Турбулентна течія супроводжується утворенням вихорів – ділянок із замкненими траєкторіями. Причиною утворення вихорів є в'язкість. У турбулентній течії на утворення вихорів затрачається додаткова енергія, і проштовхування рідини по трубах потребує більших затрат енергії, ніж у течії ламінарній.

Характер течії в'язкої рідини визначає безрозмірне *число Рейнольдса*:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u d}{\eta},$$

де ρ – густина рідини; υ – середня за перерізом швидкість її течії; η – коефіцієнт в'язкості; *d* – величина, яка характеризує розміри тіла, з яким взаємодіє рідина (діаметр труби). Перехід від ламінарної до турбулентної течії відбувається за певної критичної швидкості, коли число Рейнольдса стає більшим від деякого критичного значення.

***Рівняння гідродинаміки*** справедливі для стаціонарного руху ідеальної нестисливої рідини. *Рівняння нерозривності*



*струменя* стверджує, що кількість рідини, яка протікає за одиницю часу через будь який переріз трубки течії, однакова:

$$Su = \text{const}, \qquad (5.2)$$

де $S$ – нормальний переріз трубки течії; $u$ – швидкість течії рідини.

Під час стаціонарного руху ідеальної нестисливої рідини сума питомої енергії тиску та кінетичної і потенціальної питомих енергій залишається сталою на будь-якому перерізі потоку (*рівняння Бернуллі*):

$$p + \frac{\rho u^2}{2} + \rho g h = \text{const}. \qquad (5.3)$$

Отже, рівняння Бернуллі є вираженням *закону збереження механічної енергії (питомої)* у застосуванні до стаціонарного потоку ідеальної рідини.

Усі члени лівої частини рівняння (5.3) можна розглядати також як тиск: $p$ – статичний тиск; $\frac{\rho u^2}{2}$ – динамічний тиск, $\rho g h$ – гідравлічний тиск.

## Задачі

***Задача 5.1.*** Циліндрична посудина з площею дна $S_1$ = 900 см$^2$ наповнена водою. У дні посудини утворився отвір площею $S_2$ = 1,2 см$^2$. Знайти початковий рівень води в посудині $h_0$, якщо відомо, що вся вода витекла протягом $t'$ = 10 хв.

***Розв'язання.*** Розв'язуючи цю задачу, необхідно врахувати, що швидкість витікання води з посудини змінюється з часом, оскільки невпинно змінюється рівень води *h*. Однак, якщо взяти нескінченно малий інтервал часу *dt*, то протягом цього часу швидкість не встигне змінитися, і ми можемо вважати, що вона дорівнює $u = \sqrt{2gh}$, де $h$ –

рівень води у даний момент часу. Витрачання води $dQ$ протягом часу $dt$ становитиме:

$$dQ = \rho u dt S_2 = \rho S_2 \sqrt{2gh} \cdot dt. \qquad \text{(а)}$$

З другого боку, його зручно записати такою формулою:

$$dQ = -\rho S_1 dh, \qquad \text{(б)}$$

після чого співвідношення (а) набуде вигляду:

$$S_1 dh = -S_2 \sqrt{2gh \cdot dt}. \qquad \text{(в)}$$

Зміст знака „мінус” у рівнянні (б) і (в) полягає в тому, що зі зростанням часу висота рівня рідини $h$ зменшується.

Співвідношення (а) є диференціальним рівнянням щодо $h$ як функції часу $t$. Подавши його у вигляді:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{S_2}{S_1}\sqrt{2g} \cdot dt,$$

