Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Т. М. Демків, О. І. Конопельник, Я. І. Шопа

Основи теорії похибок фізичних величин

Методичні матеріали
для загального фізичного практикуму

Львів
Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка
2008

Рекомендовано до друку кафедрою загальної фізики
Протокол № 10 від 20.06.2008 р.

Уклали: Демків Тарас Михайлович
Конопельник Оксана Ігорівна
Шопа Ярослав Іванович

Основи теорії похибок
фізичних величин

Методичні матеріали
для загального фізичного практикуму

Комп'ютерна верстка: Н. Гладка

Підп. до друку 24.07.2008. Формат 60×84/16. Папір друк.
Умовн. друк. арк. 2,3. Обл.-вид. арк. 2,5. Наклад 50 прим. Зам.

Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка
вул. Дорошенка, 41, м. Львів, 79000

Вступ

Для кількісного вимірювання та у деяких випадках якісного оцінювання фізичних величин використовують вимірювальні прилади та індикатори. Вони сприймають вимірювану величину і перетворюють її до вигляду, зручного для експериментатора чи для подальшого опрацювання. Однак далеко не зажди очевидною є якість вимірювання фізичної величини. Результати усіх вимірювань, хоч як скрупульозно вони б не виконувались, завжди отримують з деякою похибкою.

Виконуючи роботи лабораторного практикуму студенти вивчають прилади, проводять вимірювання та аналізують отримані результати за допомогою фізичних законів, оцінюють їхню достовірність, використовуючи методи математичної статистики та теорії ймовірностей.

Методичні матеріали містять основи теорії похибок та опис низки правил і прикладів їхніх обчислень. Вони будуть корисними для опанування методики оцінки похибок вимірювання фізичних величин та самостійної роботи студентів.

1. Фізична величина та засоби її вимірювання

Фізична величина — це властивість, якісно спільна для багатьох об’єктів або процесів, а кількісно — індивідуальна для кожного об’єкту або процесу. Тобто ця величина має два аспекти — кількісний та якісний.

Якісна ознака фізичної величини визначає її *рід*. Фізичні величини з однаковою якісною ознакою є однорідними (наприклад, довжина, висота, відстань, діаметр).

Кількісний вміст фізичної величини в певному об’єкті є розміром фізичної величини. У зв’язку з цим зазначимо, що вислів «величина діаметра» є тавтологією (величина величини). Слід говорити «розмір діаметра».

Числовим значенням фізичної величини називають число, що дорівнює відношенню виміряного розміру фізичної величини до розміру одиниці цієї фізичної величини.

Значенням фізичної величини називають відображення фізичної величини у вигляді її числового значення з зазначенням одиниці вимірювання. Значення фізичної величини можна отримати як результат обчислення або вимірювання.

Наприклад, масою володіють всі фізичні тіла, тобто в якісно поняття «маса» є спільним для величезної кількості різних фізичних тіл. Але кожне тіло має індивідуальне кількісне значення маси. Тому поряд із числовим значенням вказують прийняті одиниці вимірювання. Наприклад, один стіл може мати масу 10,25 кг, інший — 25,36 кг тощо.

Процес знаходження фізичної величини називають вимірюванням. Людські органи чуттів мало пристосовані для кількісного вимірювання більшості фізичних величин. Так фраза «чай солодкий» не несе точної інформації про концентрацію цукру в чаї, а тільки якісну оцінку — «мало», «багато» і т.д. Для точного визначення фізичної величини слід використовувати спеціальні прилади — засоби вимірювання.

Засоби вимірювання — це прилади, які сприймають фізичну величину і перетворюють її до вигляду, що зручний для спостереження експериментатором або реєстрації комп’ютером. Зареєстроване значення фізичної величини можна згодом опрацювати.

Засоби вимірювання поділяють на *міри*, *вимірювальні прилади* та *вимірювальні установки*.

Міри — це прилади, що визначають значення фізичної величини об’єкту шляхом порівняння відповідного його параметру з вибраним зразком. Найпоширенішим засобом вимірювання такого типу є звичайна лінійка. Так, довжину відрізка на папері знаходять, порівнюючи його з відповідним відрізком на лінійці.

Вимірювальний прилад реєструє фізичну величину і перетворює її у зручний для експериментатора чи для подальшого опрацювання вигляд.

Часто потрібно вимірювати одразу дві й більше фізичних величин, для чого потрібно стільки ж вимірювальних приладів. Тоді використовують *вимірювальні установки* — сукупність вимірювальних приладів, що об'єднані в одному корпусі.

Вимірювальні прилади можна об'єднати в три групи за наступними характеристиками.

За способом індикації результатів вимірювання:

а) показуючий — прилад, що допускає тільки візуалізацію значень вимірюваної величини;

б) реєструючий — прилад, в якому передбачена реєстрація значень фізичної величини. Реєстрація значень може здійснюватися в аналоговій або цифровій формах.

За методом вимірювання:

а) прямої дії — прилад, який здійснює одне або декілька перетворень вимірюваної величини. Значення її знаходять без порівняння з відомою однойменною величиною;

б) порівняння — призначений для безпосереднього порівняння вимірюваної величини з величиною, значення якої відоме.

За формою представлення вимірів:

а) аналоговий — вихідний сигнал є безперервною функцією вимірюваної величини;

б) цифровий — результати вимірів представлені в цифровій формі.

Вимірювання називають *прямим*, якщо значення фізичної величини знаходять безпосередньо з дослідних даних і *непрямим*, якщо значення фізичної величини знаходять шляхом обрахунків на основі дослідних даних. Очевидно, що оцінити похибку прямого вимірювання легше, ніж непрямого.

2. Значення фізичної величини

Істинним значенням x фізичної величини X називають таке її значення, яке ідеально відображає певну властивість об'єкта та не залежить від способу вимірювання. Це абсолютно точне значення фізичної величини.

Дійсним (умовно істинним) *значенням* $\overline{x}$ фізичної величини X називають знайдене експериментальним шляхом значення, настільки

близьке до істинного, що за даних умов різницею між ними можна знехтувати.

Фізичні величини прийнято позначати малими та великими буквами грецького та латинського алфавітів — m, k, l, L, I. Якщо коло букви, що означує фізичну величину, немає ніяких індексів — це її істинне значення (x, m, L), якщо зверху є пряма риска ($\overline{x}, \overline{m}, \overline{L}$) — дійсне.

Виміряти будь-яку величину абсолютно точно неможливо. Завжди наявна похибка. Інтуїтивно зрозуміло, що похибка — це відхилення виміряного значення фізичної величини від точного. Однак, оскільки ми маємо справу з кількісними характеристиками фізичних величин, введемо такі ж характеристики для похибок вимірювання.

Похибкою фізичної величини X називають різницю між її істинним x та дійсним $\overline{x}$ значеннями.

Зазвичай *використовують абсолютну похибку* фізичної величини Δx. Це різниця за модулем між її істинним та дійсним значеннями:

$$\Delta x = \left| x - \overline{x} \right|. \tag{2.1}$$

Абсолютна похибка Δx фізичної величини показує, наскільки істинне значення x фізичної величини відрізняється від дійсного $\overline{x}$. Розмірність абсолютної похибки відповідає розмірності фізичної величини.

Користуючись означенням модуля числа вираз (2.1) можна переписати так:

$$x = \overline{x} \pm \Delta x. \tag{2.2}$$

Геометричний зміст рівняння (2.2) зображено на рис. 2.1. Істинне значення x фізичної величини неможливо виміряти, але можливо оцінити його положення на числовій осі за допомогою абсолютної похибки Δx та дійсного значення $\overline{x}$, яке виміряти можна. Навколо дійсного значення абсолютна похибка окреслює так званий дельта-окіл ($\pm\Delta x$), в якому перебуває істинне значення x. Тобто, процедура визначення істинного значення фізичної величини зводиться до знаходження його дійсного значення та похибки вимірювання.

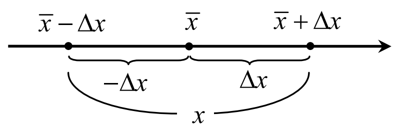

Рис. 2.1.

Вираз (2.2) називають *кінцевим результатом* і записують для числового значення кожної фізичної величини як підсумок виконання лабораторної роботи.

Однак абсолютна похибка не дає змоги визначити якість вимірювання. Пояснимо це на прикладі. Нехай визначають довжину стола l_1 та довжину вулиці l_2 з однією і тією ж абсолютною похибкою — 10 см. Довжина стола становить 1,5 м, вулиці — 1,5 км. Зрозуміло, що хоча абсолютна похибка в обох випадках однакова, але якість вимірювання у другому випадку вища. Тому вводять відносну похибку, яка характеризує якість вимірювання. Вона показує, яку частину в значенні фізичної величини займає її абсолютна похибка і тому характеризує якість вимірювання.

