

Міністерство освіти і науки України

Львівський національний університет імені Івана Франка

Х. П. Гнатенко, М. І. Самар, В. М. Ткачук

# ЗАДАЧА КЕПЛЕРА У КВАНТОВАНОМУ ПРОСТОРИ

Монографія

Львів

2023

УДК 530.145  
ББК В 318  
Г 56

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. М. Гаврилик**  
(Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України);  
д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Ткач**  
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича).

*Рекомендовано Вченою радою Львівського національного  
університету імені Івана Франка  
(Протокол №?? від 2023)*

**Гнатенко Х. П., Самар М. І., Ткачук В. М.**

**Г 56** Задача Кеплера у квантованому просторі. — Львів : ЛНУ  
імені Івана Франка, 2023. — 134 с.  
ISBN 978-617-10-0390-3.

У монографії розглядається квантований простір, реалізований за допомогою деформованих алгебр різних типів. Аналізується вплив некомутативності на рух частинки в гравітаційному полі. Знаходяться оцінки для величини кванта простору на основі розв'язків задачі Кеплера. Також висвітлюються проблеми у некомутативному просторі, серед них: проблема порушення принципу еквівалентності, порушення сферичної симетрії, опису системи багатьох частинок. Вивчаються шляхи для вирішення вищезазначених задач. Представлені у монографії результати є важливими для подальших досліджень особливостей простору на планківських масштабах.

Для студентів, аспірантів фізико-математичних спеціальностей, викладачів та науковців.

In the monograph a quantized space realized by deformed algebras of various types is considered. The effect of non-commutativity on the motion of a particle in a gravitational field is analyzed. Problems in noncommutative space are also highlighted, among them: the problem of violation of the equivalence principle, the problem of violation of spherical symmetry, the problem of describing a system of many particles, and the violation of the properties of kinetic energy. Ways to solve the above-mentioned problems are being studied. The results presented in the monograph are important for further studies of the features of space on Planck scales.

The monograph is meant for students, post-graduates of physics and mathematics, teachers and researchers.

**УДК 530.145**  
**ББК В 318**

В, М. 2023

ISBN 978-617-10-0390-3

© Гнатенко Х. П., Самар М. І., Ткачук

© Львівський національний університет  
імені Івана Франка, 2023

## Зміст

<b>1</b>	<b>Опис квантованості простору за допомогою деформованих алгебр</b>	<b>5</b>
1.1	Вступ . . . . .	5
1.2	Алгебра з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу та мінімальна довжина . . . . .	8
1.3	Алгебри з некомутативністю типу Лі . . . . .	21
1.4	Алгебри з нелінійною деформацією . . . . .	23
1.5	Лоренц-коваріантна деформована алгебра . . . . .	26
1.6	Висновки . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Задача Кеплера в просторі з деформованими дужками Пуассона з мінімальною довжиною</b>	<b>33</b>
2.1	Вступ . . . . .	33
2.2	Система частинок у нерелятивістському деформованому просторі з узагальненим співвідношенням невизначеностей Гайзенберга . . . . .	35
2.3	Оцінка мінімальної довжини на основі досліджень зміщення перигелію Меркурію . . . . .	39
2.4	Лоренц-коваріантна гамільтонова механіка . . . . .	43
2.5	Лоренц-коваріантна гамільтонова механіка з деформованими дужками Пуассона . . . . .	44
2.6	Релятивістська частинка в кулонівському потенціалі з деформованими дужками Пуассона . . . . .	45
2.7	Задача Кеплера в загальній теорії відносності . . . . .	48
2.8	Задача Кеплера з деформованими дужками Пуассона	50
2.9	Оцінка мінімальної довжини, принцип еквівалентності та залежна від маси мінімальна довжина . . . . .	52
2.10	Висновки . . . . .	54

<b>3</b>	<b>Рух макроскопічного тіла у некомутативному фазовому просторі та задача Кеплера</b>	<b>57</b>
3.1	Вступ . . . . .	57
3.2	Проблема кінематичних змінних та параметри некомутативності . . . . .	58
3.3	Система вільних частинок у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі . . . . .	63
3.4	Імпульс центра мас як інтеграл руху у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі . . . . .	73
3.5	Проблема опису руху багаточастинкової системи у шестивимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу . . . . .	76
3.6	Вільне падіння тіла у однорідному гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі . . . . .	81
3.7	Оцінка мінімального імпульсу на основі досліджень зсуву перигелію Меркурію . . . . .	85
3.8	Вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на рух системи Сонце-Земля-Місяць та слабкий принцип еквівалентності . . . . .	89
3.9	Висновки . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Рух у гравітаційному полі у квантованому просторі зі збереженими сферичною симетрією та симетрією відносно інверсії часу</b>	<b>101</b>
4.1	Вступ . . . . .	101
4.2	Симетрія відносно інверсії часу у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу . . . . .	104
4.3	Рух по колу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу . . . . .	107
4.4	Некомутативна алгебра канонічного типу зі збереженою симетрією відносно інверсії часу та сферичною симетрією . . . . .	110
4.5	Вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на зміщення перигелію . . . . .	115
4.6	Оцінка верхніх меж для параметрів некомутативності . . . . .	120
4.7	Висновки . . . . .	123
	<b>Список літератури</b>	<b>125</b>

## Розділ 1

# Опис квантованості простору за допомогою деформованих алгебр

### 1.1 Вступ

Різні деформовані алгебри було запропоновано для опису квантованого простору (простору з мінімальною довжиною). Ці алгебри можуть бути поділені на три типи, а саме: некомутативні алгебри канонічного типу (комутатори координат та комутатори імпульсів дорівнюють константам), некомутативні алгебри типу Лі (комутатори координат та імпульсів дорівнюють лінійним функціям координат та імпульсів) та нелінійні деформовані алгебри (комутатори координат та імпульсів дорівнюють нелінійним функціям координат та імпульсів).

Дослідження деформованих комутаційних співвідношень з мінімальною довжиною та їх класичних границь ( $\hbar \rightarrow 0$ ) набуло в останній час значної популярності. Перші кроки в цьому напрямку були зроблені Снайдером, який розглядав цю ідею як спосіб регуляризації розбіжностей у квантовій теорії поля [1–3]. Алгебра Снайдера характеризується такими співвідношеннями:

$$[X_\nu, X_\mu] = i\hbar\beta J_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\eta_{ij} + \beta P_i P_j), \quad (1.2)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (1.3)$$

де  $J_{\mu\nu}$  – генератори Лоренца,  $\beta$  – константа ( $\beta > 0$ ),  $\nu, \mu = (0, 1, 2, 3)$ ,

$\eta_{\mu\nu}$  – метричний тензор  $[\eta_{\mu\nu}] = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . У нерелятивістському випадку алгебра Снайдера має такий вигляд

$$[X_i, X_j] = i\hbar\beta(P_j X_i - P_i X_j), \quad (1.4)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \beta P_i P_j), \quad (1.5)$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (1.6)$$

тут  $i, j = (1, 2, 3)$  (див., для прикладу, [4–8]).

За останні десятиліття зацікавленість у гіпотезі мінімальної довжини відродилася завдяки дослідженням у теорії струн та квантовій гравітації [9–11]. Вони привели до висновку про узагальнений принцип невизначеності, який виглядає наступним чином:

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{\Delta P} + \beta \Delta P \right). \quad (1.7)$$

Тут вводиться фундаментальна мінімальна довжина  $\Delta X_{min} = \hbar\sqrt{\beta}$ . Припускається, що мінімальна довжина та довжина Планка  $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.6 \cdot 10^{-35}$  м є величинами одного порядку.

Кемпф та інші дослідники показали, що мінімальна довжина може бути досягнута в квантовій механіці шляхом модифікації звичайних канонічних комутаційних відношень [12–15]. Для одновимірному простору деформовані комутаційні співвідношення мають вигляд:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta\hat{P}^2). \quad (1.8)$$

У випадку більш високих розмірностей простору, такі деформації можна узагальнити за допомогою наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} [\hat{X}_i, \hat{P}_j] &= i\hbar[(1 + \beta\hat{P}^2)\delta_{ij} + \beta'\hat{P}_i\hat{P}_j], \\ [\hat{X}_i, \hat{X}_j] &= i\hbar\frac{2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta\hat{P}^2}{1 + \beta\hat{P}^2}(\hat{P}_i\hat{X}_j - \hat{P}_j\hat{X}_i), \\ [\hat{P}_i, \hat{P}_j] &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Тут  $\beta$  та  $\beta'$  є двома невід'ємними параметрами.

Слід зазначити, що деформовані комутаційні співвідношення, запропоновані Кемпфом, не є лоренц-коваріантними. Лоренц-коваріантна версія таких співвідношень була запропонована у роботі [16] і може розглядатися як узагальнення алгебри, запропонованої Снайдером.

Гіпотезу мінімальної довжини було застосовано до різних проблем квантової механіки, таких як гармонічний осцилятор [13, 17–

20], осцилятор Дірака [16, 21], атом водню [22–26], гравітаційна квантова яма [27, 28], частинка в дельта-потенціалі [29, 30], одновимірна задача кулонівського типу [29, 31, 32], частинка в потенціалі  $1/X^2$  [33, 34], ефект Казимира [35], розсіювання частинок [36] та інші.

Вплив квантування простору вивчено на класичному рівні для таких проблем як кеплерівські орбіти, статистична фізика, складені системи та інші [37–43]. Є також кілька досліджень, що розглядають класичні системи з лоренц-коваріантними типами деформацій. Наприклад, в роботі [44] була досліджена класична система взаємодіючих релятивістських частинок у некомутовативному просторі Снайдера. Також в [45] розглянуто питання порушення принципу еквівалентності, що спричинене некомутовативним простором-часом.

Багато фізичних проблем вивчалися у просторі з канонічною некомутовативністю координат та некомутовативністю імпульсів (квантованому фазовому просторі канонічного типу), серед них: вільна частинка [46], система вільних частинок [47], атом водню [46, 48–50], гармонічний осцилятор [46, 51–58], нейтрони в гравітаційній квантовій ямі [59, 60], гравітаційні хвилі [61] задача Ландау [58], задачі квантової інформації [62, 63] та інші. Такі дослідження є необхідні для встановлення впливу некомутовативності координат та некомутовативності імпульсів на властивості фізичних систем, для оцінки мінімальної довжини, мінімального імпульсу.

У цьому розділі розглядаються різні типи деформованих алгебр, які дозволяють описати особливості структури простору. А саме, вивчаються некомутовативні алгебри канонічного типу, алгебри типу Лі, нелінійні деформовані алгебри. Розділ має таку структуру. У підрозділі 1.2 розглядаються алгебри з некомутовативністю координат та некомутовативністю імпульсів канонічного типу. Аналізується мінімальна довжина у такому просторі на основі розв'язків рівняння на власні значення оператора квадрату довжини та узагальнених співвідношень невизначеностей. У підрозділі 1.3 вивчаються алгебри з некомутовативністю типу Лі та їх особливості. Підрозділ 1.4 присвячено алгебрам в яких комутатори для координат та імпульсів дорівнюють нелінійним функціям координат та імпульсів. У підрозділі 1.5 вивчається лоренц-коваріантна деформована алгебра. Розділ завершується висновками.

## 1.2 Алгебра з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу та мінімальна довжина

Некомутативна алгебра канонічного типу є найпростішою алгеброю, яка описує існування мінімальної довжини, кванта простору. У двовимірному випадку така алгебра характеризується такими співвідношеннями для операторів координат та операторів імпульсів

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \quad (1.10)$$

$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar, \quad (1.11)$$

$$[P_1, P_2] = [X_1, P_2] = [X_2, P_1] = 0, \quad (1.12)$$

де  $\theta$  – константа, яку називають параметром координатної некомутативності, [64–68]. Величина  $\hbar\theta$  має розмірність площі. Із (1.10) випливає співвідношення невизначеностей для координат

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{\hbar|\theta|}{2}, \quad (1.13)$$

де використано позначення

$$\Delta X_i = \sqrt{\langle \Delta X_i^2 \rangle}. \quad (1.14)$$

У просторі з некомутативними координатами існує мінімальна довжина  $\sqrt{\hbar|\theta|}$  та мінімальна площа  $\hbar|\theta|$  [69, 70].

Координати та імпульси, які задовольняють комутаційні співвідношення (1.10)-(1.12) можуть бути представлені через координати та імпульси  $x_i, p_i$ , для яких виконуються звичні комутаційні співвідношення:

$$[x_i, x_j] = 0, \quad (1.15)$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (1.16)$$

$$[p_i, p_j] = 0, \quad (1.17)$$

$i, j = (1, 2)$ . Це представлення має такий вигляд:

$$X_1 = x_1 - \tilde{q}\theta p_2, \quad (1.18)$$

$$X_2 = x_2 + (1 - \tilde{q})\theta p_1, \quad (1.19)$$

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_2, \quad (1.20)$$



де  $\tilde{q}$  – константа, яка може бути вибрана довільно. Зручно використовувати симетричне представлення. А саме у випадку коли  $\tilde{q} = 1/2$ , маємо:

$$X_1 = x_1 - \frac{\theta}{2}p_2, \quad (1.21)$$

$$X_2 = x_2 + \frac{\theta}{2}p_1. \quad (1.22)$$

Важливо відзначити, що некомутативність координат виникає у задачі про рух частинки у сильному магнітному полі. А саме, частинка з зарядом  $e$  у сильному магнітному полі  $\mathbf{B}$ , напрям якого збігається з віссю  $X_3$ ,  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ , рухається на некомутативній площині. Координати частинки задовольняють співвідношення

$$[X_1, X_2] = -i\hbar \frac{c}{eB}, \quad (1.23)$$

де  $c$  – швидкість світла [3, 71–74].

У більш загальному випадку, співвідношення некомутативної алгебри мають такий вигляд

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \quad (1.24)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij}), \quad (1.25)$$

$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij}, \quad (1.26)$$

де  $\theta_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$  – елементи сталих антисиметричних матриць, які називають параметрами координатної некомутативності та параметрами імпульсної некомутативності, відповідно,  $\sigma_{ij}$  – константи,  $i, j = (1, 2, 3)$  [46, 48–51, 53, 54, 56, 57, 60, 75]. Параметри  $\sigma_{ij}$  залежать від параметрів некомутативності  $\theta_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$ , що впливає з тотожності Якобі.

Розглянувши симетричне представлення для координат та імпульсів, які задовольняють комутаційні співвідношення (3.1), (3.3), а саме:

$$X_i = x_i - \frac{1}{2} \sum_j \theta_{ij} p_j, \quad (1.27)$$

$$P_i = p_i + \frac{1}{2} \sum_j \eta_{ij} p_j, \quad (1.28)$$

(координати  $x_i$  та імпульси  $p_i$  задовольняють звичні комутаційні співвідношення (1.15), (1.17)) та обчисливши комутатор  $[X_i, P_j]$ , отримаємо [50, 76]:

$$\sigma_{ij} = \sum_k \frac{\theta_{ik}\eta_{jk}}{4}. \quad (1.29)$$

У некомутативному фазовому просторі, який характеризується співвідношеннями (1.24)-(1.26), існують додаткові обмеження на довжину. Врахувавши (1.24)-(1.26), можемо записати такі співвідношення невизначеностей:

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta X_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \theta_{ij}^2}{4}, \quad (1.30)$$

$$\langle \Delta P_i^2 \rangle \langle \Delta P_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \eta_{ij}^2}{4}, \quad (1.31)$$

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta P_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 (\delta_{ij} + 2\sigma_{ij}\delta_{ij} + \sigma_{ij}^2)}{4}. \quad (1.32)$$

Зауважимо, що у (1.32) нема сумування за індексами  $i$  та  $j$ .

Знайдемо та дослідимо обмеження на довжину у фазовому просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу. Розгляньмо для початку довжину, визначену у координатному просторі:

$$\Delta R = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle} = \sqrt{\langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle + \langle \Delta X_3^2 \rangle}. \quad (1.33)$$

Вираз для мінімальної довжини може бути отриманий із співвідношень невизначеностей, а також на основі результатів для власних значень оператора квадрату довжини. У роботі [77] зі співвідношень невизначеностей (1.30) було тримано таку нерівність:

$$\Delta R \geq \sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{2} (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2)}. \quad (1.34)$$

Знайдемо також вираз для мінімальної довжини на основі розв'язку задачі на власні значення оператора квадрата довжини у некомутативному просторі.

$$\mathbf{R}^2 = \sum_i X_i^2, \quad (1.35)$$

де координати  $X_i$  задовольняють комутаційні співвідношення (1.24),  $i = 1, 2, 3$ .

Розгляньмо для початку двовимірний випадок. Оператор квадрата довжини має вигляд:

$$R_{12}^2 = X_1^2 + X_2^2. \quad (1.36)$$

Оператори  $X_1, X_2$  у (1.36) не комутують  $[X_1, X_2] = i\hbar\theta_{12}$  та можуть бути представлені за допомогою координат та імпульсів  $x_i, p_i$ , які задовольняють звичні комутаційні співвідношення (1.15), (1.17) як

$$X_1 = x_1 - \frac{1}{2}\theta_{12}p_2, \quad (1.37)$$

$$X_2 = x_2 + \frac{1}{2}\theta_{12}p_1, \quad (1.38)$$

(див., для прикладу [78]). Отже, можемо переписати оператор  $R_{12}^2$  у такому вигляді:

$$R_{12}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \frac{\theta_{12}^2}{4}(p_1^2 + p_2^2) - \theta_{12}(x_1p_2 - x_2p_1). \quad (1.39)$$

Власні значення оператора (1.36) (чи (1.39)) були знайдені у роботі [69] та визначаються як

$$r_{n_{12}}^2 = 2\hbar|\theta_{12}|\left(n_{12} + \frac{1}{2}\right), \quad (1.40)$$

тут  $n_{12}$  – квантове число,  $n_{12} = 0, 1, 2, \dots$ . Отже, врахувавши (1.40), ми можемо записати такі нерівності

$$\langle \Delta R_{12}^2 \rangle \geq \hbar|\theta_{12}|, \quad (1.41)$$

$$\Delta R_{12} \geq \sqrt{\hbar|\theta_{12}|}, \quad (1.42)$$

де

$$\langle \Delta R_{12}^2 \rangle = \langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle, \quad (1.43)$$

$$\Delta R_{12} = \sqrt{\langle \Delta R_{12}^2 \rangle}. \quad (1.44)$$

та  $\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle = 0$ . Аналогічно для операторів

$$R_{23}^2 = X_2^2 + X_3^2, \quad (1.45)$$

$$R_{31}^2 = X_3^2 + X_1^2, \quad (1.46)$$

де координати  $X_i, X_j$  задовольняють співвідношення (1.24), можемо записати власні значення

$$r_{n_{23}}^2 = 2\hbar|\theta_{23}| \left( n_{23} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.47)$$

$$r_{n_{31}}^2 = 2\hbar|\theta_{31}| \left( n_{31} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.48)$$

тут  $n_{23}, n_{31}$  – квантові числа,  $n_{23} = 0, 1, 2, \dots, n_{31} = 0, 1, 2, \dots$ . Отже, виконуються такі нерівності:

$$\langle \Delta R_{23}^2 \rangle \geq \hbar|\theta_{23}|, \quad (1.49)$$

$$\Delta R_{23} \geq \sqrt{\hbar|\theta_{23}|}, \quad (1.50)$$

$$\langle \Delta R_{31}^2 \rangle \geq \hbar|\theta_{31}|, \quad (1.51)$$

$$\Delta R_{31} \geq \sqrt{\hbar|\theta_{31}|}, \quad (1.52)$$

де  $\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle = \langle X_3 \rangle = 0$ ,

$$\langle \Delta R_{ij}^2 \rangle = \langle \Delta X_i^2 \rangle + \langle \Delta X_j^2 \rangle, \quad (1.53)$$

$$\Delta R_{ij} = \sqrt{\langle \Delta R_{ij}^2 \rangle}. \quad (1.54)$$

На основі результатів (1.41), (1.50), (1.51), можемо зробити висновки, що некомутативність координат зумовлює обмеження на довжину. Важливо зауважити, що у загальному випадку

$$|\theta_{12}| \neq |\theta_{23}| \neq |\theta_{31}|. \quad (1.55)$$

Отже, обмеження на довжину є анізотропними. Додавши нерівності (1.41), (1.50), (1.51), отримаємо:

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle + \langle \Delta X_3^2 \rangle \geq \frac{\hbar}{2} (|\theta_{12}| + |\theta_{23}| + |\theta_{31}|), \quad (1.56)$$

та

$$\Delta R \geq \sqrt{\frac{\hbar}{2} (|\theta_{12}| + |\theta_{23}| + |\theta_{31}|)}. \quad (1.57)$$

Знайдемо власні значення оператора  $\mathbf{R}^2$  (1.35) у тривимірному випадку. Використавши представлення

$$X_i = x_i - \frac{1}{2} \sum_j \eta_{ij} p_j, \quad (1.58)$$

(див., для прикладу, [50]) перепишемо оператор квадрата довжини у такому вигляді

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^2 &= \sum_i \left( x_i - \frac{1}{2} \sum_j \theta_{ij} p_j \right)^2 = \\ &= \mathbf{x}^2 + \frac{1}{4} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) = \\ &= \mathbf{x}^2 + \frac{1}{4} \theta^2 p^2 - \frac{1}{4} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{p})^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}),\end{aligned}\quad (1.59)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ,

$$\mathbf{L} = [\mathbf{x} \times \mathbf{p}], \quad (1.60)$$

компоненти вектора  $\boldsymbol{\theta}$  визначаються як:

$$\theta_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \theta_{ij}. \quad (1.61)$$

Звернімо увагу, що перші два доданки у (1.59) є інваріантні відносно поворотів. Отже, зручно вибрати систему координат з напрямком осі  $x_3$ , який співпадає з напрямком вектора  $\boldsymbol{\theta}$ . У цьому випадку можемо записати

$$\mathbf{R}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{4} \theta^2 p_1^2 + \frac{1}{4} \theta^2 p_2^2 - \theta(x_1 p_2 - x_2 p_1), \quad (1.62)$$

де ми використали такі самі позначення для координат  $x_i$  у вибраній системі координат,

$$\theta = |\boldsymbol{\theta}| = \sqrt{\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2}. \quad (1.63)$$

Зауважимо, що  $x_3^2$  комутує з  $\mathbf{R}^2$

$$[x_3^2, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \theta(x_1 p_2 - x_2 p_1) + \frac{1}{4}(\theta^2 p_1^2 + \theta^2 p_2^2)] = 0. \quad (1.64)$$

Отже, поворотом системи координат задачу на власні значення оператора квадрата довжини у тривимірному просторі зведено

до задачі на власні значення оператора квадрата довжини, визначеної на площині. Врахувавши (1.40), можемо записати власні значення оператора  $\mathbf{R}^2$  у такому вигляді:

$$R^2 = 2\hbar\theta \left( n + \frac{1}{2} \right) + r_3^2. \quad (1.65)$$

де  $r_3^2$  – власні значення оператора  $x_3^2$ ,  $n$  – квантові числа ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). На основі власних значень для оператора квадрату довжини (1.65), можемо записати:

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle \geq \hbar\theta. \quad (1.66)$$

Отже, для  $\Delta R = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle}$  отримаємо нерівність:

$$\Delta R \geq \sqrt[4]{\hbar^2 (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2)}, \quad (1.67)$$

яка накладає обмеження на довжину в координатному просторі. Дослідімо отримані нерівності. Порівняймо результати (1.34), (1.57), (1.67) та знайдемо нерівність, яка накладає найсильніше обмеження на довжину. Легко бачити, що нижня межа

$$\sqrt[4]{\hbar^2 (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2)}, \quad (1.68)$$

яка представлена у нерівності (1.67), є більша за межу із нерівності (1.34)

$$\sqrt[4]{\frac{\hbar^2 (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2)}{2}}. \quad (1.69)$$

Отже, нерівність (1.67) накладає сильніше обмеження на величину  $\Delta R$ . Щоб порівняти результати (1.57) та (1.67) запишемо:

$$\begin{aligned} & \hbar^2 (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2) - \frac{\hbar^2}{4} (|\theta_{12}| + |\theta_{23}| + |\theta_{31}|)^2 = \\ & = \frac{\hbar^2}{4} (|\theta_{12}| - |\theta_{23}| - |\theta_{31}|)^2 + \frac{\hbar^2}{4} (|\theta_{23}| - |\theta_{12}| - \\ & \quad - |\theta_{31}|)^2 + \frac{\hbar^2}{4} (|\theta_{31}| - |\theta_{23}| - |\theta_{12}|)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Отже, нерівність (1.67), записана на основі виразів для власних значень оператора квадрату довжини, накладає сильніше обмеження на  $\Delta R$  у некомутовативному просторі у порівнянні з нерівностями (1.57) та (1.34)

$$\sqrt[4]{\hbar^2 (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2)} \geq \sqrt{\frac{\hbar}{2} (|\theta_{12}| + |\theta_{23}| + |\theta_{31}|)}. \quad (1.71)$$

Мінімальна довжина у координатному просторі визначається параметрами координатної некомутовативності  $\theta_{ij}$  та має такий вигляд:

$$\Delta R^{min} = \sqrt{\frac{\hbar}{2} (|\theta_{12}| + |\theta_{23}| + |\theta_{31}|)}. \quad (1.72)$$

Дослідімо мінімальну довжину, визначену в імпульсному просторі. У двовимірному випадку, оператор квадрата довжини має вигляд:

$$P_{12}^2 = P_1^2 + P_2^2. \quad (1.73)$$

де імпульси  $P_1, P_2$  задовольняють співвідношення  $[P_1, P_2] = i\hbar\eta_{12}$ . Використавши представлення:

$$P_1 = p_1 + \frac{1}{2}\eta_{12}x_2, \quad (1.74)$$

$$P_2 = p_2 - \frac{1}{2}\eta_{12}x_1, \quad (1.75)$$

(див., для прикладу, [79]) де координати  $x_i$  та імпульси  $p_i$  задовольняють звичні співвідношення, маємо:

$$P_{12}^2 = p_1^2 + p_2^2 + \frac{\eta_{12}^2}{4} (x_1^2 + x_2^2) - \eta_{12}(x_1p_2 - x_2p_1). \quad (1.76)$$

Енергетичні рівні вільної частинки у некомутовативному фазовому просторі канонічного типу було знайдено у роботі [46]. На основі результатів статті [46], власні значення оператора (1.86) (чи еквівалентно (1.76)) можемо записати у такому вигляді:

$$p_{m_{12}}^2 = 2\hbar|\eta_{12}| \left( m_{12} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.77)$$

де  $m_{12}$  – квантові числа  $m_{12} = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Отже, отримаємо такі нерівності:

$$\langle \Delta P_1^2 \rangle + \langle \Delta P_2^2 \rangle \geq \hbar |\eta_{12}|, \quad (1.78)$$

$$\Delta P_{12} \geq \sqrt{\hbar |\eta_{12}|}, \quad (1.79)$$

де  $\langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle = 0$  та  $\Delta P_{12} = \sqrt{\langle \Delta P_{12}^2 \rangle}$ . Аналогічно на основі розв'язків на власні значення операторів  $P_{ij}^2 = P_i^2 + P_j^2$ , отримаємо:

$$\Delta P_{ij} \geq \sqrt{\hbar |\eta_{ij}|}, \quad (1.80)$$

$$\Delta P_{ij} = \sqrt{\langle \Delta P_{ij}^2 \rangle}. \quad (1.81)$$

Оскільки

$$|\eta_{12}| \neq |\eta_{23}| \neq |\eta_{31}|, \quad (1.82)$$

на основі нерівності (1.80) можемо зробити висновок, що некомутативність імпульсів зумовлює анізотропію мінімальної довжини у імпульсному просторі.

На основі результату (1.80) знайдемо:

$$\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle \geq \frac{\hbar}{2} (|\eta_{12}| + |\eta_{23}| + |\eta_{31}|), \quad (1.83)$$

$$\Delta P \geq \sqrt{\frac{\hbar}{2} (|\eta_{12}| + |\eta_{23}| + |\eta_{31}|)}. \quad (1.84)$$

У тривимірному випадку, використавши представлення

$$P_i = p_i + \frac{1}{2} \sum_j \eta_{ij} x_j, \quad (1.85)$$

(див., для прикладу, [50]), оператор

$$\mathbf{P}^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \quad (1.86)$$

може бути записаний у такому вигляді:

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{4} \eta^2 p^2 - \frac{1}{4} (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x})^2 - (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{L}). \quad (1.87)$$



Координати та імпульси  $x_i, p_i$  задовольняють звичні комутаційні співвідношення. Компоненти вектора  $\boldsymbol{\eta}$  визначаються як  $\eta_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \eta_{ij}/2$ . Модуль вектора  $\boldsymbol{\eta}$  має такий вигляд:

$$\eta = |\boldsymbol{\eta}| = \sqrt{\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2}, \quad (1.88)$$

Перші два доданки у (1.87) є сферично-симетричні. Отже, вибравши систему координат, в якій вісь  $x_3$  співпадає з напрямком вектора  $\boldsymbol{\eta}$ , маємо:

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}]^2 - \eta(x_1 p_2 - x_2 p_1) = \quad (1.89)$$

$$= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{1}{4}\eta^2 x_1^2 + \frac{1}{4}\eta^2 x_2^2 - \eta(x_1 p_2 - x_2 p_1). \quad (1.90)$$

Оператор  $p_3^2$  комутує з  $\mathbf{P}^2$ ,  $[p_3^2, \mathbf{P}^2] = 0$ . Отже, задачу на знаходження власних значень оператора квадрату довжини, означеного в тривимірному імпульсному просторі, зведено до двох незалежних задач на знаходження власних значень оператора квадрату довжини, означеного в двовимірному імпульсному просторі, та оператора  $p_3^2$ . Можемо записати власні значення оператора  $\mathbf{P}^2$

$$P^2 = 2\hbar\eta \left( m + \frac{1}{2} \right) + \hbar^2 k^2, \quad (1.91)$$

тут  $m$  – квантові числа,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , та  $\hbar^2 k^2$  – власні значення оператора  $p_3^2$ . На основі виразу для власних значень (1.91) маємо таку нижню межу для довжини у тривимірному некомутивному імпульсному просторі

$$\Delta P \geq \sqrt{\hbar\eta}, \quad (1.92)$$

$$\Delta P = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle} \quad (1.93)$$

(тут ми розглядаємо  $\langle P_i \rangle = 0$ ).

Отже, мінімальна довжина у тривимірному некомутивному імпульсному просторі визначається параметрами імпульсної некомутивності та має вигляд:

$$\Delta P^{min} = \sqrt[4]{\hbar^2(\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2)}. \quad (1.94)$$

Дослідімо загальний випадок, а саме розгляньмо оператор квадрату довжини у фазовому просторі визначений як:

$$\mathbf{Q}^2 = \alpha^2 \sum_i P_i^2 + \beta^2 \sum_i X_i^2, \quad (1.95)$$

де  $\alpha, \beta$  – константи. Із міркувань розмірностей, константа  $\beta$  є безрозмірною, константа  $\alpha$  має розмірність с/кг. Координати  $X_i$  та імпульси  $P_i$  задовольняють співвідношення некомутовативної алгебри (1.24)-(1.26).

У двовимірному випадку, використавши представлення (1.37), (1.38), оператор квадрата довжини може бути записаний як:

$$\begin{aligned} Q_{12}^2 &= \alpha^2(P_1^2 + P_2^2) + \beta^2(X_1^2 + X_2^2) = \\ &= \left( \alpha^2 + \frac{\beta^2}{4}\theta^2 \right) (p_1^2 + p_2^2) + \left( \beta^2 + \frac{\alpha^2}{4}\eta^2 \right) (x_1^2 + x_2^2) - \\ &\quad - (\alpha^2\eta + \beta^2\theta)(x_1p_2 - x_2p_1). \end{aligned} \quad (1.96)$$

Власні значення оператора  $Q_{12}^2$  мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} Q_{12, n_1 n_2}^2 &= \\ &= \hbar \sqrt{\left( 2\alpha^2 + \frac{\theta_{12}^2 \beta^2}{2} \right) \left( 2\beta^2 + \frac{\eta_{12}^2 \alpha^2}{2} \right) + \eta_{12} \alpha^2 + \theta_{12} \beta^2} (n_1 + 1) + \\ &\quad + \hbar \sqrt{\left( 2\alpha^2 + \frac{\theta_{ij}^2 \beta^2}{2} \right) \left( 2\beta^2 + \frac{\eta_{12}^2 \alpha^2}{2} \right) - \eta_{12} \alpha^2 - \theta_{ij} \beta^2} n_2. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Тут ми врахували, що оператор (1.95) відповідає оператору Гамільтона для гармонічного осцилятора з масою  $1/2\alpha^2$  та частотою  $2\alpha\beta$  у некомутовативному фазовому просторі. Вплив некомутовативності на енергетичні рівні двовимірного гармонічного осцилятора є добре дослідженим [46, 53, 56, 57, 66, 80–93]. На основі результату (1.97) можемо записати таку нерівність:

$$\Delta Q_{12} \geq \sqrt{\hbar \sqrt{\left( 2\alpha^2 + \frac{\theta_{ij}^2 \beta^2}{2} \right) \left( 2\beta^2 + \frac{\eta_{12}^2 \alpha^2}{2} \right) + \hbar \eta_{12} \alpha^2 + \hbar \theta_{ij} \beta^2}}, \quad (1.98)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta Q_{12} &= \sqrt{\langle \Delta Q_{12}^2 \rangle} = \\ &= \sqrt{\alpha^2 \langle \Delta P_i^2 \rangle + \alpha^2 \langle \Delta P_j^2 \rangle + \beta^2 \langle \Delta X_i^2 \rangle + \beta^2 \langle \Delta X_j^2 \rangle}, \end{aligned} \quad (1.99)$$

$\langle X_i \rangle = 0$ ,  $\langle P_i \rangle = 0$ ,  $i, j = (1, 2)$ . Отже, мінімальна довжина у чотиривимірному фазовому просторі визначається як

$$\begin{aligned} \Delta Q_{12}^{min} &= \\ &= \sqrt{\hbar \sqrt{\left(2\alpha^2 + \frac{\theta_{12}^2 \beta^2}{2}\right) \left(2\beta^2 + \frac{\eta_{12}^2 \alpha^2}{2}\right) + \hbar \eta_{12} \alpha^2 + \hbar \theta_{12} \beta^2}. \end{aligned} \quad (1.100)$$

У шестивимірному фазовому просторі (тривимірному координатному та тривимірному імпульсному просторі), використавши представлення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів (1.58), (4.122), залишемо оператор квадрата довжини у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^2 &= \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4} \theta^2\right) p^2 + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2}{4} \eta^2\right) x^2 - \\ &- \frac{\alpha^2}{4} (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x})^2 - \frac{\beta^2}{4} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{p})^2 - \alpha^2 (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{L}) - \beta^2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}). \end{aligned} \quad (1.101)$$

Для зручності виберемо систему координат так, щоб напрямок осі  $x_3$  збігався з напрямком вісі  $\alpha^2 \boldsymbol{\eta} + \beta^2 \boldsymbol{\theta}$ . Розгляньмо також вектори  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\boldsymbol{\eta}$ , як такі, що мають однаковий напрям

$$\boldsymbol{\theta} \parallel \boldsymbol{\eta}. \quad (1.102)$$

У цьому випадку оператор квадрата довжини може бути переписаний як

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^2 &= \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4} \theta^2\right) (p_1^2 + p_2^2) + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2}{4} \eta^2\right) (x_1^2 + x_2^2) + \\ &+ \alpha^2 p_3^2 + \beta^2 x_3^2 - (\alpha^2 \eta + \beta^2 \theta) (x_1 p_2 - x_2 p_1), \end{aligned} \quad (1.103)$$

тут ми залишили ті самі позначення для координат та імпульсів у новій системі координат. Звернімо увагу, що оператор  $\alpha^2 p_3^2 + \beta^2 x_3^2$

комує з оператором  $\mathbf{Q}^2$ . Зауважимо, що доданки

$$\begin{aligned} & \left( \alpha^2 + \frac{\beta^2}{4}\theta^2 \right) (p_1^2 + p_2^2) + \left( \beta^2 + \frac{\alpha^2}{4}\eta^2 \right) (x_1^2 + x_2^2) - \\ & - (\alpha^2\eta + \beta^2\theta)(x_1p_2 - x_2p_1) \end{aligned} \quad (1.104)$$

відповідають гамільтоніану двовимірного гармонічного осцилятора з масою  $1/2\alpha^2$  та частотою  $2\alpha\beta$  у некомутативному фазовому просторі (див. (1.96)). Отже, задачу на знаходження власних значень оператора квадрату довжини у шестивимірному некомутативному фазовому просторі зведено до задачі знаходження власних значень оператора квадрата довжини у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі. Врахувавши (1.97), маємо такий вираз для власних значень оператора  $\mathbf{Q}^2$

$$\begin{aligned} & Q_{n_1 n_2 n_3}^2 = \\ & \hbar \left( \sqrt{\left( 2\alpha^2 + \frac{\theta^2\beta^2}{2} \right) \left( 2\beta^2 + \frac{\eta^2\alpha^2}{2} \right) + \eta\alpha^2 + \theta\beta^2} \right) n_1 + \\ & \hbar \left( \sqrt{\left( 2\alpha^2 + \frac{\theta^2\beta^2}{2} \right) \left( 2\beta^2 + \frac{\eta^2\alpha^2}{2} \right) - \eta\alpha^2 - \theta\beta^2} \right) n_2 + \\ & \hbar \sqrt{\left( 2\alpha^2 + \frac{\theta^2\beta^2}{2} \right) \left( 2\beta^2 + \frac{\eta^2\alpha^2}{2} \right) + 2\hbar\alpha\beta} \left( n_3 + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.105)$$

та можемо записати таку нерівність:

$$\langle \Delta \mathbf{Q}^2 \rangle \geq \hbar \sqrt{\left( 2\alpha^2 + \frac{\theta^2\beta^2}{2} \right) \left( 2\beta^2 + \frac{\eta^2\alpha^2}{2} \right) + \hbar\eta\alpha^2 + \hbar\theta\beta^2 + \hbar\alpha\beta}, \quad (1.106)$$

Отже, мінімальна довжина у шестивимірному некомутативному фазовому просторі визначається величинами параметрів координатної та імпульсної некомутативностей  $\theta_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$  та має такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \Delta Q^{min} = \\ & = \left( \hbar \left( 2\alpha^2 + \frac{(\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2)\beta^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 2\beta^2 + \frac{(\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2)\alpha^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \end{aligned}$$

$$+\hbar\alpha^2(\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2)^{\frac{1}{2}} + \hbar\beta^2(\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2)^{\frac{1}{2}} + \hbar\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.107)$$

$$\Delta Q = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{Q}^2 \rangle}.$$

Зауважимо, що при  $\beta = 0$ , маємо мінімальну довжину у координатному просторі  $\Delta Q^{min} = \Delta R^{min}$ , що узгоджується з виразом (1.72). У випадку  $\alpha = 0$  на основі результату (1.107) отримаємо мінімальну довжину у імпульсному просторі, що відповідає результату (1.94).

