МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра вищої математики

Затверджено
На засіданні кафедри вищої математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка (протокол № 9 від 28.05 2021 р.)

Завідувач кафедри Гаталевич А.І.

Силабус з навчальної дисципліни «Аналітична геометрія», що викладається в межах ОПП «Середня освіта» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів з спеціальності 014 Середня освіта предметної спеціальності 014.08 Середня освіта. Фізика

Львів 2021 р.

Назва дисципліни	Аналітична геометрія
Адреса викладання дисципліни	Корпус ЛНУ ім. І. Франка, м. Львів, вул. Драгоманова, 12
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет Кафедра вищої математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	014 Середня освіта 014.08 Середня освіта (Фізика)
Викладачі дисципліни	Жумік Оксана Василівна, доцент кафедри вищої математики
Контактна інформація викладачів	oksana.zhumik@lnu.edu.ua Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 370. м. Львів, вул. Університетська, 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю). Також можливі он-лайн консультації. Для погодження часу он-лайн консультацій слід писати на електронну пошту викладача.
Сторінка курсу	https://new.mmf.lnu.edu.ua/department/kvm
Інформація про дисципліну	Предметом вивчення аналітичної геометрії і лінійної алгебри є скінченновимірні лінійні векторні простори та їх відображення алгебраїчними методами та вивчення геометричних об'єктів лінійних векторних просторів засобами алгебри і методом координат. Курс розроблено таким чином, щоб надати учасникам основні поняття і висвітлити сучасний стан досліджень у сфері наук про землю, які потребують знань з вищої математики.
Коротка анотація дисципліни	Дисципліна "Аналітична геометрія" є нормативною навчальною дисципліною циклу професійної і практичної підготовки з спеціальності 014.08 Середня освіта (Фізика), яка викладається в 2-му семестрі в обсязі 3,5 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Мета та цілі дисципліни	Мета дисципліни — забезпечити належну базову математичну підготовку студентів та сформувати у них вміння застосовувати її для аналізу різноманітних фізичних явищ. Завдання дисципліни — допомогти студентам засвоїти основи математичного апарату, необхідного для розв'язування теоретичних і практичних задач фізики; виробити навики математичного дослідження прикладних математичних задач; прищепити студентам уміння самостійно вивчати літературу з аналітичної геометрії та вищої алгебри та її прикладних питань.
Література для вивчення дисципліни	1. Атанасян Л.С. Геометрія / Атанасян Л.С. — К. : Вища школа, 1976. — 455 с.

	2. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Александров П.С. — М. : Наука, 1979. — 511 с. 3.В.Р. Зеліско, Г.В. Зеліско. Основи лінійної алгебри і аналітичної геометрії. – Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2011. – 326 с. 4.Воробець Д.Б., Дідик В.З. Елементи аналітичної геометрії, матриці, визначники. – Вид-во ЛДУ, 1990. 5.Воробець Б.Д. Лінійні оператори. – Вид-во ЛДУ, 1990. 6.Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М., Наука, 1979. 7.Гаталевич А.І., Стахів Л.Л. Методичні вказівки та індивідуальні завдання до курсу „Аналітична геометрія та вища алгебра". Вид-во ЛНУ імені Івана Франка, 2006. 8.Дідик В.З., Воробець Б.Д. Елементи аналітичної геометрії, матриці, визначники. – Вид-во ЛДУ, 1972. 9.Ильин В.А., Позняк В.Г. Аналитическая геометрия. – М., Наука, 1968. 10.Ильин В.А., Позняк В.Г. Линейная алгебра. – М., Наука, 1984. 11.Ковальчук Б.В., Дідик В.З., Верба І.І., Тріщ Б.М. Аналітична геометрія й основи лінійної алгебри. – К., НМК ВО, 1993. 12.Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. – М., Наука, 1986. 13. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М., Наука, 1968. 14.Проскуряков И.В.. Сборник задач по линейной алгебре. – М., Наука, 1978. 15.Тріщ Б.М. Аналітична геометрія і лінійна алгебра. Курс лекцій. – Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. 2004. 245 с. 16.Бабенко В.В., Зіневич А.Г., Кічура С.М., Тріщ Б.М., Цаповська Ж.Я. Збірник задач з вищої математики. - Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. 2005. 255 с.
Обсяг курсу	Загальний обсяг: 105 годин. Аудиторних занять: 48 год., з них 16 години лекцій та 32 години практичних занять. Самостійна робота: 57 год.
Очікувані результати навчання	Після завершення курсу «Аналітична геометрія» студенти повинні знати: - означення матриці, види матриць та властивості дій над матрицями; - означення та властивості визначника квадратної матриці; - означення лінійної залежності та незалежності систем n-вимірних векторів, їх властивості; - поняття рангу, базису системи векторів, рангу матриці; - різні форми запису і методи розв'язування систем лінійних рівнянь; - основи векторної алгебри; - рівняння прямої на площині, прямої і площини у просторі; - рівняння кривих другого порядку; - поняття векторного простору над полем, евклідового простору; студенти повинні вміти: - обчислювати визначники матриць; - виконувати алгебраїчні операції з матрицями; - знаходити обернену матрицю; - аналізувати та розв'язувати системи лінійних рівнянь; - знаходити фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь; - обчислювати ранг матриці; - виконувати алгебраїчні операції з векторами; - визначати лінійну залежність та незалежність векторів; - розкладати вектор за довільним базисом; - обчислювати скалярний, векторний та мішаний добутки векторів та застосовувати їх до розв'язання задач; - складати рівняння прямих і площин; - обчислювати кути між прямими та площинами, відстань між точками, між точкою і прямою, між точкою і площиною; - визначати тип