Відносна похибка δx фізичної величини чисельно дорівнює відношенню абсолютної похибки Δx вимірювання до її істинного значення x:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}. \tag{2.3}$$

Зазвичай відносну похибку δx виражають у відсотках. Тоді (2.3) записують так: $\delta x = \frac{\Delta x}{x} 100\%$.

Обернену до відносної похибки величину $\psi = 1/\delta x$ називають *точністю*.

3. Похибки фізичних величин

Розрізняють три види похибок: *промах*, *систематичну* та *випадкову*. Завдання експериментатора — по можливості уникнути їх.

Найлегше уникнути промахів. Промахи — це великі похибки, згідно (2.1) вони виникають тоді, коли виміряне значення суттєво відрізняється від істинного. Тому промахи виявляють при значній відмінності отриманих результатів від решти такого ж типу. Часто відмінність настільки велика, що одразу видно, під час якого вимірювання допущена помилка. Таке вимірювання відкидають. Цей тип похибки є результатом неправильної постановки експерименту, помилок

під час реєстрації та оцінки даних спостережень. Промахи залежать лише від експериментатора, тому їх цілком можна позбутись.

У похибці, яка виникає під час вимірювань, розрізняють дві складові — систематичну та випадкову.

3.1. Систематичні похибки

Систематична похибка — це похибка, обумовлена дією сталих у часі факторів. Зазначимо суттєву особливість такого типу похибок — їхня величина і знак зберігаються під час проведення експерименту.

Такі похибки можуть бути пов'язані з помилками під час вимірювання недосконалими приладами (неправильна шкала, нерівномірний крок мікрометричного гвинта, не рівні плечі ваги тощо) і з самою постановкою досліду (наприклад, визначення швидкості поїзда на ділянці, де рух проходить з прискоренням, яке не було враховано експериментатором). Унаслідок систематичних похибок результати досліду, які відмінні між собою через випадкові похибки, коливаються не навколо істинного x, а навколо деякого зміщеного x' значення.

Рис. 3.1 пояснює відмінність між випадковими та систематичними похибками. У ситуації, яка зображена на рис. 3.1, *а* систематична похибка настільки мала, що нею можна знехтувати. Виміряні значення відрізняються від істинного унаслідок випадкових похибок. На рис. 3.1, *б* зображено результати досліду за наявності як випадкових так і систематичних похибок.

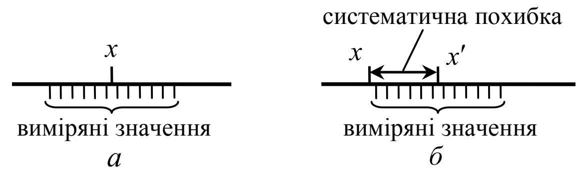

Рис. 3.1.

Отже, систематична похибка є наслідком недосконалості приладів та недоліків методики експерименту. *На практиці, якщо студент* *правильно засвоїв методику вимірювання, можна вважати, що систематична похибка усунена*.

Відмінність між систематичними та випадковими похибками не є абсолютною. Вона пов'язана з постановкою досліду. Проводячи вимірювання опору не одним, а декількома омметрами, ми перетворюємо систематичну похибку, пов'язану з неточністю шкали, у випадкову, величина і знак якої залежить від того, який омметр використаний у кожному досліді. Однак у конкретному досліді різницю між випадковими та систематичними похибками завжди можна і потрібно встановлювати з повною визначеністю.

Оскільки фактори, що призводять до виникнення систематичних похибок, з часом не змінюються, їх можна передбачити і повністю або частково усунути. *Якщо цього не вдається зробити, то систематичну похибку враховують як складову загальної похибки.*

3.2. Випадкові похибки

Випадкова похибка обумовлена дією неконтрольованого впливу випадкових факторів і проявляється у хаотичній зміні результатів повторних спостережень. Під неконтрольованим впливом розуміють сукупність факторів, які неможливо наперед передбачити. Тому врахувати їх можна тільки за допомогою методів теорії ймовірностей та математичної статистики.

Для того, щоб виявити випадкову похибку, вимірювання необхідно провести декілька разів. Багаторазові вимірювання однієї і тієї ж фізичної величини X, проведені на одному і тому ж приладі, називають *повторними*, або *рівноточними*. N рівноточних вимірювань фізичної величини X позначають x_1, x_2, …, x_N. Довільне рівноточне вимірювання позначають x_i і кажуть, що це i-те вимірювання.

3.3. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики

Нижче розглянемо низку понять, які потрібні для розуміння методів обчислення похибок.

Події, що відбуваються в навколишньому світі, поділяють на *вірогідні*, *неможливі* та *випадкові*. Перші за реалізації певного комплексу

умов відбуваються завжди, другі — ніколи, треті — можуть як відбуватись, так і не відбуватись. Випадкові події займають проміжну позицію між «завжди» та «ніколи». Події позначають великими латинськими літерами A, B, C…

Під *випробовуванням* розуміють забезпечення всіх необхідних умов для появи даної події. Самі умови, що забезпечують появу події, не є повністю підконтрольними експериментатору. Тому теорія ймовірності, як наука про числову міру випадкових подій, передбачає вивчення не одиничних, а масових випадкових подій.

Події розрізняють *сумісні* — коли поява однієї події не виключає появу іншої, та *несумісні* — коли виключає.

Події називають *рівноможливими* (реалізуються за рівноточних вимірювань), якщо під час випробовувань з'являються однаково часто. Кілька подій утворюють *повну групу*, якщо поява хоча б однієї з них — вірогідна подія. Наприклад, повна група — поява числа точок від 1 до 6 при киданні гральної кості.

Випадкові величини поділяють на *дискретні* та *неперервні*. Дискретна випадкова величина має скінченну кількість можливих значень, неперервна може набувати всіх числових значень з інтервалу на числовій осі. Прикладом дискретної величини може бути значення атмосферного тиску, знайдені з точністю до цілих, неперервних — залежність опору провідника від температури.

Введемо класичне визначення чисельної можливості реалізації події — *ймовірності*. Ймовірністю певної події A називають відношення кількості випадків n_A, які сприяють появі даної події, до загальної кількості n рівноможливих і єдино можливих випробовувань, які утворюють повну групу:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}. \tag{3.1}$$

Величину n_A називають *частотою*, $\frac{n_A}{n}$ — *відносною частотою* появи події.

Однак n_A та n не завжди скінченні. Тому вводять статистичне означення ймовірності випадкової події. Ймовірність випадкової події A — це границя відносної частоти цієї події при необмеженому збільшенні кількості випробувань:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}. \qquad (3.2)$$

Досвід показує, що випадкові похибки мають такі властивості:

1) похибки вимірювань можуть мати неперервний ряд значень;
2) за великої кількості спостережень похибки однієї величини різного знаку зустрічаються однаково часто;
3) великі похибки спостерігаються рідше, ніж малі.

Властивості випадкових величин визначають числові характеристики розподілу, які подані в табл. 3.1.

Таблиця 3.1.

Числові характеристики розподілу для дискретних і неперервних величин

Дискретна величина	Неперервна величина з інтервалу (a; b)
Математичне сподівання:	
$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$M(X) = \int_a^b x f(x) dx$
Генеральна дисперсія:	
$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i$	$D(X) = \int_a^b \left(x - M(X)\right)^2 f(x) dx$
Середньоквадратичне відхилення:	
$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$	

Властивості випадкових похибок описують певною функцією розподілу $F(\Delta x)$, під якою розуміють зв'язок між абсолютною похибкою Δx та відносною частотою появи похибок $\frac{n_{\Delta x}}{n}$, де n — повна кількість вимірювань, $n_{\Delta x}$ — число вимірювань з похибкою Δx:

$$F(\Delta x) = \frac{n_{\Delta x}}{n}. \qquad (3.3)$$

Для дискретної випадкової величини X закон розподілу записують у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — можливі значення фізичної величини X; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — відповідні ймовірності для цих значень, тобто $p_i = P(x_i)$ — ймовірність того, що випадкова величина X при випробуванні набуде значення x_i.

Похідну функції розподілу називають *функцією щільності розподілу ймовірностей*:

$$f(\Delta x) = F'(\Delta x). \qquad (3.4)$$

За нескінченного ряду вимірювань використовують *інтегральну функцію розподілу*. Інтегральною функцією розподілу (надалі функцією розподілу) випадкової величини x називають ймовірність того, що випадкова величина x набуває значення, меншого за деяке значення $\tilde{x}$:

$$f(x) = P(x < \tilde{x}). \qquad (3.5)$$

Найчастіше як функцію розподілу похибок використовують нормальний закон розподілу Ґауса:

$$P(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (3.6)$$

де σ^2 — дисперсія генеральної сукупності, Δx — відхилення від істинного значення.

На рис. 3.2 зображено нормальну функцію розподілу для двох значень σ. Її форма відповідає властивостям випадкових похибок: симетричність відображає той факт, що за великої кількості вимірювань рівноймовірними є похибки, однакові за величиною, але протилежні за знаком; монотонність та зменшення щільності ймовірності зі збільшенням відхилення від істинного значення вказує на те, що поява великих похибок малоймовірна.