### 1.3 Алгебри з некомутативністю типу Лі

Некомутативні алгебри Лі типу характеризуються такими співвідношеннями:

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}^k X_k, \quad (1.108)$$

де константи  $\theta_{ij}^k$  антисиметричні за нижніми індексами параметри некомутативності [94–104].

В залежності від вибору констант  $\theta_{ij}^k$  розрізняють випадки, коли комутатор координат пропорційний часу

$$[X_i, X_j] = \frac{i\hbar t}{\kappa} (\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}), \quad (1.109)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (1.110)$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (1.111)$$

(індекси  $\rho, \tau \in$  фіксовані та різні  $i, j = (1, 2, 3)$ ,  $\kappa$  – параметр [94, 105]), комутатор координат пропорційний координаті

$$[X_k, X_\gamma] = i\hbar\frac{X_l}{\tilde{\kappa}}, \quad [X_l, X_\gamma] = -i\hbar\frac{X_k}{\tilde{\kappa}}, \quad (1.112)$$

$$[P_k, X_\gamma] = i\hbar\frac{P_l}{\tilde{\kappa}}, \quad [P_l, X_\gamma] = -i\hbar\frac{P_k}{\tilde{\kappa}}, \quad (1.113)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [X_\gamma, P_\gamma] = i\hbar, \quad (1.114)$$

$$[X_k, X_l] = [P_m, P_n] = 0, \quad (1.115)$$

(індекси  $k, l, \gamma \in$  фіксовані та різні  $k, l, \gamma = (1, 2, 3)$ ,  $i \neq \gamma, j \neq \gamma$ ,  $m, n = (1, 2, 3)$ ,  $\tilde{\kappa}$  – константа [94]).

У більш загальному випадку некомутативна алгебра типу Лі характеризується такими співвідношеннями

$$[X_i, X_j] = i\hbar(\theta_{ij}^0 t + \theta_{ij}^k X_k), \quad (1.116)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \bar{\theta}_{ij}^k X_k + \tilde{\theta}_{ij}^k P_k), \quad (1.117)$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (1.118)$$

де  $i, j, k = (1, 2, 3)$ . Параметри  $\theta_{ij}^0, \theta_{ij}^k, \bar{\theta}_{ij}^k, \tilde{\theta}_{ij}^k$  – антисиметричні відносно нижніх індексів параметри некомутативності. Зауважимо, що комутатор для часу і координат дорівнює нулю [98]. Параметри  $\theta_{ij}^0, \theta_{ij}^k, \bar{\theta}_{ij}^k, \tilde{\theta}_{ij}^k$  не є довільні, що пов'язано з тотожністю Якобі. Досліджуючи обмеження на параметри  $\theta_{ij}^0, \theta_{ij}^k, \bar{\theta}_{ij}^k, \tilde{\theta}_{ij}^k$ , які випливають з тотожності Якобі, у роботі [98] запропоновано два типи некомутативних алгебр. Перша характеризується такими співвідношеннями:

$$[X_k, X_\gamma] = i\hbar \left( -\frac{t}{\kappa} + \frac{X_l}{\tilde{\kappa}} \right), \quad (1.119)$$

$$[X_l, X_\gamma] = i\hbar \left( \frac{t}{\kappa} - \frac{X_k}{\tilde{\kappa}} \right), \quad (1.120)$$

$$[X_k, X_l] = i\hbar \frac{t}{\kappa}, \quad (1.121)$$

$$[P_k, X_\gamma] = i\hbar \frac{P_l}{\tilde{\kappa}}, \quad (1.122)$$

$$[P_l, X_\gamma] = -i\hbar \frac{P_k}{\tilde{\kappa}}, \quad (1.123)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad (1.124)$$

$$[X_\gamma, P_\gamma] = i\hbar, \quad [P_m, P_n] = 0, \quad (1.125)$$

Алгебра другого типу має такий вигляд

$$[X_k, X_\gamma] = i\hbar \left( -\frac{t}{\kappa} + \frac{X_l}{\tilde{\kappa}} \right), \quad (1.126)$$

$$[X_l, X_\gamma] = i\hbar \left( \frac{t}{\kappa} - \frac{X_k}{\tilde{\kappa}} \right), \quad (1.127)$$

$$[P_k, X_\gamma] = i\hbar \left( \frac{X_l}{\tilde{\kappa}} + \frac{P_l}{\tilde{\kappa}} \right), \quad (1.128)$$

$$[P_l, X_\gamma] = i\hbar \left( \frac{X_k}{\bar{\kappa}} - \frac{P_k}{\tilde{\kappa}} \right), \quad (1.129)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad (1.130)$$

$$[X_\gamma, P_\gamma] = i\hbar, \quad (1.131)$$

$$[X_k, X_l] = [P_m, P_n] = 0, \quad (1.132)$$

де індекси  $k, l, \gamma$  є різні та фіксовані. Алгебра (1.120)-(1.125) може бути отримана, поклавши

$$\theta_{kl}^0 = -\theta_{k\gamma}^0 = \frac{1}{\kappa}, \quad (1.133)$$

$$\theta_{l\gamma}^0 = \frac{1}{\kappa} \quad (1.134)$$

$$\theta_{k\gamma}^l = -\theta_{l\gamma}^k = \tilde{\theta}_{k\gamma}^l = -\tilde{\theta}_{l\gamma}^k = \frac{1}{\tilde{\kappa}}. \quad (1.135)$$

Алгебра (1.127)-(1.132) відповідає випадку:

$$\theta_{l\gamma}^0 = -\theta_{k\gamma}^0 = \frac{1}{\kappa}, \quad (1.136)$$

$$\theta_{k\gamma}^l = -\theta_{l\gamma}^k = \frac{1}{\tilde{\kappa}}, \quad (1.137)$$

$$\tilde{\theta}_{k\gamma}^l = -\tilde{\theta}_{l\gamma}^k = \tilde{\theta}_{k\gamma}^l = -\tilde{\theta}_{l\gamma}^k = \frac{1}{\tilde{\kappa}}. \quad (1.138)$$

## 1.4 Алгебри з нелінійною деформацією

Узагальнене співвідношення невизначеностей (1.7), де

$$\Delta X = \sqrt{\langle \Delta X^2 \rangle}, \quad (1.139)$$

$$\Delta P = \sqrt{\langle \Delta P^2 \rangle}, \quad (1.140)$$

можна отримати, розглянувши деформацію комутаційних співвідношень для операторів координати та імпульсу

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2). \quad (1.141)$$

Параметр  $\beta$  називають параметром деформації [106–108]. У границі  $\beta \rightarrow 0$  співвідношення (1.141) переходить у звичне комутаційне співвідношення  $[X, P] = i\hbar$ .

Координати та імпульси, які задовольняють деформоване співвідношення (1.141) можуть бути представлені через координати та імпульси  $x, p$  для яких використовується звична рівність  $[x, p] = i\hbar$ . А саме, справедливим є таке представлення:

$$X = x, \quad (1.142)$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta}p), \quad (1.143)$$

Більш загальна деформація комутаційних співвідношень

$$[X, P] = i\hbar(1 + \alpha X^2 + \beta P^2) \quad (1.144)$$

(де  $\alpha, \beta$  – константи,  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha\beta < \hbar^{-2}$ ) приводить до мінімальних невизначеностей координати та імпульсу [108–112]

$$\Delta X_0 = \hbar \sqrt{\frac{\beta}{1 - \hbar^2 \alpha \beta}}, \quad (1.145)$$

$$\Delta P_0 = \hbar \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \hbar^2 \alpha \beta}}. \quad (1.146)$$

Важливо зауважити, що алгебра (1.144) пов'язана з  $q$ -деформованою алгеброю для операторів знищення  $a$  та породження  $a^+$

$$[a, a^+]_q = aa^+ - qa^+a = 1. \quad (1.147)$$

А саме, алгебра (1.144) відповідає алгебрі (1.147) з параметром

$$q = \frac{1 + \hbar\sqrt{\alpha\beta}}{1 - \hbar\sqrt{\alpha\beta}}, \quad (1.148)$$

[113]. У випадку  $\beta = 0$  алгебра (1.144), а також більш загальна алгебра

$$[X, P] = i\hbar g(X) \quad (1.149)$$

( $g(X)$  – функція деформації) описують частинку з масою залежною від координати [111, 114, 115].

Одновимірна деформована алгебра (1.141) була узагальнена Кемпфом на випадки більших вимірностей

$$[X_i, X_j] = i\hbar \frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 + \beta P^2} (P_i X_j - P_j X_i), \quad (1.150)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij}(1 + \beta P^2) + \beta' P_i P_j), \quad (1.151)$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (1.152)$$



тут  $\beta \geq 0$ ,  $\beta' \geq 0$  – параметри деформації [116] (див. також [116–126]). Деформація комутаційних співвідношень (1.150)-(1.152) приводить до існування мінімальної довжини, яка визначається величинами параметрів деформації  $\hbar\sqrt{\beta + \beta'}$ .

Алгебру (1.150)-(1.152) можна переписати у більш загальному вигляді

$$[X_i, X_j] = G(P^2)(X_i P_j - X_j P_i), \quad (1.153)$$

$$[X_i, P_j] = f(P^2)\delta_{ij} + F(P^2)P_i P_j, \quad (1.154)$$

$$[P_i, P_j] = 0. \quad (1.155)$$

Функції  $G(P^2)$ ,  $F(P^2)$ ,  $f(P^2)$  задовольняють співвідношення

$$f(F - G) - 2f'(f + FP^2) = 0, \quad (1.156)$$

$$f' = \frac{\partial f}{\partial P^2}, \quad (1.157)$$

яке випливає з тотожності Якобі [127].

Варто відзначити, що для опису квантованого простору було розглянуто різні функції деформацій [128–134]. Для прикладу, поклавши  $f = 1 + \beta P^2$ ,  $F = \beta'$ , отримаємо, що співвідношення (1.153)-(1.155) відтворюють співвідношення алгебри (1.150)-(1.152). Якщо  $f = 1$ ,  $F = \beta$  алгебра (1.153)-(1.155) відповідає нерелятивістській алгебрі Снайдера (1.4)-(1.6). Розглянувши функції,  $f = \sqrt{1 + \beta P^2}$ ,  $F = \beta\sqrt{1 + \beta P^2}$  побудуємо алгебру з комутативними координатами та комутативними імпульсами [135]

$$[X_i, X_j] = [P_i, P_j] = 0, \quad (1.158)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\sqrt{1 + \beta P^2}(\delta_{ij} + \beta P_i P_j). \quad (1.159)$$

Зауважимо, що алгебру з комутативними координатами та комутативними імпульсами можна отримати з співвідношень (1.150)-(1.152), поклавши  $\beta' = 2\beta$  та записавши їх з точністю до першого порядку за параметрами деформації. Алгебра має такий вигляд:

$$[X_i, X_j] = [P_i, P_j] = 0, \quad (1.160)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij}(1 + \beta P^2) + 2\beta P_i P_j), \quad (1.161)$$

[22, 136]. Алгебри (1.158)-(1.159), (1.160)-(1.161) на відміну від (1.153)-(1.155) є інваріантними відносно трансляцій у координатному просторі.

На завершення цього розділу також варто відзначити, що у літературі відомі алгебри, які зумовлюють існування максимальної довжини та мінімального імпульсу. Для прикладу, зважаючи на космологічний горизонт частинок, у роботі [137] розглянуто деформовану алгебру

$$[X, P] = i\hbar \frac{1}{1 - \alpha X^2}, \quad (1.162)$$

яка зумовлює існування максимальної довжини  $1/\sqrt{\alpha}$ , та мінімального імпульсу  $3\sqrt{3}\hbar\sqrt{\alpha}/4$ .

Автори статті [138] вивели деформовану алгебру

$$\sigma(X)XP - PX = i\lambda(X), \quad (1.163)$$

розглянувши  $\mu$ -деформовану модель темної матерії. Алгебра зумовлює існування мінімальних та максимальних довжин та імпульсів. У співвідношенні (1.163) функції  $\sigma(X)$ ,  $\lambda(X)$  дійсні для  $0 < \mu < 0.5$  та прямують до 1 у границі  $\mu \rightarrow 0$ .

## 1.5 Лоренц-коваріантна деформована алгебра

Розгляньмо лоренц-коваріантну деформовану алгебру, породжену координатами  $\hat{X}^\mu$  та імпульсами  $\hat{P}^\nu$ , які задовольняють такі комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned} [\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu] &= -i\hbar[1 - \beta(\hat{P}_\rho \hat{P}^\rho - m^2 c^2)]g^{\mu\nu}, \\ [\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] &= 2i\hbar\beta(\hat{X}^\nu \hat{P}^\mu - \hat{X}^\mu \hat{P}^\nu), \\ [\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu] &= 0, \end{aligned} \quad (1.164)$$

де  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ,  $\beta$  — малий невід'ємний параметр,  $m$  — маса частинки,  $c$  — швидкість світла,  $g^{\mu\nu}$  — метричний тензор

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (1.165)$$

Деформована алгебра (1.164) є окремим випадком загальної алгебри, представленої в [97], і може розглядатися як узагальнення (1.9) з  $\beta' = 0$  на релятивістський випадок. Координати та імпульси, які задовольняють співвідношення (1.164), можуть бути представлені як

$$\begin{aligned} \hat{X}^\mu &= [1 - \beta(\hat{p}_\rho \hat{p}^\rho - m^2 c^2)]\hat{x}^\mu + i\hbar\gamma\hat{p}^\mu, \\ \hat{P}^\mu &= \hat{p}^\mu, \end{aligned} \quad (1.166)$$

де  $x^\mu$  and  $p^\nu$  задовольняють недеформовану алгебру

$$\begin{aligned} [\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] &= -i\hbar g^{\mu\nu}, \\ [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] &= 0, \\ [\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (1.166)$$

Константа  $\gamma$  є довільною дійсною константою, яка не впливає на комутаційні співвідношення (1.164). Іншими словами, (1.166) представляє сімейство представлень, параметризованих через  $\gamma$ .

Можна показати, що оператори  $\hat{X}^\mu$  та  $\hat{P}^\mu$ , визначені в (1.166), є ермітовими по відношенню до модифікованого скалярного добутку, який в імпульсному просторі має вигляд

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{[1 - \beta(p_\rho p^\rho - m^2 c^2)]^\alpha} \psi^*(p^\mu) \phi(p^\mu), \quad (1.168)$$

з

$$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{\beta}. \quad (1.169)$$

Легко бачити, що якщо дозволити енергії

$$E = cP^0 = cp^0, \quad (1.170)$$

набувати дуже великих значень, вагова функція в (1.168) стає розбіжною. Це вказує на те, що стани з такими енергіями мають бути відкинуті як нефізичні. Тому ми обмежуємося розглядом станів з енергіями, які задовольняють умову

$$1 - \beta((p^0)^2 - p^2 - m^2 c^2) > 0, \quad (1.171)$$

для всіх можливих значень імпульсу  $p$ . Ця умова призводить до такої вимоги для енергій фізично прийнятних станів:

$$\beta[(p^0)^2 - m^2 c^2] < 1. \quad (1.172)$$

Важливо підкреслити, що при виконанні умови (1.172), вагова функція в (1.168) не містить розбіжностей і не залежить від вибору  $\gamma$  у представленні (1.166). Також варто зазначити, що в роботі [16] було виявлено, що спектр  $(1+1)$ -вимірного осцилятора Дірака з лоренц-коваріантною деформованою алгеброю є обмеженим. Наш результат сумісний з аналогічною умовою (1.172), яка була отримана в [16].

Отже, запропонована лоренц-коваріантна деформована алгебра відповідає принципу мінімальної довжини та призводить до ізотропної мінімальної невизначеності координат, яка виражена наступною формулою:

$$\Delta X_{min} = \hbar \sqrt{3\beta(1 - \beta[(p^0)^2 - m^2c^2])}. \quad (1.173)$$

Доведення цього результату є аналогічним до того, що було проведено в [16].

Алгебра (1.164) має цікаву особливість. Якщо припустити, що параметр деформації можна представити наступним чином

$$\beta = \frac{\kappa}{c^2}, \quad (1.174)$$

де  $\kappa$  – це параметр, який не залежить від швидкості світла  $c$ , алгебра (1.164) у нерелятивістській границі ( $c \rightarrow \infty$ ) перейде у недеформовану

$$[\hat{x}^j, \hat{p}^k] = -i\hbar g^{jk}, \quad [\hat{x}^j, \hat{x}^k] = 0, \quad [\hat{p}^j, \hat{p}^k] = 0.$$

Тут індекси  $j$  та  $k$  позначають просторові виміри. Цей факт можна легко довести, якщо врахувати дію деформованих операторів  $\hat{X}^j$  та  $\hat{P}^j$  на хвильову функцію частинки масою  $m$ , представленої як

$$\Psi(q, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}\psi(q, t). \quad (1.175)$$

Справді, ми отримаємо такі формули

$$\begin{aligned} \hat{X}^j \Psi(q, t) &= \hat{x}^j [1 - \beta(\hat{p}_\rho \hat{p}^\rho - m^2c^2)] \Psi(q, t) = \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t} \hat{x}^j [1 - \frac{\kappa}{c^2} \hat{p}_\rho \hat{p}^\rho] \psi(q, t), \end{aligned} \quad (1.176)$$

$$\hat{P}^j \Psi(q, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t} \hat{p}^j \psi(q, t), \quad (1.177)$$

які в границі  $c \rightarrow \infty$  дають

$$\begin{cases} \hat{X}^j \psi(q, t) = \hat{x}^j \psi(q, t), \\ \hat{P}^j \psi(q, t) = \hat{p}^j \psi(q, t), \end{cases} \quad (1.178)$$

Важливо підкреслити, що фазовий множник  $\exp(-imc^2t/\hbar)$  у релятивістському виразі скорочується. В результаті в нерелятивістській границі деформовані оператори  $\hat{X}^j$  та  $\hat{P}^j$  зводяться до

недеформованих, що свідчить про те, що алгебра (1.164) у цій границі переходить до канонічної алгебри.

Це означає, що деформовану алгебру (1.164) можна розглядати як ефект, який проявляється лише в релятивістському контексті. Слід відмітити, що в порівнянні з алгеброю Снайдера [1] чи релятивістською узагальненою алгеброю Кемпфа [16], запропонована алгебра (1.164) має важливий аспект - вона має нерелятивістську границю.

Розглянемо симетрійні властивості деформованої алгебри (1.164). Розпочнемо з нескінченно малих перетворень Лоренца. Можна показати, що ці перетворення, записані як

$$\hat{X}'^\mu = \hat{X}^\mu + \delta\hat{X}^\mu, \quad (1.179)$$

$$\delta\hat{X}^\mu = \delta\omega_\nu^\mu \hat{X}^\nu, \quad (1.180)$$

$$\hat{P}'^\mu = \hat{P}^\mu + \delta\hat{P}^\mu, \quad (1.181)$$

$$\delta\hat{P}^\mu = \delta\omega_\nu^\mu \hat{P}^\nu, \quad (1.182)$$

з

$$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu} \in \mathbb{R} \quad (1.183)$$

залишають деформовану алгебру (1.164) незмінною.

Щоб довести це, підставимо (1.179) у перше комутаційне співвідношення з (1.164). Отримаємо

$$\begin{aligned} [\hat{X}'^\mu, \hat{P}'^\nu] &= [\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu] + [\delta\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu] + \\ &+ [\hat{X}^\mu, \delta\hat{P}^\nu] = [\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu] + \delta\omega_\rho^\mu [\hat{X}^\rho, \hat{P}^\nu] + \delta\omega_\rho^\nu [\hat{X}^\mu, \hat{P}^\rho]. \end{aligned}$$

Згідно з (1.183), останні два доданки дають ноль

$$\begin{aligned} \delta\omega_\rho^\mu [\hat{X}^\rho, \hat{P}^\nu] + \delta\omega_\rho^\nu [\hat{X}^\mu, \hat{P}^\rho] &= \\ = -i\hbar[1 - \beta(\hat{P}_\rho \hat{P}^\rho - m^2 c^2)](\delta\omega_\nu^\mu + \delta\omega_\mu^\nu) &= 0. \end{aligned} \quad (1.184)$$

Таким чином, ми отримуємо

$$[\hat{X}'^\mu, \hat{P}'^\nu] = [\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu] = -i\hbar[1 - \beta(\hat{P}_\rho \hat{P}^\rho - m^2 c^2)]g^{\mu\nu}, \quad (1.185)$$

що може бути переписане як

$$[\hat{X}'^\mu, \hat{P}'^\nu] = -i\hbar[1 - \beta(\hat{P}'_\rho \hat{P}'^\rho - m^2 c^2)]g^{\mu\nu}, \quad (1.186)$$

оскільки

$$\hat{P}'_\rho \hat{P}'^\rho = \hat{P}_\rho \hat{P}^\rho. \quad (1.187)$$

Можна провести аналогічне доведення для двох інших комутаційних співвідношень. Це дозволяє підтвердити незмінність нашої деформованої алгебри під дією перетворень Лоренца. Генератори цих перетворень, що задовольняють властивостям

$$\delta \hat{X}^\mu = \frac{i}{2\hbar} \delta \omega^{\alpha\beta} [\hat{L}_{\alpha\beta}, \hat{X}^\mu], \quad (1.188)$$

$$\delta \hat{P}^\mu = \frac{i}{2\hbar} \delta \omega^{\alpha\beta} [\hat{L}_{\alpha\beta}, \hat{P}^\mu] \quad (1.189)$$

задаються як

$$\hat{L}_{\alpha\beta} = [1 - \beta(\hat{P}_\rho \hat{P}^\rho - m^2 c^2)]^{-1} (\hat{X}_\alpha \hat{P}_\beta - \hat{X}_\beta \hat{P}_\alpha). \quad (1.190)$$

Також можемо показати, що нескінченно малі трансляційні перетворення повинні бути деформовані

$$\hat{X}'^\mu = \hat{X}^\mu + \delta \hat{X}^\mu, \quad (1.191)$$

$$\delta \hat{X}^\mu = -\delta a^\mu - g(\hat{P}^2) \delta a_\nu \hat{P}^\nu \hat{P}^\mu, \quad (1.192)$$

$$\hat{P}'^\mu = \hat{P}^\mu + \delta \hat{P}^\mu, \quad (1.193)$$

$$\delta \hat{P}^\mu = 0, \quad (1.194)$$

де

$$g(\hat{P}^2) = \frac{2\beta}{1 - \beta(\hat{P}_\rho \hat{P}^\rho - m^2 c^2)}. \quad (1.195)$$

Генератори трансляції мають вигляд

$$\hat{\Pi}_\alpha = [1 - \beta(\hat{P}_\rho \hat{P}^\rho - m^2 c^2)]^{-1} \hat{P}_\alpha \quad (1.196)$$

і наступні співвідношення виконуються

$$\delta \hat{X}^\mu = \frac{i}{\hbar} \delta a^\alpha [\hat{\Pi}_\alpha, \hat{X}^\mu], \quad \delta \hat{P}^\mu = \frac{i}{\hbar} \delta a^\alpha [\hat{\Pi}_\alpha, \hat{P}^\mu].$$

Важливо зазначити, що алгебра деформованих генераторів перетворень Лоренца та трансляції залишається недеформованою:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_{\alpha\beta}, \hat{L}_{\rho\sigma}] &= -i\hbar(g_{\alpha\rho}\hat{L}_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}\hat{L}_{\beta\rho} - g_{\beta\rho}\hat{L}_{\alpha\sigma} + g_{\beta\sigma}\hat{L}_{\alpha\rho}), \\ [\hat{\Pi}_\alpha, \hat{\Pi}_\beta] &= 0, \\ [\hat{L}_{\alpha\beta}, \hat{\Pi}_\rho] &= -i\hbar(g_{\alpha\rho}\hat{\Pi}_\beta - g_{\beta\rho}\hat{\Pi}_\alpha). \end{aligned} \quad (1.197)$$

Для порівняння див. роботи [16, 74], де були розглянуті деформовані симетрії інших лоренц-коваріантних деформованих алгебр.

При переході від квантової до класичної механіки, слід зробити заміну

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] \Rightarrow \{A, B\}. \quad (1.198)$$

Таким чином, дужки Пуассона для канонічних змінних, що відповідають комутаційним співвідношенням (1.164) записуються

$$\begin{aligned} \{X^\mu, P^\nu\} &= -[1 - \beta(P_\rho P^\rho - m^2 c^2)]g^{\mu\nu}, \\ \{X^\mu, X^\nu\} &= 2(P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu), \\ \{P^\mu, P^\nu\} &= 0. \end{aligned} \quad (1.199)$$

Дужки Пуассона повинні мати ті ж властивості, що і квантово-механічний комутатор. А саме, вони повинні бути антисиметричними, білінійними, і задовольняти правилам Лейбніца та тотожності Якобі. Ці вимоги дозволяють вивести загальну форму дужок Пуассона для довільних функцій координат та імпульсів як

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \left( \frac{\partial F}{\partial X^\mu} \frac{\partial G}{\partial P^\nu} - \frac{\partial F}{\partial P^\nu} \frac{\partial G}{\partial X^\mu} \right) \{X^\mu, P^\nu\} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial X^\mu} \frac{\partial G}{\partial X^\nu} \{X^\mu, X^\nu\}. \end{aligned} \quad (1.200)$$

Цей результат було представлено вперше в [37] та доведено в [40] для нерелятивістських версій деформованих алгебр. Узагальнення на релятивістський випадок є очевидним.

## 1.6 Висновки

Модифікація звичних комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів дозволяє описати структури

простору на планківських масштабах (існування кванта простору). Відомі є різні типи деформованих алгебр.

У розділі розглянуто основні алгебри у яких комутатори для операторів координат та операторів імпульсів дорівнюють константі. Ці алгебри відомі як алгебри канонічного типу. Досліджено мінімальну довжину, визначену у координатному, імпульсному та фазовому просторі. Такі дослідження здійснено на основі узагальнених співвідношень невизначеностей для координат та імпульсів, які впливають із співвідношень алгебри, а також на основі розв'язків задачі на власні значення оператора квадрату довжини. Показано, що мінімальна довжина у координатному просторі визначається параметрами координатної некомутативності. Мінімальна довжина у імпульсному просторі залежить від параметрів імпульсної некомутативності.

Також розглянуто клас некомутативних алгебр, який відомий, як некомутативні алгебри типу Лі. У випадку таких алгебр комутатори для координат та імпульсів пропорційні координатам та імпульсам. Вивчено основні типи нелінійних деформованих алгебр, у яких комутатори дорівнюють нелінійним функціям координат та імпульсів. Серед них нерелятивістська алгебра Снайдера, алгебра Кемпфа та їх узагальнення. Також у розділі розглянуто лоренц-коваріантну деформовану алгебру, яка описує простір з мінімальною довжиною. Запропонована алгебра у нерелятивістській границі переходить до недеформованої алгебри. Важливо зауважити, що інші відомі алгебри з мінімальною довжиною, зокрема алгебра Снайдера, чи алгебра, яка розглядалася у роботі [16] такою властивістю не характеризуються.

У наступних розділах буде розглянуто вплив деформацій комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів на розв'язки задачі Кеплера. На основі порівняння теоретичних результатів досліджень з даними спостережень будуть знайдені оцінки для мінімальної довжини.



## Розділ 2

# Задача Кеплера в просторі з деформованими дужками Пуассона з мінімальною довжиною

### 2.1 Вступ

Деформована алгебра Гайзенберга дає можливість феноменологічного опису квантованого простору. Але водночас це викликає деякі проблеми фундаментального характеру, серед яких проблема порушення слабкого принципу еквівалентності [139].

Слабкий принцип еквівалентності стверджує, що траєкторія руху частинки в гравітаційному полі залежить лише від її початкового положення та швидкості, і не залежить від маси, складу та структури частинки. Цей принцип також відомий як універсальність вільного падіння або принцип еквівалентності Галілея і може розглядатися як підтвердження еквівалентності інерційної та гравітаційної мас. Принцип еквівалентності був перевірений з точністю до  $10^{-14}$  за допомогою супутника MICROSCOPE [140].

Як зазначено в [139], в межах деформованої алгебри з мінімальною довжиною порушується принцип слабкої еквівалентності. Ця проблема виникає через припущення про однаковість параметру деформації для елементарних частинок та макроскопічних тіл. Однак у роботах [43, 139] було введено зв'язок між параме-

тром деформації та масою:

$$\beta = \frac{\gamma}{m^2}, \quad (2.1)$$

де  $\gamma$  є фундаментальною константою для всіх частинок. Ця ідея відновлює принцип еквівалентності в деформованому просторі з мінімальною довжиною та веде до отримання інших важливих результатів, таких як збереження адитивності кінетичної енергії системи частинок та незалежність кінетичної енергії від складу системи. Також це співвідношення відновлює незалежність перетворення Галілея та Лоренца у деформованому просторі [42].

Незважаючи на велику кількість досліджень гіпотези мінімальної довжини, перевірка гіпотези все ще потрібна. Одним з важливих аспектів, пов'язаних з гіпотезою мінімальної довжини, є розробка методів для її експериментальної перевірки. Стаття [141] містить аналіз верхніх меж мінімальної довжини, отриманих з вивчення властивостей різних систем. Проте головна мета полягає не лише в оцінці верхньої межі мінімальної довжини, а у підтвердженні чи спростуванні гіпотези про її існування шляхом порівняння з експериментальними даними. Це вимагає достовірної теоретичної моделі та точних вимірів. Особливо важливо дослідити вплив мінімальної довжини на системи з потенціальною енергією в якій присутня сингулярність, оскільки очікується, що такі системи будуть особливо чутливими до ефектів квантованості простору. З цієї точки зору, задача Кеплера представляє особливий інтерес.

У цьому розділі досліджується вплив деформованої алгебри Гайзенберга на рух системи частинок (макроскопічного тіла). Встановлено, що координати та імпульси центра мас системи частинок задовольняють деформовану алгебру з ефективними параметрами деформації. На основі отриманого висновку знайдено оцінку для мінімальної довжини на основі результатів досліджень зміщення перигелію Меркурію. Також вивчається задача Кеплера в спеціальній та загальній теорії відносності з лоренц-коваріантною деформованою дужкою Пуассона.

Розділ має таку структуру. У підрозділі 2.2 досліджується система частинок у просторі з деформованою алгеброю Гайзенберга. У підрозділі 2.3. знаходиться оцінка для мінімальної довжини на основі порівняння теоретичного результату для зміщення перигелію Меркурію, отриманого з врахуванням особливостей опису руху макроскопічного тіла у просторі з мінімальною довжиною, та даних спостереження. У підрозділі 2.4 розглядається лоренц-коваріантна гамільтонова механіка. Підрозділ 2.5 присвячено ви-

вченню впливу мінімальної довжини на лоренц-коваріантну гамільтонову механіку. У підрозділі 2.6 досліджується релятивістська частинка у центральному потенціалі у просторі з мінімальною довжиною. У підрозділі 2.7 розглядається задача Кеплера в рамках загальної теорії відносності. У підрозділі 2.8 досліджується вплив на таку задачу мінімальної довжини. Оцінки для останньої отримано у підрозділі 2.9. Також у підрозділі вивчається принцип еквівалентності. Висновки представлено у підрозділі 2.10. Результати опубліковано в роботах [43, 142, 143].

## 2.2 Система частинок у нерелятивістському деформованому просторі з узагальненим співвідношенням невизначеностей Гайзенберга

У цьому підрозділі ми вводимо внутрішні та зовнішні ступені вільностей для  $N$  частинок у деформованому просторі з узагальненим співвідношенням невизначеностей Гайзенберга. Також ми досліджуємо поведінку макроскопічного тіла у просторі з мінімальною довжиною. Деталі досліджень можна знайти у статті [43].

Ми припускаємо, що гамільтоніан для  $N$  частинок у деформованому просторі такий самий вигляд, як і у недеформованому просторі. А саме, можемо записати:

$$H_N = \sum_i \frac{P_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|) + V_{\text{ext}}, \quad (2.2)$$

де оператори координат  $X_i^\mu$  та імпульсів  $P_i^\nu$  для частинки з індексом  $i$  задовольняють комутаційні співвідношення

$$[X_i^\mu, P_i^\nu] = i\hbar(\delta^{\mu\nu}(1 + \beta_i P_i^2) + \beta'_i P_i^\mu P_i^\nu), \quad (2.3)$$

$$[P_i^\mu, P_i^\nu] = 0, \quad (2.4)$$

$$[X_i^\mu, X_i^\nu] =$$

$$= i\hbar \frac{(2\beta_i - \beta'_i) + (2\beta_i + \beta'_i)\beta P_i^2}{1 + \beta P_i^2} (P_i^\mu X_i^\nu - P_i^\nu X_i^\mu). \quad (2.5)$$

Тут  $\mu, \nu = 1, 2, 3(x, y, z)$ ,  $\beta_i, \beta'_i \geq 0$ . Оператори, які відповідають різним частинкам комутують.

В лінійному наближенні за параметрами деформації у випадку  $\beta_i^l = 2\beta_i$  маємо

$$\begin{aligned} [X_i^\mu, P_i^\nu] &= i\hbar(\delta^{\mu\nu}(1 + \beta P_i^2) + 2\beta_i P_i^\mu P_i^\nu), \\ [P_i^\mu, P_i^\nu] &= [X_i^\mu, X_i^\nu] = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Представлення для цих операторів, які задовольняють деформовану алгебру, має такий вигляд:

$$P_i^\mu = (1 + \beta_i p_i^2) p_i^\mu, \quad (2.7)$$

$$X_i^\mu = x_i^\mu, \quad (2.8)$$

де оператори  $x_i^\mu$ ,  $p_i^\mu$  відповідають недеформованому простору і задовольняють недеформовану алгебру Гайзенберга.

Для зворотного перетворення маємо

$$p^\mu = (1 - \beta P^2) P^\mu, \quad (2.9)$$

$$x^\mu = X^\mu. \quad (2.10)$$

Ми вводим в недеформованому просторі ступені вільностей, визначені звично

$$\mathbf{p}_0 = \sum_i \mathbf{p}_i, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{x}_0 = \sum_i \mu_i \mathbf{x}_i, \quad (2.12)$$

А також розглядаємо внутрішні ступені вільностей у такому вигляді

$$\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i - \mu_i \mathbf{p}_0, \quad (2.13)$$

$$\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0, \quad (2.14)$$

де  $\mu_i = m_i / \sum_i m_i$ . Легко перевірити, що оператори внутрішніх ступенів вільностей комутують з операторами зовнішніх ступенів вільностей. Оператори внутрішніх ступенів вільностей задовольняють такі умови:

$$\sum_i \Delta \mathbf{p}_i = 0, \quad (2.15)$$

$$\sum_i \mu_i \Delta \mathbf{x}_i = 0. \quad (2.16)$$

Це означає, що у нас є  $3(N - 1)$  незалежних внутрішніх ступенів вільностей, як і має бути. Зауважимо також, що у випадку  $V_{\text{ext}} = 0$  повний імпульс у недеформованому просторі  $\mathbf{p}_0$  комутує з гамільтоніаном і є інтегралом руху.

Для  $N$  частинок кінетична енергія може бути записана у такому вигляді:

$$T_N = \frac{P_0^2}{2m} + \sum_i \frac{\Delta P_i^2}{2m_i} + \Delta T, \quad (2.17)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta T = \frac{1}{m} \sum_i \beta_i [2\mu_i P_0^2 (\Delta P_i)^2 + 4\mu_i (\mathbf{P}_0 \Delta \mathbf{P}_i)^2 + \\ + 4\mu_i^2 P_0^2 (\mathbf{P}_0 \Delta \mathbf{P}_i) + 4\Delta P_i (\mathbf{P}_0 \Delta \mathbf{P}_i)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Оператори повного імпульсу та імпульсу відносного руху в деформованому просторі мають вигляд:

$$P_0^\mu = (1 + \tilde{\beta}_0 p_0^2) p_0^\mu, \quad (2.19)$$

$$\Delta P_i^\mu = (1 + \beta_i \Delta p_i^2) \Delta p_i^\mu. \quad (2.20)$$

Оператор повного імпульсу разом із спряженими координатами задовольняє відповідну деформовану алгебру, але з ефективним параметром деформації:

$$\tilde{\beta}_0 = \sum_i \mu_i^3 \beta_i. \quad (2.21)$$

Перший доданок у (2.17) – це кінетична енергія руху центру мас з повною масою  $m = \sum_i m_i$ , другий доданок – кінетична енергія відносного руху, третій доданок присутній лише в деформованому просторі і описує вплив відповідного руху на рух центра мас та навпаки.