інтегруємо обидві частини:

$$2\sqrt{h} = -\frac{S_2}{S_1}\sqrt{2g} \cdot t + C,$$

де $C$ – стала інтегрування. Щоб визначити $C$, скористаємося тим, що при $t = 0$ $h = h_0$; звідси:

$$2\sqrt{h_0} = C.$$

Тоді одержимо:

$$\sqrt{h_0} - \sqrt{h} = \frac{S_2\sqrt{2g}}{2S_1} t. \qquad \text{(г)}$$

Вважатимемо в (г) $t = t'$ і, відповідно, $h = 0$. Підносячи після цього обидві частини рівності (г) до квадрата, обчислюємо:

$$h_0 = \frac{gS_2^2 t'^2}{2S_1^2}; \quad h_0 = 3{,}2 \text{ м}.$$



***Задача 5.2.*** Газ виштовхується поршнем з вузького отвору площею $S' = 1{,}5$ мм$^2$, зробленого в горизонтальній циліндричній посудині з перерізом $S = 2$ см$^2$. Хід поршня становить $l = 8$ см. Знайти тиск на поршень, якщо газ витікає з посудини протягом $t = 3$ с. Газ перебуває під атмосферним тиском, а його густина становить 1,43 кг/м$^3$.

***Розв’язання.*** Позначимо швидкості газу поблизу поршня і отвору через $u_1$ і $u_2$, відповідно. Застосуємо рівняння Бернуллі до двох шарів газу: поблизу поршня і неподалік вихідного отвору:

$$p_0 + p + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_0 + \frac{\rho u_2^2}{2}, \qquad \text{(а)}$$

де $p$ – тиск на поршень; $p_0$ – тиск на виході отвору в посудині, що дорівнює атмосферному. Ми використали також ту обставину, що посудина розташована горизонтально, отож рівні висоти газу в обох випадках однакові.

З рівняння (а) визначаємо:

$$p = \frac{\rho}{2}\left(u_2^2 - u_1^2\right). \qquad \text{(б)}$$

Повна маса газу

$$M = \rho l S. \qquad \text{(в)}$$

Витрачання газу – маса, що виходить з посудини протягом одиниці часу:

$$Q = \rho u_2 S'. \qquad \text{(г)}$$

Отож для часу витікання $t$ газу маємо:

$$p = \frac{\rho}{2}\left(u_2^2 - u_1^2\right), \qquad \text{(д)}$$

звідки

$$u_2 = \frac{lS}{tS'}. \qquad \text{(е)}$$

Окрім того, рівномірний рух поршня описується рівняннями:

$$l = u_1 t; \quad u_1 = \frac{l}{t}. \qquad (є)$$

Підставляючи (е) і (є) у (б), обчислюємо:

$$p = \frac{\rho l^2}{2t^2 S'^2}\left(S^2 - S'^2\right) \approx \frac{\rho l^2}{2t^2 S'^2} S^2$$

(в останній рівності ми врахували, що $S' << S$). Підставляючи числові дані, одержуємо:

$$p = 0{,}9 \text{ Н/м}^2.$$

## Тема 6. Елемент спеціальної теорії відносності

***Опрацювати такі питання лекційного матеріалу:***

– постулати спеціальної теорії відносності;
– наслідки з перетворень Лоренца;
– інтервал між подіями;
– релятивістський імпульс та релятивістська енергія.

Спеціальна теорія відносності, яку створив А. Айнштайн 1905 р. узагальнила принципи відносності класичної фізики на всі фізичні явища в інерціальних системах відліку, розширила відомості про простір і час, визначила межі застосування класичної фізики.

***Постулати спеціальної теорії відносності.*** В основі спеціальної теорії відносності є два постулати.

1. Усі фізичні явища (механічні, електромагнітні та ін.) у будь-яких інерціальних системах відліку за однакових умов відбуваються однаково.

2. Швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла і є однаковою в усіх інерціальних системах відліку.

Отже, швидкість світла у вакуумі – універсальна стала.



Будь-яка подія у природі визначена місцем (де вона відбувається) і часом (коли вона відбулася). Отже, у переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої перетворюватися мають не лише три просторові координати *x, y, z,* а і час *t*, тобто простір і час взаємопов’язані й утворюють єдиний чотиривимірний простір.