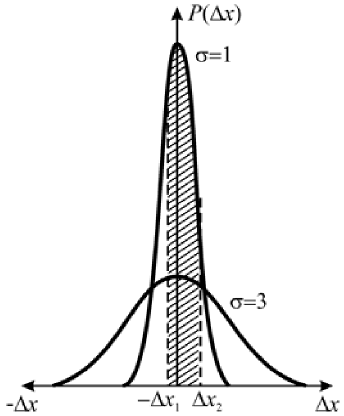

Рис. 3.2.

Для пояснення змісту функції Ґауса виділимо на осі похибок інтервал $[-\Delta x_1, \Delta x_2]$. Площа фігури, обмеженої кривою Ґауса, віссю абсцис, прямими $\Delta x = -\Delta x_1$ та $\Delta x = \Delta x_2$ (заштрихована ділянка на рис. 3.2) чисельно дорівнює ймовірності, з якою довільне значення повторного вимірювання попадає в інтервал $[-\Delta x_1, \Delta x_2]$. Зрозуміло, що вся площа під кривою Гауса дорівнює одиниці.

Для оцінки точності вимірювання використовують дві характеристики: *надійний інтервал* та *граничну* (надійну) похибку Δ. Надійний інтервал — це інтервал, що містить істинне значення x фізичної величини з заданою ймовірність γ, яку називають надійною ймовірністю, або коефіцієнтом надійності. Отже

$$P(\overline{x} - \Delta < x < \overline{x} + \Delta) = \gamma\,, \tag{3.7}$$

де гранична похибка Δ дорівнює половині надійного інтервалу і

$$\Delta = t(\gamma, m)\sigma_{в} \tag{3.8}$$

де $\sigma_в$ — оцінка середньоквадратичного відхилення, $t(\gamma, m)$ — нормований коефіцієнт Стьюдента*, m — кількість ступенів вільності, яке дорівнює $n-1$ обробки групи з n вимірювань.

Тут для оцінки надійного інтервалу використовують закон Стьюдента $f(x)$, який справедливий за умови малої кількості повторних вимірювань $2 \le n \le 30$.

Якщо відомі стандартні випадкові величини x_0, ..., x_n, то розподілом Стьюдента з n ступенями вільності називають розподіл такої випадкової величини:

$$t_n = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}\,.$$

* Отримав свою назву від псевдоніму *Student*, яким англійський вчений В. Госсет підписував свої роботи зі статистики.

Густина ймовірності цього розподілу є симетричною функцією:

$$p_{t_n}(z) = \frac{\Gamma\left((n+1)/2\right)}{\Gamma\left(n+2\right)\sqrt{\pi n}}\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-(n+1)/2},$$

де $z = \left(x - \overline{x}\right)/S_x$ (див. (3.16)); $\Gamma(x)$ — гама-функція (Γ-функція), одна з найважливіших спеціальних функцій, яка узагальнює поняття факторіала. Так, для цілих позитивних n вона дорівнює $\Gamma(n) = (n-1)! = 1{\cdot}2...(n-1)$. Вперше введена Л. Ейлером у 1729 році, своїм позначенням зобов'язана Лежандру.

Площа під кривою $p_{t_n}(z)$ дорівнює одиниці, а обчислений інтеграл дає значення коефіцієнта надійності залежно від ступенів вільності n. На рис. 3.3 зображено вигляд кривої густини ймовірності розподілу Стьюдента для випадків $n=2$ (пунктирна крива) та $n=\infty$ (суцільна крива). Оскільки при $n=\infty$ розподіл Стьюдента переходить в розподіл Ґауса, то на рис. 3.3 для порівняння зображено два випадки — для малої та великої кількості вимірювань. Видно, що розподіл Стьюдента вимагає більшого порівняно з розподілом Ґауса надійного інтервалу.

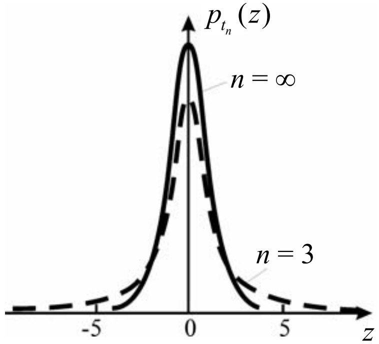

Рис. 3.3.

Пояснимо це. Нехай проведено експерименти з підкиданням монети. Ймовірність того, що випаде той чи інший бік однакова, тобто дорівнює 0,5. Однак ймовірності, отримані на основі експериментів з підкидання монети, близькі до цих значень тільки за умови великої кількості вимірювань. Якщо проведено малу кількість вимірювань, наприклад, 3, то ймовірності того, що монета впаде тим чи іншим боком, можуть становити 0,33 та 0,77, відповідно. Отже, розкид значень ймовірностей за малої кількості вимірювань більший, ніж за великої, що обумовлює зростання надійного інтервалу.

Характерним для розподілу Стьюдента є його незалежність від дійсного значення і дисперсії генеральної сукупності та можливість оцінки похибки із заданою надійною ймовірністю за умови невеликої кількості вимірювань.

Очевидно, що з урахуванням властивостей випадкових похибок найближчим до істинного значення x фізичної величини, тобто його дійсним значенням, буде середньоарифметичне значення $\overline{x}$ всіх випадкових величин, що утворюють повну групу:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (3.9)$$

Нехай у результаті експерименту для значень $x_1, x_2, \ldots, x_k$ дістали відповідно *частоти* $n_1, n_2, \ldots, n_k$. так, що $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Врахувавши означення $M(x)$ для дискретних випадкових величин, отримаємо:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \ldots + x_n \frac{n_k}{n} = \\ = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n} \approx \overline{x} . \qquad (3.10)$$

Тобто, математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини. Його одиниці вимірювання співпадають з одиницями вимірювання випадкової величини.

Дисперсія характеризує ступінь розсіяння випадкової величини навколо математичного сподівання. Однак її одиниці вимірювання піднесені до квадрату порівняно з одиницями вимірювання випадкової величини. Через це вводять середнє квадратичне відхилення, зміст якого такий же, як у дисперсії, а розмірність відповідає випадковій величині.

Тоді, з урахування формул (2.2) та (3.10), вираз для істинного значення величини X можна записати так:

$$x = \overline{x} \pm \sigma . \qquad (3.11)$$

Зазначимо, що множину N об’єктів однакової природи, яка перевірена на певну кількісну та якісну ознаку, називають *генеральною сукупністю*. Така множина утворює повну групу і для неї можуть бути розраховані математичне сподівання, дисперсія та середньоквадратичне відхилення. Однак, під час експерименту реалізувати

вимірювання всіх випадкових фізичних величин, які утворюють повну групу, важко і, зазвичай, економічно не виправдано.

Тому для практичних вимірювань використовують *вибіркову сукупністю* (*вибірку*) — підмножину n генеральної сукупності N. Елементи вибірки x_i називають *варіантами*. Вибіркова сукупність існує об’єктивно, оскільки до неї ставиться вимога правильно відображати пропорції генеральної сукупності, тобто бути репрезентативною. Головними її параметрами є n і N.

Оцінкою математичного сподівання $M(X)$ генеральної сукупності є вибіркове середнє:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i . \qquad (3.12)$$

Під час виконання лабораторних робіт всі частоти n_i дорівнюють одиниці за умови унікальних значень x_i повторних вимірювань фізичної величини. Тому

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (3.13)$$

Звернімо увагу на визначення абсолютної похибки Δx, яке ми подали в (2.1). Воно точне, але на практиці не може бути застосоване, бо в ньому є величина, яку виміряти неможливо — істинне значення x фізичної величини. Тому під час розрахунку абсолютної похибки Δx_i i-того повторного вимірювання замість істинного значення x беруть найближче до нього значення, яке можна знайти — вибіркове середнє $\overline{x}$ (дійсне), і від нього віднімають значення i-того повторного вимірювання:

$$\Delta x_i = \left| \overline{x} - x_i \right| . \qquad (3.14)$$

Оцінкою генеральної дисперсії $D(X)$ є вибіркова дисперсія:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \left(\overline{x} - x_i \right)^2 . \qquad (3.15)$$

Однак оцінка вибіркової дисперсії є зміщеною, оскільки при обчисленні $D_{\text{в}}$ на вибірку накладено зв’язок (3.13), що змінює кількість незалежних значень на одиницю. Для усунення зміщення вводять *виправлену дисперсію*:

$$S_{\overline{x}} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}-x_i\right)^2 \qquad (3.16)$$

та відповідне *виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення*:

$$\sigma_{в} = \sqrt{S_{\overline{x}}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}-x_i\right)^2}\,. \qquad (3.17)$$

За таких умов формула для визначення відносної похибки має такий вигляд:

$$\delta x = \frac{\sigma}{\overline{x}}\cdot 100\%\,. \qquad (3.18)$$

Кінцевий результат можна записати так:

$$x = \overline{x} \pm \sigma\,. \qquad (3.19)$$

3.4. Обчислення похибок під час прямих вимірювань

Під час прямих вимірювань значення x фізичної величини X знаходять безпосередньо з експерименту. Нашою метою буде оцінка околу — надійного інтервалу, в якому із заданою надійною ймовірністю P міститься істинне значення x вимірюваної фізичної величини X.

