ВИМІРЮВАННЯ. ЗАПИС І ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ. ОЦІНКА ПОХИБОК

1. Математичне опрацювання результатів вимірювань

Експериментальна фізика займається вимірюванням фізичних величин і з’ясуванням взаємозалежностей та співвідношень між ними. Тому головним моментом фізичного дослідження є *акт вимірювання*.

Виміряти фізичну величину означає порівняти її з однорідною їй фізичною величиною, прийнятою за одиницю. Наприклад, довжину тіла порівнюють з метром, масу – з кілограмом, тривалість процесу – з секундою тощо.

Вимірювання фізичних величин поділяють на *прямі* і *непрямі* (посередні).

Якість вимірювань визначена їхньою точністю. У разі прямих вимірювань точність дослідів визначають з аналізу точності методу і приладів, а також із повторюваності результатів вимірювань. Точність непрямих (посередніх) вимірювань залежить від надійності даних, які використовують для розрахунку, та від структури формул, які пов’язують ці дані з шуканою величиною.

Під час вимірювань неминуче виникають похибки. Похибки поділяють на *систематичні* та *випадкові*. Окремо розглядають так звані *промахи*, або невдалі вимірювання, які потрібно просто відкинути.

Систематичні похибки виникають унаслідок несправності вимірювального приладу або помилки в методиці вимірювання. Їх можна позбутися, якщо усунути причину виникнення. Надалі будемо вважати, що систематичні похибки у нас не виникатимуть. Зазначмо, що систематичними іноді називають *похибки приладу*.

Випадкові похибки виникають внаслідок різних причин, які неможливо усунути повністю: недосконалість приладу, недосконалість методу вимірювання, органів зору людини і т.п. Випадкові похибки необхідно звести до мінімуму і врахувати після завершення вимірювань фізичної величини.

2. Обчислення похибок у разі прямих вимірювань

Пряме вимірювання виконують справу тоді, коли фізичну величину порівнюють з одиницею (еталоном) безпосередньо за допомогою приладу. Наприклад: вимірювання розмірів тіла штангенциркулем або лінійкою, часу – секундоміром, напруги – вольтметром тощо.

Під час прямого вимірювання можливі два випадки:

1) повторні вимірювання дають різні, але близькі результати; 2) повторні вимірювання дають один і той же результат або умови досліду не дають змоги виконати повторні вимірювання. *В другому випадку похибкою вимірювання треба вважати похибку приладу.*

Нехай у першому випадку вимірювання фізичної величини x дало числа x_1, x_2, …, x_n. Зазначимо, що число n рекомендують брати непарним. У найпростішому випадку $n = 3$. Будемо вважати, що найближчим до істинного значення вимірюваної величини є *середнє арифметичне*

$$x_{\text{c}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{1}$$

Відхилення від середнього $\Delta x_1 = |x_{\text{c}} - x_1|$ назвемо *абсолютною похибкою* першого вимірювання, відповідно, $\Delta x_2 = |x_{\text{c}} - x_2|$ – абсолютною похибкою другого вимірювання і т.д. Величину

$$\Delta x_{\text{c}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \tag{2}$$

назвемо *середньою абсолютною похибкою* вимірювання.

Величина

$$\delta x_{\text{c}} = \frac{\Delta x_{\text{c}}}{x_{\text{c}}}, \text{ або } \delta x_{\text{c}} = \frac{\Delta x_{\text{c}}}{x_{\text{c}}} \cdot 100\% \tag{3}$$

називають *середньою відносною похибкою* вимірювання.

Якість вимірювань звичайно визначена власне відносною, а не абсолютною похибкою. Наприклад, одна й та ж похибка в 1 °C у разі вимірювання температури зірки не суттєва, у випадку вимірювання температури кипіння води може бути більш суттєва, а під час визначення температури тіла хворої людини абсолютно недопустима. Це виникає тому, що відносна похибка вимірювань у трьох випадках є різною.