Перетворення системи координат, які треба виконати, щоб правильно описати події у різних інерціальних системах відліку, відповідно до вимог спеціальної теорії відносності, виконав Лоренц (*перетворення Лоренца*). Якщо система $K'$ рухається зі швидкістю *u* щодо системи *K*, ці перетворення набувають такого вигляду:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \; z = z', \; t = \frac{t' + u\dfrac{x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (6.1)$$

де

$$\beta = \frac{u^2}{c^2}.$$

Для переходу від системи *K* до $K'$ маємо:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - u\dfrac{x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (6.2)$$

***Наслідки з перетворень Лоренца.*** *Довжину тіла*, виміряну спостерігачем, який є в системі координат $K'$, що рухається відносно цього тіла зі швидкістю *u* відносно нерухомої системи *K* паралельно до осі *x*, визначають зп формулою:

$$L' = x_2' - x_1',$$

де $x_1'$ і $x_2'$ – координати крайніх точок тіла.

Оскільки тіло у системі $K'$ перебуває у стані спокою, то координати крайніх точок тіла не змінюються з часом, а, отже, і довжина тіла не залежить від часу.

З погляду спостерігача, який перебуває у нерухомій системі *К*, відносно якої це тіло рухається, координати крайніх точок тіла $x_1$ і $x_2$ увесь час змінюватимуться і довжина тіла становитиме різницю чисел $x_2 - x_1$, тобто

$$L = x_2 - x_1.$$

Відповідно до формул (6.1) і (6.2):

$$L' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отож,

$$L < L'. \tag{6.3}$$

Отже тіло, яке спостерігаємо з координатної системи, відносно якої воно рухається, коротше в напрямі руху системи, ніж у системі, де він нерухомий. Це правило універсальне, тобто немає значення, є насправді об'єкт чи його немає на інтервалі між координатами, які ми вимірюємо.

Застосуємо перетворення Лоренца до перетворення часу:

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.4}$$

Якщо $t_1 = t_2$ і $x_1 \neq x_2$, то $t_1' \neq t_2'$, тобто події не одночасні. *Одночасність подій* – поняття відносне. В одних системах відліку перша подія може випереджати другу, в інших – навпаки. Проте це не стосується причинно пов'язаних подій, коли подія-причина завжди випереджає подію-наслідок.

***Інтервал між подіями.*** Припустимо, що у нерухомій просторовій точці *А* системи $K'$ відбулися дві події в моменти часу $t_1'$ і $t_2'$, виміряні нерухомим у цій системі годинником (власний час). Інтервал часу між цими подіями

$$\Delta t' = t_2' - t_1'.$$

Відповідно до формул Лоренца, часовий інтервал, який спостерігають у системі *К*, становить:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.5}$$

Отже, $\Delta t' < \Delta t$, тобто інтервал часу між двома наступними подіями більший у системі, яка рухається, ніж у тій, що перебуває у стані спокою (*рухомий годинник іде повільніше, ніж нерухомий*).

Можна довести наступне: якщо якась подія відбулась у точці з координатами $(x_1, y_1, z_1)$ у момент часу $t_1$, а інша – у точці з координатами $(x_2, y_2, z_2)$ у момент часу $t_2$, то *інтервал між подіями*

$$\Delta s = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]}$$

є інваріантом перетворень Лоренца.

Позначимо просторову відстань між двома точками, у яких відбулися події, через $\Delta l$, а проміжок часу між ними – $\Delta t$. Тоді інтервал між такими подіями $\Delta s$ можна виразити за формулою:

$$\Delta s = \sqrt{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2}.$$

Інтервал називають *нульовим*, якщо $(\Delta s)^2 = 0$. Це означає, що в усіх інерціальних системах $\Delta s = 0$ і $\Delta l = c\Delta t$, тобто дві події пов'язані між собою сигналом, що поширюється зі швидкістю світла. Окрім того, ці події не можуть бути одночасними, бо тоді $\Delta t' = 0$, звідки $\Delta s < 0$, а це суперечить умові.