Повна похибка вимірювання складається з систематичної та випадкової. Оскільки з теорії ймовірностей слідує (див., наприклад, (3.6)), що додають не самі похибки, а їхні квадрати, то:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{сист}\right)^2 + \left(\Delta x_{вип}\right)^2}\,. \qquad (3.20)$$

Вважатимемо, що систематичні похибки усунуто, тобто $\Delta x = \Delta x_{вип}$.

Випадкова похибка вимірювання $\Delta x_{вип}$ має три складові: *випадкову похибку* $\Delta x_{в}$, *похибку приладу* $\Delta x_{п}$ та *похибку заокруглення* $\Delta x_{з}$. Отже, аналогічно до (3.20) за умови, що $\Delta x_{сист} = 0$, сумарна похибка Δx дорівнює:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta_{в} x\right)^2 + \left(\Delta_{п} x\right)^2 + \left(\Delta_{з} x\right)^2}\,. \qquad (3.21)$$

Перед обчисленням похибок задають надійну ймовірність P, з якою потрібно визначити межі надійного інтервалу.

Звернімо увагу на важливу особливість формул (3.20) та (3.21). Якщо одна з похибок удвічі більша за іншу (наприклад $\Delta x_{вип} = 2\Delta x_{сист}$), то отримаємо:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\Delta x_{вип}\right)^2 + \left(\Delta x_{вип}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}\Delta x_{вип} \approx 1{,}12\Delta x_{вип}\,. \qquad (3.22)$$

Тому в (3.22) з достатньою точністю можна прийняти $\Delta x = \Delta x_{вип}$. Отже, менша похибка майже не впливає на результат, якщо вона принаймні удвічі менша від більшої. Цей висновок називають *правилом* «*трьох сигм*», (σ — середнє квадратичне відхилення). Звучить воно так: *якщо одне або декілька середньоквадратичних відхилень величин принаймні втричі менші за решту, то такими відхиленнями можна знехтувати* (прирівняти до нуля).

Правило «*трьох сигм*» дає змогу відслідковувати промахи. Якщо похибка i-того вимірювання є більшою за максимально можливу похибку $\Delta x_{max} = 3\sigma_{в}$, то його вважають промахом і відкидають.

Під час виконання лабораторних робіт та проведення багатьох наукових вимірювань кількість повторних вимірювань незначна ($n < 30$). За таких умов випадкову похибку визначають на підставі закону розподілу випадкових похибок Стьюдента за формулою:

$$\Delta_{в} x = t_{Pm}\sigma_{в}\,. \qquad (3.23)$$

Для цього розраховують $\sigma_{в}$ за (3.17). Коефіцієнт Стьюдента t_{Pm} визначають з табл. 3.2 за вибраною надійною ймовірністю P та кількістю повторних вимірювань $m = n - 1$. Знайдені значення $\sigma_{в}$, t_{Pm} підставляють у формулу (3.23).

Похибку, зумовлену рівнем недосконалості приладу, називають *похибкою приладу* і визначають за допомогою його класу точності. *Клас точності приладу k* ґрунтується на понятті *відносної зведеної похибки* $\delta x_{зв}$. Це похибка, яка чисельно дорівнює відношенню граничної абсолютної похибки $\Delta x_{гр}$ вимірювання до граничного значення приладу $x_{гр}$ і виражена у відсотках:

$$k = \delta x_{зв} = \frac{\Delta x_{гр}}{x_{гр}} \cdot 100\%, \qquad (3.24)$$

де граничне значення приладу $x_{гр}$ — це максимальне значення, до якого може вимірювати прилад у даному діапазоні; гранична похибка приладу $\Delta x_{гр}$ — максимально допустима похибка, яку дає прилад під час вимірювань.

Граничне значення приладу можна визначити через клас точності k приладу:

$$x_{гр} = \frac{k \Delta x_{гр}}{100\%}. \qquad (3.25)$$

Таблиця 3.2.

Коефіцієнти Стьюдента t_{Pm}

m	Надійна ймовірність P								
	0,1	**0,2**	**0,4**	**0,6**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
2	0,16	0,33	0,73	1,38	3,08	6,31	12,70	31,80	63,70
3	0,14	0,29	0,62	1,06	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
4	0,14	0,28	0,58	0,98	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
5	0,13	0,27	0,57	0,94	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
6	0,13	0,27	0,56	0,92	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03
7	0,13	0,27	0,55	0,90	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
8	0,13	0,26	0,54	0,90	1,42	1,89	2,36	3,00	3,50
9	0,13	0,26	0,54	0,90	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
10	0,13	0,26	0,54	0,88	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
12	0,13	0,26	0,54	0,87	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
14	0,13	0,26	0,54	0,87	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
16	0,13	0,26	0,54	0,87	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
18	0,13	0,26	0,53	0,86	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90
20	0,13	0,26	0,53	0,86	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
25	0,13	0,26	0,53	0,86	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80

Необхідність зведеної похибки пояснюється тим, що навіть при незмінності абсолютної похибки на даному діапазоні приладу відносна похибка в міру зменшення значень вимірюваної величини не залишається сталою, а зростає.

Це яскраво проявляється під час вимірювань на багатодіапазонних приладах. Найчастіше багатодіапазонними приладами є електровимірювальні прилади.

Точність електровимірювальних приладів є їх головною характеристикою і лежить в основі поділу приладів на класи. Відповідно до державного стандарту електровимірювальні прилади поділяються на вісім класів: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Чим вищим є клас, до якого належить прилад, тим менша його точність. У стрілкових приладів клас точності вказано на лицевій панелі, цифрових — у технічному паспорті.

Отже, маючи прилад, експериментатор знає дві величини — клас точності k приладу (відносну зведену похибку $\delta x_{зв}$) та діапазон ($x_{гр}$), у якому вимірює прилад. Тоді за формулою (3.24) абсолютна похибка дорівнює:

$$\Delta x_{гр} = \frac{k x_{гр}}{100}. \qquad (3.26)$$

Приклад. Обрахуємо граничну похибку вимірювання приладу на різних діапазонах. Нехай маємо багатодіапазонний прилад для вимірювання опору резисторів — універсальний вольтметр і визначаємо ним опір резистора R = 500 Ом у діапазонах:

діапазон I — 0÷1000 Ом;

діапазон II — 0÷10000 Ом;

діапазон III — 0÷100000 Ом.

Тоді для діапазону I:

$$\Delta R^{\mathrm{I}}_{гр} = \frac{k R^{\mathrm{I}}_{гр}}{100} = \frac{1{,}0 \cdot 1000}{100} = 10\,\text{Ом}, \quad \delta R^{\mathrm{I}}_{гр} = \frac{\Delta R^{\mathrm{I}}_{гр}}{R^{\mathrm{I}}} \cdot 100\% = \frac{10}{500} \cdot 100\% = 2\%;$$

для діапазону II:

$$\Delta R^{\mathrm{II}}_{гр} = \frac{1{,}0 \cdot 10000}{100} = 100\,\text{Ом}, \qquad \delta R^{\mathrm{II}}_{гр} = \frac{100}{500} \cdot 100\% = 20\%;$$

для діапазону III:

$$\Delta R_{\text{гр}}^{\text{III}} = \frac{1{,}0 \cdot 100000}{100} = 1000\,\text{Ом}, \qquad \delta R_{\text{гр}}^{\text{III}} = \frac{1000}{500} \cdot 100\% = 200\%.$$

Вимірювання однієї фізичної величини проводили одним і тим же методом на одному і тому ж приладі. Однак якість вимірювань на різних діапазонах суттєво різна. Задовільним можна вважати вимірювання тільки на першому діапазоні. На третьому діапазоні похибка в 200% вказує на те, що похибка вимірювання вдвічі більша від самої фізичної величини. Отже, можна сформулювати загальне правило для вимірювань на багатодіапазонних приладах: *вимірювати фізичну величину слід на мінімально можливому діапазоні*.

Оцінюючи *випадкову похибку приладу*, враховують, що вона випадково розподілена у межах інтервалу значень, межі якого визначає гранична похибка приладу. Тому для заданої надійної ймовірності P похибку приладу обчислюють так:

$$\Delta_{\text{пр}} x = t_P \frac{\Delta x_{\text{гр}}}{3} = \frac{1}{300} t_P k x_{\text{гр}}, \tag{3.27}$$

де t_P — коефіцієнт, який визначають за надійною ймовірністю P (табл. 3.3).

Таблиця 3.3.