Похибку приладу $\Delta x_{\text{пр}}$ для електровимірювальних приладів визначають на підставі класу точності приладу або беруть такою, що дорівнює половині найменшої поділки приладу:

$$\Delta x_{\text{пр}} = \frac{(\text{клас точності}) \times (\text{межа приладу})}{100}. \tag{4}$$

У загальному випадку абсолютна похибка вимірюваної величини

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{с}}^2 + \Delta x_{\text{пр}}^2}, \tag{5}$$

відносна похибка –

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}, \quad \text{або} \qquad \delta x = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% . \tag{6}$$

3. Опрацювання результатів у разі непрямих (посередніх) вимірювань

На практиці (здебільшого) фізичну величину не вдається виміряти прямим способом. У такому разі використовують співвідношення, за допомогою якого цю величину можна обчислити через значення інших фізичних величин, які можна виміряти прямим способом. Наприклад, молярну масу повітря μ можна виміряти, якщо скористатися рівнянням стану ідеального газу

$$\mu = \frac{RTm}{pV},$$

усі параметри якого, за винятком $R = 8{,}314 \,{}^{\text{Дж}}\!/_{\text{моль} \cdot \text{К}}$, легко виміряти прямим способом і за допомогою попередньої формули обчислити μ. У цьому випадку постає запитання, як знайти абсолютну і відносну похибки величини μ, якщо відомі похибки ΔT, Δp і ΔV. Зазначмо, що в похибку $\Delta\mu$ буде внесена також похибка числа R, яке неможливо визначити точним числом.

Є спосіб, який дає змогу вирішити цю проблему для будь-якого функціонального зв'язку між фізичними величинами. Він ґрунтується на методі диференціального числення, зокрема, на обчисленні повного диференціала (нескінченно малого приросту) функції багатьох змінних.

Нехай маємо функцію

$$f(x, y, z, u, \ldots), \tag{7}$$

повний диференціал цієї функції:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{y=\text{const}\\ z=\text{const}\\ \ldots\ldots}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=\text{const}\\ z=\text{const}\\ \ldots\ldots}} + \ldots \tag{8}$$

За допомогою цього виразу одержують формулу для обчислення абсолютної похибки фізичної величини в разі непрямого вимірювання:

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \ldots \tag{9}$$

Як бачимо, всі частинні похідні беруть зі знаком плюс, а диференціали змінних замінюють на абсолютні похибки величин, виміряних прямим способом. У такому випадку формула (9) дає максимально можливу похибку величини f.

На практиці зручніше користуватися таб. 1, яка дає правила обчислення похибок Δf і δf у найважливіших випадках.

Зазначимо, що абсолютну похибку Δf зручно обчислювати першою, коли робоча формула є адитивною (додавання і віднімання), а відносну похибку δf - коли формула мультиплікативна (множення, ділення, піднесення до степеня).

Таблиця 1.

Правила обчислення абсолютної та відносної похибок

Формула	Абсолютна похибка Δf	Відносна похибка δf
$f = x + y$	$\Delta f = \Delta x + \Delta y$	$\delta f = \dfrac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$
$f = x - y$	$\Delta f = \Delta x + \Delta y$	$\delta f = \dfrac{\Delta x + \Delta y}{x - y}$
$f = x \cdot y$	$\Delta f = x\Delta y + y\Delta x$	$\delta f = \dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y} = \delta x + \delta y$
$f = \dfrac{x}{y}$	$\Delta f = \dfrac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}$	$\delta f = \dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y} = \delta x + \delta y$
$f = x^n$	$\Delta f = nx^{n-1}\Delta x$	$\delta f = n\dfrac{\Delta x}{x} = n\delta x$

У робочій формулі для обчислення фізичної величини f можуть бути табличні величини (π, g, k, h, R…). Вони впливають на значення похибки вимірюваної величини f і тому їхні похибки необхідно враховувати. Абсолютною похибкою таблично заданого значення (якщо вона не зазначена прямо) вважають число, що дорівнює половині одиниці останнього розряду цього значення.