Інтервал називають *часовоподібним*, якщо $(\Delta s)^2 > 0$. За цієї умови завжди можна вибрати таку систему відліку, де дві події відбувалися б в одній точці простору. Проте не існує такої системи відліку, де ці дві події відбувалися б одночасно ($\Delta t' = 0$), бо це призвело б до того, що інтервал $\Delta s$ став би уявним, що суперечить умові. Отже, події, розділені часовоподібним інтервалом, також не можуть бути одночасними. Вони можуть відбуватись з одним і тим же тілом.

Отже, як нульовий, так і часовоподібним інтервали стосуються подій, які можуть впливати одна на одну, тобто бути причинно пов'язаними.

Інтервал називають *просторовоподібним*, якщо $(\Delta s)^2 < 0$. Оскільки $\Delta s$ – інваріант, то існує така система відліку, у якій $\Delta t' = 0$, тобто дві події відбуватимуться одночасно у різних просторових точках. Однак не існує такої системи відліку, у якій ці дві події відбувалися б в одній точці. Такі події не можуть впливати одна на одну, бо сигнал не може поширюватися зі швидкістю, більшою від швидкості світла у вакуумі – події, розділені просторовоподібним інтервалом, не можуть бути причинно пов'язаними.

***Релятивістський імпульс і релятивістська енергія.*** Припустимо, що у системі $K$ тіло рухається зі швидкістю $u_x = dx/dt$, а в системі $K'$ – зі швидкістю $u'_x = dx'/dt$. З формул (6.2) і (6.4) одержуємо:

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad dt' = \frac{dt - \frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Поділивши перше рівняння на друге і врахувавши, що $dx/dt = u_x$, одержимо:



$$u'_x = \frac{u_x - u}{1 - \frac{uu_x}{c^2}} \text{ і } u_x = \frac{u'_x + u}{1 + \frac{uu'_x}{c^2}}.$$

Аналогічно можна знайти співвідношення для $u_y$ та $u_x$.

*Релятивістський закон додавання швидкостей* узгоджується з другим постулатом спеціальної теорії відносності. Справді, якщо припустити, що $u' = c$, то для підсумкової швидкості отримаємо:

$$u = \frac{c+u}{1+\frac{cu}{c^2}} = c,$$

тобто підсумкова швидкість не може бути більшою, ніж швидкість світла у вакуумі.

З'ясовано, що другий закон Ньютона буде інваріантним стосовно перетворень Лоренца лише тоді, коли під масою розуміти вираз

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \tag{6.6}$$

де $m_0$ – *маса спокою* матеріальної точки (тобто маса, виміряна в тій інерціальній системі відліку, у якій матеріальна точка перебуває у стані спокою), а $m$ – маса точки в системі відліку, відносно якої точка рухається зі швидкістю υ. Для *релятивістського імпульсу* отримуємо:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{6.7}$$

З формули (6.6) випливає, що зі збільшенням швидкості до великих її значень маса матеріальної точки безмірно зростає.

У релятивістській механіці змінюється не лише швидкість, але й маса тіла. Звідси випливає, що енергія тіла зі збільшенням швидкості збільшується швидше, ніж у класичній механіці.

Можна довести, що для *релятивістської кінетичної енергії* справедлива формула:

$$K = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right). \qquad (6.8)$$

Експериментальні дослідження з елементарними частинками засвідчують, що закон збереження енергії буде інваріантним лише у тому разі, якщо припустити, що вільна частинка, крім кінетичної енергії, має ще додаткову енергію:

$$W_0 = m_0 c^2,$$

яку називають *енергією спокою*, або *власною енергією*. Суму кінетичної енергії тіла і його енергії спокою називають *повною енергією тіла*:

$$W = \mathrm{K} + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Отже, з урахуванням (6.6), для повної енергії тіла маємо формулу:

$$W = mc^2. \qquad (6.9)$$

На відміну від класичної механіки, де повна енергія тіла може бути як додатна, так і від′ємна, в теорії відносності вона завжди додатна. У спеціальній теорії відносності повна енергія не охоплює потенціальної енергії.