Надійна імовірність P для надійного інтервалу, вираженого в частках середнього квадратичного відхилення

t_P	P	t_P	P	t_P	P
0,1	0,07966	1,6	0,89040	2,8	0,99489
0,5	0,38292	2,0	0,95450	3,0	0,99730
0,7	0,51607	2,2	0,97219	3,5	0,99953
1,0	0,68269	2,4	0,98360	4,0	0,99994
1,3	0,80640	2,6	0,99068	4,5	0,99999

У випадку, коли клас точності приладу невідомий, приймають, що гранична похибка дорівнює половині ціни поділки шкали приладу: $\Delta x_{\text{гр}} = 0{,}5$ ціни поділки.

3.5. Похибка заокруглення

Під час опрацювання результатів експерименту часто доводиться заокруглювати числові значення обчислень та вимірювань. Операція заокруглення дає свій внесок у сумарну похибку і його слід враховувати.

Коли відліки показів приладу заокруглюють до цілих значень або часток поділок (лінійка, мікрометр, електровимірювальний прилад тощо), а також при користуванні ноніусом або цифровими приладами, виникає випадкова похибка заокруглення, яка має рівномірний розподіл. За відсутності систематичних похибок максимальна похибка не перевищує $h/2$, де h — інтервал заокруглення. Інтервал заокруглення h може дорівнювати ціні поділки приладу, якщо відлік беруть з точністю до цих поділок, або половині ціни поділки, якщо відлік заокруглюють до половини ціни поділки.

Похибкою заокруглення називають величину, яку обчислюють за формулою

$$\Delta x_{\text{з}} = P \frac{h}{2}, \tag{3.28}$$

де P — задана надійна ймовірність.

Маючи всі три складові обчислюють загальну похибку Δx вимірювання за (3.21). На її основі за (3.18) визначають відносну похибку, тобто оцінюють якість проведених вимірювань фізичної величини X:

$$\delta X = \frac{\Delta X}{\overline{X}} \cdot 100\%. \tag{3.29}$$

Зауважимо, що відповідно до правила «трьох сигм» під час обчислення сумарної похибки можна нехтувати будь-якою з її складових, якщо її значення утричі менше за інші.

Коли під час вимірювання проводять лише одне спостереження (наприклад, вимірювання температури, зважування та ін.), випадкова похибка вимірювання не виникає, і сумарну похибку оцінюють лише за допомогою похибок приладу та заокруглення:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta_{\text{пр}} x\right)^2 + \left(\Delta_{\text{з}} x\right)^2}. \tag{3.30}$$

Одноразовим спостереженням обмежуються й тоді, коли три-чотири попередні повторні спостереження дають один і той же результат. Це можливо, коли випадкова похибка є меншою за поріг чутливості приладу.

3.6. Обчислення абсолютних і відносних похибок при непрямих вимірюваннях

У багатьох випадках значення x фізичної величини X знаходять непрямим вимірюванням, тобто шляхом розрахунків за результатами прямих вимірювань інших фізичних величин a, b, c, … Це означає, що непряме вимірювання x є функцією величин, виміряних прямо:

$$x = f(a, b, c, \ldots). \tag{3.31}$$

Наприклад, потужність постійного струму обчислюють як добуток $P = IU$, де величини I та U вимірюють амперметром та вольтметром. Оцінити точність величин для прямих вимірювань ми вміємо. Нехай результат вимірювання цих величин записано стандартним чином:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a, \quad b = \bar{b} \pm \Delta b, \quad c = \bar{c} \pm \Delta c. \tag{3.32}$$

Невідому величину x (результат непрямого вимірювання) шукатимемо у стандартному вигляді:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \tag{3.33}$$

де $\bar{x}$ — середнє значення x, яке знаходять як функцію величин a, b, c, … :

$$\bar{x} = f\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots\right), \tag{3.34}$$

а Δx — абсолютна похибка, яку виражають через величини $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, … та їх похибки Δa, Δb, Δc, … :

$$\Delta x = \varphi\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots, \Delta a, \Delta b, \Delta c, \ldots\right). \tag{3.35}$$

Розглянемо основні математичні операції, що можуть зустрічатися в функції багатьох змінних (3.31).

Нехай шукана величина дорівнює сумі та різниці трьох величин, що визначаються прямим вимірюванням:

$$x = a + b - c. \tag{3.36}$$

Тоді $x = a + b - c = \underbrace{\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}}_{\bar{x}} \pm \underbrace{\left(\Delta a + \Delta b + \Delta c\right)}_{\Delta x}$. Знак «–» перед Δc змінено на «+», оскільки нас завжди цікавить сумарна максимальна похибка. *Похибки завжди додаються*.

Отже, $\Delta x = \Delta a + \Delta b + \Delta c$. Це загальне правило: *похибка суми чи різниці дорівнює сумі абсолютних похибок доданків*.

Знайдемо відносну похибку *суми*:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\,\% = \frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}} \cdot 100\%. \tag{3.37}$$

Виведемо формулу обчислення похибки добутку:

$$x = ab = \left(\bar{a} \pm \Delta a\right)\left(\bar{b} \pm \Delta b\right) = \underbrace{\bar{a}\bar{b}}_{\bar{x}} \pm \underbrace{\left(\bar{a}\Delta b + \bar{b}\Delta a\right) \pm \Delta a \Delta b}_{\Delta x}. \tag{3.38}$$

Тут окремо виділено доданок $\Delta a \Delta b$. Оскільки $\Delta a \ll \bar{a}$ і $\Delta b \ll \bar{b}$, то величина $\Delta a\, \Delta b$ як мінімум на порядок менша за $\bar{a}\Delta b + \Delta a \bar{b}$ і на два порядки за дійсне значення $\bar{a}\bar{b}$. Тому доданком $\Delta a\, \Delta b$ нехтують і абсолютна похибка добутку дорівнює:

$$\Delta x = \bar{a}\Delta b + \bar{b}\Delta a. \tag{3.39}$$

Знайдемо відносну похибку добутку:

$$\delta x = \frac{\bar{a}\Delta b + \Delta a \bar{b}}{\bar{a} \cdot \bar{b}} \cdot 100\% = \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right) \cdot 100\% = \delta a + \delta b. \tag{3.40}$$

З останньої рівності випливає правило: *відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок множників*. Це правило справедливе за довільної кількості множників.

При виведенні формул слід спочатку шукати абсолютну похибку, якщо більше є операцій додавання чи віднімання, і відносну, якщо більше є операцій множення чи ділення.

Нехай нам потрібно знайти похибку для функції $x = a^n$, де n належить до множини натуральних чисел. Оскільки $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, то спочатку зручніше шукати відносну похибку:

$$\delta x = \delta a^n = \delta\left(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}\right) = \underbrace{\delta a + \delta a + \ldots + \delta a}_{n} = n\delta a. \tag{3.41}$$

З відносної похибки знайдемо абсолютну:

$$\delta x = n\delta a \Rightarrow \frac{\Delta x}{\overline{x}}\cdot 100\% = n\frac{\Delta a}{\overline{a}} \Rightarrow \Delta x = n\overline{a}^{n-1}\Delta a\,. \qquad (3.42)$$

За допомогою описаних методів отримують формули для обчислення похибок (табл. 3.4).

Таблиця 3.4.

Формули для обчислення похибок

№ з.п.	Функціональна залежність	Похибка	
		Середня абсолютна	Середня відносна
1	$x = a + b - c$	$\pm\left(\Delta a + \Delta b + \Delta c\right)$	$\frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}}\cdot 100\%$
2	$x = a\,b$	$\pm\left(\overline{a}\ \Delta b + \overline{b}\ \Delta a\right)$	$\delta a + \delta b$
3	$x = \frac{a}{b}$	$\pm\left(\frac{\overline{a}\ \Delta b + \overline{b}\ \Delta a}{\overline{b}^2}\right)$	$\delta a + \delta b$
4	$x = a^n$	$\pm\left(n\overline{a}^{n-1}\Delta a\right)$	$n\delta a$
5	$x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$	$\pm\left(\frac{1}{n}\overline{a}^{(1/n)-1}\Delta a\right)$	$\frac{1}{n}\delta a$
6	$x = \sin\alpha$	$\pm\cos\overline{\alpha}\ \Delta\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\overline{\alpha}\ \Delta\alpha\cdot 100\%$
7	$x = \mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\frac{\Delta\alpha}{\cos^2\overline{\alpha}}$	$\frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\overline{\alpha}}\cdot 100\%$
8	$x = \mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\frac{\Delta\alpha}{\sin^2\overline{\alpha}}$	$\frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\overline{\alpha}}\cdot 100\%$
9	$x = \cos\alpha$	$\pm\sin\overline{\alpha}\ \Delta\alpha$	$\mathrm{tg}\,\overline{\alpha}\ \Delta\alpha\cdot 100\%$

Зазначимо, що для виведення формул обчислення похибок за різних видів функціональної залежності (3.31) зручно використовувати метод диференціального числення. Нагадаємо, що диференціал — це безмежно малий приріст функції $y = f(x)$, лінійний щодо приросту її

аргумента. Його обчислюють як добуток похідної функції на безмежно малий приріст її аргумента: $dy = y'\cdot dx$. Для скінчених, але малих значень Δx, приріст функції приблизно дорівнює добутку похідної функції на приріст її аргумента:

$$\Delta y \cong \pm y'\cdot\Delta x = \pm\frac{dy}{dx}\Delta x\,. \qquad (3.43)$$

Аналогічну методику використовують для знаходження похибок функції багатьох змінних.