Наприклад, для $\pi = 3{,}14$ $\Delta\pi = 0{,}005$; для $\pi = 3{,}142$ $\Delta\pi = 0{,}0005$; для g = 9,8 м/с^2 Δg = 0,05 м/с^2; для g = 9,81 м/с^2 Δg = 0,005 м/с^2.

П р и м і т к а. Іноді під час обчислення відносної похибки спочатку логарифмують вираз, а після цього обчислюють логарифмічну похідну і нарешті – відносну похибку.

4. Про приблизні обчислення

Результатом вимірювання або обчислення є число. Наприклад:

5 м;	0,02 А;	0,003 Тл;	$2\cdot10^3$ кг/м^3;	10^5 Па
5,0 м;	0,020А;	3,1 мТл;	$2{,}0\cdot10^3$ кг/м^3;	$1{,}0\cdot10^5$Па
5,01 м;	20,3 мА;	3,10 мТл;	$2{,}04\cdot10^3$кг/м^3;	$1{,}01\cdot10^5$ Па

У першому рядку всі числа мають одну значущу цифру, у другому – дві, а в третьому – три значущі цифри. Чим більше значущих цифр має число, тим з більшою точністю виміряна або обчислена фізична величина. Кількість значущих цифр не змінюється в разі переходу від одиниць (метрів) до їхніх кратних часток (сантиметрів, міліметрів, мікрометрів), і навпаки:

$$2{,}3\text{ м} = 2{,}3\cdot10^2\text{см} = 2{,}3\cdot10^3\text{мм} = 2{,}3\cdot10^6\text{мкм}.$$

Значущими цифрами числа називають усі його цифри, крім нулів, розміщені зліва від першої відмінної від нуля цифри.

Для визначення порядку фізичної величини або її оцінки достатньо однієї значущої цифри. Числа з двома значущими цифрами треба вважати результатом грубого вимірювання, а числа з трьома і чотирма значущими цифрами – результатом задовільного вимірювання.

5. Правила заокруглювання у випадку математичних операцій над числами

Обчислення певних фізичних величин особливо якщо їх виконують за допомогою калькуляторів, потребують заокруглення сумарного числа. Необхідна точність розрахунків визначена тим, що розрахунок не повинен вносити у вимірювання додаткової похибки.

Заокруглювання в разі додавання і віднімання всіх чисел виконують до розряду, на одиницю меншого, ніж розряд найменш точного числа. В результаті потрібно зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх у наближеному заданому з найменшою кількістю десяткових знаків:

$$23,2 + 0,442 + 7,247 \approx 23,2 + 0,44 + 7,25 = 30,89 \approx 30,9$$

У результаті множення і ділення потрібно зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має наближене задане з найменшою кількістю значущих цифр:

$$30,9 \cdot 1,8364 \approx 30,9 \cdot 1,84 = 56,856 \approx 56,9;$$

$$56,9 : 2,412 \approx 56,9 : 2,41 = 23,609 \approx 23,6$$

У разі піднесення до степеня в результаті потрібно зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має число, яке підносять до степеня:

$$\left(11,38\right)^2 = 129,5044 \approx 129,5 .$$

У випадку знаходження коренів у результаті потрібно зберегти стільки значущих цифр, скільки їх має число, яке стоїть під коренем:

$$\sqrt{2,97} \approx 1,724 \approx 1,72$$

Під час обчислення проміжних результатів потрібно брати на одну цифру більше, ніж задано в заокругленнях у разі виконання математичних дій над числами. В кінцевому підсумку цю “запасну” цифру відкидають:

$$\frac{\left(23,2 + 0,442 + 7,247\right) \cdot 1,8364}{2,412} \approx \frac{\left(23,2 + 0,44 + 7,25\right) \cdot 1,84}{2,41} \approx$$

$$\approx \frac{30,89 \cdot 1,84}{2,41} \approx \frac{56,838}{2,41} \approx 23,58 \approx 23,6 .$$

6. Запис результатів

Результат вимірювань записують у вигляді

$$f = f_{\text{ср}} \pm \Delta f, \qquad \partial f = ...$$

Наприклад, запис $m = 0,876 \pm 0,008$г означає, що в результаті вимірювань для маси тіла знайдено значення 0,876 г зі стандартною похибкою 0,008 г.