Гамільтоніан для  $N$  частинок тепер має вигляд:

$$H_N = H_0 + H + \Delta T, \quad (2.22)$$

де

$$H_0 = \frac{P_0^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{X}_0), \quad (2.23)$$

$$H = \sum_i \frac{\Delta P_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(|\Delta \mathbf{X}_i - \Delta \mathbf{X}_j|), \quad (2.24)$$

Гамільтоніан  $H_0$  включає зовнішню ступінь вільності та відповідає руху центра мас,  $H$  описує внутрішній рух,  $\Delta T$  призводить до залежності між зовнішніми та внутрішніми ступенями вільності, і цей член зникає, коли деформація відсутня. Ми припускаємо, що зовнішній потенціал дуже повільно змінюється на відстанях порядку розміру системи. Тоді ми можемо не враховувати внутрішню структуру системи, і, отже, зовнішній потенціал залежить лише від центру мас  $N$  частинок.

Варто звернути увагу на таку властивість ефективного параметра деформації. Розділимо складну систему на дві підсистеми:  $i = 1, 2, \dots, N_1$  для першої і  $i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N$  для другої. Ми можемо окремо обчислити ефективний параметр деформації для кожної підсистеми:

$$\tilde{\beta}_1 = \sum_{j=1}^{N_1} \beta_j \left( \frac{m_j}{\sum_{i=1}^{N_1} m_i} \right)^3, \quad (2.25)$$

$$\tilde{\beta}_2 = \sum_{j=N_1+1}^N \beta_j \left( \frac{m_j}{\sum_{i=N_1+1}^N m_i} \right)^3. \quad (2.26)$$

Тоді ефективний параметр деформації системи, що складається з двох підсистем, має такий вигляд

$$\tilde{\beta}_0 = \tilde{\beta}_1 \left( \frac{\sum_{j=1}^{N_1} m_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right)^3 + \tilde{\beta}_2 \left( \frac{\sum_{j=N_1+1}^N m_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right)^3. \quad (2.27)$$

Підставивши (2.25) в (2.27), ми отримуємо, що  $\tilde{\beta}_0$  дорівнює ефективному параметру деформації, обчисленому для всієї системи.

Розглянемо систему, яка складається з  $N$  частинок з однаковими масами та однаковими параметрами деформації

$$m_1 = m_2 = \dots = m_N, \quad (2.28)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_N = \beta. \quad (2.29)$$

У цьому випадку з (2.21) ми отримуємо, що ефективний параметр деформації дорівнює:

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{\beta}{N^2}. \quad (2.30)$$

Отже, для системи, яка складається з великої кількості частинок, ефективний параметр деформації суттєво менший, ніж для частинок, з яких складається ця система.

### 2.3 Оцінка мінімальної довжини на основі досліджень зміщення перигелію Меркурію

Розгляньмо макроскопічне тіло у деформованому просторі, що відповідає  $N \rightarrow \infty$ . Ми цікавимося дослідженням руху центра мас у зовнішньому потенціалі. Для макроскопічної системи зовнішні ступені вільності змінюються у часі повільніше, ніж внутрішні. Має сенс припускати, що система частинок перебуває в рівноважному стані, і внутрішні ступені вільності розподілені відповідно до  $\exp(-H/k_B T)/Z$ , де  $Z$  – статистична сума,  $T$  – температура,  $k_B$  – константа Больцмана.

Після усереднення по внутрішнім ступеням вільності, ми отримуємо ефективний гамільтоніан, який відповідає центру мас та має такий вигляд:

$$\langle H_N \rangle = H_0 + \langle \Delta T \rangle + \langle H \rangle = \tilde{H}_0 + \langle H \rangle, \quad (2.31)$$

де  $\langle H \rangle$  – внутрішня енергія системи, яка є функцією температури і не залежить від зовнішніх ступенів вільності. Отже, ця величина щодо руху центру мас може розглядатися як константа. Ефективний гамільтоніан, що описує рух центра мас, має вигляд

$$\tilde{H}_0 = H_0 + \langle \Delta T \rangle \quad (2.32)$$

Після усереднення ми отримаємо:

$$\langle \Delta T \rangle = 10k_B T P_0^2 \sum_i \beta_i \mu_i^2, \quad (2.33)$$

тут, під час розрахунку, ми використовуємо той факт, що

$$\langle \Delta P_i^\mu \Delta P_i^\nu \rangle = \delta^{\mu\nu} \frac{1}{3} \langle \Delta \mathbf{P}_i^2 \rangle, \quad (2.34)$$

і що середні значення добутоків непарних степенів внутрішніх імпульсів рівні нулю:

$$\langle (\mathbf{P}_0 \Delta \mathbf{P}_i) \rangle = 0, \quad \langle \Delta \mathbf{P}_i^2 (\mathbf{P}_0 \Delta \mathbf{P}_i) \rangle = 0. \quad (2.35)$$

Беручи до уваги зв'язок середньої кінетичної енергії частинки з температурою, знайдемо

$$\langle \Delta \mathbf{P}_i^2 \rangle = 2m_i \langle \frac{\Delta \mathbf{P}_i^2}{2m_i} \rangle = 3m_i k_B T. \quad (2.36)$$

Важливо зауважити, що  $\Delta T$  пропорційний параметрам деформації. Тому під час усереднення цієї величини ми можемо використовувати недеформований простір у всіх розрахунках. Врешті, ефективний гамільтоніан для центра мас у деформованому просторі можна записати у такому вигляді:

$$\tilde{H}_0 = \frac{P_0^2}{2m^*} + V_{\text{ext}}(\mathbf{X}_0), \quad (2.37)$$

де ефективна маса

$$m^* = \frac{m}{1 + 20k_B T m \sum_i \beta_i \mu_i^2}. \quad (2.38)$$

Наголосимо, що  $X_0^\mu$  та  $P_0^\nu$  задовольняють співвідношення деформованої алгебри Гайзенберга з ефективним параметром деформації, який визначається як (2.21).

Для опису руху макроскопічного тіла ми можемо використовувати класичну границю, де квантово-механічні комутатори операторів замінюються дужками Пуассона для відповідних класичних змінних через  $[\dots, \dots]/i\hbar \Rightarrow \{\dots, \dots\}$ . У нашому випадку для алгебри (2.6) маємо:

$$\{X^\mu, P^\nu\} = \delta^{\mu\nu}(1 + \beta P^2) + 2\beta P^\mu P^\nu, \quad (2.39)$$

$$\{X^\mu, X^\nu\} = \{P^\mu, P^\nu\} = 0. \quad (2.40)$$

У роботі [119] досліджувався вплив деформації (2.3) на класичні орбіти частинок у полі центральної сили. У першому порядку за параметром деформації знайдено зміщення перигелію, зумовлене мінімальною довжиною. На основі порівняння отриманих результатів з даними спостереження зміщення перигелію для Меркурію [119] було отримано надзвичайно малу оцінку для мінімальної довжини

$$\hbar\sqrt{\beta} < 2.3 \times 10^{-68} \text{ м}. \quad (2.41)$$

Отриманий результат на 33 порядки менший за довжину Планка. Такий результат отримано через те, що автори роботи припустили, що параметри деформації для Меркурія такі ж, як і для



елементарних частинок. Насправді в (2.41) замість  $\beta$  необхідно використовувати ефективний параметр деформації  $\tilde{\beta}_0$  для Меркурія, як для системи, яка складається з елементарних частинок. Таким чином, замість (2.41) для Меркурія маємо

$$\hbar\sqrt{\tilde{\beta}_0} < 2.3 \times 10^{-68}\text{м}. \quad (2.42)$$

де ефективний параметр деформації для системи пов'язаний з параметрами деформації елементарних частинок (2.21).

Щоб знайти ефективний параметр деформації для Меркурія, спочатку оцінимо кількість елементарних частинок в ньому. Основний внесок у масу Меркурія складають нуклони (нейтрони та протони). Отже, врахувавши масу Меркурія  $M = 3.3 \times 10^{23}$  та масу нуклона  $m_{\text{нuc}} = 1.67 \times 10^{-27}$ , ми отримуємо кількість нуклонів в Меркурію

$$N_{\text{нuc}} = 2 \times 10^{50}. \quad (2.43)$$

Кількість електронів в Меркурії дорівнює кількості протонів, що приблизно вдвічі менше за кількість нуклонів

$$N_e = N_p \simeq \frac{N_{\text{нuc}}}{2} \simeq 10^{50}. \quad (2.44)$$

Тепер використовуючи (2.21), ми можемо пов'язати ефективний параметр деформації для Меркурія з параметрами деформації нуклонів  $\beta_{\text{нuc}}$  та електронів  $\beta_e$ :

$$\tilde{\beta}_0 = N_{\text{нuc}}\beta_{\text{нuc}} \left(\frac{m_{\text{нuc}}}{M}\right)^3 + N_e\beta_e \left(\frac{m_e}{M}\right)^3, \quad (2.45)$$

тут ми припускаємо, що протон та нейтрон мають однаковий параметр деформації

$$\beta_p = \beta_n = \beta_{\text{нuc}}. \quad (2.46)$$

Припускаючи, що другий член у (2.45) можна опустити, маємо

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{\beta}{N^2}. \quad (2.47)$$

Підставивши це в (2.42), маємо

$$\hbar\sqrt{\beta_{\text{нuc}}} < N_{\text{нuc}} \times 2.3 \times 10^{-68}\text{м} = 4.6 \times 10^{-18}\text{м} \quad (2.48)$$

і для верхньої межі мінімальної довжини нуклону отримаємо розумний результат

$$\Delta X_{\min}^{\text{nuc}} = \hbar \sqrt{3\beta_{\text{nuc}}} < 8.0 \times 10^{-18} \text{ м.} \quad (2.49)$$

Більш детальний аналіз ефективного параметра деформації показав, що для збереження принципу еквівалентності ефективний параметр деформації є обернено пропорційний до маси частинок

$$\beta = \frac{\gamma}{m^2} \quad (2.50)$$

тут  $\gamma$  – константа, яка однакова для всіх частинок (див. [135, 144]). Зауважимо, що тоді другий доданок у (2.45) можна опустити.

На завершення цього підрозділу підкреслимо важливість результату щодо ефективного параметра деформації. Множник  $1/N^2 \sim 1/m^2$  пояснює дивно малий результат для мінімальної довжини, отриманий у [119] на основі дослідження впливу деформації дужок Пуассона на рух планет. У лінійному порядку за параметром деформації автори виводять поправку до кута прецесії планети, зумовлену деформацією. Порівнюючи отриманий результат із спостережуваною прецесією перигелію Меркурія, автори оцінили верхню межу для параметра деформації або мінімальної довжини (в позначеннях автора)  $\hbar \sqrt{\beta} < 2,3 \times 10^{-68} \text{ м}$ . Цей дивно малий результат був отриманий через неявне припущення, зроблене авторами, а саме, що Параметри деформації для Меркурія такі ж, як і для елементарних частинок. Насправді результат, отриманий у [119], є правильним, але його слід розглядати як верхню межу для мінімальної довжина Меркурія в деформованому просторі. Основний внесок в ефективний параметр деформації вносять нуклони  $\tilde{\beta}_0 = \beta_{\text{nuc}}/N_{\text{nuc}}^2$ , де кількість нуклонів у Меркурії  $N_{\text{nuc}} = 2 \times 10^{50}$ . Підставляючи замість  $\beta$  ефективний параметр деформації  $\tilde{\beta}_0$  ми отримуємо верхню межу мінімальної довжини для нуклонів  $\Delta X_{\min}^{\text{nuc}} = \hbar \sqrt{3\beta_{\text{nuc}}} < 8,0 \times 10^{-18} \text{ м}$ , яка все ще є далекою від планківських масштабів. Розглядаючи нуклони як частинку, яка складається з трьох кварків ми також оцінюємо верхню межу мінімальної довжини для кварків  $2,4 \times 10^{-17}$  яка виявляється близькою до отриманої для електрона з дослідження атома водню.

## 2.4 Лоренц-коваріантна гамільтонова механіка

Розглянемо заряд  $e$  масою  $m$  в електромагнітному полі в недеформованому випадку. Дія цієї системи може бути записана як

$$S = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} - \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu, \quad (2.51)$$

де  $A_\mu$  — компоненти електромагнітного (3+1)-потенціалу. Для того щоб зберегти коваріантну форму опису, ми представимо дію у вигляді

$$S = \int d\tau \left( -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} - \frac{e}{c} A_\mu \dot{x}^\mu \right). \quad (2.52)$$

Тут точкою позначено похідну по параметру еволюції  $\tau$ . Вираз у дужках у (2.52) ми інтерпретуємо як функцію Лагранжа

$$L = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} - \frac{e}{c} A_\mu \dot{x}^\mu. \quad (2.53)$$

Введемо (3 + 1) - імпульс згідно означення

$$p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{mc \dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}} + \frac{e}{c} A_\mu = \pi_\mu + \frac{e}{c} A_\mu, \quad (2.54)$$

де  $\pi_\mu$  позначає кінематичний імпульс. Гамільтоніан системи рівний нулеві

$$H = -p_\mu \dot{x}^\mu - L = 0, \quad (2.55)$$

але компоненти (3 + 1)-імпульсу задовільняють умову

$$\left( p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \left( p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) = m^2 c^2. \quad (2.56)$$

Введемо повний гамільтоніан для нашої системи, що враховує в'язь (2.56)

$$H_T = \lambda \left[ \left( p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \left( p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) - m^2 c^2 \right], \quad (2.57)$$

де  $\lambda$  невідомий множник Лагранжа. Тепер ми готові записати рівняння Гамільтона

$$\dot{x}^\mu = \{x^\mu, H_T\} = -2\lambda \left( p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right), \quad (2.58)$$

$$\dot{p}^\mu = \{p^\mu, H_T\} = -2\lambda \frac{e}{c} \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} \left( p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) = \frac{e}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \dot{x}^\nu \quad (2.59)$$

Використовуючи (2.54) та (2.58) отримаємо множник Лагранжа

$$\lambda = -\frac{1}{2mc} \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = -\frac{1}{2mc} \frac{ds}{d\tau}. \quad (2.60)$$

З формули (2.58) та (2.59) виведемо вираз для  $\tau$ -похідної кінематичного імпульсу

$$\dot{\pi}_\rho = \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial x^\mu} \right) \dot{x}^\mu. \quad (2.61)$$

Якщо ми інтерпретуємо інваріантний параметр  $\tau$  як інтервал  $s$ , рівняння (2.61) зводиться до звичайного рівняння руху заряду у  $(3 + 1)$ -вимірній формі.

## 2.5 Лоренц-коваріантна гамільтонова механіка з деформованими дужками Пуассона

Вважатимемо, що у випадку деформованих лоренц-коваріантних дужок Пуассона (1.199) загальний гамільтоніан для зарядженої частинки в електромагнітному полі має такий самий вигляд, як у недеформованому випадку

$$H_T = \lambda \left[ \left( P^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \left( P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) - m^2 c^2 \right], \quad (2.62)$$

з тією лише різницею, що  $X^\mu$  і  $P^\mu$  задовольняють деформовану алгебру Пуассона.

Рівняння руху можна записати як

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu &= \\ &= 2\lambda \left( P_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) \left( \{X^\mu, P^\nu\} - \frac{e}{c} \frac{\partial A^\nu}{\partial X^{\mu'}} \{X^\mu, X^{\mu'}\} \right), \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\dot{P}^\mu = 2\lambda \frac{e}{c} \frac{\partial A^\nu}{\partial X^\mu} \left( P_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) \{P^\mu, X^{\mu'}\}. \quad (2.64)$$

З рівняння (2.63) просто отримати інтеграл руху для постійного електромагнітного потенціалу:

$$P^0 = \text{const}. \quad (2.65)$$

Цікаво, що у випадку вільної релятивістської частинки ( $A^\mu = 0$ ) вплив деформації зникає, бо отримані в цьому випадку рівняння

$$\dot{X}^\mu = -2\lambda P^\mu, \quad (2.66)$$

$$\dot{P}^\mu = 0, \quad (2.67)$$

відповідають рух з постійною швидкістю.

## 2.6 Релятивістська частинка в кулонівському потенціалі з деформованими дужками Пуассона

Давайте розглянемо притягальний кулонівський потенціал в  $(3 + 1)$ -вимірному просторі-часі із деформованими дужками Пуассона (1.199). Гамільтоніан системи набуває вигляду

$$H_T = \lambda \left[ \left( P^0 + \frac{1}{c} \frac{\alpha}{R} \right)^2 - P^2 - m^2 c^2 \right]. \quad (2.68)$$

Тут  $\alpha$  є константою взаємодії,  $R = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (X^i)^2}$ ,  $P^2 = \sum_{i=1}^3 (P^i)^2$  і координати  $X^\mu$  та імпульси  $P^\nu$  задовольняють деформовану алгебру Пуассона (1.199). У разі гравітаційної взаємодії константа взаємодії рівна  $\alpha = GmM$ , з  $G$  і  $M$  - гравітаційною константою та масою притягального центру відповідно.

Використовуючи класичний аналог представлення (1.166)

$$\begin{cases} X^\mu = x^\mu [1 - \beta (p_\rho p^\rho - m^2 c^2)], \\ P^\mu = p^\mu, \end{cases} \quad (2.69)$$

де  $x^\mu$  та  $p^\nu$  задовольняють канонічним дужкам Пуассона

$$\{x^\mu, p^\nu\} = -g^{\mu\nu}, \quad (2.70)$$

запишемо повний гамільтоніан системи

$$H_T = H_{0T} + 2\lambda\beta\frac{\alpha}{cr} \left( p^0 + \frac{\alpha}{cr} \right) \left( (p^0)^2 - p^2 - m^2c^2 \right) \quad (2.71)$$

де

$$H_{0T} = \lambda \left[ \left( p^0 + \frac{1}{c} \frac{\alpha}{r} \right)^2 - p^2 - m^2c^2 \right] \quad (2.72)$$

та  $r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i)^2}$ ,  $p^2 = \sum_{i=1}^3 (p^i)^2$ . Ми розглядаємо деформацію та релятивістські ефекти як збурення орбіти Кеплера. Ці ефекти викликають прецесію перигелію еліптичної орбіти. Зручно підрахувати швидкість прецесії з використанням вектора Гамільтона, швидкість прецесії якого збігається зі швидкістю прецесії перигелію [38]. Вектор Гамільтона має вигляд

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}}{m} - \frac{\alpha}{L} \frac{[\vec{L} \times \vec{r}]}{Lr} \quad (2.73)$$

і є пов'язаний із вектором Лапласа-Рунге-Лунца

$$\vec{A} = \left[ \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{L} \right] - \frac{\alpha\vec{r}}{r} \quad (2.74)$$

через

$$\vec{A} = [\vec{u} \times \vec{L}], \quad (2.75)$$

де  $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$  є вектором моменту імпульсу. Швидкість прецесії вектора Гамільтона становить

$$\vec{\omega}_\tau = \frac{[\vec{u} \times \dot{\vec{u}}]}{u^2}, \quad (2.76)$$

де

$$\dot{\vec{u}} = \{\vec{u}, H_T\}. \quad (2.77)$$

Використовуючи гамільтоніан (2.71), ми отримали, що вектор Гамільтона вже не є інтегралом руху, на відміну від недеформованого нерелятивістський випадку

$$\dot{\vec{u}} = \frac{2\lambda\alpha\vec{r}}{r^3} f(r, p). \quad (2.78)$$

Тут ми використали позначення

$$f(r, p) = \left[ \left( \frac{p^0}{mc} + \frac{\alpha}{mc^2 r} - 1 \right) + \beta \left( (p^0)^2 - p^2 - m^2 c^2 \right) \left( \frac{p^0}{mc} + \frac{2\alpha}{mc^2 r} \right) - 2\beta \left( \frac{\alpha p^0}{cr} + \frac{\alpha^2}{c^2 r^2} \right) \right]. \quad (2.79)$$

Швидкість прецесії вектора Гамільтона може бути записана як

$$\omega_\tau = \frac{2\lambda\alpha^2}{Lu^2r^2} \left( 1 - \frac{R_0}{r} \right) f(r, p), \quad (2.80)$$

де  $R_0 = \frac{L^2}{m\alpha}$  фокальний параметр незбуреної класичної орбіти.

Кут прецесії може бути знайдений як

$$\Delta\Theta = \int \omega_\tau d\tau, \quad (2.81)$$

де  $\tau$  змінюється в межах одного оберту. Зручно зробити заміну змінних в останньому інтегралі від еволюційного параметра  $\tau$  до часу в системі відліку спостерігача  $t$ , а потім до полярного кута  $\varphi$

$$\Delta\Theta = \int_0^T \omega_\tau \frac{d\tau}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \omega_\tau \frac{d\tau}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^{-1} d\varphi. \quad (2.82)$$

Похідна  $\frac{d\tau}{dt}$  може бути отримана з необхідною точністю за допомогою (2.60):

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{2\lambda} \frac{c}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}. \quad (2.83)$$

У цьому ж наближенні кутова швидкість дорівнює

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}. \quad (2.84)$$

Інтегруючи (2.82) з точністю до першого порядку за параметрами збурення, ми можемо використовувати співвідношення незбуреної

кеплерівської орбіти. Розрахунки кута прецесії системи, що описується гамільтоніаном (2.71) дають:

$$\Delta\Theta = \frac{\pi m\alpha}{R_0} \left( \frac{1}{m^2 c^2} - 4\beta \right). \quad (2.85)$$

Підставивши у (2.85) вираз для константи взаємодії  $\alpha = GmM$  отримуємо

$$\Delta\Theta = \frac{\pi GM}{c^2 R_0} (1 - 4\beta m^2 c^2). \quad (2.86)$$

Тут доданок пропорційний  $1/c^2$  є загальновідомий кут прецесії відносності у спеціальній теорії відносності. Нагадаємо, загальна теорія відносності передбачає для кута прецесії у шість разів більший доданок, ніж згаданий. Інший доданок зумовлена деформацією дужок Пуассона.

## 2.7 Задача Кеплера в загальній теорії відносності

Розглянемо рух планети в просторі-часі з метрикою Шварцшильда

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) cdt - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (2.87)$$

Тут  $x^\mu = (ct, \vec{r})$ ,  $r = |\vec{r}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i)^2}$ ,  $\Omega$  позначає тілесний кут, а  $r_s = 2GM/c^2$  позначає гравітаційний радіус.

Гамільтоніан системи запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} H_0 &= \lambda(g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 c^2) = \\ &= \lambda \left[ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} p_0^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) p_r^2 - \frac{L^2}{r^2} - m^2 c^2 \right], \end{aligned} \quad (2.88)$$

де  $\lambda$  — множник Лагранжа і  $p_\mu = (p_0, -\vec{p})$ ,  $p^2 = \sum_{i=1}^3 p_i^2$ . Враховуючи, що

$$p_r^2 = p^2 - \frac{L^2}{r^2}, \quad (2.89)$$



де  $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$  є вектором орбітального моменту, ми перепишемо гамільтоніан як

$$H_0 = \lambda \left[ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} p_0^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) p^2 - \frac{r_s L^2}{r^3} - m^2 c^2 \right]. \quad (2.90)$$

Розглядатимемо вплив загальної теорії відносності як збурення кеплерівських орбіт. Цей ефект викликає прецесію перигелію еліптичної орбіти. Зручно обчислювати прецесію орбіти спостерігаючи за прецесією вектора Гамільтона, оскільки швидкості прецесії орбіти та вектора Гамільтона співпадають [38]. Вектор Гамільтона має вигляд

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}}{m} - \frac{\alpha}{L} \frac{[\vec{L} \times \vec{r}]}{Lr}. \quad (2.91)$$

Швидкість прецесії вектора Гамільтона становить

$$\vec{\omega}_\tau^0 = \frac{[\vec{u} \times \dot{\vec{u}}]}{u^2}, \quad (2.92)$$

де

$$\dot{\vec{u}} = \{\vec{u}, H_0\}. \quad (2.93)$$

Швидкість прецесії вектора Гамільтона в лінійному наближенні за малим параметром  $1/c^2$  можна записати як

$$\begin{aligned} \omega_\tau^0 = \frac{\lambda r_s L}{m r^3 u^2} \left( \frac{\alpha r}{L^2} - \frac{1}{m} \right) \left( \frac{2 r_s p_0^2}{r} + 3 p^2 - \frac{3 L^2}{r^2} \right) - \\ - \frac{2 \alpha \lambda r_s}{m L u^2 r^2} \left( p^2 - \frac{L^2}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Нарешті, кут прецесії можна отримати за допомогою

$$\Delta \Theta_{GR} = \int \omega_\tau^0 d\tau, \quad (2.95)$$

де  $\tau$  змінюється в межах одного оберту. В останньому інтегралі зручно перейти від інтегрування по параметру еволюції  $\tau$  до інтегрування по часу  $t$ , а потім до інтегрування за полярним кутом  $\varphi$ :

$$\Delta \Theta_{GR} = \int_0^T \omega_\tau^0 \frac{d\tau}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \omega_\tau^0 \frac{d\tau}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^{-1} d\varphi. \quad (2.96)$$

Похідна  $\frac{d\tau}{dt}$  може бути отримана з необхідною точністю як

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{2m\lambda} \quad (2.97)$$

а кутова швидкість руху дорівнює

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}. \quad (2.98)$$

При інтегруванні (2.96) в лінійному наближенні за  $1/c^2$  ми можемо використовувати співвідношення, які справедливі для незбуреної кеплерівської орбіти. Розрахунок кута орбітальної прецесії системи описується гамільтоновим (2.88) виходом:

$$\Delta\Theta_{GR} = \frac{6\pi GM}{c^2 R_0}, \quad (2.99)$$

де  $R_0 = \frac{L^2}{m\alpha}$  та  $\alpha = GmM$  позначають фокальний параметр незбуреної класичної орбіти та константу зв'язку, відповідно. Цей результат є добре відомим виразом для кута прецесії в загальній теорії відносності.

## 2.8 Задача Кеплера з деформованими дужками Пуассона

Розглянемо рух планети в просторі-часі Шварцшильда з деформованими дужками Пуассона (1.199). Гамільтоніан системи запишемо у вигляді

$$H = \lambda \left[ \left(1 - \frac{r_s}{R}\right)^{-1} P_0^2 - \left(1 - \frac{r_s}{R}\right) P^2 - \frac{r_s \tilde{L}^2}{R^3} - m^2 c^2 \right]. \quad (2.100)$$

Тут  $R = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (X^i)^2}$ ,  $P^2 = \sum_{i=1}^3 P_i^2$  і  $\vec{L} = [\vec{R} \times \vec{R}]$ . Координати  $X_\mu$  та імпульси  $P_\nu$  задовольняють деформовану алгебру Пуассона (1.199).

Використовуючи представлення (1.166), ми запишемо гамільтоніан у такий спосіб

$$H = H_0 + \Delta H_\beta, \quad (2.101)$$

де  $H_0$  задано в (2.90), а доданок спричинений деформацією має вигляд

$$\Delta H_\beta = \lambda\beta(p_0^2 - p^2 - m^2c^2)\frac{r_s p_0^2}{r}. \quad (2.102)$$

Розглядатимемо вплив деформації та релятивістські ефекти як збурення кеплерівських орбіт. Ці ефекти викликають прецесію перигелію еліптичної орбіти. Подібно до недеформованого випадку ми обчислюємо швидкість прецесії вектора Гамільтона

$$\vec{\omega}_\tau = \frac{[\vec{u} \times \dot{\vec{u}}]}{u^2}, \quad (2.103)$$

де

$$\dot{\vec{u}} = \{\vec{u}, H\}. \quad (2.104)$$

Швидкість прецесії вектора Гамільтона можна записати як

$$\omega_\tau = \omega_\tau^0 + \omega_\tau^\beta \quad (2.105)$$

з  $\omega_\tau^0$  задано (2.94) і

$$\omega_\tau^\beta = -4\lambda\beta\alpha r_s m^2 c^2 \frac{L}{r^4 u^2} \left( \frac{\alpha r}{L^2} - \frac{1}{m} \right) \quad (2.106)$$

Кут прецесії можна отримати так само, як і в недеформованому випадку  $\varphi$

$$\Delta\Theta = \int_0^{2\pi} \omega_\tau \frac{d\tau}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^{-1} d\varphi. \quad (2.107)$$

Похідні  $\frac{d\tau}{dt}$  і  $\frac{d\varphi}{dt}$  з необхідною точністю представлені в (2.97) і (2.98). Інтегрування кута прецесії орбіти системи, що описується гамільтоніаном (2.101) дає:

$$\Delta\Theta = \Delta\Theta_{GR} + \Delta\Theta_\beta, \quad (2.108)$$

де  $\Delta\Theta_{GR}$  є кутом прецесії спричиненим загальною теорією відносності та визначається (2.99), а  $\Delta\Theta_\beta$  є кутом прецесії, викликаним деформацією та визначається такою формулою

$$\Delta\Theta_\beta = -\frac{4\beta\pi m\alpha}{R_0} = \frac{4\pi\beta m^2 GM}{R_0}. \quad (2.109)$$

Цікавим є той факт, що поправки до кута прецесії орбіти спричинені ефектами квантованості простору обчислені в рамках спеціальної та загальної теорії відносності співпадають.

## 2.9 Оцінка мінімальної довжини, принцип еквівалентності та залежна від маси мінімальна довжина

У попередніх розділах ми отримали вирази для кута орбітальної прецесії релятивістської частинки в гравітаційному потенціалі з деформованими лоренц-коваріантними дужками Пуассона, що ведуть до мінімальної довжини. Важливо зауважити, що поправки до кута прецесії орбіти спричинені ефектами квантованості простору обчислені в рамках спеціальної та загальної теорії відносності співпадають. Порівнюючи експериментальні дані для кута прецесії перигелію Меркурія [145] з теоретичними передбаченнями, ми можемо накласти обмеження на параметри деформації. Спостережуваний зсув перигелію Меркурія, що не може бути пояснений ньютонівськими планетарними збуреннями, сплюсненням та обертанням Сонця [145]

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_{obs} &= 42,9799 \pm 0,0009 \text{ кутові секунди/століття} \\ &= 2\pi(7,98730 \pm 0,00017) \times 10^{-8} \text{ rad/rev.}\end{aligned}\quad (2.110)$$

Цю різницю зазвичай пояснюють гравітоелектричним ефектом [145]. Ми спробуємо пояснити цей ефект за допомогою стандартної загальної теорії відносності та ефектів квантованості простору. Загальна теорія відносності передбачає [119]

$$\Delta\Theta_{GR} = 2\pi \frac{3GM}{c^2 R_0} = 2\pi(7,98744 \times 10^{-8}) \text{ rad/rev.}\quad (2.111)$$

Подібно до [37] ми порівнюємо зсув перигелію, викликаний мінімальною довжиною (2.109) з різницею

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_{obs} - \Delta\Theta_{GR} &= \\ &= 2\pi(-0,00014 \pm 0,00017) \times 10^{-8} \text{ rad/rev,}\end{aligned}\quad (2.112)$$

і отримуємо нижню межу для  $\Delta\Theta_\beta$ , яка з точністю  $3\sigma$  рівна

$$-2\pi(0,65 \times 10^{-11})\text{rad/rev} < \Delta\Theta_\beta = -2\pi \frac{2m\alpha}{\hbar^2 R_0} (\hbar\sqrt{\beta})^2.\quad (2.113)$$

Таким чином, обмеження на мінімальну довжину становить

$$\hbar\sqrt{\beta} < 1.2 \times 10^{-68}\text{м.}\quad (2.114)$$

Зазначимо, що це дивно малий результат (на 33 порядки менший ніж довжина Планка) описує, як Меркурій відчуває деформацію простору-часу. Подібний результат було отримано у нерелятивістському випадку [119]. Однак, у [25] отримано кількісно іншу оцінку мінімальної довжини, що базується на порівнянні експериментальних даних з теоретичними передбаченнями для релятивістського атома водню у деформованому просторі. Верхня межа мінімальної довжини, що знайдена в [25], складає  $10^{-19}$  м. Таким чином, маємо суттєве неспівпадіння оцінок для мінімальної довжини, що походять з аналізу різних фізичних систем.

Зауважимо, що у нас також є інша проблема. З (2.86) видно, що кут прецесії залежить від маси частинки. Це вказує на те, що траєкторія руху частинки в гравітаційному полі залежить від її маси, порушуючи слабкий принцип еквівалентності у деформованому просторі з мінімальною довжиною. Однак ми можемо відновити принцип еквівалентності, припустивши, що параметр деформації залежить від маси, як у (2.1). Враховуючи (1.174), ми можемо записати

$$\beta = \frac{\delta}{m^2 c^2}, \quad (2.115)$$

де параметр  $\delta$  не залежить ані від  $m$ , ані від  $c$ .

Цікаво, що ми можемо узгодити результати оцінок мінімальної довжини, які випливають з дослідження руху планет та спектра атомів водню, за умови, що параметр деформації (2.115) залежить від маси частинки  $m$ . Ця умова означає, що сприйняття модифікованих комутаційних співвідношень відрізняється для Меркурія і електрона. З (2.114), ми можемо отримати обмеження на безрозмірний параметр  $\delta < 1.3 \cdot 10^{-4}$ . Припускаючи, що параметр  $\delta$  однаковий для різних частинок, ми можемо розрахувати обмеження для мінімальної довжини для електрона:

$$\hbar \sqrt{\beta_e} < 4.3 \times 10^{-15} \text{ м}. \quad (2.116)$$

Це обмеження, звісно ж, є меншим за отримане в [25] завдяки високій точності вимірювань спектра атома водню. Таким чином, ми приходимо до збігу оцінок мінімальної довжини, які отримані з різних вимірювань, що стосуються спектра атомів водню та руху планет.

Ідея залежності мінімальної довжини від маси була розглянута раніше для нерелятивістських алгебр в [43, 139] для розв'язання деяких фундаментальних проблем, що виникають через мінімальну довжину, такі як проблема порушення принципу еквівалентності та проблема залежності кінетичної енергії від складу.

Як ми бачили, залежність мінімальної довжини від маси також пояснює дивний малий результат для мінімальної довжини, отриманий через порівняння теоретичних передбачень із спостережуваною прецесією перигелію Меркурія. У [42] було встановлено, що перетворення Галілея та Лоренца у просторі з деформованими дужками Пуассона залежать від маси. Це вказує на те, що ці перетворення не можна трактувати як перетворення координат простору-часу. Однак, якщо застосувати ідею масової залежності мінімальної довжини, перетворення стають однаковими для тіл різної маси. Отже, принаймні чотири проблеми, спричинені мінімальною довжиною, можна вирішити, припускаючи, що деформація параметра залежить від маси частинки.

Також можна поставити питання, якщо мінімальна довжина залежить від маси, то чи є це властивість простору чи якась характеристика, пов'язана з частинкою? На наш погляд, це все ж таки властивість простору. Однак сприйняття цієї властивості простору частинками з різною масою може бути різним. Ця ідея може стати більш зрозумілою за допомогою наступної аналогії: припустимо, що у нас є колесо, яке котиться по нерівній дорозі. У цьому випадку, менше колесо відчуває нерівності дороги сильніше, ніж колесо з більшим радіусом, хоча геометрія дороги є однаковою для обох коліс.

## 2.10 Висновки

Досліджено особливості опису системи частинок у просторі з мінімальною довжиною. Встановлено, що рух центра мас описується за допомогою ефективного параметра деформації, який визначається параметрами деформації частинок системи та їхніми масами. На основі отриманого результату пояснено екстримально-малу оцінку для мінімальної довжини, отриману на основі дослідження зміщення перигелію Меркурію у роботі [119].

Запропоновано лоренц-коваріантну деформовану алгебру з мінімальною довжиною, яка у нерелятивістській границі переходить до недеформованої алгебри. Така поведінка може бути розглянута як ефект, який проявляється лише в релятивістському контексті. Інші відомі алгебри з мінімальною довжиною, такі як алгебра Снайдера або та, що була запропонована у [16], не мають такої властивості. З цієї точки зору, наша запропонована алгебра є особливо цікавою.

У класичній границі, запропонована лоренц-коваріантна деформована алгебра призводить до деформованих дужок Пуассо-

на. Важливо підкреслити, що ця деформація дужок Пуассона не порушує рівнянь руху вільної частинки. Це означає, що у просторі, де діють такі деформовані дужки Пуассона, вільний рух залишається дійсно вільним.

Нами була розглянута задача Кеплера у просторі з лоренц-коваріантними деформованими дужками Пуассона з мінімальною довжиною. Було розглянуто цю задачу в рамках спеціальної та загальної теорії відносності. В обох випадках отримано вирази для кута прецесії частинки. Цікавим є той факт, що поправки до кута прецесії орбіти спричинені ефектами квантованості простору обчислені в рамках спеціальної та загальної теорії відносності співпадають.