Вираз (6.9) називають формулою Айнштайна. Ця формула виражає зв’язок між масою та енергією, тобто те,



що з будь-якою масою тіла пов’язана енергія. Вона дає змогу глибше зрозуміти закон збереження енергії, який тепер перетворюється в узагальнений закон збереження маси та енергії.

## Задачі

***Задача 6.1.*** Під час руху деякої частинки її поздовжні розміри зменшились на 10%. Яка швидкість частинки?

***Розв’язання.*** Поздовжні розміри частинки $L_0$ (у нерухомій відносно частинки системі відліку) і $L$ (у рухомій системі відліку) пов’язані між собою формулою

$$L = L_0 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},$$

де $u$ – швидкість частинки. За умовою задачі

$$\frac{L_0 - L}{L_0} = 1 - \frac{L}{L_0} = 0{,}1.$$

Звідси

$$\frac{L}{L_0} = 0{,}9, \text{ тобто } L = 0{,}9 L_0.$$

З огляду на перше рівняння отримаємо

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 0{,}9, \text{ або } 1-\frac{u^2}{c^2} = 0{,}81 \text{ і } u^2 = 0{,}19\ c^2,$$

$$u = \sqrt{0{,}19c^2} = 0{,}44 \cdot 3 \cdot 10^8 = 1{,}32 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

***Задача 6.2.*** Швидкість електрона збільшилася від $u_1$ = 0,98 с до $u_2$ = 0,99 с. Знайти зміну кінетичної енергії електрона.

***Розв’язання.*** Відповідно до формули (6.8) зміна кінетичної енергії електрона

$$\Delta K = K_2 - K_1 = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta K = 9.11\cdot 10^{31}\left(3\cdot 10^{8}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}99^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0{,}98^2}}\right) =$$

$$= 81{,}99\cdot 10^{-15}\left(7{,}1-5{,}0\right) = 1{,}7\cdot 10^{-13}\ \text{Дж.}$$

## Практичне завдання

***Задача 7.1.*** Паралельними залізничними коліями йдуть в одному напрямі два поїзди: пасажирський – довжиною 200 м зі швидкістю 72 км/год і товарний – довжиною 400 м зі швидкістю 45 км/год. Скільки часу пасажирський поїзд обганятиме товарний?

Відповідь: 80 с.

***Задача 7.2.*** Поштовий літак, що летить на висоті 1960 м зі швидкістю 450 км/год, має скинути мішок з поштою у пункті *А*. На якій відстані, не долітаючи до пункту *А*, льотчик має скинути мішок, щоб він упав у пункті *А*?

Відповідь: 2,5 км.

***Задача 7.3.*** Колесо радіусом 10 см обертається зі сталим кутовим прискоренням 3,14 рад/с$^2$. Знайти для точок на ободі колеса в кінці першої секунди після початку руху: 1) кутову швидкість; 2) лінійну швидкість; 3) тангенціальне прискорення; 4) нормальне прискорення; 5) повне прискорення; 6) кут між напрямом повного прискорення і радіусом колеса.

Відповідь: 1) 3,14 рад/с, 2) 0,314 м/с, 3) 0,314 м/с$^2$, 4) 0,986 м/с$^2$, 5) 1,03 м/с$^2$, 6) $17^0 46'$.



***Задача 7.4.*** Два тіла з масами 2,2 кг і 3 кг з'єднано ниткою, перекинутою через нерухомий блок. Визначити натяг нитки при русі тягарців.

Відповідь: 25 Н.

***Задача 7.5.*** На круглому горизонтальному столі, який обертається з кутовою швидкістю ω, лежить кубик масою $m$ на відстані $r$ від осі. Визначити мінімальний коефіцієнт тертя μ, за якого кубик обертатиметься разом зі столом.