Похибку треба округлювати до двох значущих цифр, якщо перша з них є одиницею, і до однієї значущої цифри у решті випадків. Наприклад. правильно записувати

$$\pm 3;\ \pm 0,2;\ \pm 0,08;\ \pm 0,14 .$$

У записі виміряного значення останньою повинна бути цифра того десяткового розряду, який використовують у разі зазначення похибки. Наприклад, один і той же результат залежно від похибки, може мати вигляд

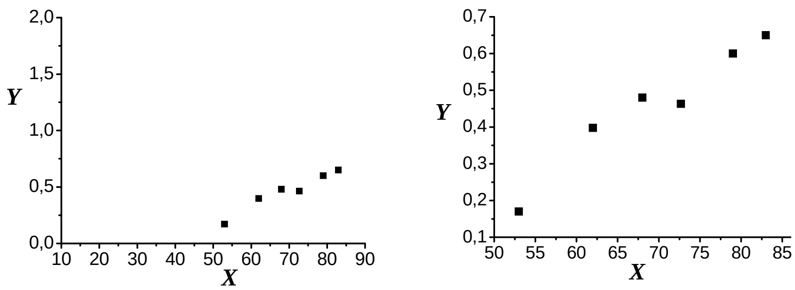
$$1,2 \pm 0,2;\, 1,24 \pm 0,03;\ \ 1,234 \pm 0,012;\, 0,900 \pm 0,004 \text{ і т.д.}$$

Отже, остання з записаних цифр (чи навіть дві з них, як у передостанньому прикладі) є сумнівною, а решта – достовірними.

7. Зображення експериментальних результатів на графіках

Результати експериментів відображають у вигляді не тільки таблиць, а й графіків. Для графіків ліпше використовувати спеціальний папір, наприклад, міліметровий або в клітинку.

У разі побудови графіків потрібно розумно вибирати масштаб, щоб виміряні точки розташувались на всій площині аркуша. На рис. 1 зображені приклади правильної і неправильної побудови графіків. На лівому (неправильно побудованому) графіку експериментальні точки займають нижню праву частину рисунка. Щоб цього уникнути, потрібно вибрати більший масштаб по осі *Y* і змістити нуль абсцис, як це зроблено на правому графіку.



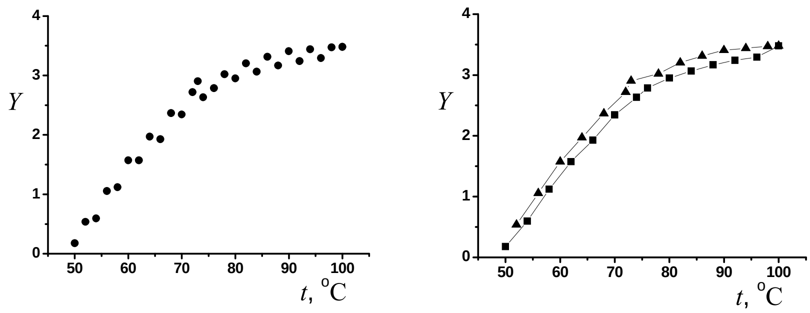
Неправильно Правильно

Рис. 1. Вибір масштабу та початку відліку в разі побудови графіків.