	ліній другого порядку та зводити її загальне рівняння до канонічного вигляду;
Ключові слова	Вектор, квадратична форма, лінія, площина, крива другого порядку, поверхня.
Формат курсу	Очний, дистанційний Проведення лекцій, практичних занять і консультацій.
Теми	1. Матриці та дії з ними: поняття матриці; види матриць: квадратна, діагональна, одинична, нульова, симетрична, транспонована;дії з матрицями: множення матриці на скаляр, додавання і віднімання матриць, множення матриць. 2. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь: системи лінійних рівнянь; східчасті системи лінійних рівнянь та східчасті матриці; елементарні перетворення систем лінійних рівнянь та матриць; метод Гаусса; дослідження системи лінійних рівнянь. 3. Визначники квадратних матриць, методи їх обчислення та властивості: поняття визначників 2-го і 3-го порядків та їх обчислення; поняттявизначника n-го порядку; поняття мінора та алгебраїчного доповнення елементів квадратної матриці; теорема Лапласа; властивості визначника n-го порядку та їх використання для спрощення його обчислення; означення оберненої матриці; властивості оберненої матриці 4. Лінійна залежність: три означення рангу матриці; лема про базовий мінор; теорема про ранг матриці; обчислення рангу матриці методом елементарних перетворень; теорема Кронекера-Капеллі; правило Крамера; загальний розв'язок системи лінійних рівнянь; Системи лінійних однорідних рівнянь 5. Вектори на площині і в просторі та дії з ними: поняття вектора на площині і в просторі; лінійні операції над векторами: геометричне та аналітичне додавання векторів, множення вектора на скаляр; лінійна залежність і незалежність векторів; базис векторного простору; розклад вектора за базисом, перехід від одного базису до іншого. системи координат, перетворення координат; проекція вектора на вісь; координати вектора; поділ відрізка у даному відношенні; довжина і напрямні косинуси вектора; скалярний добуток векторів і кут між векторами; векторний добуток двох векторів; мішаний добуток векторів; орієнтовані площа та об'єм; умови паралельності і перпендикулярності векторів. 6. Пряма на площині: поняття рівняння лінії на площині; — рівняння прямої: а) з кутовим коефіцієнтом; б) яка проходить через дві точки; в) яка відсікає дані відрізки на осях координат; г)канонічне; д) параметричне; е) нормоване; — кут між двома прямими, умови паралельності і перпендикулярності прямих; загальне рівняння прямої та його дослідження; відстань точки до прямої. 7. Лінії другого порядку на площині:

	загальне рівняння лінії 2-го порядку на площині; — нормальне рівняння кола. Знаходження центру і радіуса кола за загальним його рівнянням; — канонічне рівняння еліпса та його основні характеристики; канонічне рівняння гіперболи та її основні характеристики; канонічне рівняння параболи та її основні характеристики. параметричні та полярне рівняння еліпс, гіпербола і парабола; еліпс, гіпербола та парабола як конічні перерізи; дослідження ліній другого порядку за їх канонічними рівняннями. 8. Площина і пряма у просторі: поняття рівняння поверхні у просторі; рівняння площини, яка проходить через дану точку і перпендикулярно до даного вектора; загальне рівняння площини у просторі та його дослідження; кут між двома площинами та умови паралельності і перпендикулярності двох площин; рівняння прямої у просторі, яка проходить через дану точку і паралельно до даного вектора (канонічне рівняння прямої); пряма як перетин двох площин у просторі та зведення його до канонічного рівняння; кут між двома прямими у просторі та умови паралельності і перпендикулярності двох прямих; кут між прямою і площиною у просторі та умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини у просторі; 9. Поверхні у просторі: основні типи поверхонь у просторі : конічні, циліндричні; поверхні обертання : еліпсоїд, одно порожнинний гіперболоїд, двопорожнинний гіперболоїд, конус другого порядку, еліптичний параболоїд, гіперболічний параболоїд, еліптичний циліндр, параболічний циліндр; дослідження поверхонь 2-го порядку за їх канонічними перерізами. 10. Означення лінійного простору. Лінійна залежність: означення лінійного простору. Приклади лінійних просторів; скалярний добуток; база, координати, вимір лінійних просторів; перетворення координат вектора; матриця переходу від однієї бази до іншої; підпростори, лінійні оболонки перетин і сума підпросторів; пряма сума підпросторів; розмірність суми підпросторів. 11. Лінійні оператори та їх матриці: означення лінійного оператора; матриця лінійного оператора; перетворення матриці оператора при переході до нової бази; подібні матриці. 13. Дії над лінійними операторами. Область значень та ядро лінійного оператора: дії над лінійними операторами та відповідні дії над матрицями; многочлени від лінійного оператора ядро і образ оператора; зв”язок між вимірами ядра і образу оператора; ранг оператора; ранг добутку операторів; розв”язки однорідної та неоднорідної лінійних систем лінійних алгебричних рівнянь; теорема Кронекера-Капеллі; вироджені і невироджені оператори; обернений оператор. 14. Лінійні, білінійні та квадратичні форми: поняття про лінійну, білінійну та квадратичну форми; матриця білінійної форми; зв’язок матриць білінійної форми у різних базах; матриця та ранг квадратичної форми; зведення квадратичної форми над полем дійсних чисел до головних осей. 15. Канонічний вигляд квадратичної форми: канонічний вигляд квадратичної форми; метод Лагранжа зведення квадратичної форми до канонічного вигляду; нормальний вигляд квадратичної форми; закон інерції; дослідження рівнянь другого степеня;

	16. Додатно визначені квадратичні форми: еквівалентні означення додатної визначеності; критерій Сильвестра;
Підсумковий контроль, форма	Екзамен у кінці семестру.
Пререквізити	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з - Алгебри та основ математичного аналізу - Геометрії
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Презентації, лекції, практичні заняття. Індивідуальні завдання
Необхідне обладнання	Комп'ютер із загально вживаним програмним забезпеченням, доступ до Internet мережі.
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням: • написання двох тестових модулів: по 25% семестрової оцінки кожен; • кількість балів за екзамен: 50. Підсумкова максимальна кількість балів - 100. **Письмові роботи:** Очікується, що студенти виконають дві письмові роботи (два тести з теоретичних і лабораторних завдань). **Академічна доброчесність:** Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману. **Відвідання занять** є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні зайняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом. **Література.** Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих. **Політика виставлення балів.** Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.
Питання до заліку чи екзамену.	1. Поняття матриці. 2. Дії над матрицями. Означення суми двох матриць. Властивості суми. 3. Добуток матриці на число. Означення. Властивості. 4. Множення матриць. Означення добутку двох квадратних матриць однакового порядку. 5. Множення прямокутних матриць. Які прямокутні матриці можна перемножувати? Яку матрицю