Відповідь: $\mu = \omega^2 r/g$.

***Задача 7.6.*** Шахтний ліфт опускається з прискоренням 0,8 м/с$^2$. З якою силою тисне на дно ліфта людина, маса якої 80 кг?

Відповідь: 720 Н.

***Задача 7.7.*** Визначити момент інерції щодо осі симетрії суцільного однорідного тонкого кільця масою 0,5 кг, зовнішній радіус якого 0,25 м, а внутрішній – 0,05 м.

Відповідь: 0,15 кг·м$^2$.

***Задача 7.8.*** До обода однорідного диска радіусом 0,2 м прикладено дотичну силу 98,1 Н. Під час обертання на диск діє момент сил тертя 4,9 Н·м. Знайдіть масу диска, якщо диск обертається зі сталим кутовим прискоренням 100 рад/с$^2$.

Відповідь: 7,36 кг.

***Задача 7.9.*** Махове колесо радіусом 0,2 м і масою 10 кг сполучене з мотором за допомогою пасової передачі. Натяг паса, який обертається без ковзання, сталий і дорівнює 14,7 Н. Яку кількість обертів за одиницю часу зробить махове колесо через 10 с після початку руху? Махове колесо вважати однорідним диском. Тертям нехтувати.

Відповідь: 23,4 об/с.

***Задача 7.10.*** Між двома тілами з масами $m_1$ і $m_2$ відбувається непружний удар, причому друге тіло до удару перебувало у спокої. Знайти частку кінетичної енергії, що перейде в тепло.

Відповідь: $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

***Задача 7.11.*** Граната, що летіла в горизонтальному напрямі зі швидкістю 10 м/с, розірвалася на два осколки масою 1,5 кг і 1 кг. Швидкість більшого осколка зросла до 20 м/с у напрямі руху гранати. Визначити швидкість меншого осколка.

Відповідь: -5 м/с.

***Задача 7.12.*** Куля, що летіла горизонтально зі швидкістю 100 м/с, ударяється об нерухомий клин, що лежить на горизонтальній поверхні, і пружно відлітає вертикально вгору. Початкова швидкість клина після удару – 2 м/с. Визначити, на яку висоту підніметься куля. Опором повітря знехтувати.

Відповідь: 500 м.

***Задача 7.13.*** У бак, дно якого має невеликий отвір площею 0,4 $см^2$, рівномірним струменем вливається вода. Приплив води становить 200 г/с. Визначити висоту рівня води, який підтримуватиметься у бакові.

Відповідь: 1,25 м.

***Задача 7.14.*** У стіні циліндричної посудини є малий отвір, розміщений на глибині 30 см нижче рівня води. Нехтуючи в'язкістю води, знайти швидкість витікання води з отвору.

Відповідь: 2,43 м/с.

***Задача 7.15.*** Яку швидкість повинно мати рухоме тіло, щоб його поздовжні розміри зменшились удвічі?

Відповідь: $2{,}6\cdot10^8$ м/с.



## Список літератури


1. *Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф.* Курс фізики. Т.1. – К.: Вища школа, 2002.
2. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1985.
3. *Грабовский Р.И.* Курс физики. – М.: Высш. школа, 1980.
4. *Караван Ю.В., Клос Є.С.* Малий фізичний довідник. – Львів: Світ, 1997.
5. *Клос Є.С., Болюбаш Я.Я., Караван Ю.В., Пастернак Н.В.* Фізика: Практикум. – Львів: Вища школа, 1989.
6. *Кучерук І.М., Горбачук І.Е., Луцик П.П.* Загальний курс фізики. – К.: Техніка, 1999.
7. *Кушнір Р.М.* Загальна фізика. Механіка. Молекулярна фізика. – Львів: ЛНУ, 2003.
8. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т.1. – М.: Наука, 1999.
9. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.1. – М.: Наука, 1979.

## ЗМІСТ