Також було отримано, що кут прецесії залежить від маси частинки. Це вказує на те, що слабкий принцип еквівалентності порушується в просторі-часі з деформованими дужками Пуассона та мінімальною довжиною. Проте цей принцип можна легко відновити, якщо ввести ідею, що параметр деформації залежить від маси частинки, згідно з

$$\beta = \frac{\delta}{m^2 c^2}. \quad (2.117)$$

Цей висновок вказує на те, що різні частинки з різною масою сприймають квантування простору-часу по-різному. Це може мати значення при дослідженнях масивних тіл в рамках квантованого простору-часу. Крім того, згадана формула вводить безрозмірний параметр  $\delta$ , який можна розглядати як нову фундаментальну константу.

Шляхом порівняння експериментальних даних щодо кута прецесії перигелію Меркурію з теоретичними передбаченнями, ми отримали обмеження на значення мінімальної довжини простору-часу. Це обмеження може бути узгоджене з результатами дослідження спектра атома водню, якщо припустити, що параметр деформації  $\delta$  залежить від маси частинки  $m$ .

Важливим завданням є дослідження калібрувальної інваріантності в розглянутому квантованому просторі-часі. Під калібрувальною інваріантністю розуміється збереження фізичних законів при калібрувальних перетвореннях. Дослідження деформованих дужок Пуассона та їх інваріантності при калібрувальних перетвореннях є важливим аспектом подальших досліджень. Розгляд впливу мінімальної довжини на рівняння електромагнітного поля і калібрувальні перетворення може розкрити нові аспекти квантованого простору-часу. Ці питання можуть потребувати окремого дослідження [146].

У підсумку, запропонована ідея залежності параметра деформації від маси частинки виявилася успішною у описі впливу квантованості простору на властивості фізичних систем. Це відкриває нові перспективи для дослідження різних фізичних явищ у контексті квантованого простору-часу.



## Розділ 3

# Рух макроскопічного тіла у некомутативному фазовому просторі та задача Кеплера

### 3.1 Вступ

Важливим є розв'язання проблеми опису руху макроскопічних систем у некомутативному фазовому просторі, визначення особливостей опису руху центра мас багаточастинкової системи з врахуванням некомутативності координат та некомутативності імпульсів частинок, які входять до її складу. У просторі з канонічною некомутативністю координат задача багатьох частинок досліджувалася у статті [147]. Автори роботи [148] вивчали систему двох заряджених частинок у некомутативному просторі (просторі з некомутативністю координат). Також система двох частинок розглядалася у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів [46]. Особливості опису руху системи багатьох частинок у двовимірному просторі з некомутативністю координат канонічного типу представлено у роботі [149].

Серед фундаментальних проблем у квантованому фазовому просторі канонічного типу також варто звернути увагу на проблему порушення слабкого принципу еквівалентності [60]. У просторі з некомутативністю координат принцип еквівалентності досліджувався у роботах [149, 150]. У статті [149] знайдено, що слабкий принцип еквівалентності відновлюється у двовимірному просторі

рі з некомутативністю координат у випадку, коли параметри координатної некомутативності є обернено пропорційні до маси. У просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів проблема порушення принципу еквівалентності вивчалася у статтях [60, 151]. Автори статті [151] прийшли до висновку, що порушення принципу еквівалентності зумовлює анізотропія параметрів некомутативності.

У розділі представлено аналіз особливостей опису руху системи багатьох частинок у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Досліджується рух планети Меркурій, система Сонце-Земля Місяць та пропонується умова на параметр імпульсної некомутативності при якій розв'язується проблема порушення слабкого принципу еквівалентності у квантованому фазовому просторі. На основі дослідження зміщення перигелію Меркурію знаходяться оцінки для параметрів координатної та імпульсної некомутативності.

Розділ має таку структуру. У підрозділі 3.2 вивчається представлення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів та аналізується проблема кінематичних змінних. У підрозділі 3.3 вивчаються особливості руху системи вільних частинок у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Підрозділ 3.4 присвячено знаходженню імпульсу центра мас як інтеграла руху у квантованому просторі. Особливості некомутативної алгебри для координат та імпульсів центра мас, координат та імпульсів відносного руху вивчаються у підрозділі 3.5. Вільне падіння тіла у некомутативному фазовому просторі досліджується у підрозділі 3.6. У підрозділі 3.7 знаходяться оцінки для мінімальної довжини на основі результатів для зміщення перигелію Меркурію. Слабкий принцип еквівалентності у некомутативному фазовому просторі аналізується у підрозділі 3.8. Також у підрозділі вивчається система Сонце-Земля-Місяць. Висновки представлено у підрозділі 3.9.

Результати, представлені у підрозділі, опубліковані у статтях [152–154].

### **3.2 Проблема кінематичних змінних та параметри некомутативності**

Розгляньмо чотиривимірний некомутативний фазовий простір канонічного типу, який характеризується такими комутаційними спів-

відношеннями для операторів координат та операторів імпульсів

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \quad (3.1)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}(1 + \sigma), \quad (3.2)$$

$$[P_1, P_2] = i\hbar\eta, \quad (3.3)$$

тут  $\theta$ ,  $\eta$ ,  $\sigma$  – константи. Дослідімо для початку випадок, коли  $\sigma = 0$  та комутовані співвідношення для координат та імпульсів є звичними  $[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}$ .

Координати  $X_i$  та імпульси  $P_i$ , які задовольняють некомутовану алгебру (3.1)-(3.3) з  $\sigma = 0$  можуть бути представлені через координати та імпульси  $x_i$ ,  $p_i$ , які задовольняють звичні комутовані співвідношення (1.15)-(1.17). Представлення має такий вигляд:

$$X_1 = \varepsilon(x_1 - \frac{1}{2}\theta'p_2), \quad (3.4)$$

$$X_2 = \varepsilon(x_2 + \frac{1}{2}\theta'p_1), \quad (3.5)$$

$$P_1 = \varepsilon(p_1 + \frac{1}{2}\eta'x_2), \quad (3.6)$$

$$P_2 = \varepsilon(p_2 - \frac{1}{2}\eta'x_1), \quad (3.7)$$

де

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\theta'\eta'}{4}}}, \quad (3.8)$$

та  $\theta'$ ,  $\eta'$  – константи [155]. Параметри  $\theta'$ ,  $\eta'$  пов'язані з  $\theta$ ,  $\eta$  як

$$\theta = \frac{\theta'}{1 + \frac{\theta'\eta'}{4}}, \quad (3.9)$$

$$\eta = \frac{\eta'}{1 + \frac{\theta'\eta'}{4}}. \quad (3.10)$$

Із (3.9), (3.10) отримаємо:

$$\theta' = \frac{2}{\eta}(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta}), \quad (3.11)$$

$$\eta' = \frac{2}{\theta}(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta}). \quad (3.12)$$

Врахувавши (3.4)-(3.7), (3.11), (3.12), можемо записати:

$$X_1 = \sqrt{\frac{\theta\eta}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta})}} \left( x_1 - \frac{1}{\eta} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta} \right) p_2 \right), \quad (3.13)$$

$$X_2 = \sqrt{\frac{\theta\eta}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta})}} \left( x_2 + \frac{1}{\eta} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta} \right) p_1 \right), \quad (3.14)$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{\theta\eta}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta})}} \left( p_1 + \frac{1}{\theta} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta} \right) x_2 \right), \quad (3.15)$$

$$P_2 = \sqrt{\frac{\theta\eta}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta})}} \left( p_2 - \frac{1}{\theta} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta\eta} \right) x_1 \right). \quad (3.16)$$

Отже, маємо два представлення, які відповідають вибору знаку “+” чи “-” у виразах (3.13)-(3.16). Ці представлення пов’язані такими канонічними перетвореннями

$$X_1^{(-)} = -\sqrt{\frac{\theta}{\eta}} P_2^{(+)}, \quad (3.17)$$

$$X_2^{(-)} = \sqrt{\frac{\theta}{\eta}} P_1^{(+)}, \quad (3.18)$$

$$P_1^{(-)} = \sqrt{\frac{\eta}{\theta}} X_2^{(+)}, \quad (3.19)$$

$$P_2^{(-)} = -\sqrt{\frac{\eta}{\theta}} X_1^{(+)}, \quad (3.20)$$

де ми використали позначення  $X_i^{(+)}$ ,  $P_i^{(+)}$ ,  $X_i^{(-)}$ ,  $P_i^{(-)}$  для координат та імпульсів, які означені як (3.13)-(3.16) з вибором знаку “+” та “-”, відповідно. Зауважимо, що існування представлення для координат та імпульсів  $X_i$ ,  $P_i$ , які задовольняють співвідношення некомутативної алгебри через координати та імпульси  $x_i$ ,  $p_i$ , які задовольняють звичні комутаційні співвідношення, гарантує виконання тотожності Якобі для будь-якої трійки операторів.

У границі  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$  із (3.13)-(3.16) отримаємо:

$$X_i^{(-)} = x_i, \quad (3.21)$$

$$P_i^{(-)} = p_i, \quad (3.22)$$

де координати та імпульси  $x_i, p_i$  задовольняють звичні комутаційні співвідношення. У випадку вибору знаку “+” у (3.13)-(3.16) у границі  $\theta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$  отримаємо:

$$X_1^{(+)} = -\sqrt{\frac{\theta}{\eta}} p_2, \quad (3.23)$$

$$X_2^{(+)} = \sqrt{\frac{\theta}{\eta}} p_1, \quad (3.24)$$

$$P_1^{(+)} = \sqrt{\frac{\eta}{\theta}} x_2, \quad (3.25)$$

$$P_2^{(+)} = -\sqrt{\frac{\eta}{\theta}} x_1. \quad (3.26)$$

Важливо зауважити, що відповідно до виразів (3.13)-(3.16) некомутативні координати залежать від імпульсів  $p_i$ , тому залежать від маси. Отже, координати у некомутативному фазовому просторі канонічного типу не можуть розглядатися як кінематичні змінні.

У загальному випадку співвідношення некомутативної алгебри для координат та імпульсів різних частинок можуть мати різні параметри. Зауважимо, що, якщо параметри некомутативної алгебри, які відповідають частинці з масою  $m$ , залежать від її маси як

$$m\theta = \gamma = \text{const}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\eta}{m} = \alpha = \text{const}, \quad (3.28)$$

де  $\gamma, \alpha$  – константи, які не залежать від маси, представлення (3.13)-(3.16) може бути переписане у такому вигляді:

$$X_1 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma})}} \left( x_1 - \frac{1}{\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma} \right) \frac{p_2}{m} \right), \quad (3.29)$$

$$X_2 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma})}} \left( x_2 + \frac{1}{\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma} \right) \frac{p_1}{m} \right), \quad (3.30)$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma})}} \left( p_1 + \frac{m}{\gamma} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma} \right) x_2 \right), \quad (3.31)$$

$$P_2 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma})}} \left( p_2 - \frac{m}{\gamma} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma} \right) x_1 \right). \quad (3.32)$$

Звернімо увагу, що координати  $X_i$  не залежать від маси та можуть бути розглянуті, як кінематичні змінні. Зауважимо також, що у випадку, коли виконуються умови (3.27), (3.28) маємо, що імпульси (3.31), (3.32) є пропорційними до маси, як це є у звичному просторі (просторі зі звичними співвідношеннями для координат та імпульсів  $\theta = \eta = 0$ ).

На завершення підрозділу дослідімо також випадок, коли константи у співвідношеннях (3.4)-(3.7) вибрані як

$$\varepsilon = 1, \quad \eta' = \eta, \quad \theta' = \theta. \quad (3.33)$$

Такий вибір констант розглядався у роботі [155]. У цьому випадку представлення має простіший вигляд:

$$X_1 = x_1 - \frac{1}{2}\theta p_2, \quad (3.34)$$

$$X_2 = x_2 + \frac{1}{2}\theta p_1, \quad (3.35)$$

$$P_1 = p_1 + \frac{1}{2}\eta x_2, \quad (3.36)$$

$$P_2 = p_2 - \frac{1}{2}\eta x_1. \quad (3.37)$$

прете комутатор для координат та імпульсів є деформованим. Із співвідношень (3.34)-(3.37) маємо

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} \left(1 + \frac{\theta\eta}{4}\right). \quad (3.38)$$

Величину

$$\hbar_{eff} = \hbar \left(1 + \frac{\theta\eta}{4}\right) \quad (3.39)$$

називають ефективною сталою Планка [155]. У випадку, коли виконуються співвідношення (3.27), (3.28), представлення (3.34)-(3.37) можна переписати як

$$X_1 = x_1 - \frac{1}{2}\gamma \frac{p_2}{m}, \quad (3.40)$$

$$X_2 = x_2 + \frac{1}{2}\gamma \frac{p_1}{m}, \quad (3.41)$$

$$P_1 = p_1 + \frac{1}{2}\alpha m x_2, \quad (3.42)$$

$$P_2 = p_2 - \frac{1}{2}\alpha m x_1. \quad (3.43)$$

Зауважимо, що некомутовані координати не залежать від маси, та некомутовані імпульси пропорційні до маси, як це є у звичному просторі ( $\theta = \eta = 0$ ). Також при виконанні умов (3.27), (3.28) комутатор для координат та імпульсів не залежить від маси. Маємо:

$$[X_i, P_j] = i\hbar_{eff} = i\delta_{ij}\hbar \left(1 + \frac{\alpha\gamma}{4}\right), \quad (3.44)$$

У наступних підрозділах буде показано, що співвідношення (3.27), (3.28) є також важливими для розв'язання проблеми опису руху системи частинок, для збереження властивостей кінетичної енергії та для відновлення принципу еквівалентності у некомутованому фазовому просторі канонічного типу.

### 3.3 Система вільних частинок у чотиривимірному некомутованому фазовому просторі

Дослідімо особливості руху системи вільних частинок у чотиривимірному некомутованому фазовому просторі (3.1)-(3.3) з  $\sigma = 0$ . У класичній границі  $\hbar \rightarrow 0$  на основі співвідношень (3.1)-(3.3) з  $\sigma = 0$  можемо записати такі деформовані дужки Пуассона:

$$\{X_1, X_2\} = \theta, \quad (3.45)$$

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij}(1 + \sigma), \quad (3.46)$$

$$\{P_1, P_2\} = \eta. \quad (3.47)$$

Для початку розглянемо вільну частинку з масою  $m$ . Запишемо гамільтоніан вільної частинки у традиційному вигляді:

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m}. \quad (3.48)$$

Звернімо увагу, що дужки Пуассона для імпульсів  $P_1, P_2$  не дорівнюють нулю (3.47). Врахувавши співвідношення некомутованості

алгебри (3.45)-(3.47), (3.48), можемо записати такі рівняння руху:

$$\dot{X}_1 = \frac{P_1}{m}, \quad (3.49)$$

$$\dot{X}_2 = \frac{P_2}{m}, \quad (3.50)$$

$$\dot{P}_1 = \eta \frac{P_2}{m}, \quad (3.51)$$

$$\dot{P}_2 = -\eta \frac{P_1}{m}. \quad (3.52)$$

Розв'язки рівнянь з початковими умовами

$$X_1(0) = X_{01}, \quad X_2(0) = X_{02}, \quad (3.53)$$

$$\dot{X}_1(0) = v_{01}, \quad \dot{X}_2(0) = v_{02}, \quad (3.54)$$

( $X_{0i}$ ,  $v_{0i}$  – початкові координати та швидкості частинки) мають такий вигляд

$$X_1(t) = v_{01} \frac{m}{\eta} \sin \frac{\eta}{m} t - v_{02} \frac{m}{\eta} \cos \frac{\eta}{m} t + v_{02} \frac{m}{\eta} + X_{01}, \quad (3.55)$$

$$X_2(t) = v_{02} \frac{m}{\eta} \sin \frac{\eta}{m} t + v_{01} \frac{m}{\eta} \cos \frac{\eta}{m} t - v_{01} \frac{m}{\eta} + X_{02}, \quad (3.56)$$

$$\dot{X}_1(t) = v_{01} \cos \frac{\eta}{m} t + v_{02} \sin \frac{\eta}{m} t, \quad (3.57)$$

$$\dot{X}_2(t) = v_{02} \cos \frac{\eta}{m} t - v_{01} \sin \frac{\eta}{m} t. \quad (3.58)$$

Зауважимо, що через імпульсну некомутативність траєкторія та швидкість частинки (3.55)-(3.58) залежать від її маси та параметра імпульсної некомутативності  $\eta$ . У границі  $\eta \rightarrow 0$ , що відповідає звичному простору, із рівнянь (3.55), (3.56) отримуємо добре відомі результати:

$$X_1(t) = v_{01} t + X_{01}, \quad (3.59)$$

$$X_2(t) = v_{02} t + X_{02}. \quad (3.60)$$

Для дослідження особливостей руху системи вільних частинок запишемо співвідношення некомутативної алгебри для координат та імпульсів різних частинок. Ми пропонуємо таке узагальнення



алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу:

$$[X_1^{(a)}, X_2^{(b)}] = i\hbar\delta_{ab}\theta_a, \quad (3.61)$$

$$[X_i^{(a)}, P_j^{(b)}] = i\hbar\delta_{ab}\delta_{ij}, \quad (3.62)$$

$$[P_1^{(a)}, P_2^{(b)}] = i\hbar\delta_{ab}\eta_a, \quad (3.63)$$

де індекси  $a, b$  позначають частинки,  $X_i^{(a)}, P_i^{(a)}$  – координати та імпульси частинки з індексом  $a$ ,  $\theta_a, \eta_a$  – параметри некомутативності, які описують вплив квантованості простору на частинку  $a$ ,  $i = (1, 2), j = (1, 2)$ . У класичній границі  $\hbar \rightarrow 0$  з співвідношень (3.114)-(3.116) отримуємо деформовані дужки Пуассона

$$\{X_1^{(a)}, X_2^{(b)}\} = \delta_{ab}\theta_a, \quad (3.64)$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}, \quad (3.65)$$

$$\{P_1^{(a)}, P_2^{(b)}\} = \delta_{ab}\eta_a. \quad (3.66)$$

Розгляньмо систему вільних частинок з масами  $m_1, m_2, \dots, m_N$  та гамільтоніаном

$$H = \sum_a \frac{(\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + \sum_a \frac{(\Delta\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a}. \quad (3.67)$$

Координати  $X_i^{(a)}$  та імпульси  $P_i^{(a)}$  частинок задовольняють співвідношення (3.64)-(3.66). У (3.67) ми використали позначення  $\tilde{P}_i, \Delta P_i^{(a)}$  для імпульсів центра мас та імпульсів відносного руху, означених традиційно:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \sum_a \mathbf{P}^{(a)}, \quad (3.68)$$

$$\Delta\mathbf{P}^a = \mathbf{P}^{(a)} - \mu_a \tilde{\mathbf{P}}, \quad (3.69)$$

$$\mu_a = \frac{m_a}{M}, \quad M = \sum_a m_a. \quad (3.70)$$

Звернімо увагу, що імпульси центра мас та імпульси відносного руху задовольняють такі співвідношення:

$$\{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2\} = \tilde{\eta}, \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta P_1^{(a)}, \Delta P_2^{(b)}\} &= -\{\Delta P_2^{(a)}, \Delta P_1^{(b)}\} = \\ &= \delta_{ab}\eta_a - \mu_b\eta_a - \mu_a\eta_b + \mu_a\mu_b\tilde{\eta}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

де параметри  $\tilde{\eta}$  мають вигляд:

$$\tilde{\eta} = \sum_a \eta_a. \quad (3.73)$$

Отже, дужки Пуассона для імпульсів центра мас дорівнюють параметру некомутативності, який визначається, як сума параметрів імпульсної некомутативності частинок системи. Величина параметра імпульсної некомутативності збільшується зі збільшенням кількості частинок у системі. У випадку коли  $\mu_a = 1/N$  (маси частинок однакові), із (3.73) маємо:

$$\tilde{\eta} = N\eta. \quad (3.74)$$

Із (3.72) маємо, що дужки Пуассона для імпульсів відносного руху залежать від параметрів імпульсної некомутативності частинок системи, а також від мас частинок. Важливо також відзначити, що дужки Пуассона для імпульсів центра мас та імпульсів відносного руху не дорівнюють нулеві. Врахувавши (3.68), (3.69) та (3.66), отримуємо:

$$\{\tilde{P}_1, \Delta P_2^{(a)}\} = -\{\tilde{P}_2, \Delta P_1^a\} = \eta_a - \mu_a \sum_b \eta_b. \quad (3.75)$$

Із співвідношення (3.75) випливає, що у просторі з некомутативністю імпульсів ми не можемо розглядати рух центра мас незалежно від відносного руху. Відносний рух впливає на рух центра мас, та навпаки.

Навіть у випадку системи вільних частинок рух центра мас системи є залежним від відносного руху. Важливо звернути увагу на ефект розлітання системи вільних частинок у просторі з некомутативністю імпульсів. Відомо, що у звичному просторі ( $\theta = 0$ ,  $\eta = 0$ ) вільні частинки з однаковими початковими швидкостями рухаються разом, відносні координати частинок не залежать від часу. У некомутативному фазовому просторі навіть у випадку рівності початкових швидкостей частинок з масами  $m_1, m_2, \dots, m_N$  в початковий момент часу

$$\dot{X}_1^{(a)}(0) = v_{01}, \quad (3.76)$$

$$\dot{X}_2^{(a)}(0) = v_{02}, \quad (3.77)$$

$a = (1\dots N)$ , маємо:

$$\dot{X}_1^{(a)}(t) \neq \dot{X}_1^{(b)}(t), \quad (3.78)$$

$$\dot{X}_2^{(a)}(t) \neq \dot{X}_2^{(b)}(t) \quad (3.79)$$

для  $a \neq b$ . На основі результатів (3.57), (3.58), можемо записати

$$\dot{X}_1^{(a)}(t) = v_{01} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t + v_{02} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t, \quad (3.80)$$

$$\dot{X}_2^{(a)}(t) = v_{02} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t - v_{01} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t, \quad (3.81)$$

тут  $\eta_a$  – параметр імпульсної некомутативності, який відповідає частинці з масою  $m_a$ ,  $a = (1..N)$ .

Траєкторія центра мас системи вільних частинок має вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(t) = \sum_a \mu_a X_1^{(a)}(t) = \sum_a \left( v_{01} \frac{m_a^2}{M\eta_a} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t - \right. \\ \left. - v_{02} \frac{m_a^2}{M\eta_a} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t + v_{02} \frac{m_a^2}{M\eta_a} + \frac{m_a}{M} X_{01}^{(a)} \right), \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2(t) = \sum_a \mu_a X_2^{(a)}(t) = \sum_a \left( v_{02} \frac{m_a^2}{M\eta_a} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t + \right. \\ \left. + v_{01} \frac{m_a^2}{M\eta_a} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t - v_{01} \frac{m_a^2}{M\eta_a} + \frac{m_a}{M} X_{02}^{(a)} \right), \end{aligned} \quad (3.83)$$

Відзначимо, що відносні координати не є константами, вони залежать від часу як:

$$\begin{aligned} \Delta X_1^a(t) = X_1^{(a)}(t) - \tilde{X}_1(t) = \\ = v_{01} \frac{m_a}{\eta_a} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t - v_{02} \frac{m_a}{\eta_a} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t + v_{02} \frac{m_a}{\eta_a} + X_{01}^{(a)} - \\ - \sum_b \left( v_{01} \frac{m_b^2}{M\eta_b} \sin \frac{\eta_b}{m_b} t - v_{02} \frac{m_b^2}{M\eta_b} \cos \frac{\eta_b}{m_b} t + \right. \\ \left. + v_{02} \frac{m_b^2}{M\eta_b} + \frac{m_b}{M} X_{01}^{(b)} \right), \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \Delta X_2^a(t) = X_2^{(a)}(t) - \tilde{X}_2(t) = \\ = v_{02} \frac{m_a}{\eta_a} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t + v_{01} \frac{m_a}{\eta_a} \cos \frac{\eta_a}{m_a} t - v_{01} \frac{m_a}{\eta_a} + X_{02}^{(a)} - \\ - \sum_b \left( v_{02} \frac{m_b^2}{M\eta_b} \sin \frac{\eta_b}{m_b} t + v_{01} \frac{m_b^2}{M\eta_b} \cos \frac{\eta_b}{m_b} t - \right. \\ \left. - v_{01} \frac{m_b^2}{M\eta_b} + \frac{m_b}{M} X_{02}^{(b)} \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

З (3.80), (3.81), (3.84), (3.85) можемо зробити висновок, що через імпульсну некомутативність частинки не рухаються разом. Система вільних частинок у некомутативному фазовому просторі розлітається навіть у випадку, коли початкові швидкості частинок є однаковими.

Зауважимо, що коли виконується умова для параметра імпульсної некомутативності (3.28), маємо:

$$\{\tilde{P}_1, \Delta P_2^{(a)}\} = 0, \quad (3.86)$$

та з (3.80), (3.81) отримаємо, що частинки рухаються з однаковою швидкістю, яка дорівнює швидкості руху центра мас системи:

$$\dot{X}_1^{(a)}(t) = \sum_a \mu_a \dot{X}_1^{(a)}(t) = v_{01} \cos \alpha t + v_{02} \sin \alpha t, \quad (3.87)$$

$$\dot{X}_2^{(a)}(t) = \sum_a \mu_a \dot{X}_2^{(a)}(t) = v_{02} \cos \alpha t - v_{01} \sin \alpha t. \quad (3.88)$$

Відносні координати не залежать від часу. Врахувавши (3.28), з (3.84), (3.85) маємо

$$\Delta X_1^{(a)} = X_{01}^{(a)} - \sum_b \mu_b X_{01}^{(b)}, \quad (3.89)$$

$$\Delta X_2^{(a)} = X_{02}^{(a)} - \sum_b \mu_b X_{02}^{(b)}. \quad (3.90)$$

Також траєкторії вільних частинок не залежать від їхніх мас. Використавши (3.28), (3.55), (3.56), можемо записати

$$X_1^{(a)}(t) = \frac{v_{01}}{\alpha} \sin \alpha t - \frac{v_{02}}{\alpha} \cos \alpha t + \frac{v_{02}}{\alpha} + X_{01}^{(a)}, \quad (3.91)$$

$$X_2^{(a)}(t) = \frac{v_{02}}{\alpha} \sin \alpha t + \frac{v_{01}}{\alpha} \cos \alpha t - \frac{v_{01}}{\alpha} + X_{02}^{(a)}, \quad (3.92)$$

де

$$X_{01}^{(a)} = X_1^{(a)}(0), \quad (3.93)$$

$$X_{02}^{(a)} = X_2^{(a)}(0). \quad (3.94)$$

Частинки з однаковими швидкостями в початковий момент часу рухаються разом, як це є у звичному просторі.

Отже, у випадку, коли параметр некомутативності, який відповідає частинці, залежить від її маси як (3.28), траєкторія і швидкість вільної частини не залежать від маси, рух центра мас системи вільних частинок не залежить від відносного руху, система вільних частинок з однаковими початковими швидкостями не розлітається (кожна частинка системи рухається з швидкістю, яка дорівнює швидкості центра мас) у просторі з некомутативністю імпульсів канонічного типу.

Координати та імпульси частинок, які задовольняють співвідношення алгебри (3.64)-(3.66) можуть бути представлені через координати та імпульси  $x_i^{(a)}$ ,  $p_i^{(a)}$ , які задовольняють звичні співвідношення

$$\{x_i^{(a)}, x_j^{(b)}\} = \{p_i^{(a)}, p_j^{(b)}\} = 0, \quad (3.95)$$

$$\{x_i^{(a)}, p_j^{(b)}\} = \delta_{ij} \delta_{ab}. \quad (3.96)$$

Індекси  $a$ ,  $b$  позначають частинки. На основі результатів, отриманих в підрозділі 3.3, можемо записати представлення у такому вигляді:

$$X_1^{(a)} = \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a})}} \times \\ \times \left( x_1^{(a)} - \frac{1}{\eta_a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a} \right) p_2^{(a)} \right), \quad (3.97)$$

$$X_2^{(a)} = \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a})}} \times \\ \times \left( x_2^{(a)} + \frac{1}{\eta_a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a} \right) p_1^{(a)} \right), \quad (3.98)$$

$$P_1^{(a)} = \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a})}} \times \\ \times \left( p_1^{(a)} + \frac{1}{\theta_a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a} \right) x_2^{(a)} \right), \quad (3.99)$$

$$P_2^{(a)} = \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a})}} \times \\ \times \left( p_2^{(a)} - \frac{1}{\theta_a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a} \right) x_1^{(a)} \right) \quad (3.100)$$

Використавши вирази (3.97)-(3.100), а також означення для координат та імпульсів центра мас

$$\tilde{X}_i = \sum_a \frac{m_a}{M} X_i^a \quad (3.101)$$

(3.68), запишемо представлення для останніх. Маємо:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= \sum_a \frac{m_a}{M} \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a})}} \times \\ &\times \left( x_1^{(a)} - \frac{1}{\eta_a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a} \right) p_2^{(a)} \right) \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2 &= \sum_a \frac{m_a}{M} \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a})}} \times \\ &\times \left( x_2^{(a)} + \frac{1}{\eta_a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a} \right) p_1^{(a)} \right), \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= \sum_a \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a})}} \times \\ &\times \left( p_1^{(a)} + \frac{1}{\theta_a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a} \right) x_2^{(a)} \right), \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2 &= \sum_a \sqrt{\frac{\theta_a \eta_a}{2(1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a})}} \times \\ &\times \left( p_2^{(a)} - \frac{1}{\theta_a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \theta_a \eta_a} \right) x_1^{(a)} \right). \end{aligned} \quad (3.105)$$

де  $m_a$  – маси частинок, які формують систему, системи,  $M$  – повна маса системи. Зауважимо, що відповідно до (3.104), (3.105) представлення не може бути переписане через координати та імпульси центра мас

$$\tilde{x}_i = \frac{\sum_a m_a x_i^{(a)}}{M}, \quad (3.106)$$

$$\tilde{p}_i = \sum_a p_i^{(a)}, \quad (3.107)$$

Також звернімо увагу, що імпульси центра мас (3.104), (3.105) не є пропорційні до маси системи.

При виконанні умови на параметр імпульсної некомутованості (3.28), а також умови, (3.27), яка пов'язує параметр координатної некомутованості з масою, представлення (3.102)-(3.105) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma})}} \times \\ &\times \left( \tilde{x}_1 - \frac{1}{\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma} \right) \frac{\tilde{p}_2}{M} \right), \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2 &= \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma})}} \times \\ &\times \left( \tilde{x}_2 + \frac{1}{\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma} \right) \frac{\tilde{p}_1}{M} \right), \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma})}} \times \\ &\times \left( \tilde{p}_1 + \frac{M}{\gamma} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma} \right) \tilde{x}_2 \right), \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2 &= \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2(1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma})}} \times \\ &\times \left( \tilde{p}_2 - \frac{M}{\gamma} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \alpha\gamma} \right) \tilde{x}_1 \right), \end{aligned} \quad (3.111)$$

де координати та імпульси  $\tilde{x}_i$ ,  $\tilde{p}_i$  визначаються як (3.106), (3.107) та задовольняють звичні співвідношення

$$\{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0, \quad (3.112)$$

$$\{\tilde{x}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}. \quad (3.113)$$

Отже, при виконанні умов (3.27), (3.28), координати та імпульси центра мас  $\tilde{X}_i$ ,  $\tilde{P}_i$ , які задовольняють співвідношення некомутованості алгебри можуть бути представлені через координати та імпульси центра мас  $\tilde{x}_i$ ,  $\tilde{p}_i$ , які задовольняють звичні співвідношення (3.112), (3.113). Також, якщо задовольняються рівності (3.27), (3.28), маємо, що у некомутованому фазовому просторі імпульси

центра мас (3.104), (3.105) є пропорційні до повної маси системи, як це є у звичному просторі ( $\theta = \eta = 0$ ).

Такий самий висновок можна зробити у випадку симетричного представлення (3.34)-(3.37) для координат та імпульсів, які задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (3.1)-(3.3) з  $\sigma = \theta\eta/4$ . Запишемо алгебру (3.1)-(3.3) з  $\sigma = \theta\eta/4$  для координат та імпульсів частинок. У класичній границі відповідні дужки Пуассона мають такий вигляд:

$$\{X_1^{(a)}, X_2^{(b)}\} = \delta_{ab}\theta^{(a)}, \quad (3.114)$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\delta_{ij} \left(1 + \frac{\theta_a\eta_a}{4}\right), \quad (3.115)$$

$$\{P_1^{(a)}, P_2^{(b)}\} = \delta_{ab}\eta^{(a)}, \quad (3.116)$$

Некомутативні координати та некомутативні імпульси  $X_i^{(a)}$ ,  $P_i^{(a)}$  можуть бути представлені як:

$$\tilde{X}_1 = x_1^{(a)} - \frac{1}{2}\theta_a p_2^{(a)}, \quad (3.117)$$

$$\tilde{X}_2 = x_2^{(a)} + \frac{1}{2}\theta_a p_1^{(a)}, \quad (3.118)$$

$$\tilde{P}_1 = p_1^{(a)} + \frac{1}{2}\eta_a x_2^{(a)}, \quad (3.119)$$

$$\tilde{P}_2 = p_2^{(a)} - \frac{1}{2}\eta_a x_1^{(a)}, \quad (3.120)$$

де координати та імпульси  $x_i^{(a)}$ ,  $p_i^{(a)}$  задовольняють звичні співвідношення (3.95), (3.96).

На основі означень для координат та імпульсів центра мас, а також виразів (3.121)-(3.124) у випадку, коли виконуються рівності (3.27), (3.28), маємо:

$$\tilde{X}_1 = \sum_a \frac{m_a}{M} \left( x_1^{(a)} - \frac{1}{2}\theta_a p_2^{(a)} \right) = \tilde{x}_1 - \frac{1}{2}\tilde{\theta}\tilde{p}_2, \quad (3.121)$$

$$\tilde{X}_2 = \sum_a \frac{m_a}{M} \left( x_2^{(a)} + \frac{1}{2}\theta_a p_1^{(a)} \right) = \tilde{x}_2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}\tilde{p}_1, \quad (3.122)$$



$$\tilde{P}_1 = \sum_a \left( p_1^{(a)} + \frac{1}{2} \eta_a x_2^{(a)} \right) = \tilde{p}_1 + \frac{M\alpha}{2} \tilde{x}_2, \quad (3.123)$$

$$\tilde{P}_2 = \sum_a \left( p_2^{(a)} - \frac{1}{2} \eta_a x_1^{(a)} \right) = \tilde{p}_2 - \frac{M\alpha}{2} \tilde{x}_1. \quad (3.124)$$

Отже, у випадку виконання умов (3.27), (3.28) імпульси центра мас пропорційні до повної маси системи та координати та імпульси центра мас у некомутованому просторі  $\tilde{X}_1, \tilde{P}_1$  можуть бути представлені через координати та імпульси центра мас (3.112), (3.113), які задовольняють звичні співвідношення.

### 3.4 Імпульс центра мас як інтеграл руху у чотиривимірному некомутованому фазовому просторі

У некомутованому фазовому просторі (3.64)-(3.66) імпульс центра мас (3.68), визначений традиційно, не є інтегралом руху. Розгляньмо систему  $N$  частинок, яка описується гамільтоніаном

$$H = \sum_a \frac{(\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a} + U(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|). \quad (3.125)$$

Враховавши (3.68), маємо:

$$\begin{aligned} \{\tilde{P}_1, H\} &= \left\{ \tilde{P}_1, \sum_a \frac{(\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a} \right\} = \tilde{\eta} \frac{\tilde{P}_2}{M} + \\ &\quad + \sum_a \frac{\Delta P_2^{(a)}}{m_a} (\eta_a - \mu_a \tilde{\eta}), \end{aligned} \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{P}_2, H\} &= \left\{ \tilde{P}_2, \sum_a \frac{(\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a} \right\} = -\tilde{\eta} \frac{\tilde{P}_1}{M} - \\ &\quad - \sum_a \frac{\Delta P_1^{(a)}}{m_a} (\eta_a - \mu_a \tilde{\eta}). \end{aligned} \quad (3.127)$$

У випадку, коли задовольняються умови на параметри некомутативностей (3.27), (3.28), можемо записати:

$$\{\tilde{P}_1, H\} = \frac{\tilde{P}_2}{M} \tilde{\eta} \quad (3.128)$$

$$\{\tilde{P}_2, H\} = -\frac{\tilde{P}_1}{M} \tilde{\eta}. \quad (3.129)$$

Отже, через некомутативність імпульсів імпульс центра мас, визначений як сума імпульсів частинок системи, не зберігається у некомутативному фазовому просторі.

Знайдемо імпульс центра мас, як інтеграл руху. З цією метою розглянемо випадок, коли система складається з  $N$  частинок з однаковими масами та параметрами некомутативності

$$m_1 = m_2 = \dots = m_N = m, \quad (3.130)$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_N = \theta, \quad (3.131)$$

$$\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_N = \eta. \quad (3.132)$$

Звернімо увагу, що у цьому випадку імпульси, визначені як

$$\tilde{P}'_1 = \sum_a P_1^{(a)} - \eta \sum_a X_2^{(a)}, \quad (3.133)$$

$$\tilde{P}'_2 = \sum_a P_2^{(a)} + \eta \sum_a X_1^{(a)}, \quad (3.134)$$

задовольняють співвідношення:

$$\{\tilde{P}'_1, H\} = \{\tilde{P}'_2, H\} = 0, \quad (3.135)$$

тут  $H$  визначається як (3.125). Отже, імпульси (3.133), (3.134) є інтегралами руху і можуть розглядатися як імпульси центра мас у некомутативному фазовому просторі. У границі  $\eta \rightarrow 0$  з (3.133), (3.134) отримаємо повний імпульс, визначений традиційним чином (як сума імпульсів частинок системи).