	одержимо в результаті? 6. Властивості добутку матриць. 7. Поняття мінора матриці. 9. Означення оберненої матриці. Умова існування оберненої матриці та її єдиність. 10. Знаходження оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень. 11. Розв'язування матричних рівнянь. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним способом. 12. Знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень рядків. 2. Визначники другого, третього та n – го порядку, їх властивості. 1. Перестановки. 2. Інверсії, парність і непарність перестановки. 3. Аналіз будови визначників другого і третього порядків. 4. Означення визначника n – го порядку. 5. Властивості визначника n – го порядку. 6. Способи обчислення визначників. 7. Властивості визначників другого порядку. 8. Поняття визначника третього порядку. 9. Розклад визначника третього порядку за елементами рядка чи стовпця. 3. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих. 1. Основні поняття. Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Розв'язок системи. Сумісна і несумісна системи. 2. Система m лінійних рівнянь з n невідомими. Рівносильні системи. 3. Елементарні перетворення систем лінійних рівнянь. 4. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих. 5. Правило Крамера. 8 4. Векторні простори та їх підпростори. 1. Означення векторного простору. Приклади. 2. Деякі властивості векторного простору, які випливають з аксіом векторного простору. 3. Лінійна залежність векторів: означення лінійної залежності, лінійної незалежності векторів, властивості. 4. Розмірність базис векторного простору. 5. Зв'язок між розмірністю і базисом векторного простору. 6. Розклад вектора за базисними векторами. Координати вектора. Дії над векторами в координатній формі. 7. Зв'язок між базисами. Матриця переходу від одного базису до іншого. 8. Зв'язок між координатами вектора в різних базисах. 9. Означення підпростору. Критерії підпростору. 10. Перетин двох підпросторів. Сума двох підпросторів. 11. Зв'язок між розмірностями суми двох підпросторів і їх перетину. 5. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь. 1. Основні поняття. Поняття рангу матриці. Знаходження рангу матриці за допомогою елементарних перетворень рядків матриці. 2. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь. Критерій визначеності. 3. Однорідна система лінійних рівнянь. 4. Властивості розв'язків однорідної системи рівнянь. 5. Фундаментальна система розв'язків О.С.Л.Р. 6. Загальний розв'язок О.С.Л. Р. 7. Зв'язок між розв'язками неоднорідної і відповідної їй однорідної системи рівнянь. 8. Розв'язки неоднорідної та відповідної однорідної системи лінійних рівнянь. Підпростір розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь. Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія на площині. 6. Поняття вектора. Колінеарність і компланарнсть векторів. Лінійні операції над векторами. 1. Поняття напряму. Напрямлені відрізки. 2. Поняття вектора. Співнапрямлені і протилежно напрямлені вектори. 3. Довжина вектора. Рівність векторів. 4. Додавання векторів. Властивості додавання. 5. Віднімання векторів. Властивості різниці векторів. 6. Множення вектора на число. Властивості добутку вектора на число. 7. Лема про колінеарні вектори. Поняття векторного простору. 7. Лінійна залежність векторів. Властивості. Базис простору. Координати вектора в даному базисі. 1. Поняття лінійної комбінації векторів. 2.