Масштаб повинен бути зручним. Клітинка графіка (чи міліметрового паперу) може відповідати 0,1, 0,2, 0,5, 1,0, 2,0, 5,0, 10,0 одиницям величини, яку вимірюють, однак не 2,5, 3,0, 4,0, 7,0 і т.д. Якщо масштаб незручний, то нанесення експериментальних точок на графік і використання графіка потребують невиправдано багато часу, що нерідко призводить до неприємних помилок.

Графічне зображення результатів дає змогу швидко зрозуміти характерні особливості залежності, яку спостерігають і виявити помилкові результати. Наприклад, з графіка на рис. 1 видно, що крива $Y = Y(X)$ за збільшення X стає пологішою. Третя ліворуч точка випала. Очевидно, під час її вимірювання була допущена помилка. Якщо це не так, то в інтервалі біля цієї точки шукана залежність має різко виражену особливість. Такі особливості становлять великий інтерес. Тому потрібно уважно виміряти область, розташовану поблизу точки, що випала, і намагатись детально вивчити форму кривої в інтервалі знайденої особливості.

Точки, які наносяться на графіки, треба зображати чітко. Їх необхідно позначати олівцем, бо інакше помилково нанесену точку не можна буде видалити з графіка, не зіпсувавши його. Ніяких ліній і міток, які пояснюють побудову точок, на графік наносити не можна, оскільки вони заважають аналізувати результати.



а
Неправильно

б
Правильно

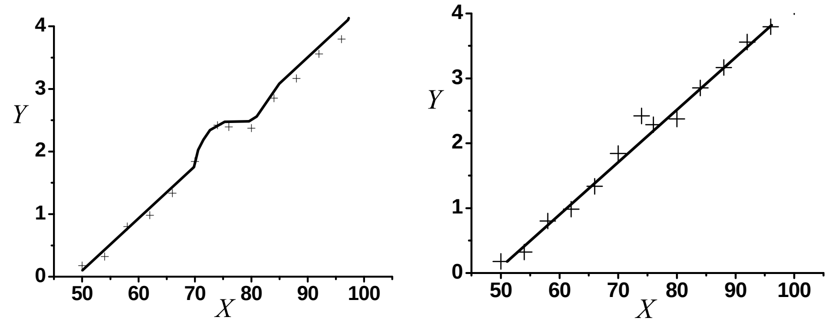
Рис. 2. Графічне зображення результатів, отриманих за різних умов.

Точки, отримані за різних умов (під час нагрівання й охолодження, збільшення чи зменшення навантаження, у різні дні тощо, корисно наносити різними кольорами чи різними значками. Це допомагає побачити нові явища. Наприклад, на графіках рис. 2, *а* і *б* – один і той самий набір точок. На рис. 2, *а* всі ці точки нанесені однаково, а на рис. 2, *б* точки, отримані під час нагрівання й охолодження, зображені по-різному (трикутниками і квадратами). На першому з графіків видно тільки розкид точок, а другий свідчить, що розкид насправді невеликий, однак точки, виміряні під час нагрівання і під час охолодження, лежать на різних кривих. Очевидно, що тільки рис. 2, *б* містить необхідну інформацію для аналізу і побудований грамотно.

Спосіб зображення на графіку експериментальних результатів залежить від того, чи відома їхня випадкова похибка. Якщо вона не відома (що частіше всього буває), то результати зображають крапками, а якщо відома, то ліпше зображати їх не крапками, а хрестиками. Піврозмір хрестика по горизонталі повинен дорівнювати стандартній похибці по осі абсцис, його вертикальний піврозмір – похибці по осі ординат. У цьому випадку, якщо одна з помилок – через свою малу величину – не може бути зображена графічно, результати зображають рисочками, які витягнуті на $\pm\sigma$ в тому напрямі, де похибка немала. Важливість такого способу відображення результатів видно з рис. 3 *а*, *б*, де показано одні й ті ж експериментальні точки за різних похибок вимірювань. Графік 3, *а* безсумнівно, свідчить про нерегулярний хід залежності, яку вивчають. Ця залежність зображена на рис. 3, *а* кривою лінією. Ті ж дані за великих похибок досліду (див рис.3, *б*) з успіхом описує пряма лінія, оскільки лише одне вимірювання відступає від кривої більше, ніж на стандартну похибку (і менше, ніж на дві такі похибки). Та обставина, що в разі похибок рис. 3, *а* дані потребують проведення кривої, а на рис. 3, *б* цього – ні стає очевидною лише в разі зображення експериментальних результатів у вигляді хрестика похибок.