Узагальнимо запропоноване означення імпульсу центра мас на випадок системи  $N$  частинок з різними масами  $m_a$  та параметрами некомутативності  $\theta_a, \eta_a$ . Імпульси центра мас, означені як

$$\tilde{P}'_1 = \tilde{P}_1 - \tilde{\eta} \tilde{X}_2, \quad (3.136)$$

$$\tilde{P}'_2 = \tilde{P}_2 + \tilde{\eta} \tilde{X}_1, \quad (3.137)$$

(тут  $\tilde{P}_i, \tilde{X}_i, \tilde{\eta}$  визначаються виразами (3.101), (3.68), (3.73)) задовольняють рівності  $\{\tilde{P}'_1, H\} = \{\tilde{P}'_2, H\} = 0$  та є інтегралами руху у випадку, коли виконуються співвідношення (3.27), (3.28). Звернімо увагу, що для системи  $N$  частинок з однаковими масами та параметрами некомутативності  $\eta, \theta$  ми маємо  $\tilde{X}_i = \sum_a X_i^{(a)}/N$ . Також, врахувавши (3.73), можемо записати  $\tilde{\eta} = N\eta$ . Отже, з (3.136), (3.137) отримаємо (3.27), (3.28).

Означимо координати центра мас  $\tilde{X}'_i$ , як координати спряжені до  $\tilde{P}'_i$ . Можемо переконатися, що координати, визначені як

$$\tilde{X}'_i = \frac{\sum_a \mu_a X_i^{(a)}}{1 - \tilde{\eta}\tilde{\theta}} = \frac{\tilde{X}_i}{1 - \tilde{\eta}\tilde{\theta}}, \quad (3.138)$$

задовольняють

$$\{\tilde{X}'_i, \tilde{P}'_j\} = \delta_{ij}. \quad (3.139)$$

Також виконуються такі співвідношення

$$\{\tilde{X}'_1, \tilde{X}'_2\} = \frac{\tilde{\theta}}{(1 - \tilde{\theta}\tilde{\eta})^2}, \quad (3.140)$$

$$\{\tilde{P}'_1, \tilde{P}'_2\} = \tilde{\eta}(\tilde{\theta}\tilde{\eta} - 1). \quad (3.141)$$

Отже, у випадку, коли параметри координатної та імпульсної некомутативностей залежать від маси як (3.27), (3.28), імпульси центра мас можуть бути означені, як інтеграли руху у некомутативному фазовому просторі канонічного типу.

На закінчення цього підрозділу зауважимо, що імпульси вільної частинки не зберігається у некомутативному фазовому просторі. На основі означень (3.136), (3.137) для вільної частинки інтегралами руху є імпульси, визначені як

$$P'_1 = P_1 - \eta X_2, \quad (3.142)$$

$$P'_2 = P_2 + \eta X_1, \quad (3.143)$$

Для них виконуються рівність  $\{P'_1, H\} = \{P'_2, H\} = 0$ , де  $H$  задається як (3.48). Перепишемо гамільтоніан частинки (3.48) через імпульси  $P'_i$ , які є інтегралами руху, та спряжені до них координати

$$X'_i = \frac{X_i}{(1 - \eta\theta)}. \quad (3.144)$$

Маємо:

$$H = \frac{1}{2m} (P'_1 + \eta(1 - \eta\theta)X'_2)^2 + \frac{1}{2m} (P'_2 - \eta(1 - \eta\theta)X'_1)^2. \quad (3.145)$$

Зауважимо, що гамільтоніан (3.145) відповідає гамільтоніану зарядженої частинки у магнітному полі  $\mathbf{B}(0, 0, B)$  у некомутативному фазовому просторі, який характеризується співвідношеннями (3.139), (3.140), (3.141), якщо

$$\frac{eB}{c} = \eta(1 - \eta\theta), \quad (3.146)$$

тут  $e$  – заряд частинки,  $c$  – швидкість світла.

### 3.5 Проблема опису руху багаточастинкової системи у шестивимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу

Дослідімо проблему опису руху макроскопічного тіла у шестивимірному (3D конфігураційного та 3D імпульсного простору) квантованому фазовому просторі канонічного типу (1.24)-(1.26). Ми пропонуємо таке узагальнення співвідношень некомутативної алгебри (1.24)-(1.26) для координат та імпульсів різних частинок:

$$[X_i^{(a)}, X_j^{(b)}] = i\hbar\delta_{ab}\theta_{ij}^{(a)}, \quad (3.147)$$

$$[X_i^{(a)}, P_j^{(b)}] = i\hbar(\delta_{ab}\delta_{ij} + \delta_{ab}\sigma_{ij}^{(a)}), \quad (3.148)$$

$$[P_i^{(a)}, P_j^{(b)}] = i\hbar\delta_{ab}\eta_{ij}^{(a)}. \quad (3.149)$$

де параметри  $\theta_{ij}^{(a)}$ ,  $\eta_{ij}^{(a)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(a)}$  відповідають частинці з індексом  $a$ . У класичній границі з комутаційних співвідношень (3.147)-(3.149) отримаємо дужки Пуассона, які мають такий вигляд:

$$\{X_i^{(a)}, X_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\theta_{ij}^{(a)}, \quad (3.150)$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\delta_{ij} + \delta_{ab}\sigma_{ij}^{(a)}, \quad (3.151)$$

$$\{P_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta_{ab}\eta_{ij}^{(a)}. \quad (3.152)$$

Розгляньмо симетричне представлення для координат та імпульсів, які задовольняють співвідношення (4.26), (4.29)

$$X_i^{(a)} = x_i^{(a)} - \frac{1}{2} \sum_j \theta_{ij}^{(a)} p_j^{(a)}, \quad (3.153)$$

$$P_i^{(a)} = p_i^{(a)} + \frac{1}{2} \sum_j \eta_{ij}^{(a)} x_j^{(a)}. \quad (3.154)$$

Координати та імпульси  $x_i^{(a)}$ ,  $p_i^{(a)}$  у (3.153), (3.154) задовольняють звичні комутаційні співвідношення (3.95), (3.96). Із (3.153), (3.154) випливає, що

$$\sigma_{ij}^{(a)} = \sum_k \frac{\theta_{ik}^{(a)} \eta_{jk}^{(a)}}{4}. \quad (3.155)$$

Порахуймо дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас, визначених звично (3.101), (3.68). Отримаємо:

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = \tilde{\theta}_{ij}, \quad (3.156)$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ij} + \sum_a \mu_a \sigma_{ij}^{(a)}, \quad (3.157)$$

$$\{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = \tilde{\eta}_{ij}, \quad (3.158)$$

де

$$\tilde{\theta}_{ij} = \sum_a \mu_a^2 \theta_{ij}^{(a)}, \quad (3.159)$$

$$\tilde{\eta}_{ij} = \sum_a \eta_{ij}^{(a)}. \quad (3.160)$$

Важливо відзначити, що дужки Пуассона (3.156)-(3.158) не відтворюють співвідношення некомутативної алгебри (3.1)-(3.3). Маємо:

$$\sum_a \mu_a \sigma_{ij}^{(a)} = \sum_a \mu_a \sum_k \frac{\theta_{ik}^{(a)} \eta_{jk}^{(a)}}{4} \neq \sum_k \frac{\tilde{\theta}_{ik} \tilde{\eta}_{jk}}{4}. \quad (3.161)$$

Звернімо також увагу, що для координат та імпульсів центра мас (3.101), (3.68), координат та імпульсів відносного руху

$$\Delta X_i^{(a)} = X_i^{(a)} - \tilde{X}_i, \quad (3.162)$$

$$\Delta P_j^{(a)} = P_j^{(a)} - \mu_a \tilde{P}_j, \quad (3.163)$$

виконуються такі співвідношення:

$$\{\tilde{X}_i, \Delta X_j^{(a)}\} = \mu_a \theta_{ij}^{(a)} - \sum_b \mu_b^2 \theta_{ij}^{(b)}, \quad (3.164)$$

$$\{\tilde{P}_i, \Delta P_j^{(a)}\} = \eta_{ij}^{(a)} - \mu_a \sum_b \eta_{ij}^{(b)}, \quad (3.165)$$

$$\{\Delta X_i^{(a)}, \tilde{P}_j\} = \sigma_{ij}^{(a)} - \sum_b \mu_b \sigma_{ij}^{(b)}, \quad (3.166)$$

$$\{\tilde{X}_i, \Delta P_j^{(a)}\} = \mu_a (\sigma_{ij}^{(a)} - \sum_b \mu_b \sigma_{ij}^{(b)}). \quad (3.167)$$

Розглянувши такі залежності параметрів некомутативності  $\theta_{ij}^{(a)}$ ,  $\eta_{ij}^{(a)}$  від маси

$$\theta_{ij}^{(a)} m_a = \gamma_{ij} = \text{const}, \quad (3.168)$$

$$\frac{\eta_{ij}^{(a)}}{m_a} = \alpha_{ij} = \text{const}, \quad (3.169)$$

(тут  $\gamma_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$  – константи, які не залежать від маси та є однакові для різних частинок) ми отримуємо, що дужки Пуассона (3.164)–(3.167) дорівнюють нулю

$$\{\tilde{X}_i, \Delta X_j^{(a)}\} = \{\tilde{P}_i, \Delta P_j^{(a)}\} = 0, \quad (3.170)$$

$$\{\Delta X_i^{(a)}, \tilde{P}_j\} = \{\tilde{X}_i, \Delta P_j^{(a)}\} = 0, \quad (3.171)$$

та параметри  $\sigma_{ij}^{(n)}$  є однакові для різних частинок

$$\sigma_{ij}^{(a)} = \sum_k \frac{\gamma_{ik} \alpha_{jk}}{4} = \sum_k \frac{\tilde{\theta}_{ik} \tilde{\eta}_{jk}}{4} = \sum_k \frac{\theta_{ik}^{(a)} \eta_{jk}^{(a)}}{4} = \sigma_{ij}. \quad (3.172)$$

Дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\} = \tilde{\theta}_{ij}, \quad (3.173)$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ij} + \sum_k \frac{\tilde{\theta}_{ik} \tilde{\eta}_{jk}}{4}, \quad (3.174)$$

$$\{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = \tilde{\eta}_{ij}, \quad (3.175)$$

відтворюють співвідношення некомутовативної алгебри з параметрами:

$$\tilde{\theta}_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{M}, \quad (3.176)$$

$$\tilde{\eta}_{ij} = M\alpha_{ij}. \quad (3.177)$$

На додаток, якщо співвідношення (3.168), (3.169) задовольняються, рух вільної частинки у некомутовативному фазовому просторі не залежить від її маси. Рівняння руху вільної частинки у некомутовативному фазовому просторі (4.26)-(4.29) мають такий вигляд:

$$\dot{X}_i = \sum_j (\delta_{ij} + \sigma_{ij}) \frac{P_j}{m}, \quad (3.178)$$

$$\dot{P}_i = \sum_j \eta_{ij} \frac{P_j}{m}, \quad (3.179)$$

тут  $m$  – маса частинки. Із рівнянь (3.178), (3.179) отримуємо:

$$\dot{X}_i(t) = A_{i1} \cos\left(\frac{\tilde{\eta}}{m}t\right) + A_{i2} \sin\left(\frac{\tilde{\eta}}{m}t\right) + A_{i3}, \quad (3.180)$$

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2}, \quad (3.181)$$

де  $A_{ij}$  – елементи матриці

$$\hat{A} = (1 + \hat{\sigma}) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{C_2 \eta_{31} \tilde{\eta} - C_1 \eta_{12} \eta_{23}}{\eta_{23}^2 + \eta_{31}^2} & -\frac{C_1 \eta_{31} \tilde{\eta} + C_2 \eta_{12} \eta_{23}}{\eta_{23}^2 + \eta_{31}^2} & \frac{C_3 \eta_{23}}{\eta_{12}} \\ -\frac{C_2 \eta_{23} \tilde{\eta} + C_1 \eta_{12} \eta_{31}}{\eta_{23}^2 + \eta_{31}^2} & \frac{C_1 \eta_{23} \tilde{\eta} - C_2 \eta_{12} \eta_{31}}{\eta_{23}^2 + \eta_{31}^2} & \frac{C_3 \eta_{23}}{\eta_{12}} \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \quad (3.182)$$

Константи  $C_i$  визначаються початковими швидкостями  $v_{0i}$

$$(1 + \hat{\sigma})\hat{B}\hat{C} = \hat{v}_0, \quad (3.183)$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \frac{-\eta_{12}\eta_{23}}{\eta_{23}^2 + \eta_{31}^2} & \frac{\eta_{31}\bar{\eta}}{\eta_{23}^2 + \eta_{31}^2} & \frac{\eta_{23}}{\eta_{12}} \\ \frac{-\eta_{12}\eta_{31}}{\eta_{23}^2 + \eta_{31}^2} & -\frac{\eta_{23}\bar{\eta}}{\eta_{23}^2 + \eta_{31}^2} & \frac{\eta_{31}}{\eta_{12}} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.184)$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad \hat{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{01} \\ v_{02} \\ v_{03} \end{pmatrix} \quad (3.185)$$

Елементи матриці  $\hat{\sigma}$  мають вигляд (4.71). Звернімо увагу, що рух вільної частинки не залежить від її маси, якщо виконуються співвідношення (3.168), (3.169). У цьому випадку ми можемо переписати (3.178), (3.179) як

$$\dot{X}_i = \sum_j (\delta_{ij} + \sigma_{ij}) \frac{P_j}{m}, \quad (3.186)$$

$$\frac{\dot{P}_i}{m} = \sum_j \alpha_{ij} \frac{P_j}{m}. \quad (3.187)$$

Із (3.186), (3.187) випливає, що траєкторія вільної частинки  $X_i(t)$  не залежить від маси. Як наслідок, для системи вільних частинок маємо, що швидкість руху центра мас дорівнює швидкостям руху частинок, які утворюють систему. При виконанні умови (3.169) ми можемо записати:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\eta}^{(n)}}{m_n} &= \frac{\sqrt{(\eta_{12}^{(n)})^2 + (\eta_{23}^{(n)})^2 + (\eta_{31}^{(n)})^2}}{m_n} = \\ &= \sqrt{\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2}. \end{aligned} \quad (3.188)$$

а також

$$A_{ij}^{(n)} = A_{ij}. \quad (3.189)$$

Тому швидкість руху центра мас системи вільних частинок може



бути записана як

$$\begin{aligned}
\dot{X}_i^c(t) &= \sum_n \mu_n \dot{X}_i^{(n)}(t) = \sum_n \mu_n \left( A_{i1}^{(n)} \cos\left(\frac{\bar{\eta}^{(n)}}{m_n} t\right) + \right. \\
&\quad \left. + A_{i2}^{(n)} \sin\left(\frac{\bar{\eta}^{(n)}}{m_n} t\right) + A_{i3}^{(n)} \right) = \\
&= A_{i1} \cos\left(\sqrt{\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2} t\right) + \\
&\quad + A_{i2} \sin\left(\sqrt{\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2} t\right) + A_{i3} = \dot{X}_i^{(n)}(t). \quad (3.190)
\end{aligned}$$

Відносні швидкості дорівнюють нулю

$$\Delta \dot{X}_i(t) = \dot{X}_i^{(n)}(t) - \dot{X}_i^c(t) = 0. \quad (3.191)$$

Як і у звичному просторі ( $\theta_{ij} = \eta_{ij} = 0$ ) система вільних частинок з однаковими початковими швидкостями не розлітається.

Отже, запропоновані умови на параметри некомутовативної алгебри (3.168), (3.169), дозволяють розв'язати проблему залежності руху вільної частинки у некомутовативному фазовому просторі від маси, розглядати для координат та імпульсів центра мас співвідношення некомутовативної алгебри, вивчати рух центра мас та відносний рух, як незалежні.

### 3.6 Вільне падіння тіла у однорідному гравітаційному полі у некомутовативному фазовому просторі

Розгляньмо частинку з масою  $m$  у однорідному гравітаційному полі у просторі, який характеризується співвідношеннями (3.64)-(3.66). Знайдемо та проаналізуємо траєкторію вільного падіння частинки у некомутовативному фазовому просторі. Запишемо гамільтоніан:

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - mgX_1. \quad (3.192)$$

Зауважимо, що тут координати та імпульси задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (3.64)-(3.66). Врахувавши це, можемо записати такі рівняння руху

$$\dot{X}_1 = \frac{P_1}{m}, \quad \dot{X}_2 = \frac{P_2}{m} + mg\theta, \quad (3.193)$$

$$\dot{P}_1 = mg + \eta \frac{P_2}{m}, \quad \dot{P}_2 = -\eta \frac{P_1}{m}. \quad (3.194)$$

Із рівнянь (3.193)-(3.194) отримаємо, що траєкторія частинки у однорідному гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі має такий вигляд:

$$X_1(t) = \frac{A}{\eta} \sin \frac{\eta}{m} t - \frac{B}{\eta} \cos \frac{\eta}{m} t + C, \quad (3.195)$$

$$X_2(t) = \frac{A}{\eta} \cos \frac{\eta}{m} t + \frac{B}{\eta} \sin \frac{\eta}{m} t - \frac{mg}{\eta} t + mg\theta t + D, \quad (3.196)$$

тут  $A, B, C, D$  є константами. Розглянувши початкові умови  $X_1(0) = X_{01}, X_2(0) = X_{02}, \dot{X}_1(0) = v_{01}, \dot{X}_2(0) = v_{02}$ , маємо:

$$X_1(t) = \frac{mv_{01}}{\eta} \sin \frac{\eta}{m} t + \left( \frac{m^2 g}{\eta^2} - \frac{m^2 g\theta}{\eta} + \frac{mv_{02}}{\eta} \right) \left( 1 - \cos \frac{\eta}{m} t \right) + X_{01}, \quad (3.197)$$

$$X_2(t) = \left( \frac{m^2 g}{\eta^2} - \frac{m^2 g\theta}{\eta} + \frac{mv_{02}}{\eta} \right) \sin \frac{\eta}{m} t - \frac{mv_{01}}{\eta} \left( 1 - \cos \frac{\eta}{m} t \right) - \frac{mg}{\eta} t + mg\theta t + X_{02}. \quad (3.198)$$

Зауважимо, що у границі  $\eta \rightarrow 0$  із (3.197), (3.198) знайдемо добре відомий результат, який відповідає руху частинки у однорідному полі у звичному просторі

$$X_1(t) = \frac{gt^2}{2} + v_{01}t + X_{01}, \quad (3.199)$$

$$X_2(t) = v_{02}t + X_{02}, \quad (3.200)$$

проте зв'язок між імпульсом та швидкістю є змінений. А саме, маємо такі рівності

$$P_1 = m\dot{X}_1, \quad (3.201)$$

$$P_2 = m(\dot{X}_2 + mg\theta). \quad (3.202)$$

Звернімо увагу на те, що відповідно до отриманих співвідношень (3.197)-(3.198) траєкторія частинки у однорідному гравітаційному полі є різною для частинок з різними масами. Отже, у некомутативному фазовому просторі існує проблема порушення слабкого принципу еквівалентності. Ще одною фундаментальною проблемою, яка зумовлена некомутативністю імпульсів є порушення адитивності кінетичної енергії та її залежність від композиції. Щоб це показати розглянемо рух тіла у однорідному гравітаційному полі у просторі, який характеризується співвідношеннями (3.197)-(3.198). Для тіла у гравітаційному полі, врахувавши (3.249) та (3.197), (3.198), можемо записати

$$\tilde{P}_1 = \tilde{A} \cos \frac{\tilde{\eta}}{M} t + \tilde{B} \sin \frac{\tilde{\eta}}{M} t, \quad (3.203)$$

$$\tilde{P}_2 = -\tilde{A} \sin \frac{\tilde{\eta}}{M} t + \tilde{B} \cos \frac{\tilde{\eta}}{M} t - \frac{M^2 g}{\tilde{\eta}}, \quad (3.204)$$

де  $\tilde{P}_i$  – імпульс центра мас, визначений як (3.68),  $M = \sum_a m_a$  – повна маса системи,  $\tilde{\eta}$  – ефективний параметр імпульсної некомутативності, який описує рух центра мас,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  – константи, які визначаються як

$$\tilde{A} = M \tilde{v}_{01}, \quad (3.205)$$

$$\tilde{B} = M \tilde{v}_{02} + \frac{M^2 g}{\tilde{\eta}} - M^2 g \tilde{\theta}. \quad (3.206)$$

Тут ми взяли до уваги початкові умови (3.53)-(3.54) та використали позначення  $\tilde{v}_{01}$ ,  $\tilde{v}_{02}$  для початкових швидкостей центра мас системи  $\dot{X}_1(0) = \tilde{v}_{01}$ ,  $\dot{X}_2(0) = \tilde{v}_{02}$ .

Отже, кінетична енергія системи може бути записана у такому вигляді

$$\begin{aligned} T &= \frac{\tilde{P}_1^2}{2M} + \frac{\tilde{P}_2^2}{2M} = \\ &= T_0 + g^2 M^3 \left( \frac{1}{\tilde{\eta}^2} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} - \frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\eta}} \right) + M^2 g \tilde{v}_{02} \left( \frac{1}{\tilde{\eta}} - \tilde{\theta} \right) + \\ &+ \frac{M^2 g}{\tilde{\eta}} \left( \tilde{v}_{01} \sin \frac{\tilde{\eta}}{M} t + \left( \frac{Mg}{\tilde{\eta}} - Mg \tilde{\theta} + \tilde{v}_{02} \right) \cos \frac{\tilde{\eta}}{M} t \right), \end{aligned} \quad (3.207)$$

де

$$T_0 = \frac{M(\tilde{v}_{01}^2 + \tilde{v}_{02}^2)}{2}. \quad (3.208)$$

З іншого боку, відповідно до властивості адитивності, кінетична енергія тіла є сумою кінетичних енергій частинок, які входять до його складу. Нехай тіло складається з  $N$  частинок (поділене на  $N$  частин) з масами  $m_a$  та параметрами некомутативності  $\theta_a, \eta_a$ . Отже, відповідно до властивості адитивності, можемо записати кінетичну енергію тіла у такому вигляді:

$$\begin{aligned} T &= \sum_a T_a = \sum_a \frac{(P_1^{(a)})^2}{2m_a} + \frac{(P_2^{(a)})^2}{2m_a} = \\ &= \sum_a \left[ T_{0a} + g^2 m_a^3 \left( \frac{1}{\eta_a^2} + \frac{\theta_a^2}{2} - \frac{\theta_a}{\eta_a} \right) + m_a^2 g \tilde{v}_{02} \left( \frac{1}{\eta_a} - \theta_a \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{m_a^2 g}{\eta_a} \left( \tilde{v}_{01} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t + \left( \frac{m_a g}{\eta_a} - m_a g \theta_a + \tilde{v}_{02} \right) \cos \frac{\eta_a}{m_a} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.209)$$

Тут враховано те, що швидкості частинок у системі є такими самими, як швидкість всієї системи. Звернімо увагу на те, що вирази для кінетичної енергії (3.207), (3.209) відрізняються. Отже, фундаментальна властивість кінетичної енергії, а саме адитивність, порушується у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Звідси впливає порушення закону збереження енергії. Тому необхідним є пошук можливостей відновлення властивостей кінетичної енергії у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів.

Зауважимо, що у виразах (3.197), (3.198) маса частинки міститься тільки у вигляді добутків  $m\theta$  та  $\eta/m$ . Тому у випадку, коли виконуються умови на параметри некомутативності (3.27), (3.28), отримуємо, що траєкторія частинки у гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі (3.210)-(3.211) не залежить від її маси:

$$X_1(t) = \frac{v_{01}}{\alpha} \sin \alpha t + \left( \frac{g}{\alpha^2} - \frac{g\gamma}{\alpha} + \frac{v_{02}}{\alpha} \right) (1 - \cos \alpha t) + X_{01}, \quad (3.210)$$

$$\begin{aligned} X_2(t) &= \left( \frac{g}{\alpha^2} - \frac{g\gamma}{\alpha} + \frac{v_{02}}{\alpha} \right) \sin \alpha t - \frac{v_{01}}{\alpha} (1 - \cos \alpha t) - \\ &\quad - \frac{g}{\alpha} t + \gamma g t + X_{02}. \end{aligned} \quad (3.211)$$

Отже, умови (3.27), (3.28) дозволяють відновити слабкий принцип еквівалентності у некомутативному фазовому просторі. Також зауважимо, що коли виконується умова (3.27), відповідно до

співвідношення (3.202) знаходимо, що імпульс є пропорційним до маси

$$P_2 = m(\dot{X}_2 + \gamma g). \quad (3.212)$$

як це є у звичному просторі (простір з  $\theta = \eta = 0$ ). Крім того у випадку виконання рівностей (3.27), (3.28) із виразів (3.207), (3.209) отримаємо, що кінетична енергія тіла є адитивною та не залежить від композиції:

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \sum_a m_a \left[ g^2 \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) + g\tilde{v}_{02} \left( \frac{1}{\alpha} - \gamma \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{\alpha} \left( \tilde{v}_{01} \sin \alpha t + \left( \frac{g}{\alpha} - g\gamma + \tilde{v}_{02} \right) \cos \alpha t \right) \right] = \\ &= T_0 + M \left[ g^2 \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) + g\tilde{v}_{02} \left( \frac{1}{\alpha} - \gamma \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{\alpha} \left( \tilde{v}_{01} \sin \alpha t + \left( \frac{g}{\alpha} - g\gamma + \tilde{v}_{02} \right) \cos \alpha t \right) \right]. \quad (3.213) \end{aligned}$$

Отже, умови на параметри некомутативної алгебри (3.27), (3.28) дозволяють розв'язати проблему порушення принципу еквівалентності, а також зберегти властивості кінетичної енергії у квантованому фазовому просторі канонічного типу.

### 3.7 Оцінка мінімального імпульсу на основі досліджень зсуву перигелію Меркурію

У роботі [156] досліджено зсув перигелію орбіти частинки у гравітаційному полі у некомутативному просторі (3.1)-(3.3). З точністю до першого порядку за параметрами некомутативності для частинки з масою  $m$  у гравітаційному полі  $-k/X$  ( $k$  – константа,  $X = \sqrt{\sum_i X_i^2}$ ) отримано такий результат для зсуву перигелію, зумовлений некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів [156]:

$$\Delta\phi_{nc} = 2\pi \left( \sqrt{\frac{m^2 k}{a^3(1-e^2)^3}} \theta + \frac{2}{e^2} \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{m^2 k}} \eta \right), \quad (3.214)$$

де  $a$  – велика піввісь,  $e$  – ексцентриситет,  $\theta = \theta_3$ ,  $\eta = \eta_3$ ,  $\theta_i = \epsilon_{ijk}\theta_{jk}/2$ ,  $\eta_i = \epsilon_{ijk}\eta_{jk}/2$ . Автори статті [156] припустили, що параметри некомутативності для Меркурію є такими самими як і

для елементарних частинок та, порівнявши отриманий результат (3.214) з даними спостережень, отримали верхню межу для мінімальної довжини, яка є близька до планківської

$$\sqrt{\hbar\theta} \leq 6.3 \cdot 10^{-33} \text{м.} \quad (3.215)$$

Другим доданком у (3.214) автори роботи [156] знехтували, вважаючи його малим.

Зауважимо, що дослідження зсуву перигелію Меркурію з врахуванням особливостей опису макроскопічних тіл у некомутативному просторі дають можливість переобчислити результат (3.215) та оцінити верхню межу для мінімальної довжини, яка узгоджується з результатами, представленими у літературі. Також на основі таких досліджень можна отримати обмеження на величину імпульсу у некомутативному фазовому просторі, яке суттєво покращує результати, представлені у літературі. Покажемо це детально.

На основі результатів, представлених у попередніх підрозділах, знаємо, що рух макроскопічного тіла у некомутативному фазовому просторі описується параметрами некомутативності, визначеними як (3.159), (3.160). Врахувавши це та використавши результат (3.214), можемо записати вираз для зсуву перигелію планети Меркурій

$$\Delta\phi_{nc} = \Delta\phi_\theta + \Delta\phi_\eta, \quad (3.216)$$

$$\Delta\phi_\theta = 2\pi \sqrt{\frac{GM^2M_S}{a^3(1-e^2)^3}} \tilde{\theta}, \quad (3.217)$$

$$\Delta\phi_\eta = \frac{4\pi}{e^2} \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{GM^2M_S}} \tilde{\eta}, \quad (3.218)$$

тут  $M$  – маса планети Меркурій,  $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_3$ ,  $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_3$ ,

$$\tilde{\theta}_i = \epsilon_{ijk} \frac{\tilde{\theta}_{jk}}{2}, \quad \tilde{\eta}_i = \epsilon_{ijk} \frac{\tilde{\eta}_{jk}}{2}, \quad (3.219)$$

$\tilde{\theta}_{ij}$ ,  $\tilde{\eta}_{ij}$  визначаються як (3.159), (3.160). Також ми врахували, що  $k = GM_S$ ,  $G$  – гравітаційна константа,  $M_S$  – маса Сонця. Записуючи (3.216), ми припустили, що вплив відносного руху на рух центра мас Меркурію є незначним.

Порівнявши результат для зміщення перигелію, зумовленого некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, з ве-

личиною

$$\begin{aligned} & \Delta\phi_{obs} - \Delta\phi_{GR} = \\ & = 2\pi(-0.00049 \pm 0.00017) \cdot 10^{-8} \text{rad/rev}, \end{aligned} \quad (3.220)$$

та припустивши, що

$$|\Delta\phi_{nc}| \leq |\Delta\phi_{obs} - \Delta\phi_{GR}| \quad (3.221)$$

в межах  $3\sigma$  можемо записати

$$|\Delta\phi_{nc}| \leq 2\pi \cdot 10^{-11} \text{rad/rev}. \quad (3.222)$$

Оскільки один із доданків  $\Delta\phi_\theta$ ,  $\Delta\phi_\eta$  у виразі для  $\Delta\phi_{nc}$  може дорівнювати нулю, що відповідає випадкам  $\theta \neq 0$ ,  $\eta = 0$  та  $\theta = 0$ ,  $\eta \neq 0$ , можемо записати:

$$|\Delta\phi_\theta| \leq 2\pi \cdot 10^{-11} \text{rad/rev}, \quad (3.223)$$

$$|\Delta\phi_\eta| \leq 2\pi \cdot 10^{-11} \text{rad/rev}. \quad (3.224)$$

Отже, використавши (3.217), (3.218), знайдемо

$$\hbar|\tilde{\theta}| \leq 3.6 \cdot 10^{-63} \text{М}^2, \quad (3.225)$$

$$\hbar|\tilde{\eta}| \leq 6.5 \cdot 10^{-30} \text{кг}^2 \text{М}^2 / \text{с}^2. \quad (3.226)$$

Переобчислимо отриманий результат для параметрів некомутативності, які відповідають електронам та нуклонам. Врахувавши співвідношення (3.168), (3.169), (3.176), (3.177), маємо:

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta_e m_e}{M} = \frac{\theta_{nuc} m_{nuc}}{M}, \quad (3.227)$$

$$\tilde{\eta} = \frac{\eta_e M}{m_e} = \frac{\eta_{nuc} M}{m_{nuc}}. \quad (3.228)$$

Отже, використавши (3.225), (3.226), для параметрів некомутативності, які відповідають нуклонам, маємо такі нерівності

$$\hbar|\theta_{nuc}| \leq 7.2 \cdot 10^{-13} \text{М}^2, \quad (3.229)$$

$$\hbar|\eta_{nuc}| \leq 3.3 \cdot 10^{-80} \text{кг}^2 \text{М}^2 / \text{с}^2. \quad (3.230)$$

Для параметрів некомутативності, що відповідають електронам знаходимо:

$$\hbar|\theta_e| \leq 1.3 \cdot 10^{-9} \text{М}^2, \quad (3.231)$$

$$\hbar|\eta_e| \leq 1.8 \cdot 10^{-83} \text{кг}^2 \text{М}^2 / \text{с}^2. \quad (3.232)$$

Важливо також оцінити величини констант  $\gamma = \gamma_{12}$ ,  $\alpha = \alpha_{12}$  із співвідношень (3.168), (3.169), оскільки вони є однаковими для різних частинок, тому відіграють роль фундаментальних констант. На основі результатів (3.225), (3.226), отримуємо такі оцінки:

$$|\gamma| \leq 1.1 \cdot 10^{-5} \text{с} = 2.1 \cdot 10^{38} T_P \quad (3.233)$$

$$|\alpha| \leq 1.9 \cdot 10^{-19} \text{с}^{-1} = 10^{-62} T_P^{-1}. \quad (3.234)$$

тут  $T_P$  – час Планка.

Результат для параметра координатної некомутовативності (3.229) узгоджується з результатом, отриманим на основі досліджень нейтронів у гравітаційній квантовій ямі у некомутовативному просторі [157]. У роботі [157] отримано верхню межу  $\hbar|\theta_{nuc}| \leq 0.771 \cdot 10^{-13} \text{м}^2$ . Нерівність (3.231) не накладає сильне обмеження на величину параметра координатної некомутовативності для електронів. Це пояснюється тим, що ефективний параметр координатної некомутовативності, який описує рух системи частинок, зменшується при збільшенні кількості частинок у системі, що впливає з (3.159) чи (3.176). Тому для отримання строгих оцінок на величину параметра координатної некомутовативності на основі досліджень руху макроскопічних тіл необхідно мати експериментальні дані з дуже великими точностями.

Результати для параметрів імпульсної некомутовативності (3.230), (3.232) накладають достатньо строгі обмеження на його величину. Верхня межа (3.230) є на 13 порядків менша ніж отримана на основі досліджень нейтронів у гравітаційній квантовій ямі [59] (у статті отримано  $\hbar|\eta_{nuc}| \leq 1.76 \cdot 10^{-61} \text{кг}^2 \text{м}^2 / \text{с}^2$ ). Результат (3.232) є на 17 порядків меншим ніж отриманий на основі досліджень впливу некомутовативності на енергетичні рівні атома водню [158] (авторами статті знайдено  $\hbar|\eta_e| \leq 1.45 \cdot 10^{-66} \text{кг}^2 \text{м}^2 / \text{с}^2$ ).

На основі нерівності (3.232) можемо отримати верхню межу для мінімального імпульсу у некомутовативному фазовому просторі

$$\sqrt{\hbar|\eta_e|} \leq 4.2 \cdot 10^{-42} \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с} = 6.5 \cdot 10^{-43} E_P / \text{с}, \quad (3.235)$$

де  $E_P$  – енергія Планка. Проаналізуємо цей результат. Для цього порівняймо його з відомими величинами. Із співвідношення невизначеностей Гайзенберга маємо:

$$\Delta P \geq \frac{\hbar}{2\Delta X}. \quad (3.236)$$



Для відстаней порядку діаметра видимого Всесвіту  $8.8 \cdot 10^{26}$  м [159] отримаємо:

$$\Delta P \geq 6 \cdot 10^{-62} \text{ кг} \cdot \text{ м/с}. \quad (3.237)$$

Результат (3.235) є на багато порядків менший ніж ця величина. Маємо:

$$\frac{\sqrt{\hbar |\eta_e|}}{\Delta P} = 7 \cdot 10^{19}. \quad (3.238)$$

Звернімо увагу, що якщо припустити, що параметри некомутативності є однакові для різних частинок і макроскопічних тіл, вираз для зміщення перигелію Меркурію (3.214), залежить від маси планети. Принцип еквівалентності порушується у некомутативному фазовому просторі. У наступному розділі буде досліджено цю проблему та буде показано, що рух частинки (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі та зміщення перигелію її орбіти не залежить від маси, якщо виконуються співвідношення (3.168), (3.169).

### 3.8 Вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на рух системи Сонце-Земля-Місяць та слабкий принцип еквівалентності

Дослідімо вплив некомутативності на рух Землі та Місяця у гравітаційному полі Сонця. Розгляньмо такий гамільтоніан

$$H = \frac{(\mathbf{P}^E)^2}{2m_E} + \frac{(\mathbf{P}^M)^2}{2m_M} - G \frac{m_E m_S}{R_{ES}} - G \frac{m_M m_S}{R_{MS}} - G \frac{m_M m_E}{R_{EM}}, \quad (3.239)$$

тут  $m_S$ ,  $m_E$ ,  $m_M$  – маса Сонця, Землі, Місяця, відповідно,  $G$  – гравітаційна стала. Записавши гамільтоніан (3.239), ми припускаємо, що вплив відносного руху частинок, які утворюють макроскопічні тіла, на рух центрів мас є незначним.

Вибравши початок системи координат у центрі мас Сонця, можемо записати відстані від Землі до Сонця, від Місяця до Сонця,

від Землі до Місяця як

$$R_{ES} = \sqrt{(X_1^E)^2 + (X_2^E)^2}, \quad (3.240)$$

$$R_{MS} = \sqrt{(X_1^M)^2 + (X_2^M)^2}, \quad (3.241)$$

$$R_{EM} = \sqrt{(X_1^E - X_1^M)^2 + (X_2^E - X_2^M)^2}, \quad (3.242)$$

де  $X_i^E, X_i^M$  – координати Місяця та Землі,  $i = (1, 2)$ . Координати та імпульси  $X_i^E, P_i^E, X_i^M, P_i^M$  задовольняють співвідношення некомутативної алгебри

$$\{X_1^E, X_2^E\} = \theta_E, \quad \{P_1^E, P_2^E\} = \eta_E, \quad \{X_i^E, P_j^E\} = \delta_{ij}, \quad (3.243)$$

$$\{X_1^M, X_2^M\} = \theta_M, \quad \{P_1^M, P_2^M\} = \eta_M, \quad \{X_i^M, P_j^M\} = \delta_{ij}, \quad (3.244)$$

$$\{X_i^M, X_j^E\} = \{P_i^M, P_j^E\} = 0, \quad (3.245)$$

де  $\theta_E, \eta_E, \theta_M, \eta_M$  параметри некомутативності, які описують рух Землі та Місяця.