	Означення та властивості лінійної залежності векторів. 3. Означення лінійної незалежності векторів. 4. Умова колінеарності двох та компланарності трьох векторів. 5. Теорема про лінійну залежність будь-яких чотирьох векторів простору. 6. Поняття базису простору. Ортонормований базис. 7. Теорема про розклад вектора за базисними векторами. 8. Поняття координат вектора в даному базисі. 9. Координати суми векторів і добутку вектора на число. 10. Умова колінеарності двох векторів в координатах. 11. Умова компланарності трьох векторів в координатах. 8. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів. 1. Скалярний добуток двох векторів і його властивості. Вираз скалярного добутку векторів через координати. 1.1. Проектування на пряму, площину, на вісь. Теореми про проекції векторів. 1.2. Ортогональна проекція вектора на вісь. 1.3. Задачі, які приводять до поняття скалярного добутку. 1.4. Означення скалярного добутку. Означення скалярного добутку векторів через ортогональну проекцією. 1.5. Алгебраїчні властивості скалярного добутку. 1.6. Геометричні властивості скалярного добутку: а) умова перпендикулярності векторів; б) задачі, які розв'язуються за допомогою скалярного добутку. 1.7. Вираз скалярного добутку векторів через їх координати 2. Векторний добуток векторів і його властивості. Мішаний добуток трьох векторів. 2.1. Орієнтація репера. 2.2. Задачі, які приводять до векторного добутку. 2.3. Означення векторного добутку. 2.4. Алгебраїчні властивості векторного добутку. 2.5. Геометричні властивості векторного добутку. 2.6. Вираз векторного добутку векторів через їх координати. 3. Мішаний добуток векторів. 3.1. Означення мішаного добутку трьох векторів. 3.2. Геометричний зміст мішаного добутку. 3.3. Вираз мішаного добутку векторів через їх координати. 10 9. Різні системи координат на площині. 1. Афінна система координат на площині. 2. Координати точки. 3. Основні задачі в афінній системі координат: а) координати вектора через координати його початку і кінця; б)поділ відрізка в даному відношенні. 4. Прямокутна декартова система координат та основні задачі в прямокутній системі координат: а) відстань між двома точками; б) площа трикутника. 5. Перетворення афінних систем координат. 6. Перетворення прямокутних систем координат: а) постановка задачі; б) перетворення координат при перенесені початку; в) перетворення координат при повороті осей. 7. Дві основні задачі аналітичної геометрії. 10. Пряма на площині 1. Напрямний вектор прямої. 2. Різні способи задання прямої: а) канонічне рівняння; б) параметричні рівняння; в) пряма задана двома точками; г) пряма "у відрізках" на осях; д) загальне рівняння прямої; е) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. 3. Розміщення прямої відносно системи координат. 4. Взаємне розміщення двох прямих на площині. 11 5. Пучок прямих. 6. Нормальний вектор прямої. 7. Пряма задана точкою і нормальним вектором. 8. Геометричний зміст коефіцієнтів при змінних в загальному рівнянні прямої. 9. Нормальне рівняння прямої. 10. Віддаль від точки до прямої. 11. Кут між двома прямими. 12. Умова перпендикулярності двох прямих. 11. Лінії другого порядку на площині. Еліпс. Гіпербола. Парабола. 1. Еліпс. 1.1. Означення еліпса. 1.2. Виведення канонічного рівняння. 1.3. Властивості еліпса. 1.4. Форма еліпса. 2. Гіпербола. 2.1. Означення гіперболи. 2.2. Виведення канонічного рівняння. 2.3. Властивості гіперболи. 2.4. Асимптоти гіперболи. 2.5. Форма гіперболи. 3.

	Парабола. 3.1. Означення параболи. 3.2. Виведення канонічного рівняння. 3.3. Властивості параболи. 3.4. Форма параболи. 4. Оптичні властивості ліній другого порядку. 5. Лінії другого порядку в полярних координатах. 12. Аналітична геометрія в просторі. Метод координат в просторі. 1. Афінна і прямокутна декартова системи координат в просторі. Координати точки в просторі. 2. Основні задачі в афінній та прямокутній декартовій системах координат. 3. Геометричний зміст рівнянь і нерівностей в просторі. Дві основні задачі аналітичної геометрії в просторі. 13. Площина в просторі. Різні способи її задання.. 1. Напрямний вектор площини. 2. Канонічне рівняння площини. 3. Загальна рівняння площини. 4. Рівняння площини "у відрізках". 5. Розміщення площини відносно системи координат. 6. Взаємне розміщення двох площин. 7. Нормальний вектор площини. 8. Геометричний зміст коефіцієнтів при змінних в загальному рівнянні площини. 9. Рівняння площини, заданої точкою і нормальним вектором. 10. Нормальне рівняння площини. 11. Віддаль від точки до площини. 12. Кут між площинами. 13. Умова перпендикулярності двох площин. 14. Пряма в просторі. Взаємне розміщення прямої і площини. 1. Напрямний вектор прямої. 2. Способи задання прямої в просторі: а) точкою і напрямним вектором; б) двома точками; в) перетином двох площин. 3. Канонічні рівняння прямої. 4. Параметричні рівняння прямої. 5. Пряма, як перетин двох площин. 6. Взаємне розміщення двох прямих в просторі. Відстань між прямими в просторі. 6.1. Умова паралельності прямих. 6.2. Умова співпадіння прямих. 6.3. Умова перетину двох прямих. 6.4. Умова мимобіжності двох прямих. 6.5. Віддаль між паралельними прямими. 7. . Взаємне розміщення прямої і площини в просторі 7.1.Умова паралельності прямої і площини. 7.2. Умова перетину прямої і площини. 13 7.3. Умова того, що пряма лежить в площині. 7.4. Кут між прямою і площиною. 7.5. Умова перпендикулярності прямої і площини.
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.