Нехай ми визначаємо точність непрямого вимірювання $x = f(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, де аргументи якого $a_1 \ldots a_N$ — величини, отримані з прямих вимірювань. Повний диференціал від функції багатьох змінних $x = f(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ визначають за стандартною формулою:

$$dx = df(a_1,\ldots a_N) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial x}{\partial a_i}da_i\,.$$

Тоді, переходячи від нескінченних малих приростів до ($dx \to \Delta x$), абсолютну похибку Δx обчислюють за формулою:

$$\Delta x = \pm\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial x}{\partial a_i}\Delta a_i\right|, \qquad (3.44)$$

а середньоквадратичну:

$$\sigma = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial x}{\partial a_i}\Delta a_i\right)^2}\,, \qquad (3.45)$$

за умови, що всі Δa_i малі, мають однакову надійну ймовірність P і всі значення частинних похідних обчислюються при середніх значеннях відповідних величин.

Знайдемо відносну похибку δx:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\overline{x}} = \frac{1}{\overline{x}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial x}{\partial a_i}\Delta a_i\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial a_i}\Delta a_i\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \ln x}{\partial a_i}\Delta a_i\right)^2}\,. \qquad (3.46)$$

Отже, для знаходження δx потрібно функцію $x = f(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ прологарифмувати, після чого знайти частинні похідні кожного з аргументів, розрахувати диференціал функції і перейти від нескінченно малих приростів (диференціалів) до абсолютних похибок.

Метод обчислення за нескінченно малими приростами є більш універсальним, ніж за скінченими.

Наприклад, ми вже розглядали функцію $x = a^n$. Знайдемо вирази для похибок для цієї функції через диференціал. Для відносної похибки:

$$d\ln x = d(n\ln a) \Rightarrow \frac{dx}{x} = n\frac{da}{a} \Rightarrow \frac{\Delta x}{x} = n\frac{\Delta a}{a} \Rightarrow \delta x = n\delta a. \quad (3.47)$$

Абсолютну похибку знайдемо з відносної:

$$\Delta x = nx\frac{\Delta a}{a} = na^n\frac{\Delta a}{a} = na^{n-1}\Delta a. \quad (3.48)$$

Ми отримали формули, ідентичні до (3.41) і (3.42). Однак під час їхнього виведення ми не накладали ніяких обмежень на n — воно тепер належить не множині натуральних, а дійсних чисел.

4. Правила заокруглення в наближених обчисленнях

У результаті вимірювань отримують наближені числа.

Природною формою запису числа називають загальновживаний запис дійсних чисел — наприклад: 25; 25,003; 0,0025.

Нормалізованою формою запису числа називають запис числа у вигляді добутку правильного десяткового дробу (з відмінною від нуля першою цифрою перед комою) степеневої функції за основою десять. Дробову частину нормалізованого числа, взяту з відповідним знаком, називають *мантисою*, показник степеня зі знаком «–» *порядком* числа. Наприклад: $\underbrace{2,025}_{\text{мантиса}} \cdot 10^{\overset{-5}{\text{порядок}}}$, $-3,25 \cdot 10^{25}$.

Вважають, що i-та цифра наближеного числа *правильна*, якщо абсолютна похибка цього числа не перевищує половини i-го розряду. Всі цифри, що стоять лівіше i-тої, також правильні. Всі правильні цифри, починаючи з першої ліворуч, відмінної від нуля та першу сумнівну цифру, називають *значущими цифрами*. Тобто значущі цифри в

наближеному числі — це всі правильні цифри та перша сумнівна окрім нулів ліворуч. Решту цифр наближеного числа називають *незначущими*. Наприклад, у числах 250; 2,50; 0,0250 три значущі цифри. Числа 2,5 та 2,200 різні, у першому — дві значущі цифри, у другому — чотири. Друге знайдено з більшою точністю. У числі $2,5 \cdot 10^{-3}$ дві цифри значущі, три — незначущі. Незначущі цифри у кінцевому результаті відкидають.

В математичних операціях з наближеними числами слід дотримуватись таких правил:

1. Перед виконанням математичних операцій всі наближені числа округлюють до розряду найменш точного числа, залишаючи одну «запасну» (сумнівну) цифру.

   Приклад. Нехай ми маємо ряд наближених чисел: 2,1; 2,52; 25,254. Найменш точне число 2,1. Тому всі решта числа округлюємо до сотих. Отже, число 2,52 не потрібно округлювати, число $25,254 \approx 25,25$.
2. Під час додавання або віднімання кінцевий результат округлюють до розряду найменш точного числа:
   $$2,2 + 2,52 + 25,254 \approx 2,2 + 2,52 + 25,25 = 29,77 \approx 29,8.$$
3. Під час множення та ділення у кінцевому результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх має множник з найменшою кількістю:
   $$2,387 \cdot 2,5 \cdot 3,58 \approx 2,39 \cdot 2,5 \cdot 3,58 = 21,3905 \approx 21.$$
4. Під час піднесення до степеня, добування кореня, знаходженні логарифма наближеного числа у кінцевому результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх має це наближене число:
   $$2,345^3 \approx 12,895213 \approx 12,90; \quad \sqrt{6,53} \approx 2,5539 \approx 2,55;$$
   $$\ln 2,5 \approx 0,9163 \approx 0,92.$$

Зазначимо, що обчислюючи середнє значення вимірюваної величини, сумнівну цифру також враховують. Під час обчислень похибок проміжні результати завжди заокруглюють у бік збільшення. Наприклад: $(\Delta d)^2 = (0,12)^2 = 0,0144 \approx 0,015$.

Остаточний результат записують числом, яке містить лише правильні цифри. За вимогами стандартів сумарну похибку записують числом з кількістю значущих цифр не більше двох.

5. Приклади розрахунку похибок під час вимірювань фізичної величини

Приклад 1. *Обчислення похибок прямих вимірювань.*

Нехай проведено десять повторних вимірювань опору резистора R ={820,25; 820,35; 820,20; 820,23; 830,25; 820,30; 820,28; 820,22; 820,30; 816,50} Ом на цифровому універсальному вольтметрі з класом точності 0,01 у діапазоні 0 ÷ 2000 Ом.

За відомими формулами шукаємо:

1) середнє арифметичне $\overline{R}$ за (3.13): $\overline{R} = \dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{8} R_i \cong 820{,}89$;

2) похибки повторних вимірювань ΔR_i за (3.14) та ΔR_i^2:

$$\Delta R_i = \left|\overline{R} - R_i\right| \text{ та } \Delta R_i^2 = \left(\overline{R} - R_i\right)^2, \text{ де } i = 1, 2, \ldots, 10;$$

Результати вимірювань та обчислень заносимо у табл. 5.1.

Таблиця 5.1.

№ з.п.	R, Ом	ΔR, Ом	ΔR^2, Ом^2
1	820,25	0,608	0,370
2	820,35	0,508	0,258
3	820,20	0,658	0,433
4	820,23	0,628	0,394
5	830,25	9,392	88,21
6	820,3	0,558	0,311
7	820,28	0,578	0,334
8	820,22	0,638	0,407
9	820,30	0,558	0,311
10	816,50	4,358	18,99
сер.	820,89	1,848	1,222

Видно, що абсолютні похибки та їхні квадрати для 5-го та 10-го повторних вимірювань відрізняються на порядок. Це промахи, які ми відкидаємо. Зазначимо, що у більшості випадків такий аналіз можна робити на підставі повторних вимірювань без тільки що проведених розрахунків похибок. Тільки коли є сумніви щодо того, чи є конкретне повторне вимірювання промахом, чи ні, слід проводити зроблені вище розрахунки.

Отже, для подальшого опрацювання залишилось 8 повторних вимінювань.

Розраховуємо:

1) середнє арифметичне $\overline{R}$ за (3.13): $\overline{R} = \dfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} R_i \cong 820{,}37$ Ом;

2) похибки повторних вимірювань ΔR_i за (3.14) та ΔR_i^2:

$$\Delta R_i = \left|\overline{R} - R_i\right|, \text{ та } \Delta R_i^2 = \left(\overline{R} - R_i\right)^2, \text{ де } i = 1, 2, \ldots, 8;$$

3) випадкову похибку вимірювання за (3.23): З табл. 3.2 знайдемо коефіцієнт Стьюдента для 8 вимірювань і довірчої ймовірності 0,95 $t_{0,95;7} = 2{,}45$; розрахуємо за (3.17) виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{\frac{1}{8\cdot 7}\sum_{i=1}^{8}\left(\overline{R} - R_i\right)^2} \approx 0{,}18 \text{ Ом};$$

та знайдемо випадкову похибку:

$$\Delta_{\text{в}} R = 2{,}45 \cdot 0{,}18 = 0{,}441 \approx 0{,}42 \text{ Ом}.$$

(Результати вимірювань та обчислень заносимо у табл. 5.2.)