Взявши до уваги деформацію дужок Пуассона (4.140)-(3.245), отримаємо такі рівняння руху:

$$\dot{X}_1^E = \frac{P_1^E}{m_E} + \theta_E \frac{Gm_E m_S X_2^E}{R_{ES}^3} + \theta_E \frac{Gm_E m_M (X_2^E - X_2^M)}{R_{EM}^3}, \quad (3.246)$$

$$\dot{X}_2^E = \frac{P_2^E}{m_E} - \theta_E \frac{Gm_E m_S X_1^E}{R_{ES}^3} - \theta_E \frac{Gm_E m_M (X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3}, \quad (3.247)$$

$$\dot{P}_1^E = \eta_E \frac{P_2^E}{m_E} - \frac{Gm_E m_S X_1^E}{R_{ES}^3} - \frac{Gm_E m_M (X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3}, \quad (3.248)$$

$$\dot{P}_2^E = -\eta_E \frac{P_1^E}{m_E} - \frac{Gm_E m_S X_2^E}{R_{ES}^3} - \frac{Gm_E m_M (X_2^E - X_2^M)}{R_{EM}^3}, \quad (3.249)$$

$$\dot{X}_1^M = \frac{P_1^M}{m_M} + \theta_M \frac{Gm_M m_S X_2^M}{R_{MS}^3} - \theta_M \frac{Gm_E m_M (X_2^E - X_2^M)}{R_{EM}^3}, \quad (3.250)$$

$$\dot{X}_2^M = \frac{P_2^M}{m_M} - \theta_M \frac{Gm_M m_S X_1^E}{R_{MS}^3} + \theta_M \frac{Gm_E m_M (X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3}, \quad (3.251)$$

$$\dot{P}_1^M = \eta_M \frac{P_2^M}{m_M} - \frac{Gm_M m_S X_1^M}{R_{MS}^3} + \frac{Gm_E m_M (X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3}, \quad (3.252)$$

$$\dot{P}_2^M = -\eta_M \frac{P_1^M}{m_M} - \frac{Gm_M m_S X_2^M}{R_{MS}^3} + \frac{Gm_E m_M (X_2^E - X_2^M)}{R_{EM}^3}, \quad (3.253)$$

Варто відзначити, що через доданки у рівняннях руху (3.302)-(3.253), які зумовлені некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, швидкість макроскопічного тіла у гравітаційному полі залежить від його маси. Також, врахувавши вирази для параметрів некомутативної алгебри (3.159), (3.160), які описують рух макроскопічного тіла у некомутативному фазовому просторі, можемо стверджувати, що швидкості руху Землі та Місяця залежать від їх композиції.

Відповідно до експерименту з лазерної далекометрії Місяця [160] принцип еквівалентності виконується з точністю

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2(a_E - a_M)}{a_E + a_M} = (-0.8 \pm 1.3) \cdot 10^{-13}, \quad (3.254)$$

де  $a_E$ ,  $a_M$  – прискорення вільного падіння Землі та Місяця в напрямку на Сонце, коли Земля та Місяць знаходяться на однаковій відстані від Сонця. Використаймо цей результат для аналізу слабого принципу еквівалентності у некомутативному фазовому просторі.

На основі рівнянь (3.302)-(3.253) можемо записати вирази для прискорень Землі та Місяця. З точністю до першого порядку за параметрами некомутативності  $\theta_M$ ,  $\eta_M$ ,  $\theta_E$ ,  $\eta_E$  маємо:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1^E = & -\frac{Gm_S X_1^E}{R_{ES}^3} - \frac{Gm_M (X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3} + \eta_E \frac{\dot{X}_2^E}{m_E} + \\ & + \theta_E \frac{Gm_S m_E \dot{X}_2^E}{R_{ES}^3} + \theta_E \frac{Gm_M m_E}{R_{EM}^3} (\dot{X}_2^E - \dot{X}_2^M) - \theta_E \frac{3Gm_S m_E}{R_{ES}^5} \times \\ & \times (\mathbf{R}_{ES} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{ES}) X_2^E - \theta_E \frac{3Gm_M m_E}{R_{EM}^5} (\mathbf{R}_{EM} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{EM}) (X_2^E - X_2^M), \end{aligned} \quad (3.255)$$

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1^M = & -\frac{Gm_S X_1^M}{R_{MS}^3} + \frac{Gm_E (X_1^E - X_1^M)}{R_{EM}^3} + \eta_M \frac{\dot{X}_2^M}{m_M} + \\ & + \theta_M \frac{Gm_S m_M \dot{X}_2^M}{R_{MS}^3} - \theta_M \frac{Gm_M m_E}{R_{EM}^3} (\dot{X}_2^E - \dot{X}_2^M) - \theta_M \frac{3Gm_S m_M}{R_{MS}^5} \times \\ & \times (\mathbf{R}_{MS} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{MS}) X_2^M + \theta_M \frac{3Gm_M m_E}{R_{EM}^5} (\mathbf{R}_{EM} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{EM}) (X_2^E - X_2^M). \end{aligned} \quad (3.256)$$

де  $\mathbf{R}_{ES}(X_1^E, X_2^E)$ ,  $\mathbf{R}_{MS}(X_1^M, X_2^M)$ ,  $\mathbf{R}_{EM}(X_1^E - X_1^M, X_2^E - X_2^M)$ .

Порівняймо прискорення Місяця та Землі в напрямку на Сонце, у випадку, коли  $R_{MS} = R_{ES} = R$ . Виберемо для зручності систему координат з віссю  $X_1$ , яка проходить через середину вектора  $\mathbf{R}_{EM}$  та є перпендикулярна до нього, вісь  $X_2$  паралельна вектору  $\mathbf{R}_{EM}$ . Нагадаємо, що центр системи координат збігається з центром мас Сонця. Тоді, врахувавши що  $R_{EM}/R \sim 10^{-3}$ , маємо:

$$X_1^E = X_1^M = R\sqrt{1 - \frac{R_{EM}^2}{4R^2}} \simeq R, \quad (3.257)$$

$$X_2^E = -X_2^M = \frac{R_{EM}}{2} \quad (3.258)$$

Отже, прискорення Землі та Місяця мають вигляд:

$$a_E = \ddot{X}_1^E = -\frac{Gm_S}{R^2} + \eta_E \frac{v_E}{m_E} + \theta_E \frac{Gm_S m_E v_E}{R^3} \left( 1 - \frac{3R_{EM}}{2v_E R^2} (\mathbf{R}_{ES} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{ES}) \right), \quad (3.259)$$

$$a_M = \ddot{X}_1^M = -\frac{Gm_S}{R^2} + \eta_M \frac{v_E}{m_M} + \theta_M \frac{Gm_S m_M v_E}{R^3} \left( 1 + \frac{3R_{EM}}{2v_E R^2} (\mathbf{R}_{MS} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{MS}) \right), \quad (3.260)$$

де ми використали те, що

$$\dot{X}_2^E = \dot{X}_2^M = v_E, \quad (3.261)$$

$$\dot{X}_1^E = 0, \quad \dot{X}_1^M = v_M \quad (3.262)$$

$v_E$  – орбітальна швидкість Землі,  $v_E$  – орбітальна швидкість Місяця. Звернімо увагу, що  $R_{EM}/R \sim 10^{-3}$ ,  $v_M/v_E \sim 10^{-2}$ . Зважаючи на це останніми додагками у (3.259), (3.260) ми можемо знехтувати,

$$\frac{3R_{EM}(\mathbf{R}_{ES} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{ES})}{2v_E R^2} \sim 10^{-6}, \quad (3.263)$$

$$\frac{3R_{EM}(\mathbf{R}_{MS} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{MS})}{2v_E R^2} \sim 10^{-5}. \quad (3.264)$$

Отже, вираз для параметра Етвеша буде мати такий вигляд

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a^\eta}{a} + \frac{\Delta a^\theta}{a} \quad (3.265)$$

$$\frac{\Delta a^\eta}{a} = \frac{v_E R^2}{G m_S} \left( \frac{\eta_E}{m_E} - \frac{\eta_M}{m_M} \right), \quad (3.266)$$

$$\frac{\Delta a^\theta}{a} = \frac{v_E}{R} (\theta_E m_E - \theta_M m_M). \quad (3.267)$$

Проаналізуємо отриманий результат. Звернімо увагу, що параметр Етвеша не дорівнює нулеві навіть у випадку, коли гравітаційна маса та інерційна маса є рівними У виразі (3.265) маємо доданок, зумовлений некомутативністю імпульсів  $\Delta a^\eta/a$ , який пропорційний до різниці  $(\eta_E/m_E - \eta_M/m_M)$ , та доданок, зумовлений некомутативністю координат,  $\Delta a^\theta/a$ , пропорційний до  $(\theta_E m_E - \theta_M m_M)$ . Параметри  $\theta_E, \eta_E, \theta_M, \eta_M$  – ефективні параметри некомутативної алгебри, які визначаються як (3.159), (3.160) ( $\theta_E = \theta_{E12}$ ,  $\eta_E = \eta_{E12}$ ,  $\theta_M = \theta_{M12}$ ,  $\eta_M = \eta_{M12}$ ) та залежать від композиції тіл. Отже, навіть у випадку, коли маси двох тіл однакові, проте їх композиції різні, принцип еквівалентності порушується.

Результат (3.265) можна використати для оцінки величин  $\alpha_E - \alpha_M$ ,  $\gamma_E - \gamma_M$ , де

$$\frac{\eta_E}{m_E} = \alpha_E, \quad (3.268)$$

$$\frac{\eta_M}{m_M} = \alpha_M, \quad (3.269)$$

$$\theta_E m_E = \gamma_E, \quad (3.270)$$

$$\theta_M m_M = \gamma_M. \quad (3.271)$$

З цією метою ми припускаємо, що ефект некомутативності на рух Землі та Місяця, який зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності ніж експериментальний результат для точності виконання цього принципу. Отже, ми можемо записати таку нерівність:

$$\left| \frac{\Delta a^\theta + \Delta a^\eta}{a} \right| \leq 2.1 \cdot 10^{-13}, \quad (3.272)$$

де  $2.1 \cdot 10^{-13}$  найбільше значення  $|\Delta a|/|a|$ , яке було отримане на основі експерименту з лазерної далекометрії Місяця [160].

Для оцінки величин

$$\Delta\alpha = \alpha_E - \alpha_M, \quad (3.273)$$

$$\Delta\gamma = \gamma_E - \gamma_M, \quad (3.274)$$

розгляньмо такі нерівності

$$\left| \frac{\Delta a^\theta}{a} \right| \leq 2.1 \cdot 10^{-13}, \quad (3.275)$$

$$\left| \frac{\Delta a^\eta}{a} \right| \leq 2.1 \cdot 10^{-13}. \quad (3.276)$$

Записуючи (3.275), (3.276), ми врахували те, що можуть реалізуватися випадки  $\theta \neq 0, \eta = 0$  (простір з некомутативністю координат) та  $\theta = 0, \eta \neq 0$  (простір з некомутативністю імпульсів). Використавши (3.266), (3.267), отримаємо:

$$\Delta\alpha \leq 10^{-20} \text{с}^{-1}, \quad (3.277)$$

$$\Delta\gamma \leq 10^{-7} \text{с}. \quad (3.278)$$

Щоб проаналізувати отриманий результат необхідно оцінити величини констант  $\alpha, \gamma$ . У роботі [161], на основі досліджень атома водню у просторі з некомутативністю координат отримано оцінку верхньої межі для параметра координатної некомутативності

$$\hbar\theta_e \leq 10^{-33} \text{м}^2. \quad (3.279)$$

На основі цього результату можемо оцінити порядок константи  $\gamma$ . Маємо

$$\gamma = m_e\theta_e \leq 10^{-29} \text{с}. \quad (3.280)$$

У статті [59], досліджуючи вплив некомутативності імпульсів на енергетичні рівні нейтронів у гравітаційній ямі автори отримали такий результат для параметра імпульсної некомутативності

$$\hbar|\eta| \leq 2.4 \times 10^{-67} \text{кг}^2 \text{м}^2 / \text{с}^2. \quad (3.281)$$

На основі цього результату маємо:

$$\alpha = \frac{\eta}{m_n} \leq 10^{-6} \text{с}^{-1} \quad (3.282)$$

( $m_n$  – маса нейтрона). У попередньому підрозділі ми встановили, що більш сильне обмеження на величину параметра імпульсної некомутованості та константи  $\alpha$  можна отримати, досліджуючи рух планети Меркурій у некомутованому фазовому просторі. Врахувавши (3.234), маємо:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \leq 5. \quad (3.283)$$

Отже, результати (3.277), (3.278) не накладають сильні обмеження на величини  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\gamma$ . Для покращення цих результатів необхідні є дані спостережень з більш високою точністю.

На завершення підрозділу зазначимо, що у випадку, коли параметри некомутованості залежать від маси як (3.168), (3.169), маємо:

$$\alpha_E = \alpha_M, \quad (3.284)$$

$$\gamma_E = \gamma_M, \quad (3.285)$$

тому параметр Етвеша (3.265) дорівнює нулю та виконується слабкий принцип еквівалентності.

Покажемо також, що у випадку виконання рівностей (3.168), (3.169) траєкторія та швидкість частинки (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі не залежать від його маси та композиції. Гамільтоніан частинки з масою  $m$  у гравітаційному полі  $V(X_1, X_2)$  має такий вигляд

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + mV(X_1, X_2), \quad (3.286)$$

де координати та імпульси задовольняють комутаційні співвідношення (3.64)-(3.66). Врахувавши (3.64)-(3.66), можемо записати

$$\dot{X}_1 = \{X_1, H\} = \frac{P_1}{m} + m\theta \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \quad (3.287)$$

$$\dot{X}_2 = \{X_2, H\} = \frac{P_2}{m} - m\theta \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \quad (3.288)$$

$$\dot{P}_1 = \{P_1, H\} = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \eta \frac{P_2}{m}, \quad (3.289)$$

$$\dot{P}_2 = \{P_2, H\} = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \eta \frac{P_1}{m}. \quad (3.290)$$

Якщо ми припустимо, що параметри некомутативності  $\theta$ ,  $\eta$  є однакою для частинок з різними масами, з рівнянь (3.287)-(3.290) можемо зробити висновок, що швидкість частинки у гравітаційному полі залежить від її маси. У випадку, коли виконуються умови (3.168), (3.169), маємо:

$$\dot{X}_1 = \frac{P_1}{m} + \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \quad (3.291)$$

$$\dot{X}_2 = \frac{P_2}{m} - \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \quad (3.292)$$

$$\dot{P}_1 = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \alpha P_2, \quad (3.293)$$

$$\dot{P}_2 = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \alpha P_1. \quad (3.294)$$

Рівняння (3.291)-(3.294) можуть бути переписані у такому вигляді

$$\dot{X}_1 = P'_1 + \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \quad (3.295)$$

$$\dot{X}_2 = P'_2 - \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \quad (3.296)$$

$$\dot{P}'_1 = -\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \alpha P'_2, \quad (3.297)$$

$$\dot{P}'_2 = -\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \alpha P'_1, \quad (3.298)$$

де ми використали позначення

$$P'_i = \frac{P_i}{m} \quad (3.299)$$

Зауважимо, що у рівняння руху (3.295)-(3.298) не входить маса. Отже, їх розв'язок  $X_i = X_i(t)$ ,  $P'_i = P'_i(t)$  також не залежить від маси. Зважаючи на це, ми можемо зробити висновок, що у випадку, коли виконуються рівності (3.168), (3.169) траєкторія та швидкість частинки у неоднорідному полі залежать від констант  $\gamma$  та  $\alpha$  та не залежать від її маси. Отже, слабкий принцип еквівалентності виконується у квантованому фазовому просторі канонічного типу.



Розгляньмо рух системи частинок (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі та дослідимо принцип еквівалентності. Знайдемо рівняння руху та проаналізуємо виконання слабкого принципу еквівалентності. Для системи частинок у гравітаційному полі  $V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  маємо такий гамільтоніан

$$H = \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) + H_{rel}, \quad (3.300)$$

де  $M$  – повна маса системи,  $\tilde{X}_i, \tilde{P}_i$  – координати та імпульси центра мас, які визначаються як (3.101), (3.68) та задовольняють некомутативну алгебру з ефективними параметрами  $\tilde{\theta}, \tilde{\eta}$ . Ми використали позначення  $H_{rel}$  для гамільтоніану, який відповідає відносному руху та залежить від координат та імпульсів відносного руху.

Як було показано в підрозділі 3.8, рух центра мас системи частинок та відносний рух є незалежними, коли виконуються умови (3.168), (3.169). У цьому випадку

$$\left\{ \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), H_{rel} \right\} = 0. \quad (3.301)$$

Отже, можемо записати такі рівняння руху для центра мас системи  $N$  частинок у гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі

$$\dot{\tilde{X}}_1 = \frac{P_1}{M} + M\tilde{\theta} \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2}, \quad (3.302)$$

$$\dot{\tilde{X}}_2 = \frac{P_2}{M} - M\tilde{\theta} \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1}, \quad (3.303)$$

$$\dot{\tilde{P}}_1 = -M \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1} + \tilde{\eta} \frac{P_2}{M}, \quad (3.304)$$

$$\dot{\tilde{P}}_2 = -M \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2} - \tilde{\eta} \frac{P_1}{M}. \quad (3.305)$$

Важливо звернути увагу на те, що рівняння руху залежать від ефективних параметрів некомутативності, які відповідно до (3.159), (3.160) залежать від композиції макроскопічного тіла. Цей факт

є додатковою причиною порушення принципу еквівалентності у некомутованому фазовому просторі. Врахувавши умови (3.168), (3.169), маємо:

$$\dot{\tilde{X}}_1 = \frac{P_1}{M} + \gamma \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2}, \quad (3.306)$$

$$\dot{\tilde{X}}_2 = \frac{P_2}{M} - \gamma \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1}, \quad (3.307)$$

$$\dot{\tilde{P}}_1 = -M \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1} + \alpha P_2, \quad (3.308)$$

$$\dot{\tilde{P}}_2 = -M \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2} - \alpha P_1. \quad (3.309)$$

Отже, у випадку виконання співвідношень (3.168), (3.169), рух тіла у гравітаційному полі не залежить від його маси та композиції, тому слабкий принцип еквівалентності зберігається у некомутованому фазовому просторі.

Цей висновок можна узагальнити на випадок шестивимірного квантованого фазового простору канонічного типу, який характеризується алгеброю (3.1)-(3.3). Для частинки (тіла) з масою  $m$  у гравітаційному полі  $V(\mathbf{X})$ , врахувавши співвідношення (3.168), (3.169), можемо записати:

$$H = \frac{P^2}{2m} + mV(\mathbf{X}), \quad (3.310)$$

$$\dot{X}_i = \sum_j (\delta_{ij} + \sigma_{ij}) P'_j + \sum_j \gamma_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_j}, \quad (3.311)$$

$$\dot{P}'_i = - \sum_j (\delta_{ij} + \sigma_{ij}) \frac{\partial V}{\partial X_j} + \sum_j \alpha_{ij} P'_j, \quad (3.312)$$

де

$$P'_i = \frac{P_i}{m}. \quad (3.313)$$

Із (3.311), (3.312) випливає, що  $X_i(t)$ ,  $P'_i(t)$  не залежать від маси. Тому слабкий принцип еквівалентності зберігається.

### 3.9 Висновки

У розділі розглянуто простір з некомутативністю координат і некомутативністю імпульсів канонічного типу. Досліджено особливості опису руху системи багатьох частинок в такому просторі. Показано, що якщо параметри некомутативної алгебри залежать від маси, а саме якщо виконуються умови (3.168)-(3.172), рух центра мас багаточастинкової системи не залежить від відносного руху, система вільних частинок з однаковими початковими швидкостями не розлітається, слабкий принцип еквівалентності відновлюється.

Досліджено зміщення перигелію Меркурію з урахуванням особливостей опису руху макроскопічного тіла в некомутативному фазовому просторі. На основі результатів цих досліджень і результатів спостережень прецесії перигелію Меркурія за даними MESSENGER ми оцінили верхню межу параметрів некомутативності, що відповідають нуклонам. Ми прийшли до висновку, що врахування виразів для ефективних параметрів некомутативності, що відповідають планеті Меркурій, дозволяє отримати верхню межу для параметра координатної некомутативності (3.229), яка на відміну від результатів статті не потребує пояснень. Також ми показали, що на основі досліджень зміщення перигелію Меркурію може бути знайдено досить жорстка верхня межа параметра імпульсної некомутативності. А саме для параметра імпульсної некомутативності, що відповідає нуклонам ми знайшли таке обмеження  $10^{-80} \text{ кг}^2 \text{ м}^2 / \text{с}^2$ . Цей результат на багато порядків менший, ніж результат, отриманий на основі досліджень нейтронів у полі тяжіння та на основі досліджень атома водню в некомутативному фазовому просторі.

Досліджено вплив некомутативності на зсув перигелію Меркурію з врахуванням особливостей опису руху макроскопічного тіла у квантованому фазовому просторі канонічного типу. На основі порівняння теоретичного результату для зміщення перигелію, зумовленого некомутативністю, із експериментальними даними знайдено оцінки для параметрів координатної та імпульсної некомутативностей. Отриманий результат для параметра імпульсної некомутативності (3.232) значно покращує результати, представлені у літературі. А саме, верхня межа (3.232) є 17 порядків менша ніж межа, отримана на основі досліджень енергетичних рівнів атома водню у некомутативному фазовому просторі [59].

Досліджено вплив квантованості простору на рух системи Сонце-Земля-Місяць. Знайдено поправки до параметра Етвеша для Землі та Місяця, зумовлені некомутативністю. Ми показали, що у не-

комутативному фазовому просторі параметр Етвеша не дорівнює нулю навіть у випадку рівності інерційної та гравітаційної мас. Модифікація дужок Пуассона для координат та імпульсів зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності. Важливо зауважити, що слабкий принцип еквівалентності відновлюється у некомутативному фазовому просторі, коли параметри некомутативної алгебри залежать від маси (3.168), (3.169).

## Розділ 4

# Рух у гравітаційному полі у квантованому просторі зі збереженими сферичною симетрією та симетрією відносно інверсії часу

### 4.1 Вступ

Звичні комутаційні співвідношення для операторів координат та операторів імпульсів

$$[x_i, x_j] = 0, \quad (4.1)$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (4.2)$$

$$[p_i, p_j] = 0, \quad (4.3)$$

є інваріантними відносно інверсії часу [162]. Врахувавши те, що у квантовій механіці перетворення інверсії часу включають комплексне спряження (див., для прикладу, [162]) та при інверсії часу координати та імпульси перетворюються як

$$x_i \rightarrow x_i, \quad (4.4)$$

$$p_i \rightarrow -p_i, \quad (4.5)$$

отримаємо, що при перетворенні інверсії часу співвідношення (4.3) залишаються незмінними.

Припущення про те, що комутатори для координат та для імпульсів дорівнюють константам зумовлює порушення симетрії відносно інверсії часу [57, 163]. Некомутативна алгебра канонічного типу (3.1)-(3.3) не є інваріантною відносно інверсії часу. Розглядаючи перетворення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів при інверсії часу, аналогічні, як у звичному просторі

$$X_i \rightarrow X_i, \quad (4.6)$$

$$P_i \rightarrow -P_i, \quad (4.7)$$

отримаємо, що співвідношення, для прикладу, двовимірної некомутативної алгебри (3.1)-(3.3), переходять у такі рівності

$$[X_1, X_2] = -i\hbar\theta, \quad (4.8)$$

$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar(1 + \sigma), \quad (4.9)$$

$$[P_1, P_2] = -i\hbar\eta. \quad (4.10)$$

Отже, із (4.8)-(4.10) випливає, що при інверсії часу алгебра (3.1)-(3.3) трансформується у некомутативну алгебру з параметрами некомутативності  $-\theta$ ,  $-\eta$ .

Важливо відзначити, що перетворення (4.6), (4.7) є одним із можливих перетворень координат та імпульсів у некомутативному просторі при інверсії часу. У цьому розділі ми показуємо, що через неінваріантність співвідношень некомутативної алгебри відносно інверсії часу, перетворення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів залежать від їх представлення.

Проблема порушення симетрії відносно інверсії часу у некомутативному просторі канонічного типу є мало дослідженою. У роботі [163] звернено увагу на існування цієї проблеми у просторі з некомутативністю координат. Автори статті [163] показали, що гамільтоніан гармонічного осцилятора у некомутативному просторі не є інваріантним відносно інверсії часу. У роботі [57] досліджено гармонічний осцилятор у магнітному полі у просторі з некомутативністю координат та встановлено, що при певному виборі параметра координатної некомутативності (при певній залежності цього параметра від маси, частоти осцилятора а також від величини магнітного поля) симетрія відносно інверсії часу відновлюється.

У просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів проблема порушення симетрії відносно інверсії часу залишається нерозв'язаною. Із рівності (4.10) випливає, що канонічна некомутативність імпульсів є додатковою причиною неінваріантності некомутативної алгебри відносно інверсії часу. Отже,

актуальною є побудова алгебри з некомутованістю координат та некомутованістю імпульсів, яка є інваріантна відносно інверсії часу та еквівалентна некомутованій алгебрі канонічного типу, а також не зумовлює порушення принципу еквівалентності.

Зауважимо, що у сферично-симетричному некомутованому фазовому просторі канонічного типу, який характеризується співвідношеннями (4.83)-(4.84), симетрія відносно інверсії часу порушується. Розглянувши перетворення для координат та імпульсів, аналогічні, як у звичному просторі,

$$X_i \rightarrow X_i, \quad (4.11)$$

$$P_i \rightarrow -P_i, \quad (4.12)$$

$$a_i \rightarrow -a_i, \quad (4.13)$$

$$p_i^b \rightarrow -p_i^b, \quad (4.14)$$

отримаємо, що некомутована алгебра (4.83)-(4.84) переходить у

$$[X_i, X_j] = -i\varepsilon_{ijk}l_0a_k, \quad (4.15)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar \left( \delta_{ij} - \frac{l_0p_0}{4\hbar^2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}^b)\delta_{ij} + \frac{l_0p_0}{4\hbar^2}a_jp_i^b \right), \quad (4.16)$$

$$[P_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}p_0p_k^b. \quad (4.17)$$

Отримані співвідношення (4.15)-(4.17) не відповідають співвідношенням алгебри (4.83)-(4.84). Отже, алгебра (4.83)-(4.84) не є інваріантною відносно інверсії часу.

У розділі досліджується проблема неінваріантності некомутованої алгебри відносно інверсії часу. Як приклад для дослідження симетрії відносно інверсії часу, вивчається рух по колу. Ми знаходимо, що період колової орбіти частинки у гравітаційному полі у просторі з некомутованістю координат та некомутованістю імпульсів канонічного типу залежить від напрямку руху. Для відновлення симетрії відносно інверсії часу, а також сферичної симетрії ми пропонуємо будувати тензори координатної та імпульсної некомутованостей за допомогою імпульсів, які відповідають сферично-симетричній системі.

Розділ має таку структуру. Перетворення для координат та імпульсів при інверсії часу та їх залежність від представлення досліджується у підрозділі 4.2. У підрозділі 4.3 ми знаходимо точний вираз для періоду руху по колу у некомутованому фазовому просторі та показуємо, що рух по колу залежить від його напрямку. Підрозділ 4.4 присвячено побудові інваріантної відносно інверсії

часу сферично-симетричної некомутативної алгебри канонічного типу. Зміщення перигелію частинки у центральному полі в рамках сферично-симетричної некомутативної алгебри вивчається у підрозділі 4.5. Підрозділ 4.6 присвячено знаходженню оцінок для мінімальної довжини та мінімального імпульсу у некомутативному просторі. Висновки представлено у підрозділі 4.7.

Результати, представлені у цьому розділі, опубліковано у статтях [164, 165].

## 4.2 Симетрія відносно інверсії часу у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу

Через неінваріантність некомутативної алгебри канонічного типу (3.1)-(3.3) відносно інверсії часу, трансформація  $X_i, P_i$  відносно інверсії часу залежить від представлення. Координати та імпульси, які задовольняють співвідношення (3.1)-(3.3) можуть бути представлені через координати та імпульси  $x_i, p_i$ , які задовольняють звичні співвідношення. А саме, для координат та імпульсів, які задовольняють (3.1)-(3.3) можемо записати:

$$X_1 = \varepsilon (x_1 - \theta'_1 p_2), \quad (4.18)$$

$$X_2 = \varepsilon (x_2 + \theta'_2 p_1), \quad (4.19)$$

$$P_1 = \varepsilon (p_1 + \eta'_1 x_2), \quad (4.20)$$

$$P_2 = \varepsilon (p_2 - \eta'_2 x_1), \quad (4.21)$$

де  $\varepsilon, \theta'_1, \theta'_2, \eta'_1, \eta'_2$  є константами. Після інверсії часу, розглянувши перетворення  $x_i \rightarrow x_i, p_i \rightarrow -p_i$ , отримаємо

$$X_1 \rightarrow X'_1 = \varepsilon (x_1 + \theta'_1 p_2), \quad (4.22)$$

$$X_2 \rightarrow X'_2 = \varepsilon (x_2 - \theta'_2 p_1), \quad (4.23)$$

$$P_1 \rightarrow -P'_1 = \varepsilon (-p_1 + \eta'_1 x_2), \quad (4.24)$$

$$P_2 \rightarrow -P'_2 = \varepsilon (-p_2 - \eta'_2 x_1). \quad (4.25)$$

Отже, перетворення (4.22)-(4.25) залежать від параметрів  $\varepsilon, \theta'_1, \theta'_2, \eta'_1, \eta'_2$ , як наслідок вони залежать від представлення.



Параметри  $\varepsilon, \theta'_1, \theta'_2, \eta'_1, \eta'_2$ , можуть бути вибрані різними способами. Врахувавши (4.18)-(4.21), маємо

$$[X_1, X_2] = i\hbar\varepsilon^2(\theta'_1 + \theta'_2), \quad (4.26)$$

$$[X_1, P_1] = i\hbar\varepsilon^2(1 + \theta'_1\eta'_1) \quad (4.27)$$

$$[X_2, P_2] = i\hbar\varepsilon^2(1 + \theta'_2\eta'_2), \quad (4.28)$$

$$[P_1, P_2] = i\hbar\varepsilon^2(\eta'_1 + \eta'_2). \quad (4.29)$$

Порівнявши співвідношення (4.26)-(4.29) та (3.1)-(3.3) можемо записати такі рівняння

$$\varepsilon^2 = 1, \quad \theta'_1\eta'_1 = \theta'_2\eta'_2 = \sigma, \quad (4.30)$$

$$\theta'_1 + \theta'_2 = \theta, \quad (4.31)$$

$$\eta'_1 + \eta'_2 = \eta, \quad (4.32)$$

з яких ми отримаємо

$$\theta'_1 = \frac{1}{2} \left( \theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4\frac{\theta\sigma}{\eta}} \right), \quad (4.33)$$

$$\theta'_2 = \frac{1}{2} \left( \theta \mp \sqrt{\theta^2 - 4\frac{\theta\sigma}{\eta}} \right), \quad (4.34)$$

$$\eta'_1 = \frac{1}{2} \left( \eta \mp \sqrt{\eta^2 - 4\frac{\eta\sigma}{\theta}} \right), \quad (4.35)$$

$$\eta'_2 = \frac{1}{2} \left( \eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\frac{\eta\sigma}{\theta}} \right), \quad (4.36)$$

та

$$\sigma \leq \frac{\theta\eta}{4}. \quad (4.37)$$

Звернімо увагу, що вибравши знак у (4.93)-(4.94), отримаємо два різні представлення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів, а тому два різних перетворення при інверсії часу (4.22)-(4.25).

Добре відомим є симетричне представлення, яке характеризується такими параметрами  $\varepsilon = 1, \theta'_1 = \theta'_2 = \theta/2, \eta'_1 = \eta'_2 = \eta/2$ . У цьому випадку координати та імпульси  $X_i, P_i$  задовольняють (3.1)-(3.3) з  $\sigma = \theta\eta/4$  [155].

При  $\sigma = 0$  комутатор координат та імпульсів (1.24) дорівнює  $i\hbar$ , як у звичному просторі. Порівнявши (4.26)-(4.29) та (3.1)-(3.3) при  $\sigma = 0$ , можемо записати:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{1 + \theta'_1 \eta'_1}, \quad (4.38)$$

$$\theta'_1 \eta'_1 = \theta'_2 \eta'_2, \quad (4.39)$$

$$\varepsilon^2(\theta'_1 + \theta'_2) = \theta, \quad (4.40)$$

$$\varepsilon^2(\eta'_1 + \eta'_2) = \eta, \quad (4.41)$$

Зауважимо, що ми маємо чотири рівняння (4.38)-(4.41) та п'ять параметрів  $\varepsilon, \theta'_1, \theta'_2, \eta'_1, \eta'_2$ . Отже, вибравши один із них, ми отримаємо різні представлення для координат та імпульсів, які задовольняють співвідношення (3.1)-(3.3) з  $\sigma = 0$  та відповідно різні перетворення (4.22)-(4.25).

Для прикладу, обравши  $\theta'_2 = 0$  із (4.38)-(4.41) отримаємо  $\varepsilon = 1$ ,  $\eta'_1 = 0$ ,  $\eta'_2 = \eta$ ,  $\theta'_1 = \theta$  та представлення має вигляд

$$X_1 = x_1 - \theta p_2, \quad (4.42)$$

$$X_2 = x_2, \quad (4.43)$$

$$P_1 = p_1, \quad (4.44)$$

$$P_2 = p_2 - \eta x_1. \quad (4.45)$$

У цьому випадку маємо звичні перетворення для координати  $X_2$ , та імпульсу  $P_1$

$$X_2 \rightarrow X_2, \quad P_1 \rightarrow -P_1, \quad (4.46)$$

проте для  $X_1, P_2$  отримаємо

$$X_1 \rightarrow X'_1 = x_1 + \theta p_2, \quad (4.47)$$

$$P_2 \rightarrow -P'_2 = -p_2 - \eta x_1. \quad (4.48)$$

Також можемо записати два симетричні представлення (4.18)-(4.21) з параметрами

$$\varepsilon = (1 + \theta' \eta')^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.49)$$

$$\theta'_1 = \theta'_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \theta \eta}}{\eta}, \quad (4.50)$$

$$\eta'_1 = \eta'_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \theta \eta}}{\theta} \quad (4.51)$$

[152, 155] і також відповідно отримаємо два різні перетворення для координат та імпульсів при інверсії часу (3.13)-(3.16). Таке представлення розглядалося у підрозділі 2.3.

На завершення цього підрозділу зазначимо, що висновки, представлені у підрозділі 2.3, можуть бути узагальнені на випадок, коли представлення для координат та імпульсів має вигляд (4.18)-(4.21), де константи  $\varepsilon$ ,  $\theta'_1$ ,  $\theta'_2$ ,  $\eta'_2$ ,  $\eta'_2$ , задовольняють співвідношення (4.38)-(4.41). У випадку, коли параметр координатної некомутованості  $\theta$  обернено пропорційний до маси (3.27), та відповідно  $\theta'_1$ ,  $\theta'_2$  обернено пропорційні до маси, а також параметри імпульсної некомутованості пропорційні до маси (3.28) (константи  $\eta'_2$ ,  $\eta'_2$  обернено пропорційні до маси), відповідно до (4.38) параметри  $\varepsilon$  не залежать від маси. Звідси випливає, що некомутовані координати (4.18), (4.19) не залежать від маси та можуть розглядатися як кінематичні змінні, некомутовані імпульси (4.20), (4.21) пропорційні до маси.