Зі сказаного не випливає, що, зображаючи результати дослідів не хрестиками похибок, а крапками, ми завжди робимо помилку. Якщо значення похибок уже відомі під час побудови графіка, то потрібно, звичайно, їх зображати. Однак переважно ці похибки в момент побудови графіка невідомі і їх треба визначати з розкиду точок на графіку. В таких випадках експериментальні дані ліпше зображати крапками.

Лінії, проведені через експериментальні крапки на рис. 3, *а* і *б*, не тільки полегшують обстеження даних, а й слугують прикладом опрацювання результатів досліду. Зазначимо, що криві на графіках не завжди проводять через експериментальні точки. Нерідко криві зображають залежність, отриману не з експерименту, а з теоретичних міркувань (чи з інших дослідів). У випадку побудови таких кривих виникає потреба попередньо нанести на графік декілька розрахованих точок. Ці точки треба наносити ледь помітно, щоб не сплутати з чіткими точками (чи хрестиками), які зображають експериментальні дані. Найліпше, щоб розраховані точки взагалі були не помітні.



а *б*

Рис. 3. Проведення кривої через експериментальні точки в разі різних похибок вимірювань. Права частина кривої (*а*) проведена неправильно – вище експериментальних точок.

Осі графіка повинні мати виразні, чіткі позначення. Поряд з поділками на зручних проміжках повинні бути нанесені цифри, які відповідають поділкам шкали. Цифри прийнято розташовувати по краях сітки. На рис. 1, 2 цифри стоять не біля кожної вертикальної лінії, а через одну.

На графіках повинно бути позначено, яка фізична величина і в якому масштабі відкладена на осі, як, наприклад, на рис. 1 і 2.

8. Проведення кривих через експериментальні точки

Через експериментальні точки завжди потрібно проводити найпростішу криву, яка сумісна з цими точками, тобто криву, від якої експериментальні дані відхиляються, як звичайно (в 2/3 випадків), не більше, ніж на стандартну похибку. Приклад таких кривих зображено на рис. 3. Не потрібно надавати кривим ніяких згинів, якщо експериментальні дані – у межах похибок – можна задовольнити без цього.

У разі проведення кривої потрібно стежити за тим, щоб на кожній достатньо великій її ділянці експериментальні точки були розташовані як вище, так і нижче кривої. Наприклад, на рис. 3, *а* ліва частина кривої проведена правильно, а права – неправильно: жодна з точок не лежить вище цієї кривої.

Під час графічного опрацювання результатів потрібно пам’ятати, що “на око” можливо точно провести через експериментальні точки тільки пряму лінію. Тому, будуючи графік, потрібно намагатись, щоб очікувана залежність мала вигляд прямої лінії. Зокрема, вивчаючи залежність в’язкості рідини від температури, маємо право очікувати, що результати описуватиме закон.

$$\eta = Ae^{\frac{u}{kT}}.$$

Якщо відкладати на осях графіка η і *T*, то точки ляжуть на експоненту, яку провести на око майже неможливо. Однак якщо відкладати на осях lnη і 1/*T*, то графік набуде вигляду прямої лінії. Під час вимірювань завжди потрібно пильнувати, щоб точки на графіку, який потім буде побудований, розташувались достатньо рівномірно. У нашому прикладі, для побудови графіка в координатах lnη і 1/*T* потрібно вибирати температуру так, щоб точки лежали на однакових проміжках у шкалі 1/*T*, а не в *T*.