4) похибку приладу за (3.27): $\Delta_{\text{пр}} R = \dfrac{1}{300} t_P k R_{\text{гр}}$. Для надійної ймовірності P = 0,95 з табл. 3.3 знайдемо $t_{0,95}$ =2,0. Враховуючи, що за умовою $R_{\text{гр}}$ = 2000 Ом, а клас точності k = 0,01, отримаємо:

$$\Delta_{\text{пр}} R = \frac{1}{300} 2{,}0 \cdot 2000 \cdot 0{,}01 \approx 0{,}14 \text{ Ом};$$

5) похибку заокруглення за (3.28): $\Delta R_з = P\dfrac{h}{2}$. Для цього знайдемо інтервал заокруглення h як половину останнього розряду виміряної величини — 0,005. Отже:

$$\Delta R_з = 0{,}95 \cdot \frac{0{,}005}{2} \approx 0{,}002 \text{ Ом};$$

6) загальну абсолютну похибку (3.21):

$$\Delta R = \sqrt{\left(\Delta_в R\right)^2 + \left(\Delta_п R\right)^2 + \left(\Delta_з R\right)^2} = \sqrt{0{,}42^2 + 0{,}14^2 + 0{,}002^2} \approx 0{,}44 \text{Ом}.$$

(За правилом «трьох сигм» похибками приладу та заокруглення нехтуємо.)

7) відносну похибку за (3.29):

$$\delta R = \frac{\Delta R}{\overline{R}} \cdot 100\% = \frac{0{,}44}{820{,}31} \cdot 100\% \approx 0{,}06\,\%.$$

Записуємо кінцевий результат:

R = (820,31 ± 0,44) Ом   при δR = 0,06 %.

Таблиця 5.2.

№ з.п.	R, Ом	ΔR, Ом	ΔR^2, Ом^2
1	820,25	0,017	0,00027
2	820,35	0,084	0,0071
3	820,2	0,067	0,0044
4	820,23	0,037	0,0014
5	820,3	0,034	0,0012
6	820,28	0,014	0,00019
7	820,22	0,047	0,0022
8	820,3	0,034	0,0012
сер.	820,31	0,042	

Зауваження. Знайдемо абсолютну та відносну похибки, виходячи з поняття середнього арифметичного без використання теорії похибок. Середнє значення нам відоме: $\overline{R} \cong 820{,}37$Ом. Знайдемо

середню арифметичну похибку: $\Delta\overline{R} = \dfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\Delta R_i \cong 0{,}042 \approx 0{,}05$Ом; та відносну: $\delta R = \dfrac{\Delta R}{\overline{R}} \cdot 100\% \cong 0{,}006 \approx 0{,}01\%$. Запишемо кінцевий результат: $R = \overline{R} \pm \Delta\overline{R} = 820{,}31 \pm 0{,}05$Ом при δR = 0,006 %.

Отже, розрахована очевидним, на перший погляд, методом абсолютна похибка за невеликої кількості вимірювань (n < 30) є меншою, ніж відповідна абсолютна похибка, розрахована з використанням теорії ймовірностей. Тому використовувати цей метод для розрахунку похибок є недоцільно, оскільки знайдений довірчий інтервал замалий. Дослідника завжди цікавить максимальний довірчий інтервал, у який з заданою ймовірністю попадає істинне значення.

Приклад 2. Розрахунок похибок фізичної величини при непрямих вимірюваннях.

Нехай потрібно знайти вираз для абсолютної та відносної похибок сили гравітаційного притягання між тілами з масами m_1 і m_2:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{(R+h)^2}. \tag{5.1}$$

Спосіб 1. Розрахунок з використанням нескінченно малих приростів (диференціалів).

Прологарифмуємо вираз:

$$\ln F = \ln G + \ln m_1 + \ln m_2 - 2\ln(R+h),$$

після чого продиференціюємо:

$$dF = \frac{dG}{G} + \frac{dm_1}{m_1} + \frac{dm_2}{m_2} - 2\frac{dR + dh}{R+h}.$$

Перейшовши від нескінченних приростів до скінченних за (3.45) знайдемо відносну похибку δF:

$$\delta F = \sqrt{\left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_1}{\overline{m}_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{\overline{m}_2}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R + \Delta h}{\overline{R} + \overline{h}}\right)^2}. \tag{5.2}$$

Під час виведення формули враховано правило, за яким похибки завжди слід додавати.

Оскільки за означенням $\delta F = \dfrac{\Delta F}{\overline{F}}$, знайдемо з відносної похибки абсолютну:

$$\Delta F = \overline{F}\sqrt{\left(\frac{\Delta G}{\overline{G}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_1}{\overline{m}_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{\overline{m}_2}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R + \Delta h}{\overline{R} + \overline{h}}\right)^2} = $$
$$= \overline{G}\frac{\overline{m}_1\overline{m}_2}{(\overline{R}+\overline{h})^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta G}{\overline{G}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_1}{\overline{m}_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{\overline{m}_2}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R + \Delta h}{\overline{R} + \overline{h}}\right)^2}. \quad (5.3)$$

Спосіб 2. Розрахунок з використанням скінченних малих приростів.

Оскільки у формулі (5.1) більше операцій множення та ділення, шукатимемо спочатку відносну похибку фізичної величини за правилом, що відносна похибка добутку чи частки дорівнює сумі відносних похибок множників:

$$\delta F = \delta G + \delta m_1 + \delta m_2 + 2\delta(R+h).$$

Врахувавши те, що додавати потрібно не самі похибки, а їхні квадрати, отримаємо вираз для відносної похибки:

$$\delta F = \sqrt{(\delta G)^2 + (\delta m_1)^2 + (\delta m_2)^2 + (2\delta(R+h))^2}. \quad (5.4)$$

З відносної похибки знайдемо абсолютну:

$$\Delta F = \overline{F}\sqrt{\left(\frac{\Delta G}{\overline{G}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_1}{\overline{m}_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{\overline{m}_2}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R + \Delta h}{\overline{R} + \overline{h}}\right)^2} = $$
$$= \overline{G}\frac{\overline{m}_1\overline{m}_2}{(\overline{R}+\overline{h})^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta G}{\overline{G}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_1}{\overline{m}_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{\overline{m}_2}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R + \Delta h}{\overline{R} + \overline{h}}\right)^2}. \quad (5.5)$$

Як і слід було очікувати, знайдені різними способами вирази (5.2) і (5.4), (5.3) і (5.5) ідентичні.

Приклад 3. Нехай експериментально дослідили залежність опору металу від температури. Температуру виміряли за допомогою термометра, клас точності якого невідомий, а ціна поділки — 1°C; опір — за допомогою універсального вольтметра з класом точності 0,01 у діапазоні 0÷2000 Ом.

Результати вимірювань зведені в табл. 5.3, в яку помістили частину розрахункових даних.

Таблиця 5.3.

№ з.п.	t,°C	T, K	R, Ом	α, K^{-1}	$(\Delta\alpha)^2$, $10^{-11}\cdot$K^{-2}
1	20	293	417,0		
2	25	298	421,8	0,002302	4,179
3	35	308	430,6	0,002174	0,2765
4	45	318	440,8	0,002283	0,2765
5	55	328	450,3	0,002282	0,09539
6	65	338	460,0	0,002292	0,1275
7	75	348	470,0	0,002311	0,06235
8	85	358	480,2	0,002332	5,377
9	95	368	490,2	0,002341	0,01046

Залежність опору провідника від температури має такий вигляд:

$$R = R_\text{п}\left(1 + \alpha\left(T - T_\text{п}\right)\right), \quad (5.6)$$

де R — опір провідника при температурі T; $R_\text{п}$ — при температурі $T_\text{п}$; α — температурний коефіцієнт опору, який потрібно знайти. Для цього визначимо його з (5.6):

$$\alpha = \frac{R - R_\text{п}}{R_\text{п}\left(T - T_\text{п}\right)}. \quad (5.7)$$

Отже, α визначають опосередковано як функцію R, $R_\text{п}$, T, $T_\text{п}$.

Розглянемо два способи розрахунку похибок для такого випадку.

Спосіб 1.

Знайдемо кінцевий результат для α аналогічно до прикладу 2.