### 4.3 Рух по колу у некомутованому фазовому просторі канонічного типу

Для дослідження симетрії відносно інверсії часу у некомутованому фазовому просторі канонічного типу розгляньмо рух по колу. Зауважимо, що вплив некомутованості на такий рух залежить від його напрямку. Щоб це показати розгляньмо двовимірний некомутований простір канонічного типу (3.1)-(3.3) та такий гамільтоніан

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - \frac{k}{X}, \quad (4.52)$$

тут

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}. \quad (4.53)$$

У класичній границі  $\hbar \rightarrow 0$  з (3.1)-(3.3) отримаємо такі дужки Пуассона

$$\{X_1, X_2\} = \theta, \quad (4.54)$$

$$\{X_1, P_1\} = \{X_2, P_2\} = 1 + \gamma, \quad (4.55)$$

$$\{P_1, P_2\} = \eta. \quad (4.56)$$

Врахувавши, що координати та імпульси  $X_i, P_i$  в (4.52) задовольняють (4.54)-(4.56), знаходимо такі рівняння руху

$$\dot{X}_1 = \frac{P_1}{m} (1 + \gamma) + \frac{k\theta X_2}{X^3}, \quad (4.57)$$

$$\dot{X}_2 = \frac{P_2}{m} (1 + \gamma) - \frac{k\theta X_1}{X^3}, \quad (4.58)$$

$$\dot{P}_1 = \frac{\eta P_2}{m} - \frac{kX_1}{X^3} (1 + \gamma), \quad (4.59)$$

$$\dot{P}_2 = -\frac{\eta P_1}{m} - \frac{kX_2}{X^3} (1 + \gamma). \quad (4.60)$$

Розв'язки цих рівнянь мають такий вигляд

$$X_1(t) = R_0 \cos(\omega t), \quad (4.61)$$

$$X_2(t) = R_0 \sin(\omega t), \quad (4.62)$$

$$P_1(t) = -P_0 \sin(\omega t), \quad (4.63)$$

$$P_2(t) = P_0 \cos(\omega t). \quad (4.64)$$

та описують рух по колу з радіусом  $R_0$ , імпульсом

$$P_0 = \frac{m\omega R_0^3 + km\theta}{R_0^2 (1 + \gamma)}, \quad (4.65)$$

та частотою

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{4k}{mR_0^3} ((1 + \sigma)^2 - \theta\eta) + \left( \frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m} \right)^2} - \frac{\eta}{m} - \frac{k\theta}{R_0^3} \right). \quad (4.66)$$

Період руху має такий вигляд

$$T = 4\pi \left( \sqrt{\frac{4k}{mR_0^3} ((1 + \sigma)^2 - \theta\eta) + \left( \frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m} \right)^2} - \frac{\eta}{m} - \frac{k\theta}{R_0^3} \right)^{-1}. \quad (4.67)$$

Розгляньмо рух по колу  $R_0$  в зворотньому напрямку

$$X_1(t) = R_0 \cos(\omega t), \quad (4.68)$$

$$X_2(t) = -R_0 \sin(\omega t), \quad (4.69)$$

$$P_1(t) = P'_0 \sin(\omega t), \quad (4.70)$$

$$P_2(t) = P'_0 \cos(\omega t). \quad (4.71)$$

Вирази (4.68), (4.71) відповідають виразам (4.61), (4.64) з  $-t$ . В (4.71) ми використали позначення  $P'_0$ , щоб відрізнити імпульс, який відповідає руху в зворотньому напрямку. Підставивши (4.68), (4.71) в (4.57)-(4.174) отримаємо

$$\omega' = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{4k}{mR_0^3} ((1 + \sigma)^2 - \theta\eta) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} + \frac{\eta}{m} + \frac{k\theta}{R_0^3} \right), \quad (4.72)$$

$$T' = 4\pi \left( \sqrt{\frac{4k}{mR_0^3} ((1 + \sigma)^2 - \theta\eta) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} + \frac{\eta}{m} + \frac{k\theta}{R_0^3} \right)^{-1}, \quad (4.73)$$

та

$$P'_0 = -\frac{m\omega'R_0^3 - km\theta}{R_0^2(1 + \gamma)}. \quad (4.74)$$

Важливо зауважити, що отримані вирази для частоти (4.72) та періоду (4.73) не співпадають з виразами (4.66), (4.67). Маємо

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \frac{\eta}{m} + \frac{k\theta}{R_0^3}. \quad (4.75)$$

Отже у некомутованому фазовому просторі канонічного типу (4.54)-(4.56) період та частота руху по колу радіуса  $R_0$  залежать від напрямку руху. В порівнянні з (4.66), (4.67) вирази для  $\omega'$ ,  $T'$  містять параметри некомутованості з протилежними знаками. Також маємо, що  $P'_0 \neq -P_0$  (зауважимо, що у звичному просторі виконується така рівність  $P'_0 = -P_0$ , що відповідає руху в зворотньому напрямі). Невідповідність виразів (4.66), (4.67) та (4.72), (4.73) є наслідком неінваріантності некомутованої алгебри (3.1)-(3.3) відносно інверсії часу.

Зауважимо, що результати (4.72), (4.73) мажуть бути отримані врахувавши, що рух в зворотньому напрямку відповідає інверсії часу та після інверсії часу некомутована алгебра має вигляд (4.8)-(4.10). Тому вирази для  $\omega'$ ,  $T'$  (4.72), (4.73) можуть бути отримані зміною знаків перед параметрами некомутованості у виразах (4.66), (4.67) (замінивши  $\theta$  на  $-\theta$  та  $\eta$  на  $-\eta$ ). Також змінивши знаки перед параметрами некомутованості у  $P'_0$  (4.74) отримаємо  $-P_0$  (4.65).

#### 4.4 Некомутативна алгебра канонічного типу зі збереженою симетрією відносно інверсії часу та сферичною симетрією

Для збереження симетрії відносно інверсії часу тензори некомутативностей  $\theta_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$  мають перетворюватися як

$$\theta_{ij} \rightarrow -\theta_{ij}, \quad (4.76)$$

$$\eta_{ij} \rightarrow -\eta_{ij}. \quad (4.77)$$

Найпростіші вирази для тензорів некомутативності, при яких виконуються (4.76), (4.77) мають вигляд:

$$\theta_{ij} = \frac{\bar{c}_\theta}{\hbar} \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^a, \quad (4.78)$$

$$\eta_{ij} = \frac{\bar{c}_\eta}{\hbar} \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^b, \quad (4.79)$$

де  $\bar{c}_\theta$ ,  $\bar{c}_\eta$  – константи,  $p_i^a$ ,  $p_i^b$  – додаткові імпульси. Для збереження також сферичної симетрії ми розглядаємо випадок, коли додаткові імпульси відповідають сферично-симетричним системам, для прикладу гармонічним осциляторам

$$H_{osc}^a = \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 a^2}{2}, \quad (4.80)$$

$$H_{osc}^b = \frac{(p^b)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 b^2}{2} \quad (4.81)$$

з великими частотами  $\omega_{osc}$  та довжиною  $\sqrt{\hbar}/\sqrt{m_{osc}\omega_{osc}}$ , яка дорівнює довжині Планка.

Із виразів (1.29), (4.78), (4.79) отримаємо, що  $\sigma_{ij}$  залежить від додаткових імпульсів і має такий вигляд:

$$\sigma_{ij} = \frac{l_0 p_0}{4\hbar^2} \left( (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}^b) \delta_{ij} - a_j p_i^b \right). \quad (4.82)$$

Отже, ми пропонуємо розв'язати проблему порушення симетрії відносно інверсії часу та сферичної симетрії у некомутативному фазовому просторі, побудувавши алгебру з некомутативністю

координат та некомутативністю імпульсів, в якій залучені додаткові імпульси:

$$[X_i, X_j] = i\bar{c}_\theta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^a, \quad (4.83)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar \left( \delta_{ij} + \frac{\bar{c}_\theta \bar{c}_\eta}{4\hbar^2} (\mathbf{p}^a \cdot \mathbf{p}^b) \delta_{ij} - \frac{\bar{c}_\theta \bar{c}_\eta}{4\hbar^2} p_j^a p_i^b \right), \quad (4.84)$$

$$[P_i, P_j] = i\bar{c}_\eta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^b. \quad (4.85)$$

$$[a_i, p_j^a] = [b_i, p_j^b] = i\hbar \delta_{ij}, \quad (4.86)$$

$$[a_i, a_j] = [b_i, b_j] = [a_i, b_j] = [p_i^a, p_j^a] = [p_i^b, p_j^b] = [p_i^a, p_j^b] = 0 \quad (4.87)$$

$$[a_i, p_j^b] = [b_i, p_j^a] = [a_i, X_i] = [p_i^b, X_i] = [a_i, P_i] = [p_i^b, P_i] = 0. \quad (4.88)$$

Варто зауважити, що як наслідок інваріантності алгебри (4.83)-(4.84) при інверсії часу, незалежно від представлення отримаємо, що перетворення для некомутативних координат та імпульсів мають вигляд

$$X_i \rightarrow X_i, \quad (4.89)$$

$$P_i \rightarrow -P_i. \quad (4.90)$$

Для прикладу, координати та імпульси, які задовольняють (4.83)-(4.84) можуть бути представлені як

$$X_i = x_i + \frac{\bar{c}_\theta}{2\hbar} [\mathbf{p}^a \times \mathbf{p}]_i = x_i + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]_i, \quad (4.91)$$

$$P_i = p_i + \frac{\bar{c}_\eta}{2\hbar} [\mathbf{x} \times \mathbf{p}^b]_i = p_i - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}]_i, \quad (4.92)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $x_i, p_i$  задовольняють звичні співвідношення (1.15)-(1.17) та комутують з  $a_i, p_i^a, b_i, p_i^b$ .

Компоненти векторів  $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}$  визначаються як

$$\theta_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\theta_{jk}}{2} = \frac{\bar{c}_\theta}{\hbar} p_i^a, \quad (4.93)$$

$$\eta_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\eta_{jk}}{2} = \frac{\bar{c}_\eta}{\hbar} p_i^b. \quad (4.94)$$

Після інверсії часу маємо

$$x_i \rightarrow x_i, \quad (4.95)$$

$$p_i \rightarrow -p_i, \quad (4.96)$$

$$p_i^a \rightarrow -p_i^a, \quad (4.97)$$

$$p_i^b \rightarrow -p_i^b \quad (4.98)$$

та, врахувавши (4.91), (4.92), отримаємо, що некомутативні координати та некомутативні імпульси перетворюються як

$$X_i \rightarrow X_i, \quad (4.99)$$

$$P_i \rightarrow -P_i. \quad (4.100)$$

Окрім інваріантності відносно інверсії часу алгебра ((4.83)-(4.84) є також інваріантна відносно поворотів. А саме, після повороту координати та імпульси  $X_i$ ,  $P_i$ ,  $p_i^a$ ,  $p_i^b$  будуть мати вигляд

$$X'_i = U(\varphi)X_iU^+(\varphi), \quad (4.101)$$

$$P'_i = U(\varphi)P_iU^+(\varphi), \quad (4.102)$$

$$p_i^{a'} = U(\varphi)p_i^aU^+(\varphi), \quad (4.103)$$

$$p_i^{b'} = U(\varphi)p_i^bU^+(\varphi) \quad (4.104)$$

де оператор  $U(\varphi)$  визначається як

$$U(\varphi) = e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{x}\times\mathbf{p}])}e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{p}^a])}e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{p}^b])}, \quad (4.105)$$

Комутаційні співвідношення для  $X'_i$ ,  $P'_i$

$$[X'_i, X'_j] = i\bar{c}_\theta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^{a'}, \quad (4.106)$$

$$[X'_i, P'_j] = i\hbar \left( \delta_{ij} + \frac{\bar{c}_\theta \bar{c}_\eta}{4\hbar} (\mathbf{p}^{a'} \cdot \mathbf{p}^{b'}) \delta_{ij} - \frac{\bar{c}_\theta \bar{c}_\eta}{4\hbar} p_j^{a'} p_i^{b'} \right), \quad (4.107)$$

$$[P'_i, P'_j] = i\bar{c}_\eta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^{b'}. \quad (4.108)$$

відповідають співвідношенням некомутативної алгебри (4.83)-(4.84).

Отже, запропонована некомутативна алгебра (4.83)-(4.84) є інваріантною відносно поворотів та інверсії часу. Алгебра (4.83)-(4.84) є еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу (1.24)-(1.26), оскільки для тензорів координатної та імпульсної



некомутативності  $\theta_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$ , а також для операторів координат та імпульсів  $X_i$ ,  $P_i$ , які задовольняють (4.83)-(4.84), виконуються співвідношення:

$$[\theta_{ij}, \eta_{ij}] = [\sigma_{ij}, \theta_{ij}] = [\sigma_{ij}, \eta_{ij}] = 0, \quad (4.109)$$

$$[\theta_{ij}, X_k] = [\theta_{ij}, P_k] = [\eta_{ij}, X_k] = [\eta_{ij}, P_k] = 0 \quad (4.110)$$

$$[\sigma_{ij}, X_k] = [\sigma_{ij}, P_k] = 0. \quad (4.111)$$

Співвідношення (4.109)-(4.111) є характерні для алгебри канонічного типу (1.24)-(1.26) з  $\theta_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  константами.

Важливо зауважити, що запропонована алгебра є сумісною. А саме, тотожність Якобі задовольняється для будь-якої трійки операторів, оскільки для координат та імпульсів, що задовольняють алгебру існує явне представлення через координати та імпульси, що задовольняють звичні комутаційні співвідношення (4.91), (4.92).

Розгляньмо особливості некомутативної алгебри для координат та імпульсів центра мас системи частинок. Ми розглядаємо випадок, коли тензори некомутативності залежать від маси і визначаються як

$$\theta_{ij}^{(n)} = \frac{c_\theta^{(n)}}{\hbar} \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^a, \quad (4.112)$$

$$\eta_{ij}^{(n)} = \frac{c_\eta^{(n)}}{\hbar} \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^b, \quad (4.113)$$

де константи  $c_\theta^{(n)}$ ,  $c_\eta^{(n)}$  задовольняють такі співвідношення

$$c_\theta^{(n)} m_n = \tilde{\gamma}, \quad (4.114)$$

$$\frac{c_\eta^{(n)}}{m_n} = \tilde{\alpha}, \quad (4.115)$$

тут  $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\alpha}$  — константи, які залежать від маси. Додаткові координати  $a_i$ ,  $b_i$  і додаткові імпульси  $p_i^a$ ,  $p_i^b$  відповідають за некомутативність фазового простору. Частинки належать тому самому некомутативному фазовому простору. Тому ми розглядаємо випадок, коли додаткові імпульси  $p_i^a$ ,  $p_i^b$  в (4.113) є однакові для різних частинок. Із умов (4.114), (4.115) випливає, що вплив некомутативності на частинки з різними масами є різним.

Зауважимо, що якщо виконуються умови (4.114), (4.115), співвідношення для координат і імпульсів центра мас  $\mathbf{X}^c = \sum_n \mu_n \mathbf{X}^{(n)}$ ,  $\mathbf{P}^c = \sum_n \mathbf{P}^{(n)}$  (тут  $\mu_n = m_n/M$ ,  $M = \sum_n m_n$ ) відтворюють співвідношення некомутативної алгебри (4.83)-(4.84)

$$[X_i^c, X_j^c] = i\hbar\theta_{ij}^c, \quad (4.116)$$

$$[P_i^c, P_j^c] = i\hbar\eta_{ij}^c, \quad (4.117)$$

$$[X_i^c, P_j^c] = i\hbar(\delta_{ij} + \sum_k \frac{\theta_{ik}^c \eta_{jk}^c}{4}). \quad (4.118)$$

Тут ефективні тензори некомутативності  $\theta_{ij}^c$ ,  $\eta_{ij}^c$  визначаються як

$$\theta_{ij}^c = \sum_n \mu_n^2 \theta_{ij}^{(n)} = \frac{\tilde{\gamma}}{\hbar M} \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^a, \quad (4.119)$$

$$\eta_{ij}^c = \sum_n \eta_{ij}^{(n)} = \frac{\tilde{\alpha} M}{\hbar} \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^b. \quad (4.120)$$

Координати та імпульси, які задовольняють співвідношення (4.83)-(4.84) можемо зобразити як

$$X_i^{(n)} = x_i^{(n)} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}^{(n)} \times \mathbf{p}^{(n)}]_i, \quad (4.121)$$

$$P_i^{(n)} = p_i^{(n)} - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\eta}^{(n)} \times \mathbf{x}^{(n)}]_i, \quad (4.122)$$

Для координат  $x_i^{(n)}$  та імпульсів  $p_i^{(n)}$  виконуються такі рівності

$$[x_i^{(n)}, x_j^{(m)}] = [p_i^{(n)}, p_j^{(m)}] = 0, \quad (4.123)$$

$$[x_i^{(n)}, p_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{ij}\delta_{mn}. \quad (4.124)$$

Зауважимо, що відповідно до (4.122) координати залежать від імпульсів і, отже, залежать від маси. Якщо виконуються умови (4.114), (4.115), некомутативні координати не залежать від маси, а некомутативні імпульси пропорційні масі, як і повинно бути. Враховуючи (4.114), (4.115), (4.122), можна написати

$$X_i^{(n)} = x_i^{(n)} + \frac{\tilde{\gamma}}{2\hbar}[\mathbf{p}^a \times \frac{\mathbf{p}^{(n)}}{m_n}]_i, \quad (4.125)$$

$$P_i^{(n)} = p_i^{(n)} - \frac{m_n \tilde{\alpha}}{\hbar}[\mathbf{p}^b \times \mathbf{x}^{(n)}]_i. \quad (4.126)$$

У наступних підрозділах ці висновки використовуються для дослідження впливу некомутованості на рух Меркурія та для оцінки верхніх меж для параметрів некомутованості.

#### 4.5 Вплив некомутованості координат та некомутованості імпульсів на зміщення перигелію

Розглянемо частинку з масою  $m$  у гравітаційному полі  $-k/X$  ( $X = |\mathbf{X}|$ ,  $k$  - константа) у некомутованому фазовому просторі зі збереженими сферичною симетрією та симетрією відносно інверсії часу (4.83)-(4.84). Знайдемо зміщення перигелію її орбіти, зумовлене некомутованістю координат і некомутованістю імпульсів. Через залучення додаткових імпульсів для побудови тензорів некомутованості ми повинні досліджувати гамільтоніан, який є сумою гамільтоніана, що відповідає частинці, і гамільтоніана, що відповідає гармонічним осциляторам

$$H = H_p + H_{osc}^a + H_{osc}^b, \quad (4.127)$$

$$H_p = \frac{P^2}{2m} - \frac{mk}{X}, \quad (4.128)$$

тут  $X_i$ ,  $P_i$  задовольняють співвідношення (4.83)-(4.84), доданки  $H_{osc}^a$ ,  $H_{osc}^b$  відповідають гамільтоніанам гармонічних осциляторів. Зручно переписати повний гамільтоніан наступним чином

$$H = H_0 + \Delta H, \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned} H_0 = & \\ = \langle H_p \rangle_{ab} + H_{osc}^a + H_{osc}^b = & \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{x} + \frac{\langle \eta^2 \rangle x^2}{12m} - \frac{\langle \theta^2 \rangle mkL^2}{8x^5} + \\ & + \frac{\langle \theta^2 \rangle mk}{24} \left( \frac{1}{x^2} p^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x} p^2 \frac{1}{x^2} + \frac{\hbar^2}{x^5} \right) + H_{osc}^a + H_{osc}^b, \end{aligned} \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned}
\Delta H &= H - H_0 = \\
&= H_p - \langle H_p \rangle_{ab} = -\frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{L})}{2m} + \frac{[\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x}]^2}{8m} - \frac{mk}{2x^3}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) - \\
&\quad - \frac{\langle \eta^2 \rangle x^2}{12m} + \frac{mkL^2 \langle \theta^2 \rangle}{8x^5} + \\
&\quad + \frac{mk}{16} \left( \frac{1}{x^2} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{x^2} + \frac{\hbar^2}{x^7} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{x}]^2 \right) - \\
&\quad - \frac{3mk}{8x^5} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})^2 - \frac{mk \langle \theta^2 \rangle}{24} \left( \frac{1}{x^2} p^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x} p^2 \frac{1}{x^2} + \frac{\hbar^2}{x^5} \right), \tag{4.131}
\end{aligned}$$

тут  $\mathbf{L} = [\mathbf{x} \times \mathbf{p}]$ ,  $x = |\mathbf{x}|$ ,  $\langle \dots \rangle_{ab}$  позначає усереднення за власними функціями  $\psi_{0,0,0}^a$ ,  $\psi_{0,0,0}^b$  гармонічних осциляторів  $H_{osc}^a$ ,  $H_{osc}^b$  в основних станах. Також у (4.130), (4.131) ми використовуємо такі позначення

$$\langle \theta^2 \rangle = \sum_i \langle \theta_i^2 \rangle = \sum_i \frac{c_\theta^2}{\hbar^2} \langle \psi_{0,0,0}^a | (p_i^a)^2 | \psi_{0,0,0}^a \rangle = \frac{3c_\theta^2}{2l_P^2}, \tag{4.132}$$

$$\langle \eta^2 \rangle = \sum_i \langle \eta_i^2 \rangle = \sum_i \frac{c_\eta^2}{\hbar^2} \langle \psi_{0,0,0}^b | (p_i^b)^2 | \psi_{0,0,0}^b \rangle = \frac{3c_\eta^2}{2l_P^2}. \tag{4.133}$$

Вирази (4.130), (4.131) записані з точністю до другого порядку за параметрами некомутативності. Деталі обчислень, необхідних для запису (4.130), (4.131), можна знайти в статтях [166, 167].

До другого порядку теорії збурень поправки до спектру гамільтоніану  $H$ , зумовлені  $\Delta H$ , дорівнюють нулю (див. [168]). Тому з точністю до другого порядку за  $\Delta H$  можемо досліджувати гамільтоніан  $H_0$ . Отже, врахувавши вираз для  $\Delta H$  (4.131) маємо, що до другого порядку за параметрами некомутативності можна розглядати гамільтоніан  $H_0$  (4.130). Зауважимо також, що  $H_{osc}^a$  і  $H_{osc}^b$  комутують з  $\langle H_p \rangle_{ab}$ . Отже, до другого порядку за параметрами некомутативності для дослідження класичного руху частинки в кулонівському потенціалі в некомутативному фазовому просторі (4.83)-(4.84) можна розглянути такий гамільтоніан

$$\langle H_p \rangle_{ab} = \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{x} + \frac{\langle \eta^2 \rangle x^2}{12m} - \frac{\langle \theta^2 \rangle mkL^2}{8x^5} + \frac{\langle \theta^2 \rangle mkp^2}{12x^3}. \tag{4.134}$$

Через доданки в (4.134), зумовлені некомутативністю координат і некомутативністю імпульсів, орбіта частинки пресекує. Знайде-

мо швидкість прецесії перигелію орбіти, зумовлену некомутативністю. Для цього розглянемо вектор Гамільтона, визначений як

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{mk[\mathbf{L} \times \mathbf{x}]}{xL^2}, \quad (4.135)$$

і порахуємо швидкість його прецесії

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{[\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}]}{u^2}. \quad (4.136)$$

Маємо

$$\left\{ \mathbf{u}, \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{x} \right\} = 0, \quad (4.137)$$

а для  $\dot{\mathbf{u}}$  знайдемо

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \left\{ \mathbf{u}, \frac{\langle \eta^2 \rangle x^2}{12m} - \frac{\langle \theta^2 \rangle mkL^2}{8x^5} + \frac{\langle \theta^2 \rangle mkp^2}{12x^3} \right\} = \\ &= -\frac{\langle \eta^2 \rangle \mathbf{x}}{6m^2} - \frac{k\langle \theta^2 \rangle}{4} \left( \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}}{x^5} - \frac{2p^2\mathbf{x}}{x^5} + \frac{5L^2\mathbf{x}}{2x^7} \right) + \\ &\quad + \frac{m^2k^2\langle \theta^2 \rangle [\mathbf{L} \times \mathbf{p}]}{12L^2x^4} - \frac{m^2k^2\langle \theta^2 \rangle (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) [\mathbf{L} \times \mathbf{x}]}{12L^2x^6}. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Враховувавши, що у звичному просторі (просторі, в якому координати та імпульси комутують  $\theta_{ij} = \eta_{ij} = 0$ )  $u^2 = m^2k^2e^2/L^2$ , де  $e$  є ексцентриситетом орбіти, знаходимо

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \\ &= \langle \theta^2 \rangle \left( \frac{5L^4}{8km^3x^7e^2} - \frac{p^2L^2}{2m^3x^5ke^2} + \frac{p^2}{4me^2x^4} - \frac{7L^2}{24mx^6e^2} - \frac{mk}{12x^5e^2} \right) L + \\ &\quad + \langle \eta^2 \rangle \left( \frac{L^2}{6m^5k^2e^2} - \frac{x}{6m^3ke^2} \right) L. \end{aligned} \quad (4.139)$$

З точністю до другого порядку за параметрами некомутативності зміщення перигелію за один оберт має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta\phi_p &= \int_0^T \boldsymbol{\Omega} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\dot{\phi}} d\phi = \\ &= \langle \theta^2 \rangle \frac{\pi km^2(4+e^2)}{8a^3(1-e^2)^3} - \langle \eta^2 \rangle \frac{\pi a^3 \sqrt{1-e^2}}{2m^2k}, \end{aligned} \quad (4.140)$$

тут  $a$  - велика піввісь,  $\phi$  - полярний кут. Під час обчислення (4.140) ми використали те, що у звичному просторі

$$L = mx^2\dot{\phi}, \quad (4.141)$$

$$x = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos \phi)}, \quad (4.142)$$

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{x} = -\frac{mk}{2a}. \quad (4.143)$$

Зауважимо, що внаслідок порушення принципу еквівалентності в некомутативному фазовому просторі (4.83)-(4.84) зсув перигелію залежить від маси частинки  $m$ . Важливо звернути увагу, що якщо виконуються умови

$$\langle \theta^2 \rangle m^2 = \frac{3\tilde{\gamma}^2}{2l_P^2} = A, \quad (4.144)$$

$$\frac{\langle \eta^2 \rangle}{m^2} = \frac{3\tilde{\alpha}^2}{2l_P^2} = B, \quad (4.145)$$

де константи  $A$ ,  $B$  однакові для частинок з різними масами. Отже, підставляючи (4.144), (4.145) у вираз (4.140) отримуємо, що зміщення перигелію не залежить від маси частинки

$$\Delta\phi_p = A \frac{\pi k(4 + e^2)}{8a^3(1 - e^2)^3} - B \frac{\pi a^3 \sqrt{1 - e^2}}{2k}. \quad (4.146)$$

Умови (4.144), (4.145) важливі для відновлення слабкого принципу еквівалентності в некомутативному фазовому просторі (4.83)-(4.84). Детальні дослідження виконання цього принципу в рамках сферично-симетричної некомутативної алгебри можна знайти в роботі [167].

Узагальнимо отриманий результат на випадок руху системи багатьох частинок (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі. Розгляньмо такий гамільтоніан

$$H_s = H_{cm} + H_{rel}, \quad (4.147)$$

$$H_{cm} = \frac{(P^c)^2}{2M} - \frac{Mk}{X^c}, \quad (4.148)$$

тут  $M$  - повна маса системи,  $X_i^c$ ,  $P_i^c$  - координати та імпульси центра мас, гамільтоніан  $H_{rel}$  відповідає відносному руху і залежить від відносних координат. При виконанні рівностей (4.114),

(4.115) координати та імпульси центра мас задовольняють співвідношенням некомутованого алгебри (4.116), (4.118) і можуть бути представлені як

$$X_i^c = x_i^c - \frac{\theta_{ij}^c p_j^c}{2}, \quad (4.149)$$

$$P_i^c = p_i^c + \frac{\eta_{ij}^c x_j^c}{2}, \quad (4.150)$$

де  $\theta_{ij}^c, \eta_{ij}^c$  визначаються як (4.119), (4.120). Отже, подібно до того, як було розглянуто вище, для частинки в гравітаційному полі у випадку руху системи багатьох частинок з точністю до другого порядку за параметрами некомутованості можна розглядати такий гамільтоніан

$$\begin{aligned} H_0 = \langle H_s \rangle_{ab} + H_{osc}^a + H_{osc}^b = & \frac{(p^c)^2}{2M} - \frac{Mk}{x^c} + \frac{\langle (\eta^c)^2 \rangle (x^c)^2}{12M} - \\ & - \frac{\langle (\theta^c)^2 \rangle Mk (L^c)^2}{8(x^c)^5} + \\ & + \frac{\langle (\theta^c)^2 \rangle Mk}{24} \left( \frac{1}{(x^c)^2} (p^c)^2 \frac{1}{x^c} + \frac{1}{x^c} (p^c)^2 \frac{1}{(x^c)^2} + \frac{\hbar^2}{(x^c)^5} \right) + \\ & + \langle H_{rel} \rangle_{ab} + H_{osc}^a + H_{osc}^b \end{aligned} \quad (4.151)$$

де

$$\mathbf{L}^c = [\mathbf{x}^c \times \mathbf{p}^c]. \quad (4.152)$$

Беручи до уваги означення для відносних координат і відносних імпульсів

$$\Delta \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{X}^c, \quad (4.153)$$

$$\Delta \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n)} - \mu_n \mathbf{P}^c, \quad (4.154)$$

і використовуючи (4.114), (4.115), (4.122) можна записати

$$\Delta X_i^{(n)} = \Delta x_i^{(n)} - \frac{\theta_{ij}^{(n)} \Delta p_j^{(n)}}{2}, \quad (4.155)$$

$$\Delta P_i^{(n)} = \Delta p_i^{(n)} + \frac{\eta_{ij}^{(n)} \Delta x_j^{(n)}}{2}, \quad (4.156)$$

де  $\Delta \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^c$ ,  $\Delta \mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(n)} - \mu_n \mathbf{p}^c$  задовольняють звичні комутаційні співвідношення. Зверніть увагу, що  $\langle H_{rel} \rangle_{ab}$  залежить від координат  $\Delta \mathbf{x}^{(n)}$  та імпульсів  $\Delta \mathbf{p}^{(n)}$  і комутує з  $H_0$ . Отже, для дослідження класичного руху центра мас макроскопічного тіла в полі тяжіння в некомутованому фазовому просторі можна розглядати такий гамільтоніан

$$\begin{aligned} \langle H_{cm} \rangle_{ab} = & \frac{(p^c)^2}{2M} - \frac{Mk}{x^c} + \frac{\langle (\eta^c)^2 \rangle (x^c)^2}{12M} - \\ & - \frac{\langle (\theta^c)^2 \rangle Mk (L^c)^2}{8(x^c)^5} + \frac{\langle (\theta^c)^2 \rangle Mk (p^c)^2}{12(x^c)^3}. \end{aligned} \quad (4.157)$$

На підставі результатів, отриманих для частинки (4.140), перигейний зсув орбіти макроскопічного тіла в некомутованому фазовому просторі має вигляд

$$\Delta \phi_{nc} = \langle (\theta^c)^2 \rangle \frac{\pi k M^2 (4 + e^2)}{8a^3 (1 - e^2)^3} - \langle (\eta^c)^2 \rangle \frac{\pi a^3 \sqrt{1 - e^2}}{2M^2 k}, \quad (4.158)$$

де

$$\langle (\theta^c)^2 \rangle = \frac{3\tilde{\gamma}^2}{2l_P^2 M^2} = \frac{A}{M^2}, \quad (4.159)$$

$$\langle (\eta^c)^2 \rangle = \frac{3\tilde{\alpha}^2 M^2}{2l_P^2} = B M^2. \quad (4.160)$$

## 4.6 Оцінка верхніх меж для параметрів некомутованості

Для оцінки верхніх меж для параметрів некомутованості використаємо результати, отримані у попередньому підрозділі та застосуємо їх для планети Меркурій. Як і в попередньому розділі, припустивши, що  $|\Delta \phi_{nc}|$  менше  $|\Delta \phi_{obs} - \Delta \phi_{GR}|$  в межах  $3\sigma$ , ми маємо

$$|\Delta \phi_{nc}| \leq 2\pi \cdot 10^{-11} \text{rad/rev}, \quad (4.161)$$

де  $\Delta \phi_{nc}$  визначається як (4.158) з  $k = GM_\odot$  ( $G$  - гравітаційна стала,  $M_\odot$  - маса Сонця). Оскільки  $\theta_{ij}^c$  або  $\eta_{ij}^c$  можуть дорівнювати нулю, то для оцінки порядків параметрів некомутованості



достатньо розглянути наступні нерівності

$$\left| \langle (\theta^c)^2 \rangle \frac{\pi G M_\odot M^2 (4 + e^2)}{8a^3 (1 - e^2)^3} \right| \leq 2\pi \cdot 10^{-11} \text{rad/rev}, \quad (4.162)$$

$$\left| \langle (\eta^c)^2 \rangle \frac{\pi a^3 \sqrt{1 - e^2}}{2G M_\odot M^2} \right| \leq 2\pi \cdot 10^{-11} \text{rad/rev}, \quad (4.163)$$

(тут  $M$  - маса Меркурія,  $a$ ,  $e$  - параметри його орбіти), з яких знаходимо

$$\hbar \sqrt{\langle (\theta^c)^2 \rangle} < 2.3 \cdot 10^{-57} \text{m}^2, \quad (4.164)$$

$$\hbar \sqrt{\langle (\eta^c)^2 \rangle} < 1.8 \cdot 10^{-22} \text{kg}^2 \text{m}^2 / \text{s}^2. \quad (4.165)$$

Отже, знайдемо

$$\hbar \sqrt{\langle (\theta^c)^2 \rangle} < 2.3 \cdot 10^{-57} \text{m}^2, \quad (4.166)$$

$$\hbar \sqrt{\langle (\eta^c)^2 \rangle} < 1.8 \cdot 10^{-22} \text{kg}^2 \text{m}^2 / \text{c}^2. \quad (4.167)$$

На основі співвідношень (4.145), (4.159), (4.160) можна записати

$$\langle (\theta^c)^2 \rangle M^2 = \langle (\theta^{(n)})^2 \rangle m_n^2, \quad (4.168)$$

$$\frac{\langle (\eta^c)^2 \rangle}{M^2} = \frac{\langle (\theta^{(n)})^2 \rangle}{m_n^2}, \quad (4.169)$$

де  $\langle (\theta^{(n)})^2 \rangle$ ,  $\langle (\eta^{(n)})^2 \rangle$  відповідають частинці з масою  $m_n$ . Зауважимо, що співвідношення (4.168), (4.169) впливає з слабкого принципу еквівалентності [167].

Отже, використовуючи (4.166), (4.167) та врахувавши рівності (4.168), (4.169) можна оцінити верхні межі для параметрів некомутативності, що відповідають частинкам. Верхні межі для параметрів некомутативності, що відповідають електрону:

$$\hbar \sqrt{\langle (\theta^{(e)})^2 \rangle} < 8.3 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \quad (4.170)$$

$$\hbar \sqrt{\langle (\eta^{(e)})^2 \rangle} < 5.1 \cdot 10^{-76} \text{kg}^2 \text{m}^2 / \text{c}^2. \quad (4.171)$$

Отримана верхня межа для параметра координатної некомутативності не накладає сильне обмеження на його величину. Це пояснюється тим, що параметр некомутативності, який відповідає

макроскопічному тілу  $\langle(\theta^c)^2\rangle$  є меншим у порівнянні з параметрами  $\langle(\theta^{(n)})^2\rangle$ , що відповідають окремій частинці. А саме, з (4.168) ми маємо

$$\langle(\theta^c)^2\rangle = \frac{\langle(\theta^{(n)})^2\rangle m_n^2}{M^2}. \quad (4.172)$$

Зауважимо, що у випадку, коли тіло з масою  $M$  складається з  $N$  частинок з однаковими масами  $m$ , ми можемо написати

$$\langle(\theta^c)^2\rangle = \frac{\langle\theta^2\rangle}{N^2}, \quad (4.173)$$

де  $\langle\theta^2\rangle$  відповідає частинці. Тому вплив некомутативності координат на рух макроскопічних тіл менший, ніж на рух частинок. Отже, щоб знайти сильне обмеження для величини параметрів координатної некомутативності, вивчаючи рух макроскопічних тіл у некомутативному фазовому просторі, необхідні експериментальні дані з дуже високою точністю.

Верхня межа для параметра імпульсної некомутативності (4.171) накладає сильне обмеження на його величину. Вона щонайменше на десять порядків менша, ніж отримана на основі досліджень атома водню в некомутативному фазовому просторі без збереження сферичної симетрії [158], а також на основі досліджень атомів водню та екзотичних атомів у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі [168, 169]. Врахувавши (4.171), для мінімального імпульсу можемо записати таку нерівність

$$p_{min} = \sqrt[4]{\frac{3\hbar^2\langle(\eta^{(e)})^2\rangle}{2}} < 2,5 \cdot 10^{-38} \text{ кг} \cdot \text{м/с}. \quad (4.174)$$

У (4.174) ми використали вираз для мінімального імпульсу у сферично-симетричному некомутативному просторі, отриманий у [170].

Аналогічно, на основі результату (4.167) ми можемо оцінити верхню межу для параметра імпульсної некомутативності, що відповідає нуклонам. Врахувавши, що

$$\frac{\langle(\eta^c)^2\rangle}{M^2} = \frac{\langle(\theta^{(nuc)})^2\rangle}{m_{nuc}^2} \quad (4.175)$$

(тут  $m_{nuc}$  - маса нуклона), знаходимо

$$\hbar\sqrt{\langle(\eta^{(nuc)})^2\rangle} < 9,3 \cdot 10^{-73} \text{ кг}^2 \text{ м}^2 / \text{с}^2. \quad (4.176)$$

Цей результат не накладає такі сильні обмеження на величину параметра імпульсної некомутативності, як той, що отримано при дослідженнях зсуву перигелію планети Меркурій у некомутативному фазовому просторі канонічного типу (верхня межа (4.176) на 7 порядків більша, ніж представлена в попередньому розділі). Це пояснюється тим, що на відміну від некомутативного фазового простору канонічного типу, у сферично-симетричному некомутативному просторі вираз для зсуву перигелію Меркурію (4.158) не містить членів першого порядку за параметрами некомутативності (ці члени зникають після усереднення за власними функціями гармонічні осцилятори, див. (4.130)). Важливо також зазначити, що верхня межа (4.176) на 6 порядків менша, ніж межі отримані на основі досліджень нейтронів у гравітаційній квантовій ямі в некомутативному фазовому просторі канонічного типу [59].

## 4.7 Висновки

Ми розглянули некомутативний фазовий простір канонічного типу зі збереженими сферичною симетрією та симетрією відносно інверсії часу. Сферично-симетрична некомутативна алгебра канонічного типу, яка не зумовлює порушення симетрії відносно інверсії часу побудована на основі ідеї про узагальнення параметрів некомутативностей до тензорів. У роботі розглянуто тензори некомутативності, побудовані за допомогою додаткових імпульсів, які відповідають гармонічним осциляторам. Довжини осциляторів є планківськими, а частоти розглядаються дуже великі. У цьому випадку осцилятори знаходяться у основних станах.

Знайдено вплив некомутативності координат і некомутативності імпульсів на зміщення перигелію орбіти частинки в кулонівському потенціалі з точністю до другого порядку за параметрами некомутативності. Ми дослідили зміщення перигелію Меркурію у сферично-симетричному, інваріантному відносно інверсії часу некомутативному просторі, врахувавши особливості опису руху макроскопічного тіла в некомутативному фазовому просторі. Порівнюючи отриманий вираз для зсуву перигелію Меркурію, зумовленого некомутативністю (4.158), з даними про прецесію перигелію планети за MESSENGER, було оцінено верхню межу для ефективних параметрів некомутативності координати та імпульсу (4.166), (4.167). На основі отриманих результатів отримано верхні межі для параметрів некомутативності, що відповідають електронам і нуклонам.

Для параметрів імпульсної некомутативності та для мінімаль-

ного імпульсу ми отримали нерівності, які накладають сильні обмеження на їхню величину (4.171), (4.176), (4.174). Результат для параметра імпульсної некомутативності, що відповідає електронам (4.171), щонайменше на 10 порядків менший, ніж отриманий на основі досліджень атома водню в сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі [169] і в некомутативному фазовому просторі без збереження сферичної симетрії [158].

## Список літератури

- [1] *Snyder, H. S.* Quantized space-time / H. S. Snyder // *Phys. Rev.* — 1947. — Vol. 71, no. 1. — Pp. 38–41.
- [2] *Polchinski, J.* M theory: Uncertainty and unification / J. Polchinski // *Fundamental Physics — Heisenberg and Beyond.* — 2003. — Pp. 157–166.
- [3] *Jackiw, R.* Observations on noncommuting coordinates and on fields depending on them / R. Jackiw // *Ann. Henri Poincarre.* — 2003. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 913–919.
- [4] *Mignemi, S.* Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model / S. Mignemi // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Vol. 84, no. 2. Art. 025021. 11 p.
- [5] *Mignemi, S.* Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model in curved space / S. Mignemi // *Class. Quant. Grav.* — 2012. — Vol. 29, no. 21. Art. 215019. 19 p.
- [6] *Mignemi, S.* Classical dynamics on Snyder spacetime / S. Mignemi // *Int. J. Mod. Phys. D.* — 2015. — Vol. 24, no. 06. Art. 1550043. 12 p.
- [7] *Romero, J. M.* The area quantum and Snyder space / J. M. Romero, A. Zamora // *Phys. Lett. B.* — 2008. — Vol. 661, no. 1. — Pp. 11 – 13.
- [8] *Lu, L.* Particle dynamics on Snyder space / L. Lu, A. Stern // *Nucl. Phys. B.* — 2012. — Vol. 860, no. 1. — Pp. 186 – 205.
- [9] *Gross, D. J.* String theory beyond the planck scale / D. J. Gross, P. F. Mende // *Nucl. Phys. B.* — 1988. — Vol. 303. — P. 407.

- [10] *Maggiore, M.* A generalized uncertainty principle in quantum gravity / M. Maggiore // *Phys. Lett. B.* — 1993. — Vol. 304, no. 1-2. — Pp. 65 – 69.
- [11] *Witten, E.* Reflections on the fate of spacetime / E. Witten // *Physics Today.* — 1996. — Vol. 49, no. 4. — Pp. 24–30.
- [12] *Kempf, A.* Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry / A. Kempf // *J. Math. Phys.* — 1994. — Vol. 35. — P. 4483.
- [13] *Kempf, A.* Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation / A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann // *Phys. Rev. D.* — 1995. — Vol. 52. — P. 1108.
- [14] *Hinrichsen, H.* Maximal localization in the presence of minimal uncertainties in positions and in momenta / H. Hinrichsen, A. Kempf // *J. Math. Phys.* — 1996. — Vol. 37. — P. 2121.
- [15] *Kempf, A.* Non-pointlike particles in harmonic oscillators / A. Kempf // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1997. — Vol. 30. — P. 2093.
- [16] *Quesne, C.* Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length and application to the (1 + 1)-dimensional dirac oscillator / C. Quesne, V. M. Tkachuk // *J.Phys. A.* — 2006. — Vol. 39. — P. 10909.
- [17] *Quesne, C.* Harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in both position and momentum in a susyqm framework / C. Quesne, V. M. Tkachuk // *J.Phys. A.* — 2003. — Vol. 36. — P. 10373.
- [18] *Quesne, C.* More on a susyqm approach to the harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in position and/or momentum / C. Quesne, V. M. Tkachuk // *J.Phys. A.* — 2004. — Vol. 37. — P. 10095.
- [19] Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations / L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 65. — P. 125027.
- [20] *Dadic, I.* Harmonic oscillator with minimal length uncertainty relations and ladder operators / I. Dadic, L. Jonke, anac S. // *Phys. Rev. D.* — 2003. — Vol. 67. — P. 087701.

- [21] *Quesne, C.* Dirac oscillator with nonzero minimal uncertainty in position / C. Quesne, V. M. Tkachuk // *J.Phys. A.* — 2005. — Vol. 38. — P. 1747.
- [22] *Brau, F.* Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom / F. Brau // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1999. — Vol. 32, no. 44. — Pp. 7691–7696.
- [23] Hydrogen-atom spectrum under a minimal-length hypothesis / S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, T. Takeuchi // *Phys. Rev. A.* — 2005. — Vol. 72. — P. 012104.
- [24] *Stetsko, M. M.* Perturbation hydrogen-atom spectrum in deformed space with minimal length / M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk // *Phys. Rev. A.* — 2006. — Vol. 74. — P. 012101.
- [25] *Samar, M. I.* Perturbation hydrogen-atom spectrum in a space with the lorentz-covariant deformed algebra with minimal length / M. I. Samar, V. M. Tkachuk // *J. Phys. Stud.* — 2010. — Vol. 14, no. 1. — 5 pp.
- [26] *Samar, M. I.* Modified perturbation theory for hydrogen atom in space with lorentz-covariant deformed algebra with minimal length / M. I. Samar // *J. Phys. Stud.* — 2011. — Vol. 15, no. 1. — 7 pp.
- [27] *Brau, F.* Minimal length uncertainty relation and gravitational quantum well / F. Brau, F. Buisseret // *Phys. Rev. D.* — 2006. — Vol. 74. — P. 036002.
- [28] *Pedram, P.* The effects of minimal length and maximal momentum on the transition rate of ultra cold neutrons in gravitational field / P. Pedram, K. Nozari, S. H. Taheri // *Journal of High Energy Physics.* — 2011. — Vol. 2011, no. 3. — P. 93. [https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2011\)093](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2011)093).
- [29] *Samar, M. I.* Exactly solvable problems in the momentum space with a minimum uncertainty in position / M. I. Samar, V. M. Tkachuk // *J. Math. Phys.* — 2016. — Vol. 57, no. 4. — 8 pp.
- [30] *Ferkous, N.* Regularization of the Dirac  $\delta$  potential with minimal length / N. Ferkous // *Phys. Rev. A.* — 2013. — Vol. 88, no. 6. — 4 pp.

- [31] *Fityo, T.* One-dimensional coulomb-like problem in deformed space with minimal length / T. Fityo, I. O. Vakarchuk, V. M. Tkachuk // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2006. — Vol. 39, no. 9. — P. 2143.
- [32] *Samar, M. I.* One-dimensional coulomb-like problem in general case of deformed space with minimal length / M. I. Samar, V. M. Tkachuk // *J. Math. Phys.* — 2016. — Vol. 57, no. 8. — 12 pp.
- [33] *Bouaziz, D.* Regularization of the singular inverse square potential in quantum mechanics with a minimal length / D. Bouaziz, M. Bawin // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 76, no. 3. — 13 pp.
- [34] *Bouaziz, D.* Singular inverse square potential in arbitrary dimensions with a minimal length: Application to the motion of a dipole in a cosmic string background / D. Bouaziz, M. Bawin // *Phys. Rev. A.* — 2008. — Vol. 78, no. 3. — 8 pp.
- [35] *Frassino, A. M.* Casimir effect in minimal length theories based on a generalized uncertainty principle / A. M. Frassino, O. Panella // *Phys. Rev. D.* — 2012. — Vol. 85. — P. 045030.
- [36] *Stetsko, M. M.* Scattering problem in deformed space with minimal length / M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk // *Physical Review A.* — 2007. — Vol. 76, no. 1. — P. 012707.
- [37] Short distance versus long distance physics: The classical limit of the minimal length uncertainty relation / S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic et al. // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 66, no. 2. — P. 026003.
- [38] *Silagadze, Z.* Quantum gravity, minimum length and Keplerian orbits / Z. Silagadze // *Phys. Lett. A.* — 2009. — Vol. 373, no. 31. — Pp. 2643 – 2645.
- [39] *Fityo, T.* Statistical physics in deformed spaces with minimal length / T. Fityo // *Phys. Lett. A.* — 2008. — Vol. 372. — P. 5872.
- [40] *Frydryszak, A. M.* Aspects of pre-quantum description of deformed theories / A. M. Frydryszak, V. M. Tkachuk // *Czechoslovak Journal of Physics.* — 2003. — Vol. 53, no. 11. — Pp. 1035–1040. <https://doi.org/10.1023/B:CJOP.0000010529.32268.03>.



- [41] *Buisseret, F.* Quantum  $n$ -body problem with a minimal length / F. Buisseret // *Phys. Rev. A.* — 2010. — Dec. — Vol. 82. — P. 062102. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.062102>.
- [42] *Tkachuk, V. M.* Galilean and lorentz transformations in a space with generalized uncertainty principle / V. M. Tkachuk // *Foundations of Physics.* — 2016. — Pp. 1–14.
- [43] *Quesne, C.* Composite system in deformed space with minimal length / C. Quesne, V. M. Tkachuk // *Phys. Rev. A.* — 2010. — Vol. 81, no. 1. — P. 012106.
- [44] *Pramanik, S.* Conformal invariance in noncommutative geometry and mutually interacting snyder particles / S. Pramanik, S. Ghosh, P. Pal // *Phys. Rev. D.* — 2014. — Nov. — Vol. 90. — P. 105027. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.105027>.
- [45] *Ghosh, S.* Quantum gravity effects in geodesic motion and predictions of equivalence principle violation / S. Ghosh // *Classical and Quantum Gravity.* — 2013. — dec. — Vol. 31, no. 2. — P. 025025. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/31/2/025025>.
- [46] *Djemai, A. E. F.* On quantum mechanics on noncommutative quantum phase space / A. E. F. Djemai, H. Smail // *Commun. Theor. Phys.* — 2004. — Vol. 41, no. 6. — Pp. 837–844.
- [47] *Santos, J. F.* Probing phase-space noncommutativity through quantum mechanics and thermodynamics of free particles and quantum rotors / J. F. Santos, A. E. Bernardini, C. Bastos // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2015. — Vol. 438. — Pp. 340 – 354.
- [48] *Li, K.* Hydrogen atom spectrum in noncommutative phase space / K. Li, N. Chamoun // *Chin. Phys. Lett.* — 2006. — Vol. 23, no. 5. — Pp. 1122–1123.
- [49] *Alavi, S. A.* Lamb shift and Stark effect in simultaneous space-space and momentum-momentum noncommutative quantum mechanics and  $\theta$ -deformed  $su(2)$  algebra / S. A. Alavi // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2007. — Vol. 22, no. 5. — Pp. 377–383.
- [50] *Bertolami, O.* Phase-space noncommutativity and the Dirac equation / O. Bertolami, R. Queiroz // *Phys. Lett. A.* — 2011. — Vol. 375, no. 2011. — Pp. 4116–4119.

- [51] *Smailagic, A.* Feynman path integral on the non-commutative plane / A. Smailagic, E. Spallucci // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2003. — Vol. 36, no. 33. — Pp. L467–L471.
- [52] *Smailagic, A.* Noncommutative 3D harmonic oscillator / A. Smailagic, E. Spallucci // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2002. — Vol. 35. — Pp. L363–L368.
- [53] *Hatzinikitas, A.* The noncommutative harmonic oscillator in more than one dimension / A. Hatzinikitas, I. Smyrnakis // *J. Math. Phys.* — 2002. — Vol. 43, no. 1. — Pp. 113–125.
- [54] *Li, K.* Heisenberg algebra for noncommutative Landau problem / K. Li, X.-H. Cao, D.-Y. Wang // *Chin. Phys.* — 2006. — Vol. 15, no. 10. — Pp. 2236–2239.
- [55] *Acatrinei, C.* Path integral formulation of noncommutative quantum mechanics / C. Acatrinei // *JHEP.* — 2001. — Vol. 09:007 6 p.
- [56] *Giri, P. R.* The non-commutative oscillator, symmetry and the Landau problem / P. R. Giri, P. Roy // *Eur. Phys. J. C.* — 2008. — Vol. 57, no. 4. — Pp. 835–839.
- [57] *Geloun, J. B.* Harmonic oscillator in a background magnetic field in noncommutative quantum phase-space / J. B. Geloun, S. Gangopadhyay, F. G. Scholtz // *EPL (Europhysics Letters).* — 2009. — Vol. 86, no. 5. Art. 51001. 4 p.
- [58] On the algebraic structure of rotationally invariant two-dimensional Hamiltonians on the noncommutative phase space / H. Falomir, P. A. G. Pisani, F. Vega et al. // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2016. — Vol. 49, no. 5. Art. 055202. 18 p.
- [59] Noncommutative gravitational quantum well / O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. Aragão et al. // *Phys. Rev. D.* — Vol. 72, no. 2. Art. 025010. 9 p.
- [60] Entropic gravity, phase-space noncommutativity and the equivalence principle / C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata // *Class. and Quant. Grav.* — 2011. — Vol. 28, no. 12. Art. 125007. 8 p.
- [61] *Saha, A.* Quantum mechanical systems interacting with different polarizations of gravitational waves in noncommutative

- phase space / A. Saha, S. Gangopadhyay, S. Saha // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 97, no. 4. Art. 044015. 21 p.
- [62] Entanglement and separability in the noncommutative phase-space scenario / A. E. Bernardini, C. Bastos, O. Bertolami et al. // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2015. — Vol. 626. — P. 012046.
- [63] *Leal, P.* Quantum cloning and teleportation fidelity in the noncommutative phase-space / P. Leal, A. E. Bernardini, O. Bertolami // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2019. — Vol. 52, no. 37. Art. 375302. 18 p.
- [64] *Gamboa, J.* Noncommutative quantum mechanics / J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas // *Phys. Rev. D.* — 2001. — Vol. 64, no. 6. Art. 067901. 3 p.
- [65] Noncommutative quantum mechanics: The two-dimensional central field / J. Gamboa, F. Méndez, M. Loewe, J. C. Rojas // *Int. J. of Mod. Phys. A.* — 2002. — Vol. 17, no. 19. — Pp. 2555–2565.
- [66] *Nair, V. P.* Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere / V. P. Nair, A. P. Polychronakos // *Phys. Lett. B.* — 2001. — Vol. 505, no. 1-4. — Pp. 267–274.
- [67] *Bolonek, K.* On uncertainty relations in noncommutative quantum mechanics / K. Bolonek, P. Kosiński // *Phys. Lett. B.* — 2002. — Vol. 547, no. 1-2. — Pp. 51–54.
- [68] *Duval, C.* Exotic Galilean symmetry in the non-commutative plane and the Hall effect / C. Duval, P. A. Horvathy // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2001. — Vol. 34, no. 47. — Pp. 10097–10107.
- [69] *Romero, J. M.* Note about the quantum of area in a noncommutative space / J. M. Romero, J. A. Santiago, J. D. Vergara // *Phys. Rev. D.* — 2003. — Vol. 68, no. 6. Art. 067503. 2 p.
- [70] *Gnatenko, Kh. P.* Length in a noncommutative phase space / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // *Ukr. J. Phys.* — 2018. — Vol. 63, no. 2. — Pp. 102–109.
- [71] *Jackiw, R.* Noncommuting fields and non-Abelian fluids / R. Jackiw // *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*. — 2004. — Vol. 127. — Pp. 53–62.

- [72] *Dunne, G.* Topological (Chern-Simons) quantum mechanics / G. Dunne, R. Jackiw, L. Trugenberger // *Phys. Rev. D.* — Vol. 41, no. 2. — Pp. 661–666.
- [73] *Duval, C.* The exotic Galilei group and the “Peierls substitution” / C. Duval, P. A. Horváthy // *Phys. Lett. B.* — 2000. — Vol. 479, no. 1-3. — Pp. 284–290.
- [74] *Banerjee, R.* A novel approach to noncommutativity in planar quantum mechanics / R. Banerjee // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2002. — Vol. 17, no. 11. — P. 631–645.
- [75] *Banerjee, R.* Remarks on the noncommutative gravitational quantum well / R. Banerjee, B. Dutta Roy, S. Samanta // *Phys. Rev. D.* — 2006. — Vol. 74, no. 4. Art. 045015. 7 p.
- [76] *Santos, V.* Thermodynamical properties of graphene in noncommutative phase-space / V. Santos, R. Maluf, C. Almeida // *Annals of Physics.* — 2014. — Vol. 349. — Pp. 402 – 410.
- [77] *Gnatenko, Kh. P.* Minimal length, area, and volume in a space with noncommutativity of coordinates / Kh. P. Gnatenko // *J. Phys. Stud.* — 2016. — Vol. 20, no. 1/2. Art. 1001. 5 p.
- [78] *Deriglazov, A.* Quantum mechanics on noncommutative plane and sphere from constrained systems / A. Deriglazov // *Phys. Lett. B.* — 2002. — Vol. 530, no. 1. — Pp. 235 – 243.
- [79] Phase-space noncommutative quantum cosmology / C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. a. N. Prata // *Phys. Rev. D.* — 2008. — Vol. 78, no. 2. Art. 023516. 10 p.
- [80] *Smailagic, A.* Isotropic representation of the noncommutative 2d harmonic oscillator / A. Smailagic, E. Spallucci // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 65, no. 10. Art. 107701. 4 p.
- [81] *Smailagic, A.* Noncommutative 3d harmonic oscillator / A. Smailagic, E. Spallucci // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2002. — Vol. 35, no. 26. — Pp. L363–L368.
- [82] *Muthukumar, B.* Noncommutative oscillators and the commutative limit / B. Muthukumar, P. Mitra // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 66, no. 2. Art. 027701. 3 p.

- [83] Anisotropic harmonic oscillator, non-commutative landau problem and exotic newton–hooke symmetry / P. D. Alvarez, J. Gomis, K. Kamimura, M. S. Plyushchay // *Phys. Lett. B.* — 2008. — Vol. 659, no. 5. — Pp. 906 – 912.
- [84] *Dadic, I.* Harmonic oscillator on noncommutative spaces / I. Dacic, L. Jonke, S. Meljanac // *Acta Phys.Slov.* — 2005. — Vol. 55. — Pp. 149–164.
- [85] Analytical and numerical analysis of a rotational invariant  $D = 2$  harmonic oscillator in the light of different noncommutative phase-space configurations / E. M. C. Abreu, M. V. Marcial, A. C. R. Mendes, W. Oliveira // *JHEP.* — 2013. — Vol. 2013:138. 17 p.
- [86] *Saha, A.* Noncommutative quantum mechanics of a harmonic oscillator under linearized gravitational waves / A. Saha, S. Gangopadhyay, S. Saha // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Vol. 83, no. 2. Art. 025004. 6 p.
- [87] *Nath, D.* Noncommutative anisotropic oscillator in a homogeneous magnetic field / D. Nath, P. Roy // *Ann. Phys.* — 2017. — Vol. 377. — Pp. 115 – 124.
- [88] *Kijanka, A.* Noncommutative isotropic harmonic oscillator / A. Kijanka, P. Kosiński // *Phys. Rev. D.* — Vol. 70.
- [89] *Jing, J.* Non-commutative harmonic oscillator in magnetic field and continuous limit / J. Jing, J.-F. Chen // *Eur. Phys. J. C.* — 2009. — Vol. 60, no. 4. — Pp. 669–674.
- [90] *Romero, J. M.* Newton’s second law in a non-commutative space / J. M. Romero, J. A. Santiago, J. D. Vergara // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2003. — Vol. 310, no. 1. — Pp. 9–12.
- [91] *Daszkiewicz, M. C.* Classical mechanics of many particles defined on canonically deformed nonrelativistic space-time / M. C. Daszkiewicz, J. Walczyk // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2011. — Vol. 26, no. 11. — Pp. 819–832.
- [92] *Lin, B.-S.* Deformation quantization for coupled harmonic oscillators on a general noncommutative space / B.-S. Lin, S.-C. Jing, T.-H. Heng // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2008. — Vol. 23, no. 06. — Pp. 445–456.

- [93] *Harko, T.* Energy-dependent noncommutative quantum mechanics / T. Harko, S.-D. Liang // *Eur. Phys. J. C.* — 2019. — Vol. 79:300. 22 p.
- [94] *Daszkiewicz, M.* Newton equation for canonical, Lie-algebraic, and quadratic deformation of classical space / M. Daszkiewicz, C. J. Walczyk // *Phys. Rev. D.* — 2008. — Vol. 77, no. 10. Art. 105008. 7 p.
- [95] *Lukierski, J.* New Lie-algebraic and quadratic deformations of Minkowski space from twisted Poincare symmetries / J. Lukierski, M. Woronowicz // *Phys. Lett. B.* — 2006. — Vol. 633, no. 1. — Pp. 116 – 124.
- [96] Lie-deformed quantum minkowski spaces from twists: Hopf-algebraic versus hopf-algebroid approach / J. Lukierski, D. Meljanac, S. Meljanac et al. // *Phys. Lett. B.* — 2018. — Vol. 777. — Pp. 1 – 7.
- [97] Twisted statistics and the structure of Lie-deformed Minkowski spaces / D. Meljanac, S. Meljanac, D. Pikutić, K. S. Gupta // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Vol. 96, no. 10. Art. 105008. 6 p.
- [98] *Miao, Y.-G.* Classical mechanics on noncommutative space with Lie-algebraic structure / Y.-G. Miao, X.-D. Wang, S.-J. Yu // *Ann. Phys.* — 2011. — Vol. 326, no. 8. — Pp. 2091 – 2107.
- [99] *Amelino-Camelia, G.* Coproduct and star product in field theories on Lie-algebra noncommutative space-times / G. Amelino-Camelia, M. Arzano // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 65, no. 8. Art. 084044. 8 p.
- [100] *Banerjee, R.* Lie algebraic noncommutative gravity / R. Banerjee, P. Mukherjee, S. Samanta // *Phys. Rev. D.* — 2007. — Vol. 75, no. 12. Art. 125020. 7 p.
- [101] Twisted classical Poincare algebras / J. Lukierski, H. Ruegg, V. N. Tolstoy, A. Nowicki // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1994. — Vol. 27, no. 7. — Pp. 2389–2399.
- [102] *Lukierski, J.* New quantum Poincare algebra and  $\kappa$ -deformed field theory / J. Lukierski, A. Nowicki, H. Ruegg // *Phys. Lett. B.* — 1992. — Vol. 293, no. 3. — Pp. 344 – 352.

- [103] More about the q-deformed Poincare algebra / S. Giller, P. Kosinski, M. Majewski et al. // *Phys. Lett. B.* — 1992. — Vol. 286, no. 1. — Pp. 57 – 62.
- [104] *Daszkiewicz, M.* The Henon–Heiles system defined on Lie-algebraically deformed Galilei spacetime / M. Daszkiewicz // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2017. — Vol. 32, no. 13. Art. 1750075. 11 p.
- [105] *Daszkiewicz, M.* Canonical and Lie-algebraic twist deformations of Galilei algebra / M. Daszkiewicz // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2008. — Vol. 23, no. 07. — Pp. 505–517.
- [106] *Kempf, A.* Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation / A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann // *Phys. Rev. D.* — 1995. — Vol. 52, no. 2. — Pp. 1108–1118.
- [107] *Kempf, A.* Noncommutative geometric regularization / A. Kempf // *Phys. Rev. D.* — 1996. — Vol. 54, no. 8. — Pp. 5174–5178.
- [108] *Hinrichsen, H.* Maximal localization in the presence of minimal uncertainties in positions and in momenta / H. Hinrichsen, A. Kempf // *J. Math. Phys.* — 1996. — Vol. 37. — Pp. 2121 – 2137.
- [109] *Kempf, A.* Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry / A. Kempf // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1994. — Vol. 35, no. 9. — Pp. 4483–4496.
- [110] *Quesne, C.* Harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in both position and momentum in a SUSYQM framework / C. Quesne, V. M. Tkachuk // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2003. — Vol. 36, no. 41. — Pp. 10373–10389.
- [111] *Quesne, C.* Deformed algebras, position-dependent effective masses and curved spaces: an exactly solvable Coulomb problem / C. Quesne, V. M. Tkachuk // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2004. — Vol. 37, no. 14. — Pp. 4267–4281.
- [112] *Quesne, C.* Generalized deformed commutation relations with nonzero minimal uncertainties in position and/or momentum and applications to quantum mechanics / C. Quesne, V. M. Tkachuk // *SIGMA.* — 2007. — Vol. 3 Art. 016. 18 p.

- [113] *Quesne, C.* Maths-type  $q$ -deformed coherent states for  $q > 1$  / C. Quesne, K. Penson, V. Tkachuk // *Phys. Lett. A.* — 2003. — Vol. 313, no. 1. — Pp. 29 – 36.
- [114] Deformed shape invariance and exactly solvable hamiltonians with position-dependent effective mass / B. Bagchi, A. Banerjee, C. Quesne, V. M. Tkachuk // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2005. — Vol. 38, no. 13. — Pp. 2929–2945.
- [115] Hamiltonians with position-dependent mass, deformations and supersymmetry / C. Quesne, B. Bagchi, A. Banerjee, V. M. Tkachuk // *Bulg. J. Phys.* — 2006. — Vol. 33, no. 4. — Pp. 308–318.
- [116] *Kempf, A.* Non-pointlike particles in harmonic oscillators / A. Kempf // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1997. — Vol. 30, no. 6. — Pp. 2093–2101.
- [117] *Kempf, A.* Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation / A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann // *Phys. Rev. D.* — 1995. — Vol. 52, no. 2. — Pp. 1108–1118.
- [118] Hydrogen-atom spectrum under a minimal-length hypothesis / S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, T. Takeuchi // *Phys. Rev. A.* — 2005. — Vol. 72, no. 1. Art. 012104. 4 p.
- [119] Short distance versus long distance physics: The classical limit of the minimal length uncertainty relation / S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic et al. // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 66, no. 2. Art. 026003. 11 p.
- [120] Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations / L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 65, no. 12. Art. 125027. 8 p.
- [121] Effect of the minimal length uncertainty relation on the density of states and the cosmological constant problem / L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 65, no. 12. Art. 125028. 7 p.
- [122] *Dadić, I.* Harmonic oscillator with minimal length uncertainty relations and ladder operators / I. Dadić, L. Jonke, S. Meljanac // *Phys. Rev. D.* — 2003. — Vol. 67, no. 8. Art. 087701. 4 p.



- [123] *Brau, F.* Minimal length uncertainty relation and gravitational quantum well / F. Brau, F. Buisseret // *Phys. Rev. D.* — 2006. — Vol. 74, no. 3. Art. 036002. 5 p.
- [124] *Bouaziz, D.* Regularization of the singular inverse square potential in quantum mechanics with a minimal length / D. Bouaziz, M. Bawin // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 76, no. 3. Art. 032112. 13 p.
- [125] *Bouaziz, D.* Singular inverse square potential in arbitrary dimensions with a minimal length: Application to the motion of a dipole in a cosmic string background / D. Bouaziz, M. Bawin // *Phys. Rev. A.* — 2008. — Vol. 78, no. 3. Art. 032110. 8 p.
- [126] *Tkachuk, V. M.* Field equation in a deformed space with minimal length / V. M. Tkachuk // *J. Phys. Stud.* — 2007. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 41–44.
- [127] *Frydryszak, A. M.* Aspects of pre-quantum description of deformed theories / A. M. Frydryszak, V. M. Tkachuk // *Czech. J. Phys.* — 2003. — Vol. 53, no. 11. — P. 1035–1040.
- [128] *Chung, W. S.* New generalized uncertainty principle from the doubly special relativity / W. S. Chung, H. Hassanabadi // *Phys. Lett. B.* — 2018. — Vol. 785. — Pp. 127 – 131.
- [129] *Chung, W. S.* A new higher order GUP: one dimensional quantum system / W. S. Chung, H. Hassanabadi // *Eur. Phys. J. C.* — 2019. — Vol. 79:213.
- [130] *Ali, A. F.* Discreteness of space from the generalized uncertainty principle / A. F. Ali, S. Das, E. C. Vagenas // *Phys. Lett. B.* — 2009. — Vol. 678, no. 5. — Pp. 497 – 499.
- [131] *Ali, A. F.* Proposal for testing quantum gravity in the lab / A. F. Ali, S. Das, E. C. Vagenas // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Vol. 84, no. 4. Art. 044013. 10 p.
- [132] *Pedram, P.* A higher order GUP with minimal length uncertainty and maximal momentum / P. Pedram // *Phys. Lett. B.* — 2012. — Vol. 714, no. 2. — Pp. 317 – 323.
- [133] *Pedram, P.* A higher order GUP with minimal length uncertainty and maximal momentum ii: Applications / P. Pedram // *Phys. Lett. B.* — 2012. — Vol. 718, no. 2. — Pp. 638 – 645.

- [134] Planck scale effects on the stochastic gravitational wave background generated from cosmological hadronization transition: A qualitative study / M. Khodadi, K. Nozari, H. Abedi, S. Capozziello // *Phys. Lett. B.* — 2018. — Vol. 783. — Pp. 326 – 333.
- [135] *Tkachuk, V. M.* Galilean and Lorentz transformations in a space with generalized uncertainty principle / V. M. Tkachuk // *Found. Phys.* — 2016. — Vol. 46, no. 12. — P. 1666–1679.
- [136] *Quesne, C.* Composite system in deformed space with minimal length / C. Quesne, V. M. Tkachuk // *Phys. Rev. A.* — 2010. — Vol. 81, no. 1. — P. 012106.
- [137] *Perivolaropoulos, L.* Cosmological horizons, uncertainty principle, and maximum length quantum mechanics / L. Perivolaropoulos // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Vol. 95. — P. 103523.
- [138] *Gavrilik, A. M.* New deformed Heisenberg algebra from the  $\mu$ -deformed model of dark matter / A. M. Gavrilik, I. I. Kachurik, A. V. Nazarenko // *Front. Astron. Space Sci.* — 2023. — Vol. 10. — P. 1133976.
- [139] *Tkachuk, V. M.* Deformed heisenberg algebra with minimal length and the equivalence principle / V. M. Tkachuk // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Dec. — Vol. 86. — P. 062112. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.062112>.
- [140] MICROSCOPE mission: First results of a space test of the equivalence principle / P. Touboul, G. Métris, M. Rodrigues et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Vol. 119, no. 23. Art. 231101. 7 p.
- [141] *Marin, F.* Gravitational bar detectors set limits to planck-scale physics on macroscopic variables / F. Marin, F. Marino, M. e. a. Bonaldi // *Nature Phys.* — 2013. — Vol. 9. — Pp. 71–73.
- [142] *Samar, M. I.* Kepler problem in space with deformed lorentz-covariant poisson brackets / M. I. Samar, V. M. Tkachuk // *Foundations of Physics.* — 2020. — Vol. 50, no. 9. — Pp. 942–959. <https://doi.org/10.1007/s10701-020-00359-z>.
- [143] *V., K. K.-D.* Kepler problem in general relativity with deformed lorentz-covariant poisson brackets / K. K.-D. V., M. I. Samar // *JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES.* — 2022. — Vol. 26, no. 4. — P. 4001. <https://doi.org/10.30970/jps.26.4001>.

- [144] *Tkachuk, V. M.* Deformed Heisenberg algebra with minimal length and the equivalence principle / V. M. Tkachuk // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Vol. 86, no. 6. Art. 062112. 4 p.
- [145] Precession of Mercury's perihelion from ranging to the MESSENGER spacecraft / R. S. Park, W. M. Folkner, A. S. Konopliv et al. // *The Astronomical Journal.* — 2017. — Vol. 153:121. 7 p.
- [146] *Tkachuk, V. M.* Field equation in a deformed space with minimal length / V. M. Tkachuk // *J. Phys. Stud.* — 2007. — Vol. 11. — Pp. 41–44.
- [147] *Ho, P.-M.* Noncommutative quantum mechanics from noncommutative quantum field theory / P.-M. Ho, H.-C. Kao // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88, no. 15. Art. 151602. 4 p.
- [148] *Bellucci, S.* Noncommutative quantum scattering in a central field / S. Bellucci, A. Yeranyan // *Phys. Lett. B.* — 2005. — Vol. 609, no. 3-4. — Pp. 418–423.
- [149] *Gnatenko, Kh. P.* Composite system in noncommutative space and the equivalence principle / Kh. P. Gnatenko // *Phys. Lett. A.* — 2013. — Vol. 377, no. 43. — Pp. 3061–3066.
- [150] *Saha, A.* Colella-Overhauser-Werner test of the weak equivalence principle: A low-energy window to look into the noncommutative structure of space-time? / A. Saha // *Phys. Rev. D.* — 2014. — Vol. 89, no. 2. Art. 025010. 5 p.
- [151] *Bertolami, O.* Aspects of phase-space noncommutative quantum mechanics / O. Bertolami, P. Leal // *Phys. Lett. B.* — 2015. — Vol. 750. — Pp. 6 – 11.
- [152] *Gnatenko, Kh. P.* Kinematic variables in noncommutative phase space and parameters of noncommutativity / Kh. P. Gnatenko // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2017. — Vol. 32, no. 31. Art. 1750166. 12 p.
- [153] *Gnatenko, Kh. P.* Features of free particles system motion in noncommutative phase space and conservation of the total momentum / Kh. P. Gnatenko, H. P. Laba, V. M. Tkachuk // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2018. — Vol. 33, no. 23. Art. 1850131. 12 p.

- [154] *Gnatenko, Kh. P.* Influence of noncommutativity on the motion of Sun-Earth-Moon system and the weak equivalence principle / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // *Int. J. Theor. Phys.* — 2018. — Vol. 57, no. 11. — P. 3359–3368.
- [155] Scaling of variables and the relation between noncommutative parameters in noncommutative quantum mechanics / O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. de Aragao et al. // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2006. — Vol. 21, no. 10. — Pp. 795–802.
- [156] *Djemai, A. E. F.* Noncommutative classical mechanics / A. E. F. Djemai // *Int. J. Theor. Phys.* — 2004. — Vol. 43, no. 2. — Pp. 299–314.
- [157] *Castello-Branco, K. H. C.* Free-fall in a uniform gravitational field in noncommutative quantum mechanics / K. H. C. Castello-Branco, A. G. Martins // *J. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 51, no. 10. Art. 102106. 25 p.
- [158] *Bertolami, O.* Phase-space noncommutativity and the Dirac equation / O. Bertolami, R. Queiroz // *Phys. Lett. A.* — 2011. — Vol. 375, no. 46. — Pp. 4116–4119.
- [159] *Bars, I.* Extra dimensions in space and time / I. Bars, J. Terning. — New York, NY: Springer, 2010.
- [160] *Williams, J. G.* Lunar laser ranging tests of the equivalence principle / J. G. Williams, S. G. Turyshev, D. H. Boggs // *Class. Quantum Grav.* — 2012. — Vol. 29, no. 18. Art. 184004. 11 p.
- [161] *Chaichian, M.* Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED / M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86, no. 13. — Pp. 2716–2719.
- [162] *Domingos, J. M.* Time reversal in classical and quantum mechanics / J. M. Domingos // *Int. J. Theor. Phys.* — 1979. — Vol. 18, no. 3. — Pp. 212 – 230.
- [163] Formulation, interpretation and application of noncommutative quantum mechanics / F. G. Scholtz, L. Gouba, A. Hafver, C. M. Rohwer // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2009. — Vol. 42, no. 17. Art. 175303. 13 p.

- [164] *Gnatenko, Kh. P.* Time-reversal and rotational symmetries in noncommutative phase space / Kh. P. Gnatenko, M. I. Samar, V. M. Tkachuk // *Phys. Rev. A.* — 2019. — Vol. 99, no. 1. Art. 012114. 6 p.
- [165] *Gnatenko, Kh. P.* Kinetic energy properties and weak equivalence principle in a space with GUP / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2020. — Vol. 33, no. 4. Art. 2050096. 12 p.
- [166] *Gnatenko, Kh. P.* Hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // *Phys. Lett. A.* — 2014. — Vol. 378, no. 47. — Pp. 3509–3515.
- [167] *Gnatenko, Kh. P.* Rotationally invariant noncommutative phase space of canonical type with recovered weak equivalence principle / Kh. P. Gnatenko // *EPL (Europhysics Letters).* — 2018. — Vol. 123, no. 5. Art. 50002. 7 p.
- [168] *Gnatenko, Kh. P.* Composite system in rotationally invariant noncommutative phase space / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 2018. — Vol. 33, no. 7. Art. 1850037. 21 p.
- [169] *Gnatenko, Kh. P.* Noncommutative phase space with rotational symmetry and hydrogen atom / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 2017. — Vol. 32, no. 26. Art. 1750161. 15 p.
- [170] *Gnatenko, Kh. P.* Effect of noncommutativity on the spectrum of free particle and harmonic oscillator in rotationally invariant noncommutative phase space / Kh. P. Gnatenko, O. V. Shyiko // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2018. — Vol. 33, no. 16. Art. 1850091. 11 p.