Прологарифмуємо вираз (5.7):

$$\ln\alpha = \ln\left(R - R_\text{п}\right) - \ln R_\text{п} - \ln(T - T_\text{п}),$$

після чого його продиференціюємо:

$$\frac{d\alpha}{\alpha}=\frac{d\left(R-R_{п}\right)}{R-R_{п}}-\frac{dR_{п}}{R_{п}}-\frac{d(T-T_{п})}{T-T_{п}}.$$

Перейшовши від нескінченних приростів до скінченних за (3.45) знайдемо вираз для відносної похибки $\delta\alpha$:

$$\delta\alpha=\sqrt{\left(\frac{\Delta R+\Delta R_{п}}{\overline{R}-\overline{R}_{п}}\right)^2+\left(\frac{\Delta R_{п}}{\overline{R}_{п}}\right)^2+\left(\frac{\Delta T+\Delta T_{п}}{\overline{T}-\overline{T}_{п}}\right)^2}.$$

З відносної похибки $\delta\alpha$ знайдемо абсолютну:

$$\Delta\alpha=\overline{\alpha}\sqrt{\left(\frac{\Delta R+\Delta R_{п}}{\overline{R}-\overline{R}_{п}}\right)^2+\left(\frac{\Delta R_{п}}{\overline{R}_{п}}\right)^2+\left(\frac{\Delta T+\Delta T_{п}}{\overline{T}-\overline{T}_{п}}\right)^2}. \qquad (5.8)$$

Проведемо розрахунки. Оскільки повторних вимірювань немає, то випадкові похибки вимірювань термометром та універсальним вольтметром дорівнюють нулеві. Через те, що вимірювання проводились у одному діапазоні, то $\Delta R=\Delta R_{п}$ і $\Delta T=\Delta T_{п}$.

Задаємо надійну ймовірність $P = 0{,}95$.

Для розрахунку загальної похибки вимірювання опору вольтметром знаходимо:

1) похибку цифрового вольтметра за (3.27):

$$\Delta_{пр}R=\frac{1}{300}t_P kR_{гр}=\frac{1}{300}2{,}0\cdot 0{,}01\cdot 2000\approx 0{,}14\ \text{Ом};$$

2) похибку заокруглення за (3.4.8): $\Delta R_{з}=P\dfrac{h}{2}$. Встановимо інтервал заокруглення h як половину останнього розряду виміряної величини — 0,05 Ом. Отже:

$$\Delta R_{з}=0{,}95\cdot\frac{0{,}05}{2}\approx 0{,}03\,\text{Ом}.$$

Тоді загальна похибка:

$$\Delta R=\sqrt{\left(\Delta_{п}R\right)^2+\left(\Delta_{з}R\right)^2}=\sqrt{0{,}14^2+0{,}03^2}\approx\sqrt{0{,}13^2}\approx 0{,}14\,\text{Ом}.$$

Для розрахунку загальної похибки вимірювання температури термометром знаходимо:

1) похибку термометра за (3.27). Враховуючи, що $t_{0,95}=2{,}0$, а клас точності приладу невідомий, то:

$$\Delta_{пр}T=\frac{1}{3}t_P\cdot\Delta T_{гр}=\frac{1}{3}\cdot 2{,}0\cdot 0{,}50=0{,}34\,\text{K};$$

2) похибку заокруглення за (3.28): $\Delta T_{з}=P\dfrac{h}{2}$. Встановимо інтервал заокруглення h як половину останнього розряду виміряної величини — 0,5. Отже:

$$\Delta T_{з}=0{,}95\cdot\frac{0{,}50}{2}\approx 0{,}24\,\text{K}.$$

Тоді загальна похибка:

$$\Delta T=\sqrt{\left(\Delta_{п}T\right)^2+\left(\Delta_{з}T\right)^2}=\sqrt{0{,}34^2+0{,}24^2}\approx 0{,}42\,\text{K}.$$

За формулою (5.8) *знайдемо абсолютні похибки непрямих вимірювань.* Для цього розрахуємо:

1) дійсне (середнє арифметичне) значення α за (3.13):

$$\overline{\alpha}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\alpha_i\cong 0{,}002335\approx 0{,}00234\,\text{K}^{-1};$$

2) середню абсолютну похибку:

$$\Delta\overline{\alpha}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\Delta\alpha_i\cong 0{,}0109\cdot 10^{-4}\approx 0{,}1\cdot 10^{-4}\,\text{K}^{-1};$$

3) середню відносну похибку:

$$\delta\alpha=\delta\overline{\alpha}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\delta\alpha_i\approx 0{,}46\%.$$

Результати обчислень помістимо у табл. 5.4.

Отже, кінцевий результат обчислень та обрахунків має такий вигляд:

$$\alpha=\overline{\alpha}\pm\Delta\alpha=\left(23{,}4\pm 0{,}01\right)\cdot 10^{-4}\,\text{K}^{-1}\ \text{при}\ \delta\alpha=0{,}46\%. \qquad (5.9)$$

Таблиця 5.4.

№ з.п.	t, °C	T, K	R, Ом	α, K^{-1}	$\Delta\alpha\cdot10^{-4}$, K^{-1}	$(\Delta\alpha)^2\cdot10^{-9}$, K^{-2}	$\delta\alpha$, %
1	20	293	416,50				
2	25	298	421,37	0,002339	0,065	0,042	17,76
3	35	308	431,14	0,002344	0,017	0,0028	5,940
4	45	318	440,9	0,002344	0,017	0,0028	3,559
5	55	328	450,67	0,0023442	0,010	0,0096	2,541
6	65	338	460,43	0,002344	0,012	0,00013	1,976
7	75	348	470,20	0,002344	0,008	0,00063	1,616
8	85	358	478,00	0,002272	0,074	5,4	1,372
9	95	368	489,72	0,002344	0,011	0,0011	1,185
сер.				0,002335	0,011		4,49

Спосіб 2.

Проводимо розрахунки α за формулою (5.7) і розглядаємо їх як повторні вимірювання, розкид яких випадковий і опосередковано зумовлений всіма видами похибок величин R, $R_п$, T, $T_п$, отриманих за допомогою прямих вимірювань. Для знаходження похибок застосовуємо методику для розрахунку випадкових похибок.

Задаємо надійну ймовірність P = 0,95.

Знаходимо:

1) середнє арифметичне $\overline{\alpha}$ за (3.13):

$$\alpha = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\alpha_i \cong \quad 0{,}003341 = 3{,}35\cdot10^{-3}\ \text{K}^{-1};$$

2) похибки повторних вимірювань $\Delta\alpha_i$ за (3.14) та $\Delta\alpha_i^2$:

$$\Delta\alpha_i = \left|\overline{\alpha}-\alpha_i\right|, \text{ та } \Delta\alpha_i = \left(\overline{\alpha}-\alpha_i\right)^2, \text{ де } i = 1, 2, \ldots, 8;$$

3) випадкову похибку вимірювання за (3.23): $\Delta_в x = t_{Pm}\sigma_в$.

З табл. 3.2 знайдемо коефіцієнт Стьюдента для 8 вимірювань та довірчої ймовірності 0,95 $t_{0,95;7}$ = 2,45, розрахуємо за (3.17) виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\Delta\alpha = \sqrt{\frac{1}{8\cdot7}\sum_{i=1}^{8}\left(\overline{\alpha}-\alpha_i\right)^2} \approx 0{,}009\cdot10^{-3}\ \text{K}^{-1}.$$

Тоді випадкова похибка, яка одночасно є загальною:

$$\Delta\alpha = \Delta_в\alpha = 2{,}45\cdot0{,}009\cdot10^{-3} \approx 0{,}022\cdot10^{-3}\ \text{K}^{-1}.$$

Результати занесемо в табл. 5.5.

Таблиця 5.5.

№ з.п.	t,°C	T, K	R, Ом	$\alpha\cdot10^{-3}$, K^{-1}	$\Delta\alpha\cdot10^{-3}$, K^{-1}
1	20	293	417		
2	25	298	421,8	2,333	0,002
3	35	308	430,6	2,343	0,008
4	45	318	440,8	2,343	0,008
5	55	328	450,3	2,344	0,009
6	65	338	460	2,343	0,008
7	75	348	470	2,344	0,009
8	85	358	480,2	2,271	0,064
9	95	368	490,2	2,343	0,008
сер.				2,335	

Запишемо кінцевий результат:

$$\alpha = (2{,}34 \pm 0{,}02)\cdot10^{-3}\ \text{K}^{-1}, \text{ при } \delta\alpha=0{,}92\ \%. \qquad (5.10)$$

Зауваження. Надійний інтервал, розрахований за способом 2 (вираз (5.10)), більший від інтервалу, розрахованого за способом 1 (вираз (5.9)). Тому, з метою спрощення розрахунків, його рекомендують для малої кількості вимірювань.

Література

1. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 496 с.
2. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. – М.: Мир, 1985. – 282 с.
3. Зайдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений. – Л.: Наука, 1967. – 88 с.
4. Баврин И. И., Маросов В. Л. Краткий курс теории вероятностей и математическая статистика. – М.: Прометей, 1989. – 136 с.
5. Загальна фізика: Лабораторний практикум: Навч. посібник / Барановський В. М., Бережний П. В., Горбачук І. Т. та ін. За заг. ред. Горбачука І. Т. – К.: Вища школа, 1992. – 509 с.

Зміст